

Análise gravimétrica por meio de smartphones e aprimoramentos nas equações do experimento do pêndulo simples como subterfúgio para o ensino de Física Clássica

Gravimetric analysis using smartphones and improvements in the equations of the simple pendulum experiment as a subterfuge for teaching Classical Physics

Marcos Roberto Rossini^{*1}, Marcio José Alves¹, Paulo Sérgio de Camargo Filho^{1,2},
Marilene Turini Piccinato¹, Luís Henrique Cardozo Amorin³

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Física, Campus Londrina, Londrina, PR, Brasil.

²Harvard John A. Paulson School of Engineering and Applied Sciences, Department of Physics, Cambridge, USA.

³Universidade Federal da Bahia, Instituto de Ciência, Tecnologia e Inovação, Camaçari, BA, Brasil.

Recebido em 27 de outubro de 2023. Aceito em 18 de dezembro de 2023.

A Gravimetria contemporânea vale-se de gravímetros para encontrar o módulo da aceleração gravitacional (g) de forma pontual na superfície terrestre. Esse trabalho considerou a pertinência da determinação de g no laboratório didático por intermédio do pêndulo, fazendo atenciosa análise dos fenômenos que afetam o dispositivo em oscilação, trazendo contribuições para o ensino da Física Clássica. A primeira, embora modesta, é eficaz, e propõe medir o período de oscilação empregando dois smartphones. A segunda, uma análise teórica acerca do efeito da amplitude angular correlacionada ao arrasto, sobre o período de oscilação do pêndulo. A terceira, refere-se à validação de duas equações que fornecem o valor de g em função da latitude e da altitude, com os dados gravimétricos disponíveis no site do IBGE. No campus Londrina da UTFPR, realizaram-se ensaios independentes, permitindo que se obtivesse o valor $g_{UTFPR-Ld} = (9,7873 \pm 0,0012) m \cdot s^{-2}$. Para a validação da metodologia e verificação da acuracidade, as duas equações que fornecem g em função da altitude e da latitude foram confrontadas com dados gravimétricos para definir qual seria mais adequada para gerar o valor de referência. Assim feito, verificou-se que o valor obtido experimentalmente divergia em $0,001 m \cdot s^{-2}$ (0,01%).

Palavras-chave: Gravimetria, pêndulo, smartphone, ensino de Física.

Contemporary gravimetry uses gravimeters to find the magnitude of gravitational acceleration (g) in a punctual manner on the Earth's surface. This work considered the relevance of determining g in the didactic laboratory using the pendulum, making a careful analysis of the phenomena that affect the oscillating device, bringing contributions to the teaching of Classical Physics. The first, although modest, is effective, and proposes measuring the oscillation period using two smartphones. The second, a theoretical analysis of the effect of angular amplitude correlated to drag, on the period of pendulum oscillation. The third refers to the validation of two equations that provide the value of g like a function of latitude and altitude, with gravimetric data available on the IBGE website. At the Londrina campus of UTFPR, independent tests were carried out, allowing the value $g_{UTFPR-Ld} = (9.7873 \pm 0.0012) m \cdot s^{-2}$ to be obtained. To validate the methodology and verify its accuracy, the two equations that provide g as a function of altitude and latitude were compared with gravimetric data to define which would be most suitable for generating the reference value. This done, it was found that the experimentally obtained value differed by $0.001 m \cdot s^{-2}$ (0.01%).

Keywords: Gravimetry, pendulum, smartphone, Physics teaching.

1. Introdução

A Gravimetria é o ramo da ciência que se ocupa essencialmente da determinação da aceleração gravitacional, g , de seu gradiente, e do conjunto de procedimentos e técnicas correlatos a estes [1, 2]. O aprimoramento das metodologias, sobretudo a partir da segunda metade do século XX, alavancou o emprego

dos valores gravimétricos em diversos setores. Os dados mais recentes, obtidos por múltiplos meios, valeram-se de levantamentos em terra, no mar, no ar e até mesmo no espaço, por meio de satélites, gerando prodigioso conjunto de dados, permitindo elevar a precisão dos dados gravimétricos. Valores mais confiáveis de g foram empregados em arqueologia, cartografia, ciências ambientais, geofísica, mineralogia, no setor petrolífero, e, também, nas calibrações de precisão para a padronização do quilograma no sistema internacional [3].

