

Minifoguete a propelente sólido: aspectos teóricos e propostas experimentais para o ensino de física

Solid propellant model rocket: theoretical aspects and experimental proposals for teaching physics

André Luíz Alves^{*1}, Anderson Nunes Paneto¹, Kaio Alan Littike¹, Sérgio Souza Bento¹, Carlos Henrique Marchi²

¹Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil

²Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Recebido em 15 de setembro de 2020. Aceito em 22 de setembro de 2020.

Neste trabalho foi construído um minifoguete a propelente sólido como uma proposta de atividade lúdica, no qual os estudantes podem aprender física, matemática e simulação computacional na prática. Foi realizado toda uma abordagem teórica sobre grandezas físicas que surgem na equação de movimento e termodinâmica do minifoguete. A velocidade de exaustão e a constante de arraste puderam ser determinadas com a equação de altura em função do tempo do minifoguete, utilizando um altímetro digital. Estas grandezas foram comparadas com seus respectivos valores teóricos confrontando experiência e teoria. Na parte de construção, foram mostradas todas as etapas, desde a preparação do combustível até o minifoguete pronto para lançamento em uma base. Aqui o estudante tem a oportunidade de entender o funcionamento de um foguete real a propelente sólido, visto que a diferença deste para um minifoguete é apenas a escala.

Palavras-chave: Minifoguete, Teoria, Ensino, Experiência, Simulação computacional.

In this work, a solid propellant model rocket was built as a proposal for a playful activity, in which students can learn physics, mathematics and computer simulation in practice. A whole theoretical approach was carried out on physical quantities that appear in the model rocket and thermodynamic equation. The rate of exhaustion and the variation in mass with time which appear in the impulse formula of the model rocket, could be determined with the equation of altitude as a function of time using a digital altimeter. These quantities were compared with theoretical values comparing experience and theory. In the construction part, all steps were shown, from the preparation of the fuel, to the model rocket ready to launch on a base. Here the student has the opportunity to understand how a real rocket works with solid propellant, since the difference between this and a model rocket is only the scale.

Keywords: Rocket, Theory, Teaching, Experience, Computer simulation.

1. Introdução

Diante da diversidade de assuntos abordados na física, com certeza um deles, trabalhar em grupos com a construção de “foguetes”, instiga muito a curiosidade desde criança [1]. A abordagem do foguete nos remete às façanhas de astronautas que pousaram na Lua e àqueles que estão em órbita na estação espacial internacional em altitudes e velocidades da ordem de 340 km e 27.000 km/h, respectivamente [2]. A ideia do foguete “acende” nas pessoas o espírito de exploração e, por isso, é um campo com grande potencial, capaz de atrair os estudantes para o estudo da ciência física.

Professores, em todos os níveis de ensino, têm utilizado o foguete como uma proposta de atividade

experimental lúdica fora do ambiente rotineiro da sala de aula. Por exemplo, em uma das categorias da mostra brasileira de foguetes há o uso de modelos de foguetes com garrafa PET. Neste caso a massa a ser ejetada (propelente) é a água pressurizada ou uma mistura de substâncias que reagem entre si, elevando a pressão no interior da garrafa. Neste contexto é possível discutir temas pertinentes à estabilidade de voo, relacionar grandezas como velocidade, altura máxima e a aceleração, dados alguns parâmetros iniciais, como a pressão interna do foguete [3]. Por outro lado, foguetes que utilizam líquidos, como os a base de vinagre e bicarbonato de sódio permitem uma discussão envolvendo a reação química de substâncias com a liberação de gases [4]. Enfim, com essas práticas experimentais o professor pode abranger simultaneamente áreas da física, matemática, química e simulações utilizando computador.

* Endereço de correspondência: andre.alves@ufes.br

Um modelo mais realístico de foguete didático, o minifoguete, a nível de competições utiliza propelentes do tipo sólido, resultante da combinação da mistura de pelo menos duas substâncias: uma oxidante e a outra o combustível [5]. Os propelentes quando em combustão exalam gases cujas pressões internas ao motor do foguete podem atingir valores muito maiores que as que utilizam água pressurizada [3, 6]. Com isto, em nível de competições, torna-se possível atingir alturas superiores aos 50 m [7], e bem acima daquelas obtidas com uma garrafa PET [3]. As chamas exaladas e o som intenso, como resultado da combustão do propelente sólido, são fatores adicionais que tornam o lançamento de foguetes um espetáculo aos olhos dos estudantes.

Com o intuito de tornar a aula de física mais atraente e significativa para os estudantes, propõe-se neste trabalho a construção de um minifoguete e seu motor, que utiliza uma mistura de fertilizante a base de nitrato de potássio e o açúcar (sacarose) como o propelente [5]. Este tipo de combustível é conhecido como KNSU, sigla para o termo em inglês: *Potassium (K) Nitrate (N) and Sucrose (SU)*. Com o uso de um altímetro [8] foi possível obter curvas experimentais de altura e velocidade em função do tempo e, posteriormente, comparar com modelos teóricos. Estes, por sua vez, podem ser graficados com o uso de *softwares* como o *Excel* e o *Origin* [9]. Da forma com que o trabalho foi descrito aqui, não há necessidade que o estudante tenha conhecimento específico em alguma linguagem de programação. Ao confrontar teoria e experimento foi possível estimar valores médios de parâmetros relevantes, tais como a taxa de massa de gás ejetada do propelente (dm/dt), a velocidade de exaustão dos gases (v_e), o coeficiente de arraste do ar (b) e o impulso total do minifoguete (I_t). Neste experimento, o estudante põe em prática conceitos como as leis de Newton, momento linear, expansão adiabática de um gás ideal, química do propelente e simulação computacional. O protótipo aqui construído pode ser aplicado em qualquer etapa do ensino, no sentido de construção, lançamento e abordagem qualitativa. Por outro lado, para uma melhor compreensão das equações aqui desenvolvidas, é necessário o conhecimento do cálculo diferencial a nível superior. Com exceção do altímetro, os materiais utilizados não possuem custos elevados, sendo necessário um investimento na faixa de R\$: 250–300.

Por se tratar de materiais combustíveis, é preciso muita cautela durante a fabricação do propelente, em que se recomenda o uso de luvas, óculos de proteção e o acompanhamento do professor. Como sugestão para o ensino fundamental e médio, há a opção de o professor/estudante adquirir um modelo de motor no site: <https://www.boavistamodelismo.com.br>, evitando possíveis acidentes. Por outro lado, instituições com laboratórios adequados e licença de órgãos competentes podem optar por seguir o roteiro de fabricação do propelente e motor descrito neste artigo, o que tornará o aprendizado mais satisfatório. Como exigido pelo exército [10], não se faz aqui o uso de

materiais metálicos, o foguete construído é para fins didático e todo trabalho foi realizado numa instituição de ensino. O nitrato de potássio utilizado não foi o de alta pureza (o que requer licença) e sim um adquirido para fins de adubagem em plantas, da marca Krista-K.

2. Abordagem teórica

2.1. O minifoguete

Um minifoguete, assim como um foguete real, é uma máquina que se desloca expelindo, em sua parte traseira, um fluxo de gás à alta velocidade. De acordo com a terceira lei de Newton, esta ação resulta em uma reação de mesma intensidade, porém sentido oposto, deslocando o foguete para cima. Exceto os materiais usados em sua estrutura, um minifoguete é exatamente igual a um foguete real de grande porte, do tipo sondagem, porém em escala reduzida [11]. Assim, um minifoguete é utilizado no ensino e em competições; os utilizados em sondagem são restritos à troposfera [12]. Não se deve confundir um minifoguete com um “foguete de garrafa PET” pois este não usa propelente de foguetes reais e sim, líquidos que são ejetados em velocidades muito baixas comparadas aqueles que utilizam propelente sólido [11].

Na Figura 1(a) está ilustrado o corte lateral de um minifoguete com seus principais componentes. Na Figura 1(b) está mostrado um protótipo real produzido e lançado pelos autores deste trabalho.

O corpo do foguete é delimitado pela linha vermelha, representando a “carcaça”, e inclui o cone do nariz, a parte traseira que sustenta as aletas (ou empenas) e o motor. Este pode ser feito de material leve, com relativa rigidez mecânica como cano PVC, eletrodutos, papel cartão enrolado, etc. O motor contém o bocal (ou tubeira), o propelente, a câmara de combustão e as cargas de atraso e de ejeção [13]. O bocal é um dispositivo relativamente simples usado para acelerar gases quentes e produzir empuxo (veja a seção 2.5). Geralmente, em minifoguetes didático, é feito de argila ou cerâmica devido à alta temperatura de exaustão de gases. O propelente, na cor marrom, está contido no interior de um cilindro sólido (“carcaça” do motor), por onde é feito um furo em seu centro [14]. Esse furo é feito para que aumente a área de queima do propelente (veja a seção 3.2). Para este tipo de propelente, a direção da queima/consumo do propelente é do tipo radial, do furo para a “carcaça” do motor. Existe, entre o envelope motor e o propelente, uma proteção térmica que pode ser constituída por um fino material emborrachado, ou um papel rígido como cartolina, papel cartão ou papel paraná. Esse material tem como finalidade não permitir que a alta temperatura de combustão do propelente danifique a estrutura do minifoguete [5, 14].

Um dispositivo de ignição elétrico é usado para iniciar a queima do propelente e assim, lançar o minifoguete.

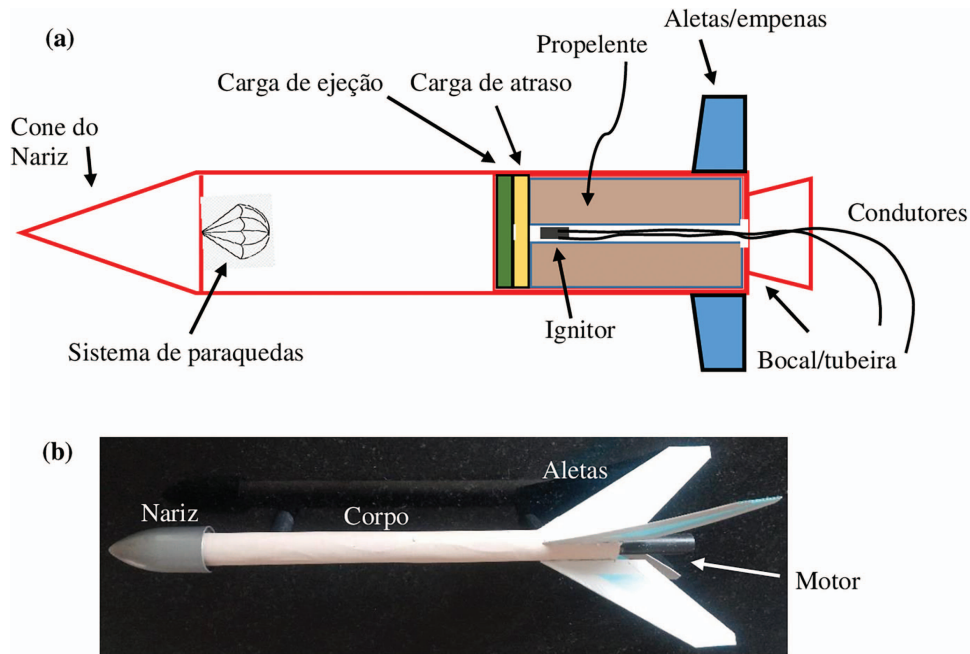


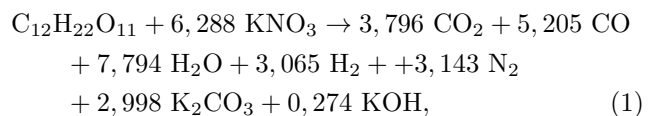
Figura 1: Em (a), as partes de um minifoguete e em (b) um protótipo construído neste trabalho.