*Endereço de correspondência: rossini@utfpr.edu.br

O conhecimento da variação temporal da aceleração gravitacional apresenta vasta aplicação tecnológica e científica. O estudo das taxas de variação relativas ao tempo permite o entendimento de detalhes das camadas de gelo polar, do nível do oceano e suas correntes, do ciclo da água no planeta, e da estrutura da Terra. Para ilustrar, entre os anos 2003 e 2006, o satélite GRACE04.16.07 forneceu dados que apontavam para a redução da camada de gelo sobre a Groenlândia. Também possibilitou a detecção de água em aquíferos abaixo da superfície da Terra e mudanças na crosta oriundas daquele terremoto que gerou o tsunami ocorrido no Oceano Índico, em 2004. Considere-se também que a aceleração gravitacional afeta a pressão nos oceanos e a pressão atmosférica, cujos gradientes são empregados para estimativas da velocidade dos ventos e das correntes marítimas profundas, elementos muito importantes para a previsão do tempo. Olhando para o futuro com a mesma audácia dos grandes navegadores lusitanos, na perspectiva de colonizar outros planetas, o conhecimento da aceleração gravitacional nestes novos mundos será fundamental para a análise da viabilidade da vida humana [4].

A determinação de g , com precisão da ordem de $10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, contemporaneamente é feita com gravímetros, por meio da queda livre de um corpo, medindo-se a distância percorrida por este em intervalos de tempo extremamente pequenos, modalidade conhecida por determinação absoluta [3]. Embora atualmente em desuso, historicamente a determinação de g iniciou empregando-se o pêndulo, do latim *pendulus* (pendurado, suspenso), cujo uso para fins diversos é milenar. Na China, no século I A.D., há registro do emprego do dispositivo como sismógrafo primitivo [5, 6]. Considera-se que Galileu Galilei, por volta de 1602, tenha sido o primeiro cientista a examinar detidamente o pêndulo, constatando seu isocronismo e verificando que, respeitados os limites de precisão de que dispunha, o período de oscilação era proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio e independente da massa e da amplitude de oscilação [6–8]. O pêndulo foi imperioso para a Física Clássica suplantar a Aristotélica. Investindo no empirismo, Galileu empregou o modesto instrumento para medir o tempo e analisar quantitativamente o movimento dos corpos. Inovando, o cientista italiano combina Matemática e Física fundamentada nos ensaios experimentais, inaugurando uma nova forma de fazer ciência, a qual permitia a validação das leis naturais, em contraponto com o pensamento aristotélico que restringia o empirismo. Apoiado no ombro do gigante italiano, Newton desenvolve os pilares da Mecânica. Assim, a Revolução Científica do século XVII, embasada nos paradigmas estabelecidos por Galileu e Newton, esteve plenamente sujeita ao pêndulo. O historiador Richard Westfall chega a afirmar que sem o artefato não haveria o Principia [9].

Em 1657, Christiaan Huygens confeccionou o primeiro relógio de pêndulo, aprimorando a cronometragem. Dois anos depois, o cientista vale-se do pêndulo simples para determinar a aceleração gravitacional, estimando-a em

$9,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Em 1667, aprimorou o cálculo, utilizando-se de sua recém-descoberta equação do período [10, 11]. Daniel Bernoulli, em 1747, aperfeiçoa o modelo matemático, demonstrando que, em verdade, o período do pêndulo dependia da amplitude angular [12]. A partir do início do século XIX, estudos sistemáticos para determinar a aceleração gravitacional foram conduzidos em diversos institutos internacionais, merecendo destaque, em 1818, os trabalhos com o pêndulo reversível desenvolvidos pelo capitão Henry Kater [13–15]. De robustos pêndulos demolidores ao impactante pêndulo de Jean Bernard Léon Foucault [16, 17], as aplicações científicas, tecnológicas e didáticas multiplicaram-se com o desenrolar dos anos [18–31]. No campo do ensino, este dispositivo tão simples agrega múltiplas possibilidades para a construção de subsunçores conceituais da Mecânica Clássica, enquanto oferece belíssima introdução às metodologias investigativas [18–22, 24, 32–35].