À medida que o propelente entra em combustão o minifoguete passa por um voo motorizado. A pequena carga de cor amarela (Figura 1(a)) é projetada para iniciar e terminar a queima instantes após todo o propelente ser consumido e o foguete atingir seu apogeu (altura máxima). Geralmente é utilizado um material de atraso misturado ao propelente, para este fim [13]. A duração do atraso varia, entre os motores de 2 a 8 segundos, sendo possível identificá-los em motores comerciais. Quando a carga de atraso é completamente queimada, a carga de ejeção, ilustrada em verde, na Figura 1(a), começa a queimar. Isso produz uma pequena explosão que expelle gás quente pelo interior do corpo do motor, ejetando o cone do nariz e acionando o paraquedas para uma recuperação segura [13, 14]. Neste trabalho, não foi construído a parte do motor e do minifoguete responsável pela ejeção do paraquedas, pois o movimento de queda do foguete foi utilizado para análise de dados e obtenção experimental do coeficiente de arraste do ar.

2.2. O propelente sólido

Propelente sólido é uma mistura complexa e estável de compostos redutores (combustíveis) e oxidantes que, quando ignitados, queimam de uma maneira homogênea, contínua e controlada, formando a altas temperaturas moléculas gasosas de baixa massa molecular [5, 15]. O propelente utilizado neste trabalho é composto por uma mistura de nitrato de potássio (KNO_3) que serve como oxidante e a sacarose ($\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$), açúcar de mesa, que atua como combustível e aglutinante [16]. O combustível é o reagente que será consumido em contato com o oxigênio, enquanto o oxidante é responsável por liberar

mais oxigênio e intensificar a combustão [5, 16]. A proporção padrão de constituintes para KNSU é de 65% de nitrato de potássio e 35% de sacarose, em massa. Essa relação provou fornecer o melhor desempenho geral durante a combustão. Esse propelente pode ser do tipo fundido ou não fundido durante sua fabricação [15, 16]. A fundição tem como objetivo melhorar a mistura entre os compostos utilizados, o que modifica a densidade do propelente e sua eficiência [16]. A equação de combustão do KNSU é:



Com exceção do carbonato de potássio (K_2CO_3), todos os produtos do lado direito da Equação (1) estão sob a forma de gás [16] e são os responsáveis por aumentar a pressão no interior da câmara de combustão do motor, sendo posteriormente expandidos no bocal [14, 17]. Aqui o professor tem a oportunidade de trabalhar com balanceamento da Equação (1) e a nomenclatura dos compostos gerados após a combustão.

Similarmente ao KNSU, existem outros propelentes sólidos cujo oxidante é o KNO_3 . Três variantes do KNSU são o KNDX, KNSB e KNXY, que utilizam, respectivamente, dextrose ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$), sorbitol ($\text{C}_6\text{H}_{14}\text{O}_6$) e xilitol ($\text{C}_5\text{H}_{12}\text{O}_5$) como combustíveis [17]. A escolha pelo KNSU neste trabalho se deu pela facilidade de se encontrar o nitrato e por saber que este não gera gases tóxicos, quando em combustão. Trata-se de um propelente seguro de ser produzido e trabalhado, não sendo explosivo como a pólvora [16]. Optou-se neste trabalho em não fundir a

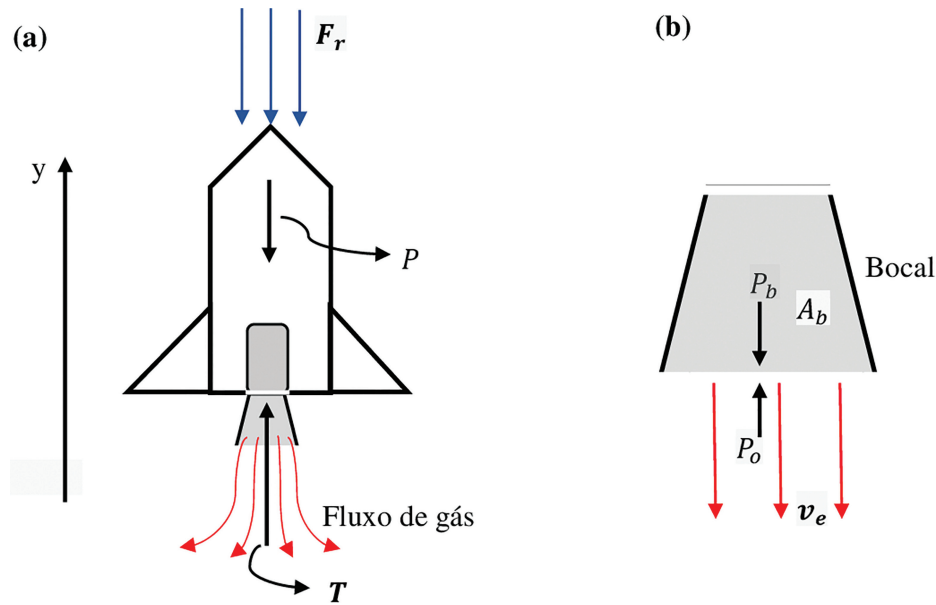


Figura 2: (a) Forças atuantes sobre um minifoguete. No bocal em (b), são representadas variáveis importantes no cálculo do empuxo. O fluxo de gás a alta velocidade está representado por linhas vermelhas.

mistura de nitrato e açúcar, visando simplificar o projeto apresentado ao estudante.

2.3. Forças sobre um minifoguete e a equação de movimento

Considere um foguete se movendo na vertical, próximo à superfície terrestre. Conforme a ilustração na Figura 2(a), existem três forças que atuam sobre ele: o empuxo (T), responsável por impulsionar o foguete na direção vertical (y positivo), a força de arraste do ar (F_r) e o peso do foguete (P), que possuem contribuições negativas. Na Figura 2(b) está representado uma ilustração do corte lateral do bocal, com as variáveis: pressão na área de saída do bocal (P_b), pressão atmosférica (P_o), área no plano do bocal (A_b) e velocidade exaustão do gases (v_e).

2.3.1. Força de empuxo

A força de empuxo (T) é devido à força que os gases, provenientes da combustão, exercem sobre as paredes internas do foguete. Sua magnitude é descrita por:

$$T = -v_e \frac{dm}{dt} + (P_b - P_o)A_b, \quad (2)$$

no qual: dm/dt é a variação de massa do foguete, que está relacionada a taxa de queima do propelente [18, 19]. Visto que há perda de massa durante a exaustão de gases, dm/dt é negativo e, portanto, o primeiro membro da Equação (2) é positivo. Uma análise mais simplista, permite a obtenção deste termo desconsiderando a força peso e, considerando apenas a força de reação da exaustão de gases a altas velocidades [18]. Já o

segundo termo, é exclusivo da diferença entre a pressão no bocal e a pressão atmosférica. É possível obter ambos os membros da Equação (2) a partir do somatório das forças externas causadas pela pressão atmosférica, e o somatório das forças internas, devido o gás estar a alta pressão. Veja uma demonstração elegante em Ulrich, 2012 [18].

É possível definir uma velocidade efetiva, que leva em consideração o segundo termo na Equação (1) [18], entretanto, em foguetes reais, o segundo termo representa uma fração muito pequena para o empuxo total do motor [18, 19]. Por outro lado, para um bocal ideal (aquele que maximiza T) $P_b = P_o$ e assim o segundo termo na Equação (2) é nulo. Por simplicidade, este termo será desprezado neste trabalho. O Empuxo fornecido pelo motor a um foguete pode ser obtido experimentalmente por ensaios estáticos [20]. Conforme ilustrado na Figura 3, nestes ensaios, obtém-se uma curva experimental de força/empuxo em função do tempo, $T(t)$. O gráfico apresentado nesta figura é a de um motor comercial modelo C6-5, utilizado em minifoguetes e, fabricado pela empresa ESTES [21].

Algumas grandezas físicas de importância, relacionadas à performance do minifoguete são definidas aqui. A magnitude do impulso total (I_t) é definido de acordo com a Equação (3), sendo a integral de $T(t)$ em relação ao tempo de funcionamento do motor, ou seja, o tempo de queima (t_q) do propelente:

$$I_t = \int_0^{t_q} T(t) dt. \quad (3)$$

Com esta grandeza é possível obter a mudança do vetor quantidade de movimento produzido pela exaustão dos gases sobre o minifoguete. Outra medida utilizada é

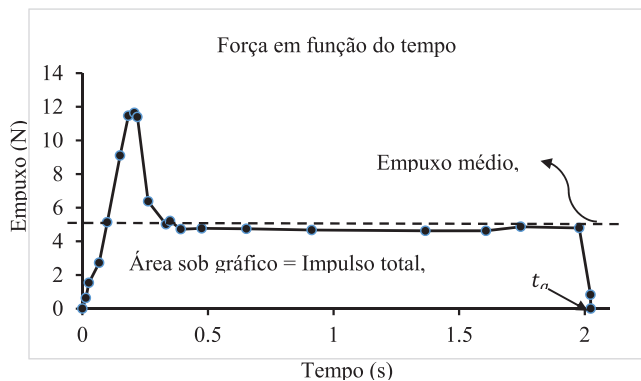


Figura 3: Gráfico de força/empuxo em função do tempo para um minifoguete comercial modelo C6-5 da empresa ESTES. A linha tracejada representa a força média do motor.

o impulso específico (I_{sp}), obtido pela divisão do impulso total pelo peso do propelente ($m_p g$) de acordo com a equação:

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g}, \tag{4}$$

onde g é a aceleração da gravidade local. Com esta grandeza mede-se a eficiência do propelente, já que, quanto maior for o impulso específico, maior será a variação da quantidade de movimento, por unidade de peso do propelente. Como será descrito na seção 2.5, para um motor ideal e, no regime estacionário, o empuxo, $T(t)$, é aproximadamente constante em maior parte do seu funcionamento e assim, v_e e dm/dt também se tornam constantes [22]. Em uma aproximação bastante razoável, é possível obter a velocidade de exaustão dos gases de acordo com a equação:

$$v_e = \frac{I_t}{m_p} = I_{sp} g. \tag{5}$$

De posse de um cronômetro mede-se t_q , sendo possível estimar dm/dt , como m_p/t_q .

2.3.2. Força peso

A força peso (P) depende da massa (m) dos componentes do foguete, incluindo o próprio propelente, sendo, portanto, variante no tempo. Uma aproximação que leva a resultados muito satisfatórios, considera um valor médio para m e constante durante a queima do combustível [23]. Esta aproximação é válida se o tempo de queima é pequeno quando comparado ao tempo para atingir o apogeu. Assim, a magnitude do peso é dada pela equação:

$$P = mg, \tag{6}$$

no qual g é a magnitude da aceleração da gravidade local. Esta grandeza possui sentido e direção apontados para o centro da Terra e seu ponto de atuação é o centro

de gravidade do foguete. Neste trabalho, foi utilizada a equação de Moritz, 2000 [24] e dados da latitude local para a obtenção de $g = 9,79 \text{ m/s}^2$. Foi desconsiderado, por simplicidade, qualquer variação de g com a altitude.

2.3.3. Força de arraste do ar

Um objeto macroscópico que se move a uma determinada velocidade sofre colisões com pequenas partículas da atmosfera e conseqüentemente, seu movimento é modificado por uma força de arraste (F_r), decorrente da transferência de momento entre as partículas e o objeto. A força de arraste depende da velocidade (v) do objeto em relação ao fluido, e existem dois regimes diferentes no qual essa dependência pode ser do tipo linear ou quadrática em v [23, 24]. O parâmetro que diferencia esses dois regimes é o número de Reynolds (n_{Re}), definido pela Equação (7):

$$n_{Re} = \frac{\rho l v}{\mu}, \tag{7}$$

em que: ρ é a massa específica do fluido, l é o comprimento característico do objeto, μ é a viscosidade dinâmica do fluido [25]. Para valores elevados de n_{Re} ($n_{Re} > 10^3$), a força de arrasto depende de v^2 . Por exemplo, à temperatura de 30 °C e à pressão de 1 atm, o ar possui $\rho \approx 1,26 \text{ kg/m}^3$ e $\mu \approx 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$. Para $v \approx 50 \text{ m/s}$, característica de um minifoguete, pode-se estimar $n_{Re} \approx 10^5$, o que demonstra a escolha apropriada do modelo de arrasto quadrático para o voo do minifoguete, durante a subida. Entretanto, instantes antes e após ele atingir o apogeu, sua velocidade é $\approx 0 \text{ m/s}$ e F_r não necessariamente é quadrática. Para forças quadráticas, a magnitude de F_r é descrito pela equação:

$$F_r = -bv^2, \tag{8}$$

em que:

$$b = \frac{\rho C_D A}{2}, \tag{9}$$

onde ρ é a massa específica do ar, A é a área da seção transversal do foguete, normal à direção do movimento e C_D é o coeficiente de arraste que pode ser estimado em $\approx 0,75$ [25].

2.3.4. Equação do foguete

Considere um foguete, que constitui um sistema S (delimitado pela linha tracejada), e a massa ejetada do propelente, dm , denominado de sistema S'. No instante $t = 0 \text{ s}$, a velocidade do foguete é v . (Figura 4(a)). No instante de tempo $t + dt$, em decorrência da massa expelida, o foguete possui massa $m + dm$, e velocidade $v + dv$, em relação a um referencial inercial fixo na Terra [26]. Neste mesmo referencial, a velocidade da massa ejetada é $v - v_e$ (Figura 4(b)).

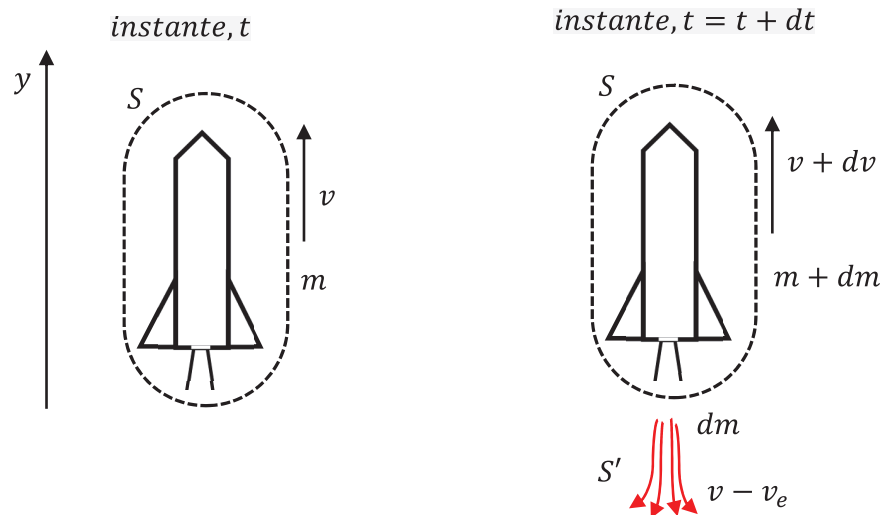


Figura 4: (a) Foguete a uma velocidade v em um instante de tempo t . (b) Ao ejetar uma quantidade de massa propelente dm , sua velocidade no instante $t + dt$ será $v + dv$.

A segunda lei de Newton, escrita na forma da Equação (10), possibilitará obter uma expressão para a equação do foguete:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (10)$$

Nesta Equação $d\mathbf{P}/dt$ é taxa de variação do momento linear do sistema S , entre os instantes de tempo t e $t + dt$, devido ao somatório das forças externas, $\sum \mathbf{F}_{ext}$. Estas forças foram apresentadas na Figura 2. A aplicação da Equação (10) fornece:

$$\sum F_{ext} = \frac{(m + dm)(v + dv) - (mv)}{dt}. \quad (11)$$

Desenvolvendo essa equação e desprezando o produto $dm \cdot dv$, obtém-se:

$$m \frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt} - mg - bv^2. \quad (12)$$

O membro esquerdo da Equação (12) representa a massa remanescente ($m = m(t)$) do sistema S , vezes a aceleração do mesmo [26]. Esse termo é interpretado como o somatório das forças que atuam no sistema do foguete. Já o primeiro termo no membro direito desta equação é o empuxo, desconsiderando o termo $(P_b - P_o)A_b$ da Equação (1).

2.4. Solução para a equação do foguete

A Equação (12) é uma equação diferencial não linear em v de primeira ordem e sua solução não é trivial. Na próxima seção será apresentada uma solução analítica. Para esta solução, considera-se o movimento como um todo, dividido em três etapas: (i) o movimento de subida com o motor em funcionamento, até que todo gás seja exaurido no tempo de queima, t_q ; (ii) movimento de

subida sob a ação da gravidade e resistência do ar, até atingir o apogeu no tempo t_a ; (iii) movimento de queda. Uma solução analítica completa para $v(t)$, obtida por Rodrigues (2009) [27], é válida apenas nos instantes em que o motor esteja em funcionamento, limitado a t_q . Neste caso, a solução é descrita em termos de funções de Bessel de primeira e segunda ordens, sendo, portanto, um tanto complexas. A vantagem de se trabalhar com a solução aproximada é que esta envolve integrações “simples” e que as funções obtidas para $v(t)$ e $y(t)$ se ajustam satisfatoriamente aos dados experimentais.

Uma proposta de solução analítica é descrita considerando a massa, $m(t) = m$, constante [23, 25], dada pela média:

$$m = \frac{m_o + m_f}{2}, \quad (13)$$

na qual m_o e m_f são as respectivas massa inicial e final do minifoguete. Veja a discussão anterior na seção 2.3.2. Considerar m constante de fato se aplica razoavelmente aqui, pois neste trabalho a massa de propelente representa $\approx 16\%$ da massa total do minifoguete construído. A equação (12) pode ser escrita na forma:

$$\frac{m}{\beta - bv^2} dv = dt, \quad (14)$$

no qual: $\beta = -v_e \frac{dm}{dt} - mg$. Assim, na primeira etapa de voo, deve-se integrar a Equação (14) como:

$$\int_0^v \frac{m}{\beta - bv^2} dv = \int_0^t dt. \quad (15)$$

Esta integral, assim como todas as outras nesta seção, podem ser obtidas com o uso de uma tábua de integração. Integrando ambos os membros da Equação (15) para a obtenção da velocidade, obtém-se:

$$v_1(t) = \sqrt{\frac{\beta}{b}} \operatorname{tgh} \left[\left(\frac{\sqrt{b\beta}}{m} \right) t \right] \quad 0 \leq t \leq t_q. \quad (16)$$

A posição vertical, $y_1(t)$, considerando $y_1(t = 0) = 0$, é obtida por integração da Equação (16):

$$y_1(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \sqrt{\frac{\beta}{b}} tg h \left[\left(\frac{\sqrt{b\beta}}{m} \right) t \right] dt, \quad (17)$$

cujas solução é:

$$y_1(t) = \frac{m}{b} \ln \left[\cosh \left(\frac{\sqrt{b\beta}}{m} t \right) \right] \quad 0 \leq t \leq t_q. \quad (18)$$

Para a segunda etapa de voo, o empuxo é nulo. Logo, a Equação (14) torna-se:

$$\frac{m}{-mg - bv^2} dv = dt. \quad (19)$$

Integrando ambos os membros desde t_q até um tempo menor ou igual aquele necessário para atingir o apogeu (t_a):

$$\int_{t_q}^t dt = \int_{v_q}^v \frac{m}{-mg - bv^2} dv, \quad (20)$$

obtém-se, após a integração e um pouco de álgebra:

$$v_2(t) = \sqrt{\frac{mg}{b}} tg \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} (t_q - t) + tg^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} v_q \right) \right] \quad t_q \leq t \leq t_a. \quad (21)$$

Observe que $v_2(t_q) = v_q$, como esperado. O tempo t_a pode ser obtido da Equação (21), na condição $v(t_a) = 0$, no apogeu. Realizando a substituição, encontra-se:

$$t_a = t_q + \sqrt{\frac{m}{bg}} tg^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} v_q \right). \quad (22)$$

Substituindo a Equação (22) em (21), obtém-se:

$$v_2(t) = \sqrt{\frac{mg}{b}} tg \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} (t_a - t) \right] \quad t \geq t_q, \quad (23)$$

que é uma equação mais simplificada para a obtenção de $v_2(t)$. No apogeu, $t = t_a$, então a velocidade é nula como requerido na Equação (23).

A posição (altura) final do foguete é obtida por integração da Equação (23), com os limites de integração em $y_{inicial} = y_1(t_q)$ e $y_{final} = y_2(t)$. Desta forma:

$$\begin{aligned} y_2(t) - y_1(t_q) &= \int_{t_q}^t v_2(t) dt \\ &= \int_{t_q}^t \sqrt{\frac{mg}{b}} tg \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} (t_a - t) \right] dt, \end{aligned} \quad (24)$$

cujas integração resulta em:

$$y_2(t) = y_1(t_q) + \frac{m}{b} \ln \left\{ \frac{\cos \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} (t_a - t) \right]}{\cos \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} (t_a - t_q) \right]} \right\} \quad t \geq t_q. \quad (25)$$

A altura máxima é obtida para $t = t_a$. Neste caso, a Equação (25) reduz a:

$$y_2(t) = y_1(t_q) - \frac{m}{b} \ln \left\{ \cos \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} (t_a - t_q) \right] \right\} \quad t = t_a, \quad (26)$$

estando de acordo com Abate *et al*, 2014 [23].

2.5. Conceitos sobre a termodinâmica de um foguete

A velocidade de exaustão (v_e) e a taxa de variação de massa dm/dt podem ser obtidas de cálculos “simples”, considerando um modelo de gás ideal no regime estacionário. Essas grandezas teóricas e ideais, são descritas como funções de parâmetros termodinâmicos, que para o propelente KNSU já foram determinados experimentalmente e que estão disponíveis na literatura [28]. Por outro lado, eles podem ser estimados independentemente e experimentalmente da trajetória real de voo, pelo ajuste de curvas teóricas (Equações (16), (18) e (25)) e, então ser comparados, confrontando teoria e experimento.

Na Figura 5 estão ilustradas as partes de um motor de foguete a propelente sólido com variáveis de relevância, convencionalmente utilizados em livros [18, 29]. Este motor é constituído por três partes: câmara de combustão, uma região afinada denominada de garganta e o bocal. A geometria deste motor, denominada de convergente divergente, é a que fornece maior performance ao motor [29]. Na câmara de combustão, o propelente é queimado e geram gases que idealmente apresentam velocidade inicial $v_o \approx 0$, e que ao se acumularem elevam a pressão interna local P_c . Ao passarem pela garganta, de área A_t , a pressão do gás p_t , diminui e iminui para apresentam velocidade ente otorocal. Esta geometria a velocidade dos gases é elevada, saindo finalmente pelo bocal com velocidade v_e . No bocal, a pressão dos gases P_b , pode continuar diminuído e a velocidade de saída dos gases, podem atingir valores super sônicos [29, 30]. Na Figura 5 as setas maiores representam P_c e as menores, a pressão atmosférica P_o .