Considerando a abrangência da gravimetria, a importância histórica do pêndulo para a ciência e para a tecnologia, aliada à riqueza didática do dispositivo, entendeu-se que seria válido o presente aporte. Enveredou-se pela trilha focada no emprego de equipamentos amplamente disponíveis e de baixíssimo custo, investindo na análise teórica para suprimir a carência de recursos técnicos. Destarte, a prática com a metodologia proposta pode ser replicada em qualquer instituição de ensino superior. Os trabalhos sobre a determinação da aceleração gravitacional na perspectiva didática são bastante abundantes. Os estudos valem-se de métodos diversos, desde a medida direta do período com cronômetro de acionamento manual, a dispositivos que empregam ultrassom, filmagem e vídeo análise pelo Tracker, ou ainda valendo-se do próprio smartphone como acelerômetro [36–41]. Entretanto, a prática que se vale do pêndulo apresenta generoso potencial didático que, aliado à simplicidade do dispositivo, torna-se forte argumento a favor de seu emprego, motivando a metodologia aqui desenvolvida,

O objeto de estudo do presente trabalho não está centrado em analisar as amplas aplicações didáticas do pêndulo, contudo, ressalta-se que a proposta permite ao docente a possibilidade de desenvolver, junto aos alunos, o processo de demonstração seguido de verificação. Também poderá ser proveitoso explorá-lo um pouco mais em um viés de demonstração/observação aberta [19, 20], abrindo espaço para se discutirem conceitos e hipóteses, sendo excelente oportunidade para se desenvolverem os aspectos inerentes da construção do conhecimento científico.

2. Algumas considerações Teóricas acerca do Pêndulo empregado no Cálculo de g

2.1. Pêndulo simples (idealizado)

O pêndulo simples, quando apresentado inicialmente aos estudantes, está idealizado. Constituído por fio muito

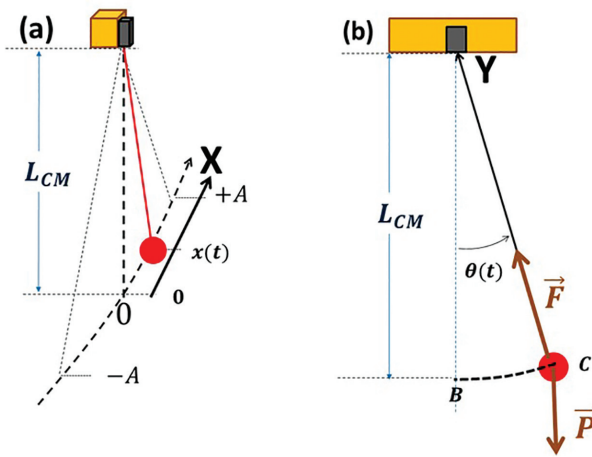


Figura 1: O pêndulo simples. (a) Visão tridimensional do pêndulo e suas coordenadas espaciais; (b) Representação das forças que atuam no caso ideal.

fino, de massa desprezível, com uma das extremidades presa a um suporte e a outra a um corpo de massa não nula, também com dimensões desprezíveis, de modo que comprimento total do pêndulo coincida com a distância do centro de massa do sistema ao ponto de fixação (L_{CM} , Figuras 1a e 1b). Hipoteticamente, o dispositivo interagindo exclusivamente com o campo gravitacional uniforme é abandonado ligeiramente fora da posição de equilíbrio, de tal forma que a aproximação $\text{sen } \theta = \theta = x/L_{CM}$ não comprometa significativamente a modelagem do problema. Assim, o arco $x = \widehat{BC} = L_{CM} \cdot \theta$ poderia ser considerado um segmento de reta sobre o eixo das abscissas, e o ponto de equilíbrio coincidiria com a origem do eixo cartesiano ($x = 0$). Neste caso, a componente tangencial da força resultante torna-se $m \cdot a_t = -m \cdot g \cdot \theta$. Com $a_t = \ddot{x}$ [42], chega-se a uma equação diferencial linear de segunda ordem, bastante simples, $\ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot x$, ou, $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \cdot \theta$, onde $\omega_0^2 = g_0/L_{CM}$, cuja solução geral é $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$, sendo $A = \theta_0 \cdot L_{CM}$ a amplitude do movimento e φ_0 sua fase inicial, ambos definidas pelas condições iniciais do problema [43]. Como a periodicidade da função cosseno é 2π , implica que o período de oscilação do pêndulo será T , tal que $\omega_0 \cdot T = 2\pi$, resultando em

$$g_0 = 4\pi^2 \cdot \frac{L_{CM}}{T^2} \tag{1}$$

2.2. Pêndulo real: considerações cerca do valor do cálculo da aceleração gravitacional

A equação (1) é obtida assumindo-se diversas hipóteses simplificadoras. Contudo, implicitamente, também se considera que o pêndulo oscile no vácuo; que o suporte, onde se prende seja absolutamente rígido e possua inércia extremamente elevada; e ainda, que não haja forças inerciais. Excetuando-se a última conjectura, pois

seu efeito não é significativo para a presente proposta [44–46], as demais hipóteses serão analisadas buscando avaliar o impacto que exercem sobre o cálculo do valor da aceleração. Seguir-se-á uma sequência gradativa quanto à complexidade dos fatores influentes, tratando cada efeito independentemente do outro [47–50].

2.2.1. Empuxo

O efeito do empuxo sobre o pêndulo é relativamente simples de ser analisado e quantificado [42], bastando considerá-lo como um vetor antiparalelo ao peso, atuando no centro de empuxo do sistema. A massa de ar deslocado pelo pêndulo é $m_{ar} = \rho_{ar} \cdot V_{ar}$, sendo ρ_{ar} a densidade e $V_{ar} = V_{fio} + V_{miç} + V_{esf}$ o volume de ar deslocado. Assim concebido, aplicando-se a Segunda Lei de Newton ao sistema, encontra-se $\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x$, com

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{m_{ar}}{m}\right) \cdot \omega_E^2 \tag{2}$$

sendo $m = m_{fio} + m_{miç} + m_{esf}$, $\omega = 2\pi/T$, $\omega_E^2 = g_E/L_{CM}$, e o subscrito “E” em g_E indica que este é o valor da aceleração gravitacional obtida considerando-se o efeito do empuxo. Observa-se que a frequência angular do pêndulo na presença do ar é menor que aquela que ocorreria no vácuo, conseqüentemente, o período de oscilação é maior, mostrando que o empuxo leva o pêndulo a oscilar mais lentamente, e que

$$g_E = g_0 \cdot \left(1 - \frac{m_{ar}}{m}\right)^{-1} \tag{3}$$

sendo $g_E > g_0$, onde g_0 é o valor de g no caso ideal (equação (1)). Aplicando-se a aproximação de primeira ordem $1/(1-\varepsilon) = 1+\varepsilon$, para $\varepsilon = m_{ar}/m = m_{ar}/(m_{esf} + m_{miç} + m_{fio}) \ll 1$ [51], tem-se $g_E = g_0 + \Delta g_E$, sendo

$$\Delta g_E = g_0 \cdot \frac{m_{ar}}{m} \tag{4}$$

2.2.2. Momento de inércia (pêndulo físico)

A próxima correção no cálculo de g considerará que o pêndulo seja um pêndulo físico. O pêndulo empregado no presente estudo possui suas particularidades: constituído por uma esfera de massa m_{esf} , raio $R = D/2$, conectada a uma esfera pequenina (miçanga) com diâmetro d e massa $m_{miç}$, conectada a um fio, de massa m_{fio} e comprimento L_{fio} , preso pela outra extremidade à calha de aço (Figura 2). A localização do centro de massa do pêndulo (L_{CM} , distância do centro de massa ao ponto de fixação do pêndulo) considera que o comprimento total do pêndulo (L) seja dado pela soma $L = L_{fio} + d + D$ (Figuras 2a e 2b), e sua massa total (m) seja dada pela soma das massas dos seus componentes de modo que

$$L_{CM} = \frac{m_{fio} \cdot 0,5 \cdot L_{fio} + m_{miç} \cdot (L_{fio} + 0,5 \cdot d) + m_{esf} \cdot (L_{fio} + d + 0,5 \cdot D)}{m} \tag{5}$$

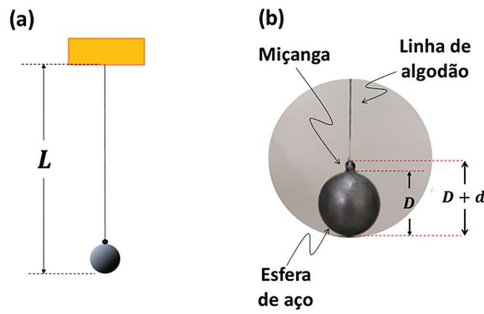


Figura 2: (a) Pêndulo constituído por fio (linha de algodão), miçanga e esfera de aço; (b) Detalhe da miçanga que conecta o fio à esfera.

O momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto de fixação do fio, no plano do movimento, $I = m_{esf} \cdot L_{CMesf}^2 + (2/5)m_{esf} \cdot R^2 + m_{miç} \cdot L_{CMmiç}^2 + (1/3)m_{fio} \cdot L_{fio}^2$ [16, 52–54], e o comportamento escalar do torque resultante, para pequenos ângulos, será tal que $I \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot \theta \cdot L_{CM}$, ou $\ddot{\theta} = -\omega^2 \cdot \theta$, onde

$$\omega^2 = \omega_I^2 \cdot \frac{m \cdot L_{CM}^2}{I} \tag{6}$$

com $\omega_I^2 = g_I/L_{CM}$. Uma vez que $m \cdot L_{CM}^2/I < 1$, segue-se que $\omega < \omega_0$, mostrando que o período do pêndulo físico também é maior que o do pêndulo ideal. Como $\omega = 2\pi/T$, o valor de g corrigido, considerando-se o efeito do momento de inércia será:

$$g_I = g_0 \cdot \frac{I}{m \cdot L_{CM}^2} \tag{7}$$

e definindo-se $g_I = g_0 + \Delta g_I$, encontra-se

$$\Delta g_I = g_0 \cdot \left(\frac{I}{m \cdot L_{CM}^2} - 1 \right) \tag{8}$$

2.2.3. Elasticidade do fio

Admitindo-se a elasticidade do fio, seu comprimento $\ell(\theta)$, Figura 3, varia durante a oscilação do pêndulo porque o fio de algodão está sujeito à força tensora $\vec{F}(\theta)$, cujo módulo varia enquanto o pêndulo oscila. O Princípio Fundamental da Dinâmica aplicado ao pêndulo idealizado de comprimento $\ell(\theta) + R$, sendo R o raio da esfera suspensa, mostra que a componente centrípeta é dada por $m \cdot v^2 \cdot [\ell(\theta) + R]^{-1} = F(\theta) - m \cdot g \cdot \cos \theta$. Considerando-se que $\ell(\theta_0) = \ell_0$ seja o menor comprimento do fio, ocorrendo quando a altura do pêndulo for máxima (h_0 , na Figura 3), e que o fio se comporte como uma mola ideal de constante elástica k , de tal modo que $\ell(\theta) - \ell_0 = \Delta \ell(\theta)$ seja a variação do seu comprimento. Com $F(\theta) = k \cdot \Delta \ell(\theta)$, a energia potencial elástica associada ao fio será $k \cdot \Delta \ell^2/2$, e tomando-se $h \cong \ell_{MÁX} - \ell_0 \cdot \cos \theta$, a conservação da energia mecânica exigirá que $v^2 = (k/m) \cdot (\Delta \ell_0^2 - \Delta \ell^2) + 2 \cdot g \cdot (h_0 - h)$. Então, combinando-se estas relações,

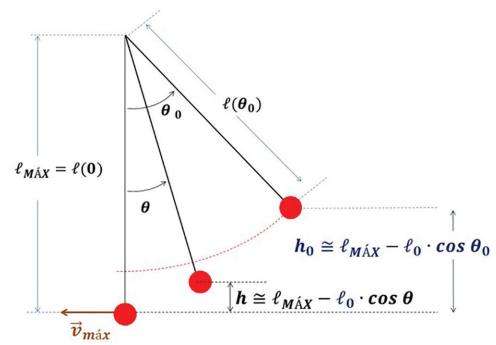


Figura 3: Correlação entre o comprimento do pêndulo e sua altura relativa ao ponto mais baixo.