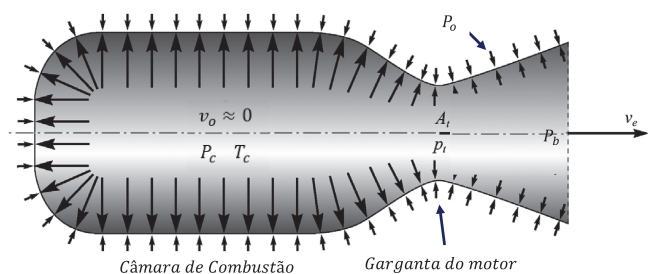


Figura 5: Ilustração de um motor de foguete do tipo convergente divergente com variáveis de relevância, definidas no texto. Figura adaptada das referências 18 e 29.

2.5.1. Velocidade de exaustão (ideal)

A velocidade de exaustão pode ser calculada considerando que a energia cinética (E_c) dos gases exalados é igual à mudança em sua energia interna (ΔE_{int}), à medida que ele esfria e se expande através do bocal. Supõe-se que isso ocorra sob condições isentrópicas – que nenhum calor escapa do gás para as paredes do bocal e que o gás é perfeito [29]. Desta forma, ΔE_{int} é dada pela Equação:

$$\Delta E_{int} = c_p m_g (T_c - T_b), \quad (27)$$

no qual c_p é o calor específico do gás à pressão constante, T_c e T_b são respectivamente, a temperatura do gás na câmara de combustão e no plano de saída do bocal e, m_g é a massa do gás. Assim, o ganho em energia cinética do gás na saída do bocal, devido à perda de energia interna é:

$$\Delta E_c = \frac{m_g v_e^2}{2}, \quad (28)$$

e assim:

$$\Delta E_c = \Delta E_{int}. \quad (29)$$

Com isto, obtém-se a equação:

$$v_e^2 = 2c_p(T_c - T_b). \quad (30)$$

Como a equação de empuxo (Equação (1)) contém a pressão de exaustão no bocal, P_b , torna-se usual expressar as condições de exaustão em termos de pressão. Isso pode ser determinado utilizando as equações conhecidas para expansão adiabática ou isentrópica na câmara de combustão e no plano de saída do bocal [29]. Assim:

$$T_c P_c^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = T_b P_b^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (31)$$

A constante γ é a razão entre os calores específicos dos gases de exaustão a pressão e volume constante. Esta grandeza está relacionado com c_p , com a massa molecular efetiva (M) dos gases de exaustão e a constante universal dos gases perfeitos ($R = 8,314 \text{ J/K.mol}$), de acordo com:

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}. \quad (32)$$

Isolando T_b na equação (31) e substituindo concomitantemente com c_p (Equação 32) na Equação (30), obtém-se para v_e :

$$v_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT_c}{M} \left[1 - \left(\frac{P_b}{P_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}, \quad (33)$$

no qual P_b é a pressão na saída do bocal. Para um bocal longo e idealizado, onde o motor tem o maior impulso, $P_b = P_o = 1 \text{ atm}$ [20, 29].

2.5.2. Taxa de variação da massa

A taxa de variação mássica do foguete (dm/dt) é determinado pelas condições na câmara de combustão e no bocal. Uma vez obtida uma equação para v_e , a diferença de pressão entre a câmara de combustão e o plano de saída do bocal ($P_c - P_b$), juntamente com a área da seção transversal do bocal (A_b), determinará o valor de dm/dt . A vazão mássica é constante em todo o bocal, sob condições de fluxo constante no estado estacionário (veja a próxima seção). A velocidade, por outro lado, aumentará, atingindo seu máximo no plano de saída do bocal. Deixamos para o estudante verificar a dedução da Equação (34) na referência [29]. Assim, a taxa de variação mássica é dada pela equação:

$$\frac{dm}{dt} = P_c A_t \sqrt{\left[\frac{M}{RT_c} \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]}, \quad (34)$$

no qual A_t é a área de seção reta da garganta, que para o motor aqui construído, coincide com A_b .

2.5.3. A Pressão na câmara de combustão

A pressão na câmara de combustão aparece como variável nas Equações (33) e (34), e assim se torna determinante na obtenção do empuxo do motor: $T = v_e \cdot dm/dt$. Observando um gráfico hipotético de pressão da câmara de combustão durante a operação de um motor de foguete (Figura 6), é possível perceber que existem três estágios distintos e importantes da operação: transitórios (I – Ignição e III – desligamento) e de estado estacionário (II) [22].

As fases transitórias são quando a pressão varia substancialmente com o tempo durante a fase de ignição e partida (I), e após o consumo completo (ou quase completo) de propelente, quando a pressão cai para o nível ambiente (III). A variação da pressão da câmara durante a fase de queima em estado estacionário é devida principalmente à variação da geometria do propelente (área de

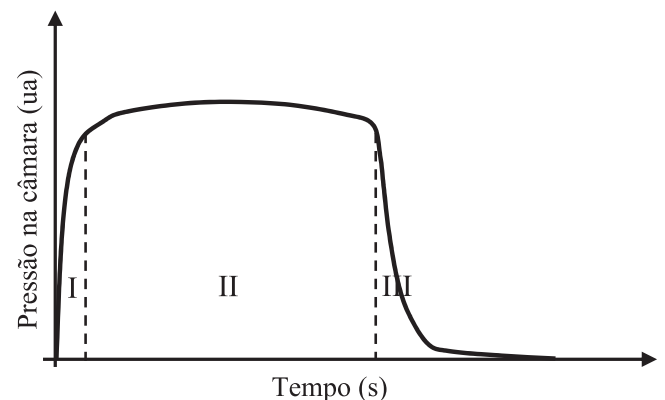


Figura 6: Gráfico da pressão na câmara de combustão em função do tempo, representando os estágios de ignição I, estacionário II e desligamento do motor de foguete, estágio III.

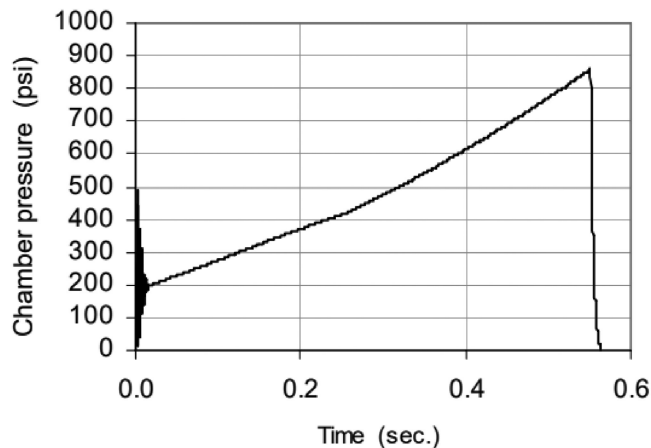


Figura 7: Valores experimentais de pressão na câmara em função do tempo de queima para um motor modelo E45 e propelente KNSU.

Tabela 1: Parâmetros físicos para um motor com 100g do propelente KNSU.

Parâmetros do Propelente KNSU (65% KNO ₃ / 35% sacarose)		
Parâmetros		Valores
T_c	Temperatura na câmara de combustão	1720 K
γ	Razão entre calores específicos, teórico	1,133
M	Peso molecular efetivo dos gases de exaustão	41.98 kg/kmol

superfície da queima) com a variação da taxa de queima associada. A fase de ignição é hipoteticamente muito breve, quando comparada com a fase de estado estacionário. Esta fase domina a performance do motor e, como tal, constitui a condição de projeto [22].

Na Figura 7 está representada uma curva experimental, obtida por S. Jason, 2005 [31], da pressão na câmara de combustão em função do tempo, para um motor foguete modelo E45, com o mesmo tipo de propelente, mesmas dimensões e forma utilizadas neste trabalho. As fases transitórias de ignição e desligamento do motor são curtas, quando comparadas com o tempo total de funcionamento do motor. Diferentemente do modelo teórico, os valores de P_c aumentam quase que linearmente com o tempo. No trabalho aqui descrito, será obtido uma pressão média na câmara de combustão e será admitido, como aproximação, que este valor foi constante durante todo o funcionamento do motor.

2.5.4. Parâmetros teóricos do propelente KNSU

A determinação dos parâmetros para o cálculo teórico do empuxo do foguete, envolvem grandezas estimadas teoricamente e outras determinadas experimentalmente. Felizmente, muito já se conhece destas grandezas, graças a um vasto trabalho do pesquisador Richard Nakka [16, 22, 28]. Nakka é um dos mais conhecidos modelistas de foguetes experimentais.

Os parâmetros experimentais obtidos por Nakka estão apresentados na Tabela 1 [28]. Estes parâmetros foram

Tabela 2: Valores máximo e mínimo de v_e e dm/dt utilizando os valores máximo e mínimo de P_c do gráfico da Figura 7.

Cálculos teórico-experimentais (Ideais)		
$P_c^{experimental} (atm)$	$P_c^{max} = 59,40$	$P_c^{min} = 13,61$
$v_e (m/s)$	$v_e^{max} = 1486$	$v_e^{min} = 1277$
$dm/dt (kg/s)$	$R^{max} = 0,16$	$R^{min} = 0,04$

determinados para um motor com 100 g de propelente KNSU e os mesmos passaram pelo processo de derretimento/caramelização, um processo que aumenta sua densidade e eficiência. Neste trabalho, estes parâmetros foram utilizados nos cálculos de v_e e dm/dt .

2.5.5. Estimativa teórico/experimental de P_c , v_e e dm/dt

Os valores máximo e mínimo dos parâmetros teórico/experimentais estão apresentados na Tabela 2. Aqui foi utilizado o termo teórico/experimental pois os valores de P_c são experimentais, enquanto v_e e dm/dt são calculados utilizando as Equações (33) e (34). Os valores máximo (P_c^{max}) e mínimo (P_c^{min}) da pressão na câmara de combustão, foram transformados para *atm*. Na Equação (33) foi utilizado o modelo do bocal ideal no qual $P_b = 1 atm$ [28, 29].

Para um motor com 100 g de combustível e com o formato típico ao da Figura 5, Nakka obteve valores de P_c e v_e iguais a 68 *atm* e 1627 m/s respectivamente [28]. A faixa de valores obtidos aqui e apresentados na Tabela 2, para essas grandezas, estão abaixo dos valores ideais obtidos por Nakka, podendo estar associado a pequena quantidade de combustível utilizada no motor E45 (33 g) comparativamente ao de Nakka (100 g) e a forma cilíndrica do motor que não contém o bocal (veja a seção 4.2). Este bocal contribui com um aumento significativo de v_e , P_c e dm/dt [29, 30].

3. Materiais utilizados e propostas experimentais

3.1. Procedimentos para a obtenção do propelente KNSU

Neste trabalho não foi realizado o procedimento de purificação do fertilizante Krista-K tipo 12-00-45, utilizado no propelente, sendo necessário a obtenção de uma licença do exército. Se sua instituição de ensino possui esta licença, você pode prosseguir conforme procedimentos descritos por Átila, 2018 [17]. Tanto a fabricação do propelente, quanto a fabricação do motor (seção 3.2), devem ser feitas com cuidado para evitar acidentes. Sugere-se que os leitores que estiverem interessados em reproduzir este experimento, entrem em contato conosco para melhores detalhes destas etapas.

Inicialmente o nitrato deve ser batido, separadamente do açúcar, em liquidificador por cerca de 2 a 3 min, garantindo que o pó esteja bem fino. Em seguida, deve ser armazenado em um recipiente. O

mesmo deve ser feito com o açúcar. Deve-se utilizar o açúcar cristal comum. Os demais tipos, refinado e de confeitiro, possuem produtos indesejados que podem diminuir a eficácia da combustão. O nitrato e o açúcar não podem ser batidos juntos, para evitar uma combustão indesejada.