encontra-se a variação no comprimento do fio em função do ângulo $\theta(t)$ que o pêndulo forma com a vertical: $\Delta \ell = (m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot \ell_0 \cdot \cos \theta) \cdot k^{-1} \cdot \ell^{-1}$. No interior dos parêntesis, o primeiro termo é igual ao dobro da energia cinética, implicando que pode ser substituído pelo dobro da diferença entre a energia mecânica e a potencial, sendo esta última essencialmente gravitacional, de modo que $m \cdot v^2 \cong 2 \cdot m \cdot g \cdot (h_0 - h)$ ou $m \cdot v^2 \cong 2 \cdot m \cdot g \cdot \ell_0 \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0)$, e assim, $\Delta \ell \cong (m \cdot g/k) \cdot (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$, que permite determinar o comprimento do fio em função de θ :

$$\ell(\theta) \cong \ell_0 + \frac{m \cdot g}{k} \cdot (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \tag{9}$$

Expressando-se $\ell(\theta)$ em função do comprimento do fio quando o pêndulo estiver em repouso no ponto mais baixo da trajetória, $L_{fio} = \ell_0 + m \cdot g/k$, e ainda, para pequenos ângulos, empregando-se $\cos \theta = 1 - \theta^2/2$, tem-se

$$\ell(\theta) \cong L_{fio} + \frac{m \cdot g}{K} \cdot \left(\theta_0^2 - \frac{3\theta^2}{2} \right) \tag{10}$$

¹de modo que se pode estimar um valor médio para o comprimento do fio em $1/4$ de ciclo, $0 \leq \theta \leq \theta_0$:

$$L_{médio, fio} = \frac{1}{\theta_0} \cdot \int_0^{\theta_0} \left[L_{fio} + \frac{m \cdot g}{k} \cdot \left(\theta_0^2 - \frac{3\theta^2}{2} \right) \right] \cdot d\theta \tag{11}$$

ou seja, $L_{médio, fio} = L_{fio} + 0.5m \cdot g \cdot \theta_0^2/k$, que levada à equação (2) e posteriormente à equação (1), implica que o valor de g , considerando-se o efeito da elasticidade do fio, será aproximadamente:

$$g_K = g_0 \cdot \left(1 + \frac{m \cdot g_0}{2k \cdot L_{CM}} \cdot \theta_0^2 \right) \tag{12}$$

¹ Há ainda um detalhe bem interessante revelado pela expressão $\ell(\theta) \cong L_{fio} + m \cdot g \cdot (\theta_0^2 - 3\theta^2/2)/k$: considerando $\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos \omega t$, com $(\cos \omega t)^2 = 0,5 \cdot (1 + \cos 2\omega t)$, encontra-se

$$\ell(\theta) \cong L_{fio} + \frac{m \cdot g}{k} \cdot \theta_0^2 [1 - 0,75 \cdot \cos(2\omega \cdot t)],$$

revelando que o corpo suspenso oscila radialmente com o dobro da frequência angular do pêndulo.

ou seja, para $g_k = g_0 + \Delta g_k$, encontra-se

$$\Delta g_K = g_0 \cdot 0,5 \cdot \frac{m \cdot g_0}{k \cdot L_{CM}} \cdot \theta_0^2 \quad (13)$$

sendo que outros autores chegaram a resultados muito próximo ao da equação (13) considerando pequenas perturbações, ou expansões de harmônicos em primeira ordem [55–57].

2.2.4. Arrasto

O efeito do arrasto, diminuindo a amplitude do movimento a cada ciclo, é facilmente perceptível. A redução suscita dúvidas quanto ao seu efeito sobre o isocronismo do pêndulo, então se deve analisá-las. Primeiramente considere-se que a intensidade da força de arrasto para uma esfera de diâmetro D é dada por $F_{arr} = C \cdot \rho_f \cdot A \cdot v^2/2$, onde C é o coeficiente de arrasto, ρ_f é a densidade do fluido que a envolve, $A = \pi D^2/4$ é a área de sua seção transversal na direção normal à velocidade relativa ao fluido, \vec{v} [36–38]. O coeficiente de arrasto depende do número de Reynolds ($Re = \rho_f \cdot v \cdot D/\eta$, para um fluido de viscosidade η), e no intervalo $0 < Re < 2 \cdot 10^5$, a expressão empírica $C \cong 24/Re + C'$ fornece o valor do coeficiente com precisão de 90%. O fator C' não é constante, de fato $C' = 6/(1 + \sqrt{Re}) + 0,4$, mas tratá-lo como tal nas condições do presente estudo mostra-se adequado [37, 58].

Enquanto o pêndulo oscila, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, sua velocidade varia de 0 a um máximo, de modo que o mesmo ocorrerá para o número de Reynolds, afetando o arrasto. Desta forma, é útil avaliar-se o intervalo de valores que Re pode ocupar durante um ciclo. Admita-se um pêndulo constituído por uma esfera de diâmetro $D = 2,5 \text{ cm}$, suspensa por um fio de comprimento $L = 2,5 \text{ m}$, oscilando no ar, $\rho_{ar} = 1,19 \text{ kg/m}^3$, $\eta_{ar} = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, a 293 K e altitude 566 m [36–38, 59], $g = 9,79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, com $\theta_0 = 3,50^\circ$, valores coerentes com os parâmetros desta proposta, de forma que, para esta esfera, encontra-se $0 \leq Re \leq 500$. No intervalo $0 \leq Re \leq 1$, correspondente às menores velocidades do pêndulo, a intensidade da força de arrasto deve ser predominantemente da forma $F_{arr} \cong -b \cdot v$, com $b = 3 \cdot \eta \cdot \pi \cdot D$, mas para $Re \approx 10^3$, o arrasto será proporcional ao quadrado do módulo da velocidade, $F_{arr} \cong -c \cdot v \cdot |v|$, com $c = C' \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \rho/8$. Assim, durante o movimento, $F_{arr} = -b \cdot v - c \cdot v \cdot |v|$, mas a pequena velocidade da esfera contribuirá para que o arrasto seja preponderantemente linear ($F_{arr} \cong -b \cdot v$), correspondendo à lei de Stokes [40, 60, 61].

O módulo do trabalho da força de arrasto durante um quarto de ciclo, $0 \leq t \leq T/4$, ou $0 \leq \theta \leq \theta_0$, é $|\tau_{arr1/4}| = \int_0^{\theta_0} |F_{arr}| \cdot L_{CM} \cdot d\theta$, e tomando-se a expressão da força de arrasto, $F_{arr} = -b \cdot v - c \cdot v \cdot |v|$, com $\theta = \theta_0 \cdot \cos \varphi$, $\varphi = \omega_0 \cdot t$, $v = L_{CM} \cdot \dot{\theta}$ e integrando-se no intervalo $[0; \pi/2]$ encontra-se o módulo da energia dissipada por

ciclo, $|\tau_{arr}| \cong 4 \cdot |\tau_{arr1/4}|$, ou seja

$$|\tau_{arr}| = \frac{b \cdot \pi}{\omega_0} \cdot (\omega_0 \cdot \theta_0 \cdot L_{CM})^2 + \frac{8 \cdot c}{3\omega_0} \cdot (\omega_0 \cdot \theta_0 \cdot L_{CM})^3 \quad (14)$$

A energia dissipada pelo arrasto correlaciona-se a uma queda na energia potencial gravitacional dada por $|\Delta \varepsilon| = m \cdot g \cdot L_{CM} \cdot [\cos \theta_0 - \cos \theta_1]$, sendo θ_1 o valor da amplitude angular no início do segundo ciclo. Considerando-se $\cos \theta_1 = 1 - \theta_1^2/2$, $\theta_0 \cong \theta_1$, e $\cos \theta_0 - \cos \theta_1 \cong \theta_0 \cdot \Delta \theta$, $\Delta \theta = \theta_0 - \theta_1$, e dividindo-se $|\tau_{arr}|$, equação (14), e $|\Delta \varepsilon|$ por $\Delta t = T = 2\pi/\omega_0$, e igualando-se as razões encontra-se

$$\begin{aligned} & m \cdot (\omega_0 \cdot L_{CM})^2 \cdot \theta_0 \cdot \frac{\Delta \theta_0}{\Delta t} \\ &= -\frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \left[\frac{b \cdot \pi}{\omega_0} \cdot (\omega_0 \cdot \theta_0 \cdot L_{CM})^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{8 \cdot c}{3\omega_0} \cdot (\omega_0 \cdot \theta_0 \cdot L_{CM})^3 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