Em uma balança digital, pesa-se separadamente os produtos na proporção 65% de nitrato de potássio para 35% de açúcar. Despeja-se ambos em um recipiente, onde serão misturados manualmente, por cerca de 3 ou mais minutos [16]. O propelente está pronto para ser utilizado. Neste trabalho, não foi utilizado o processo de derretimento do propelente, pois foi buscado simplificações para que o estudante possa reproduzi-lo.

3.2. Fabricação do motor

O motor confeccionado neste trabalho tem as mesmas características ao do modelo de PVC E45 [31]. O estudante também pode assistir ao vídeo no youtube: *How To Make Sugar Rockets* para conferir a montagem. Foi utilizado como a “carcaça”, para armazenagem do propelente, um pedaço de eletroduto de 3/4” (≈ 20 mm de diâmetro interno) e 10,8 cm de comprimento (Figura 8(a)). Este pode ser adquirido em lojas de materiais de construção e materiais elétricos. Uma de suas extremidades deve ter rosca externa, para a conexão com a parte traseira do foguete. Para a tampa frontal e construção do bocal, foi utilizado argila para gato, como a apresentada na Figura 8(b), adquirida em lojas *petshop*. A argila deve ser triturada em pó bem fino em um liquidificador. Um pedaço de cabo de vassoura com diâmetro interno ≈ 20 mm, cortado em um comprimento de 25 cm, foi utilizado para “socar”, comprimir a argila triturada no interior do motor. Uma broca de 7/32” (5,6 mm) foi utilizada para realizar um furo manual no propelente. Não utilize máquinas como a furadeira, pois alta rotação pode inicial a combustão. A quantidade de propelente utilizada foi de (33 ± 1) g.

Na ilustração apresentada na Figura 9, estão as dimensões do motor, e suas partes. As cores cinzas representam a argila, que foram utilizadas como a tampa e o bocal do motor. Em amarelo está representado o volume de propelente, tendo sua parte central um furo com 5,6 mm de diâmetro e 89 mm de comprimento.

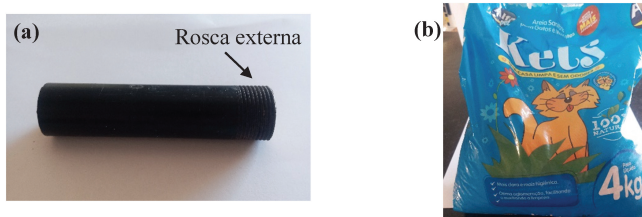


Figura 8: Pedaço de eletroduto e argila para gatos utilizados na fabricação do motor.

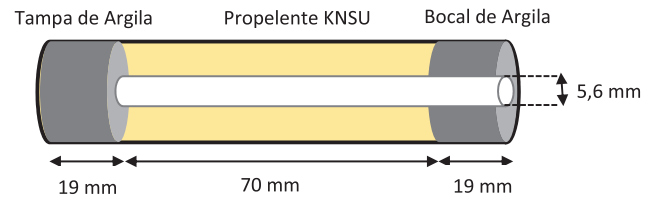


Figura 9: Ilustração das partes e dimensões do motor do minifoguete fabricado neste trabalho.

3.3. Construção do minifoguete

Para a construção foi utilizado o modelo *TKOR 2000* originalmente disponível no site *sonicdad.com* [32], no qual foram realizadas diversas modificações e adaptações, viabilizando e facilitando a construção pelo estudante. Para a construção do minifoguete, foi necessário:

- I – Uma taça plástica, comumente utilizada em festas. Veja as dimensões especificadas na Figura 10(a);
- II – Uma tampa plástica de amaciante para roupas, com largura maior especificada na Figura 10(b);
- III – Um papel cartão;
- IV – Três conexões 3/4” para eletroduto conforme mostrado na Figura 10(c).
- V – Pedaço de cabo de vassoura cortado com 40 mm de comprimento;
- VI – Pasta escolar;
- VII – Colas do tipo branca e de alta aderência: *tec-bond*, cola epóxi 10 min., e cola quente;
- VIII – Fita isolante, ou fita crepe larga ou papel contact;
- IX – Ferramentas de corte: serra manual e estilete;
- X – Uma régua de pelo menos 60 mm;
- XI – Lixa para madeira com numeração 100.

Nesta montagem, a taça servirá para formar o nariz do minifoguete, a tampa de amaciante funcionará como uma peça que acopla o bico com o corpo do minifoguete e a conexão de 3/4” servirá como suporte de acoplamento do motor ao minifoguete. A pasta escolar será útil na conexão das aletas ao corpo do motor.

Inicialmente, lixe os ressaltos (se houver) nas três conexões de 3/4” até que estes desapareçam, ficando a superfície externa lisa (Figura 11(a)). Utilize duas conexões e acople-as ao cabo de vassoura cortado (Figura 11(b)). O conjunto formado será utilizado como um aparato para a confecção do corpo do motor, conforme se descreve: (i) meça ao longo do maior comprimento do papel cartão, cerca de 50,8 a 60,0 cm e faça um corte bem reto com o auxílio do estilete e da régua (Figura 11(c)). Passe um pouco (sem exagerar) de cola branca ao longo da parte colorida do papel cartão e, com o auxílio do aparato construído, enrole o papel, até formar um tubo (Figura 11(d)). Espere secar por

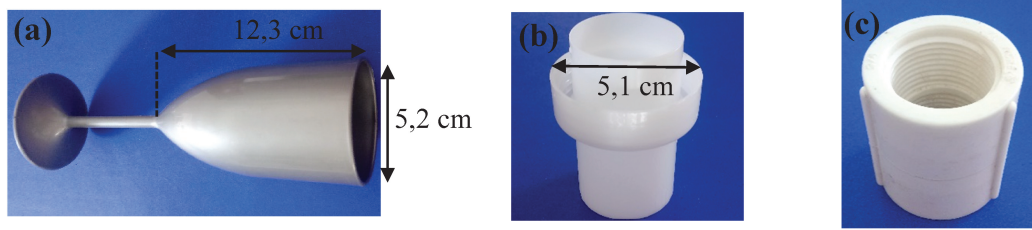


Figura 10: Materiais utilizados na Fabricação do minifoguete: (a) uma taça para festas, (b) uma tampa de amaciante de roupas e (c) um conector para eletroduto de 3/4”.

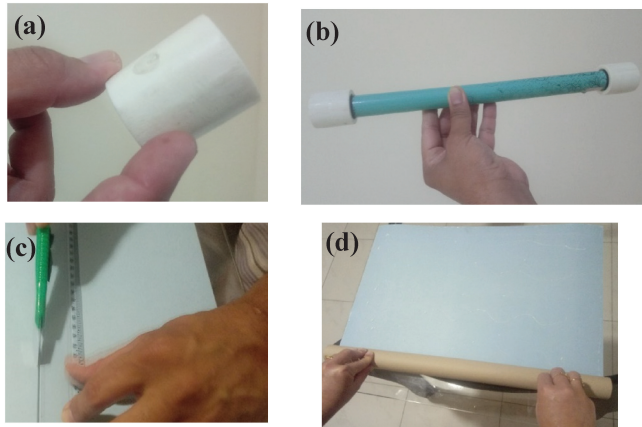


Figura 11: Procedimentos para a construção do corpo do minifoguete.

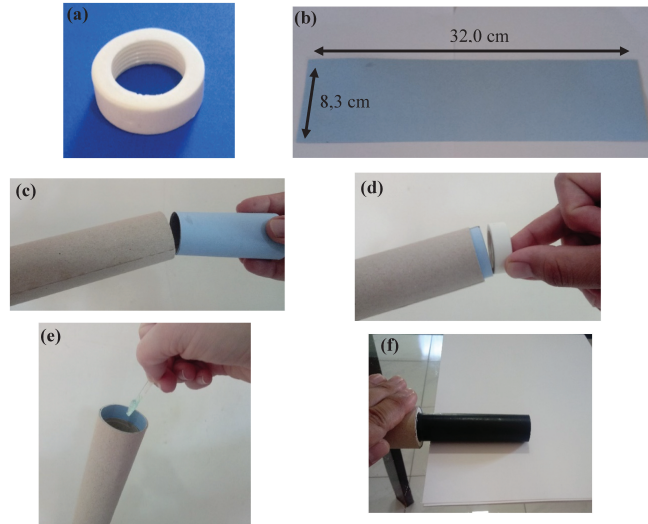


Figura 13: Procedimentos para a montagem trazeira do corpo do minifoguete.

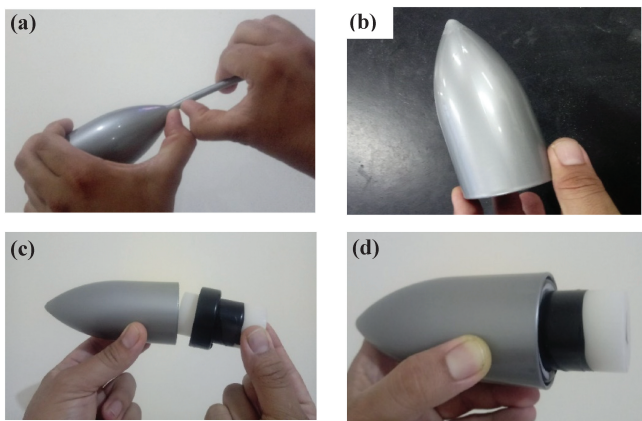


Figura 12: (a)–(b) Procedimentos para a construção do nariz. (c)–(d) Como colocar o suporte que acopla o nariz ao corpo do minifoguete.

alguns minutos e certifique-se de que as bordas formem um plano e que este esteja a um ângulo de 90° com o tubo confeccionado.

Para a construção do nariz do motor, quebre o suporte da taça na região indicada na Figura 12(a). Lixe a ponta, para que você obtenha a forma indicada na Figura 12(b). Dê pelo menos 3 voltas de fita isolante na tampa de amaciante de roupas e encaixe no bico do minifoguete,

conforme indicado na Figura 12(c). Certifique-se de que o bico não deslize sobre a tampa. Após a conexão, a borda da tampa e do bico, devem estar alinhadas, como mostrado na Figura 12(d).

Para a construção da parte trazeira do minifoguete, onde será rosqueado o motor, corte inicialmente 12 mm do eletroduto (Figura 13(a)). Corte uma folha de papel cartão com as dimensões especificadas na Figura 13(b). Passe cola branca (mas não em excesso) e enrole o papel, de tal forma a fazer um corpo cilíndrico que se encaixe justamente dentro do corpo do minifoguete (Figura 13(c)). Passe cola na parte externa do corpo cilíndrico de papel, introduzindo-o a uma profundidade de 12 mm com relação a borda do corpo do minifoguete. Como representado na Figura 13(d), utilize o eletroduto de 12 mm para este fim. Isto será útil para deixar a parte trazeira do minifoguete pouco flexível, onde serão coladas as aletas. Passe cola epóxi na parte interna do corpo do minifoguete (Figura 13(e)) e, com o motor já rosqueado no eletroduto de 12 mm, introduza a parte que contém o eletroduto onde a cola epóxi foi passada. Para deixar a superfície lateral do corpo do minifoguete colinear com o corpo do motor pegue algumas folhas de papel chamex de formal tal que quando empilhados

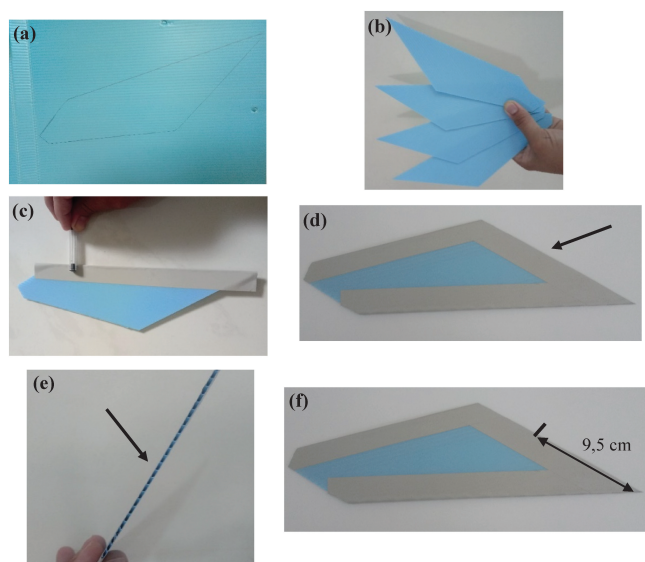


Figura 14: Procedimentos para a fabricação das aletas.

forme um “bloco”. A altura deste bloco de papéis deve ter a mesma altura entre estas superfícies laterais do minifoguete e do motor. Faça movimentos para frente e para trás para que haja um alinhamento e aguarde 10 min até que a cola seque (Figura 13(f)).

Na construção das aletas utilize a pasta escolar e o desenho da aleta, em tamanho real, deixado no Apêndice I. Imprima a figura, faça um desenho sobre a pasta e, com o auxílio de um estilete e uma régua, construa um molde (Figura 14(a)). Utilize este molde e faça 4 aletas, como as indicadas na Figura 14(b). Durante o voo do minifoguete, a elevada aceleração é capaz de rasgar as aletas. Isto pode ser contornado, reforçando as extremidades com fita adesiva tipo: isolante, papel contact ou fita crepe. Na Figura 14(c) a aresta de maior comprimento da aleta, que entrará de “frente com o ar” durante o voo, deve ser “afinalada” para redução do arraste. Faça isto, com o uso de uma caneta, conforme indicado nesta figura. Reforce as outras extremidades. Utilize uma tesoura e corte cuidadosamente a aresta que ficará colada no corpo do minifoguete. Esta aresta está indicada por meio de uma seta na Figura 14(d). Veja como fica o resultado na Figura 14(e). Isto dará mais aderência à aleta ao corpo do minifoguete, quando colado. Apenas a parte demarcada pela seta na Figura 14(f) será colada ao corpo do minifoguete.

Existem algumas maneiras de as aletas ficarem coladas no corpo do minifoguete, com defasagem de 90° uma das outras. Descreve-se aqui, uma sugestão bem simplista: faça um corte retangular com um papel de tal forma que ao envolvê-lo sobre o corpo do minifoguete, tenha exatamente o mesmo diâmetro (Figura 15(a)); meça o comprimento, com o auxílio de uma régua e divida o resultado por 4 para fazer linhas igualmente espaçadas. Conforme a Figura 15(b), retorne com o papel demarcado para o corpo do minifoguete e trace as linhas, por onde deverão

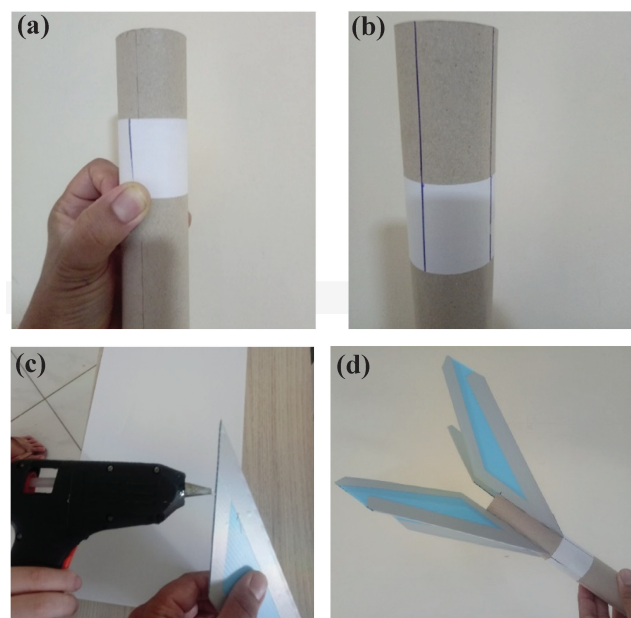


Figura 15: Procedimentos para a colagem das aletas ao corpo do minifoguete.

ser coladas as aletas. Use cola quente Figura 15(c) e cole exatamente sobre as linhas (Figura 15(d)).

Para o suporte e proteção do altímetro, corte um pedaço circular de papel cartão e introduza a uma profundidade de cerca de 80 mm da parte frontal do corpo do minifoguete, onde será colocado o nariz. Derrame um pouco de cola *tec-bond* nas extremidades, esperando secar (Figura 16(a)). Coloque o altímetro, corte dois pedaços de espuma de colchão, com cerca de 4g cada, e introduza uma parte no nariz e a outra parte onde o altímetro se encontra (Figura 16(b)). Isto deve ser feito de tal forma a não o cobrir totalmente. Ele deve estar imerso no ar. As espumas servirão como proteção ao altímetro durante a queda e também para a distribuição de massa para a estabilidade de voo do minifoguete. Introduza a tampa de amaciante, conforme a Figura 16(c), passando um pouco de cola ao seu redor. Introduza o nariz sobre a tampa de amaciante, conforme a Figura 16(d). Faça 6 furos com uma broca entre 1,5 e 2,0 mm, na região onde o altímetro se encontra, para entrada de ar e medição de variação de pressão. Com a cola quente, grude dois pedaços de canudinhos (Figura 16(e)), que é por onde irá passar uma haste rígida que manterá o minifoguete na vertical antes do voo. Seu minifoguete estará pronto! A base de lançamento nada mais é do que um fio de cobre rígido (que forma a haste) por onde irão passar os canudinhos encaixado em um bloco de madeira (Figura 16(f)).

Na Figura 17 estão mostradas 6 fotos do voo de um minifoguete: em instantes antes da decolagem (a)–(b), passando pelo voo até altitudes próxima ao apogeu (c)–(e) e finalmente em instantes antes da queda (f). Os apogeu para os voos testes foram registrados em torno de 68–74 m, com tempos de voos totais \approx 7–9 s.

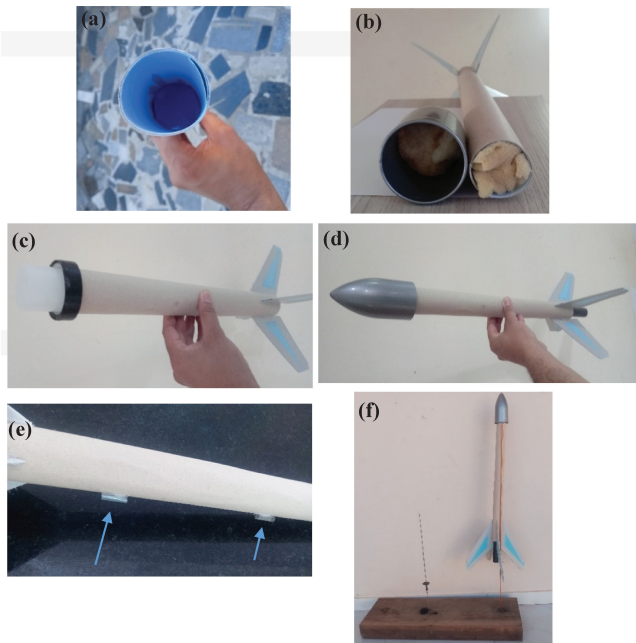


Figura 16: Etapas finais de procedimentos para a montagem do minifoguete.

3.4. Experimento e obtenção de parâmetros de voo

3.4.1. Análise gráfica

Nas Figuras 18(a) e (b) estão apresentados os gráficos de altura em função do tempo ($y(t)$) e na Figura 18(c) o gráfico da velocidade em função do tempo ($v(t)$) de um minifoguete produzido. Após o voo, o programa do altímetro encaminha as informações, contendo os gráficos e uma tabela de dados, via *bluetooth*, diretamente para um celular ou e-mail cadastrado no próprio altímetro. O programa informa o tempo de queima do propelente e o tempo de apogeu, que de acordo com a Figura 18(a) são respectivamente: $t_q \approx 0,75$ s e $t_a \approx 3,9$ s. Também informa a velocidade máxima após a queima e o apogeu medido no altímetro, respectivamente iguais a $v_q = 200$ km/h ≈ 55 m/s e $h_{m\acute{a}x} \approx 72,8$ m. Uma análise mais cuidadosa possibilitou, a partir dos gráficos nas Figuras 18(b) e (c), estimar $t_q \approx 0,70$ (linha vertical tracejada nos gráficos $y(t)$ e $v(t)$) e $t_a \approx 3,95$ s. Estes valores foram utilizados nas equações de ajuste do movimento do minifoguete.

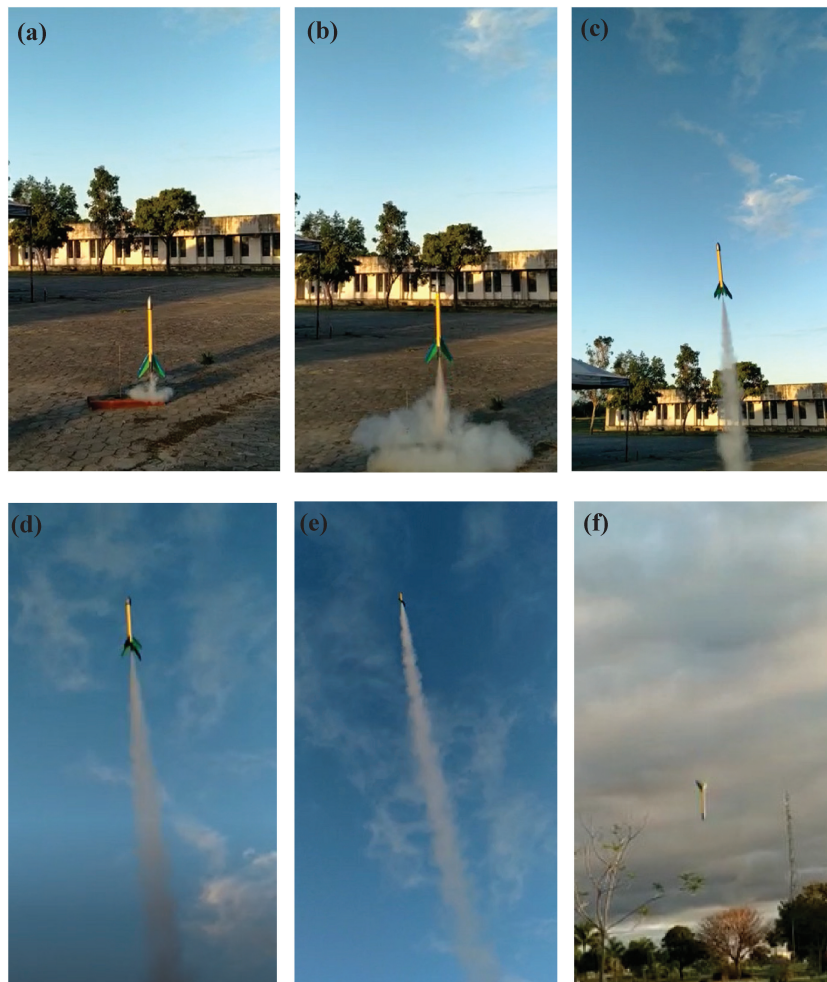


Figura 17: Seis etapas de voo para um minifoguete em teste.

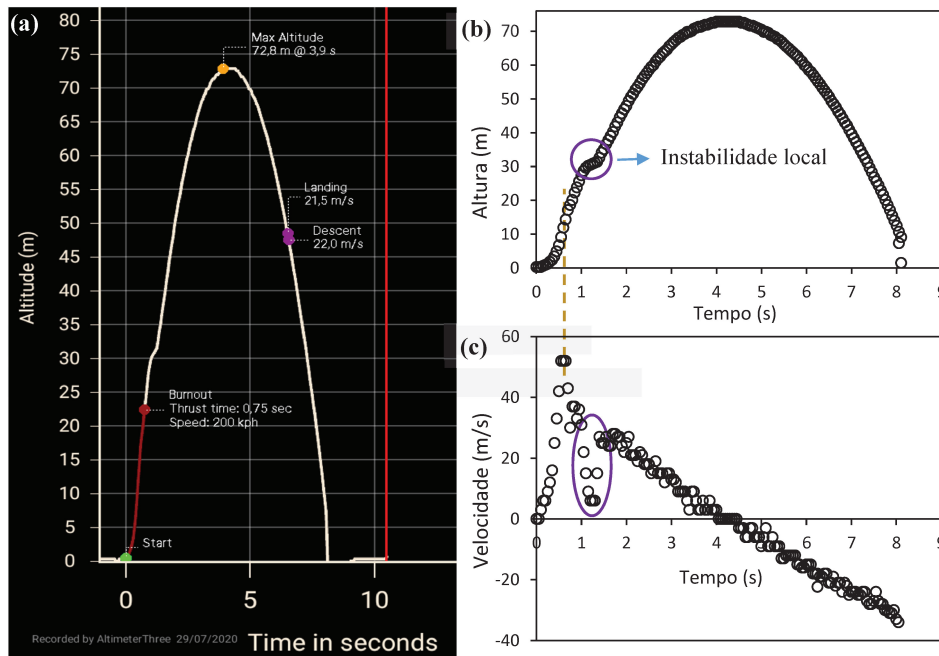


Figura 18: (a) Gráfico de altura em função do tempo, obtido direto do altímetro e enviado via *blue touch* para o celular utilizado. (b) O mesmo gráfico no programa *Excel*. (c) Gráfico da velocidade em função do tempo obtido da derivada do gráfico de (b).

A linha vertical (em amarelo) marca o tempo de queima do propelente, enquanto o círculo representa uma região de instabilidade. É possível observar que em t_q , o gráfico v_t passa por um máximo e depois a velocidade diminui com o tempo, sob a ação da força gravitacional e de resistência quadrática do ar. Em $t = t_a$ a velocidade é nula, correspondendo ao apogeu no gráfico $y(t)$. Após $t = t_a$ a velocidade torna-se negativa indicando um movimento de queda do minifoguete.

No gráfico $y(t)$ é possível notar um pequeno desvio da curva para a direita (marcado com um círculo), com duração estimada em $\approx 0,15$ s, referindo-se a um instante de instabilidade do voo. Esta instabilidade pode ter sido provocada por pelo menos três fatores: (i) uma leve rajada de vento, (ii) vibração das aletas provocadas pela elevada aceleração do minifoguete e (iii) ligeiro movimento do altímetro no interior do minifoguete. Como resultado, o minifoguete sofre um pequeno decréscimo em sua velocidade (marcado com um círculo oval na curva $v(t)$) o que afeta o seu apogeu. Embora esta instabilidade tenha ocorrido, o tempo de duração é apenas uma fração desprezível comparativamente a o tempo de apogeu, da ordem de 3%, tornando possível realizar um ajuste experimental do voo do minifoguete e estimar parâmetros como v_e , dm/dt e a constante de arraste, b . Além disso, foi possível estimar o apogeu do minifoguete, caso não tivesse ocorrido a instabilidade.

Uma observação no gráfico $v(t)$, possibilitou obter uma aceleração média (a_m) do minifoguete, durante o funcionamento do motor. O valor estimado para sua magnitude, é dado pela equação:

$$a_m = \frac{v_q - v_o}{t_q - t_o}, \quad (35)$$

no qual $v_q \approx 55$ m/s é a velocidade no tempo t_q e, $v_o \approx 0$ m/s é a velocidade no tempo inicial, $t_o = 0$ s. Considerando $t_q = 0,7$ s, o valor de a_m pode ser estimado em $78,6$ m/s². Esse valor é extremamente alto e da ordem de $8g$. Embora este valor tenha sido inferior ao obtido por S. A. James (2007) [3], que utilizou um minifoguete de garrafa PET, o tempo de duração de propulsão aqui obtido foi muito maior que o reportado por esse autor. Enquanto ele obteve um tempo de propulsão de apenas $0,08$ s, o obtido neste trabalho supera esse tempo em: $0,7/0,08 \approx 8,8$ vezes. Isto confere maior impulso produzido pelo motor ao minifoguete e conseqüentemente maior apogeu.

3.4.2. Determinação de parâmetros e o ajuste na função $y(t)$

Alguns parâmetros importantes que descrevem o voo do minifoguete (Figura 19(b)) podem ser estimados, ao considerar que eles foram constantes durante todo o funcionamento do motor. Como exemplo, os parâmetros de impulso do minifoguete: dm/dt e v_e que aparecem dentro do argumento β , nas Equações (16) e (18) e a constante de arraste b da Equação (8), que está presente em todo, ou em parte, do movimento do minifoguete.

A estimativa de dm/dt foi feita, medindo a massa do motor antes (m'_o) e após (m'_f) queima do propelente dentro do intervalo t_o a t_q . Assim, pode-se estimar dm/dt como:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m'_f - m'_o}{t_q - t_o}. \quad (36)$$

A medida da massa foi realizada com uma balança digital de ± 1 g de incerteza e os valores obtidos foram

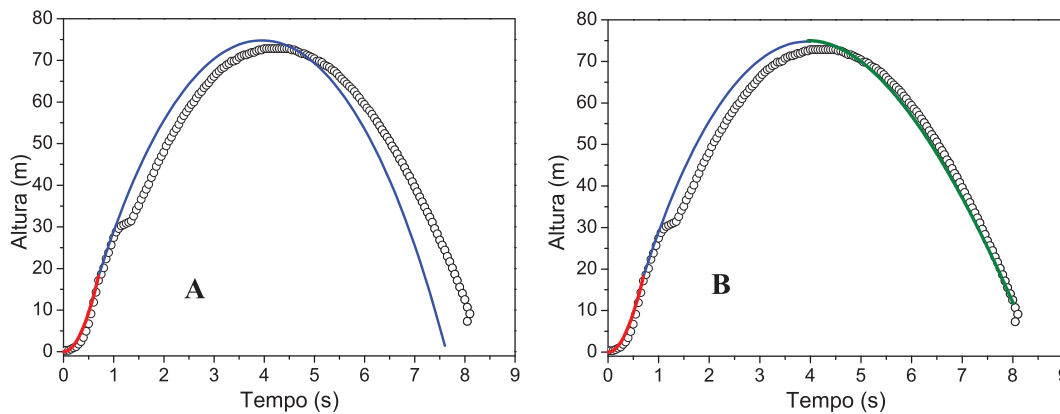


Figura 19: Modelos de ajuste de curvas teóricas ao gráfico experimental $y(t)$. O modelo A, dividido em duas partes, nas cores azul e vermelha e o modelo B, dividido em três partes, nas cores azul, vermelha e verde.

$m'_f = 51$ g e $m'_o = 84$ g. Considerando que $t_q - t_o = (0,70 \pm 0,05)$ s, obtém-se por meio da Equação (36) que: $dm/dt = (0,047 \pm 0,004)$ kg/s. Este valor está dentro da faixa prevista teoricamente (veja a Tabela 2). A massa, m , do minifoguete utilizada nos ajustes foi calculada conforme a Equação (13) (veja a seção 2.4). Considerando que $m_o = 226$ g e $m_f = 192$ g, o valor de m pode ser estimado com a em $(0,209 \pm 0,002)$ kg. A constante de arraste, b , foi obtida conforme a Equação (9) e utilizando as variáveis, cujos valores são descritos na Seção 2.3.3. Assim, foi possível estimar o valor teórico de $b \approx (0,00113 \pm 0,00004) N s^2/m^2$.

O ajuste de funções teóricas na curva experimental $y(t)$ foi realizado no programa *Excel* (do pacote da *microsoft office*). O ajuste significa escolher os melhores parâmetros de t_q , t_a , v_e , dm/dt e b nos quais funções teóricas se aproximam, dentro de intervalos específicos ao gráfico de $y(t)$. De todos os parâmetros descritos anteriormente, apenas v_e foi impossível de estimar, exceto pela faixa de valores ideais apresentados na Tabela 2. Por outro lado, o valor da constante b determinado teoricamente serviu apenas como um valor de entrada nos ajustes. Os valores experimentais de v_e e b podem ser estimados via ajuste no gráfico experimental $y(t)$: (i) fixamos os valores de t_q , t_a e dm/dt que puderam ser estimados; (ii) substituí-se estes valores nas Equações (18) e (19), tais que sejam formadas funções que dependam exclusivamente de v_e , b e t ; procura-se uma faixa de valores de v_e e b tais que estas funções se acomodem da melhor forma aos pontos experimentais. Nos ajustes, os valores de t foram variados desde 0 a 8 s em intervalos de 0,05 s.

Nos gráficos da Figura 19(a) e (b), as linhas em vermelho e azul representam ajustes teóricos utilizando as Equações (18) e (26), respectivamente. Foram utilizados dois modelos de ajuste. No modelo A (Figura 19(a)), o voo do minifoguete foi dividido em duas partes: Parte I – durante o funcionamento do motor, entre t_o e t_q (curva em vermelho); Parte II – quando o minifoguete sobe, a partir de $y(t_q)$, até atingir o apogeu, e desce atingindo o

solo em t_f , no qual t_f é o tempo final de voo (curva em azul). No modelo B, Figura 19(b), a parte II foi analisada separadamente: Parte II-1: subida de t_q a t_a (vermelho), parte II-2: o movimento de descida, entre t_a e t_f (azul). O ajuste inicial do gráfico em vermelho, é comum da parte I dos modelos A e B.

Os valores fixados de t_q , t_a e dm/dt em $(0,70 \pm 0,05)$ s, $(3,95 \pm 0,05)$ e $(0,047 \pm 0,004)$ kg/s, respectivamente, possibilitou obter no ajuste experimental das curvas em vermelho e azul, em ambos os modelos, valores de v_e e b em (380 ± 5) m/s e $(0,0012 \pm 0,0001) N s^2/m^2$, respectivamente. As incertezas em v_e e b foram estimadas variando uma dessas grandezas e verificando o quanto a outra deveria ser modificada para que as curvas em vermelho e azul se reaproximassem dos dados experimentais.

Ao observar os modelos A e B fica claro que o modelo B melhor se adequa aos dados experimentais, para tempos $t \geq t_a$. Neste caso o que foi modificado da curva em azul para a verde foi a dependência do movimento com a força de resistência do ar. No apogeu a velocidade do minifoguete se anula e então, o movimento de queda se dá inicialmente em baixas velocidades. Neste caso, a força de resistência do ar é dada por $F_r = -cv$, no qual c é a constante de arraste linear e, este modelo tem aplicações para velocidades menores que 24 m/s [24]. Com esta consideração, a curva em verde no gráfico da Figura 19(b) foi dada pela Equação:

$$y(t) = y_o - \frac{mg}{c}(t - t_a) + g \frac{m^2}{c^2} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}(t-t_a)}\right) \quad t \geq t_a, \tag{37}$$

no qual $y_o = 72,8$ m é a altura inicial do minifoguete no apogeu. O valor obtido para a constante linear foi $c = (0,04 \pm 0,01)$ Ns/m. Em ambos os modelos, a estimativa para a altura final do foguete foi de 75 m, uma diferença percentual de apenas 3%. Talvez essa seria a altura atingida, caso não houvesse a turbulência/instabilidade logo a pós a queima do propelente.

O valor de v_e obtido neste trabalho é bem inferior à faixa de valores da velocidade ideal (Tabela 2), pois este modelo teórico considera um fluxo de gás ideal, regime estacionário, expansão isentrópica e a existência de um bocal apropriado. Além disso, o propelente foi derretido. Por outro lado, S. Jason, 2005 [31], ao construir um motor E45 à base de KNSU, obteve um impulso específico para seu motor igual a 77,5 s. O valor de v_e obtido pelo autor, utilizando a Equação (5), foi ≈ 759 m/s, que para todos os efeitos, foi superior ao valor aqui obtido. Uma das causas, pode estar atribuída à pureza do nitrato de potássio utilizado pelo autor. Ele utilizou nitrato de potássio com 99,99% de pureza e baixa umidade. Neste trabalho, o nitrato contém impurezas advindas do fertilizante e também apresenta certo grau de umidade. O nitrato de potássio, por ser higroscópico apresentou-se úmido, algo que foi observado durante a preparação do propelente. O método de obtenção experimental de v_e aqui descrito, também pode influenciar. Seria adequado, em um trabalho futuro, realizar os testes estáticos e através da curva do empuxo em função do tempo, estimar o valor de v_e , comparando com o valor obtido neste trabalho.

4. Considerações finais

A proposta experimental desenvolvida neste trabalho possibilita o estudante entender o funcionamento de minifoguetes, aplicando conceitos das leis de Newton para um sistema de massa variável. O professor de ensino fundamental e médio pode trabalhar na construção do minifoguete como uma proposta lúdica levando a física para a realidade que os estudantes convivem. O uso do altímetro possibilitou a obtenção, em tempo real, da altitude em função do tempo. Nesta atividade, o tempo de queima do propelente pode ser obtido diretamente do gráfico, possibilitando o cálculo experimental de dm/dt . O coeficiente de arraste quadrático foi determinado teoricamente e seu valor experimental não foi alterado, mostrando que o modelo teórico aqui descrito é consistente com a experiência. Estes dois parâmetros, juntamente com o tempo de apogeu foram utilizados para traçarem curvas teóricas no programa *Excel* e obtenção da velocidade de exaustão, uma grandeza que é difícil medir diretamente.

5. Trabalhos futuros

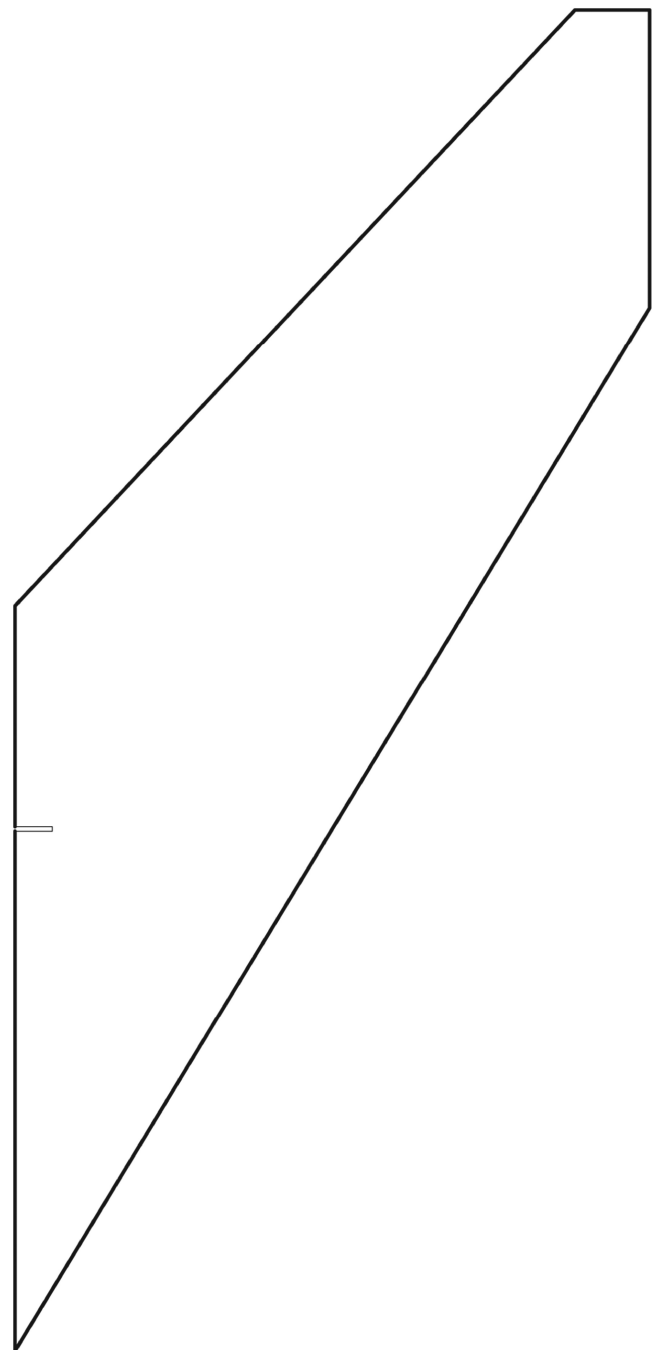
Como proposta de novos trabalhos, serão realizados testes estáticos nos motores aqui produzidos, possibilitando obter uma curva do empuxo em função do tempo. Será utilizado o cálculo numérico, no qual através do programa *Octavi*, será possível obter um ajuste teórico que descreva uma função para o empuxo em função do tempo. Isto pode ser utilizado na equação de movimento, como uma nova metodologia para a obtenção de $y(t)$. Adicionalmente, será descrito a solução completa

da equação de movimento do minifoguete no qual a massa varia linearmente com o tempo.

Agradecimentos

A equipe de trabalho agradece à PROGRAD/UFES e ao Departamento de Ciências Naturais do CEUNES/UFES pelo financiamento desta pesquisa e concessões de bolsas de estudo para os estudantes.

Apêndice I: modelo dimensionado de aleta para recorte



Referências

- [1] H. Luciano, *Journal of Aeronautical Sciences* **7**, 1 (2016).
- [2] *Veja: Nasa vai Abrir Estação Espacial Internacional para Turistas*, disponível em: <https://veja.abril.com.br/ciencia/nasa-vai-abrir-estacao-espacial-internacional-para-turistas-em-2020/>, acessado em 25/08/2020.
- [3] S.A. James, *Física na Escola* **8**, 4 (2007).
- [4] F.S.V. Marcus, R.L.M. Igor e F.S.B. Marcelo, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40**, e3504 (2018).
- [5] S. Jairo, T.K.F. Marta e T.M. José, *Química Nova* **25**, 107 (2002).
- [6] O.S. Olaoye e O.A. Abdulhafeez, *International Journal of Science and Research*, **3**, 1982 (2012).
- [7] *Grupo de Foguetes CARL SAGAN*, disponível em: <http://www.foguete.ufpr.br/festival/2019/festival-2019.htm>, acessado em 25/08/2020.
- [8] *Apogee Components: Altimeter Three*, disponível em: <https://www.apogeerockets.com/Electronics-Payloads/Altimeters/Jolly-Logic-AltimeterThree>, acessado em 26/08/2020.
- [9] *Origin 8: Getting Started*, disponível em: https://www.originlab.com/pdfs/Origin.8.1_Getting_Started_Booklet.pdf, acessado em 26/08/2020.
- [10] *Brazilian Space: Amplitude do Controle do Exército sobre Minifoguetes*, disponível em: <https://brazilian.space.blogspot.com/2016/05/amplitude-do-controle-do-exercito-sobre.html>, acessado em 26/08/2020.
- [11] *Index of /foguete/apostila*, disponível em: <http://ftp.demec.ufpr.br/foguete/apostila/>, acessado em 26/08/2020.
- [12] *NASA: Space*, disponível em: <https://www1.grc.nasa.gov/space/?ref=spaceeducation/rocket/rktcompare.html>, acessado em 26/08/19.
- [13] *Model Solid Rocket Engine*, disponível em: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/rocket/rktengine.html>, acessado em 26/08/2020.
- [14] C.B. Josmar e M.F.M. Rafael, *Otimização de Motores com Combustível Sólido para Minifoguetes*. Trabalho de Conclusão de Curso, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro (2017).
- [15] D.A. Singh, *International Journal of Engineering Trends and Applications* **2**, 30 (2015).
- [16] *Richard Nakka's Experimental Rocketry Web Site*, disponível em: <https://www.nakka-rocketry.net/sucrose.html>, acessado em 26/08/2020.
- [17] A.S. Átila, *Investigação dos Efeitos Causados na Taxa de Queima e no Impulso Específico de Propelentes Sólidos pela Adição de Óxido de Ferro*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal (2018).
- [18] W. Ulrich, *Astronautics: The Physics of Space Flight* (Wiley, New Jersey, 2012), v. 1, p.1.
- [19] L. Sang-Hyeon, *Aerospace Science and Technology* **40**, 47 (2015).
- [20] R.F.V. Marcus, *Metodologia de Projeto e Validação de Motores Foguete a Propelente Sólido*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo (2013).
- [21] ESTES: C6-5 Engines, disponível em: <https://estesrockets.com/product/001614-c6-5-engines/>, acessado em 26/08/2020.
- [22] *Richard Nakka's Experimental Rocketry Web Site*, disponível em: https://www.nakka-rocketry.net/articles/nakka_theory_pages.pdf, acessado em 26/08/2020.
- [23] *Correlation Between Simulated, Calculated, and Measured Model Rocket Flight*, disponível em: <http://www.drew.edu/govschool/wp-content/uploads/sites/99/T1-Final-Paper.pdf>, acessado em: 26/08/2020.
- [24] C.O. Jessica, C.Q.L. Felipe, D.C. Iago, N.F. A Gabrielle, N.H. Luis, R.R.R. Emilly, S.G.M. Angelo, Z.T. Felipe, S.P.J. Daniel e C.R. Rodrigo, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **36**, 529 (2019).
- [25] J. Waters, *Undergraduate Journal of Mathematical Modeling onde + Two* **6**, 1 (2014).
- [26] A.V. Kraffa, G.S. Vazquez, R. R. Mijangosb, J. A. Heredia-Cancino, *Revista Mexicana de Ensino de Física* **61**, 6 (2015).
- [27] H. Rodrigues, M.O. Pinho, D. Portes Jr e A. Santiago. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **40**, 523 (2009).
- [28] *Richard Nakka's Experimental Rocketry Web Site: KN-Sucrose (KNSU) Propellant Chemistry and Performance Characteristics*, disponível em: <https://www.nakka-rocketry.net/succhem.html>, acessado em 28/08/2020.
- [29] M.J.L. Turner, *Rocket and Spacecraft Propulsion* (Chichester, England, 2006), v. 1, p. 35.
- [30] *Teoria do Escoamento Compressível*, disponível em: <http://paineira.usp.br/sisea/wp-content/uploads/2019/10/aula5-new.pdf>, acessado em 28/08/2020.
- [31] S. Jason, *Easy PVC Rockets* (Createspace Independent Publishing Platform, 2005), v. 1, p. 69.
- [32] *Sonic Dad: TKOR 2000 Randomizer Rocket: Project # 70*, disponível em: <https://www.sonicdad.com/project-details/randomizer-rocket/>, acessado em 29/08/2020.