no limite para $\Delta t \rightarrow 0$, $-dt = d\theta_0 \cdot [b \cdot \theta_0/2m + (4c \cdot \omega_0 \cdot L_{CM}) \cdot \theta_0^2/3\pi m]^{-1}$. Integrando-se no intervalo $[0; T]$ com $r = b/(2m)$ e $s = 4c \cdot \omega_0 \cdot L_{CM}/(3\pi m)$ encontra-se

$$\theta_0(T) = \theta_{0,máx} \cdot \frac{r \cdot e^{-r \cdot T}}{r + s \cdot \theta_{0,máx} \cdot (1 - e^{-r \cdot T})} \quad (16)$$

Apesar da complexidade dos fatores envolvidos no arrasto, a hipótese exigida pela equação (16) é que este contenha duas componentes, uma proporcional à velocidade do pêndulo e outra proporcional ao quadrado desta velocidade, de modo que, posteriormente, os fatores r e s serão obtidos através do ajuste da equação (16) aos dados experimentais. Contudo, espera-se que o arrasto seja predominante linear, $F_{arr} \cong -b \cdot v$, de modo que a equação de movimento do pêndulo corresponderá, com boa aproximação, a $\ddot{\theta} + \gamma \cdot \dot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0$, sendo $\gamma = b/2m$ e $\omega_0^2 = g_{arr}/L_{CM}$. A solução geral para o caso subcrítico é

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{b}{2m} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad (17)$$

com $\omega = 2\pi/T = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma} < \omega_0$, apontando que, também, o arrasto aumenta o período de oscilação [42, 62], de modo que o valor corrigido para g devido ao este efeito será:

$$g_{arr} = g_0 + \frac{b}{2m} \cdot L_{CM} \quad (18)$$

ou seja, definindo $g_{arr} = g_0 + \Delta g_{arr}$, encontra-se

$$\Delta g_{arr} = \frac{b}{2m} \cdot L_{CM} \quad (19)$$

sendo que o fator $b/(2m)$, como dito anteriormente, pode ser determinado pela curva de ajuste da equação (17) ao gráfico de $\theta(t)$ versus t , obtido experimentalmente.

2.2.5. Amplitude angular

Ao se considerar válida a identidade $\text{sen } \theta = \theta$ introduziu-se um erro no cálculo de g , então se faz necessária a respectiva correção. Admitindo que a energia mecânica inicial do pêndulo apresentado na Figura 3, é aproximadamente $m \cdot g \cdot L_{CM} \cdot (1 - \cos \theta_0)$, tomando-se o nível zero de energia potencial na posição mais baixa do centro de massa pêndulo, sendo θ_0 o ângulo máximo que o fio forma com a vertical, de forma que:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} + m \cdot g \cdot L_{CM} \cdot (1 - \cos \theta) = m \cdot g \cdot L_{CM} \cdot (1 - \cos \theta_0) \quad (20)$$

e tomando-se $v = L_{CM} \cdot \dot{\theta}$, é possível escrever a equação diferencial para o tempo em função do ângulo θ : $dt = d\theta / [\omega_\theta \cdot \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}]$, $\omega_\theta^2 = g/L_{CM}$. Integrando esta expressão em um quarto de ciclo, $\theta \in [0; \theta_0]$, ou $t \in [0, T/4]$, encontra-se:

$$T = T_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2 \cdot (\text{sen} \varphi)^2}} \cdot d\varphi \quad (21)$$

Para $T_0 = 2\pi\sqrt{L_{CM}/g}$, $\delta = \text{sen}(\theta_0/2)$, e $\text{sen}(\theta/2) = \delta \cdot \text{sen} \varphi$. A integral dada na equação (21) é uma integral elíptica do primeiro tipo completa [20, 39, 62 pp. 45–49, 63–65] e, uma vez solucionada, encontra-se:

$$T = T_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\delta\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\delta\right)^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\delta\right)^6 \dots \right] \quad (22)$$

de modo que, para $\theta_0 < 0,05 \text{ rad}$, pode-se considerar apenas os dois primeiros termos da série para se obter $T = T_0 \cdot \{1 + [\text{sen}(\theta_0/2)]^2/4\}$, ou ainda $T \cong T_0 \cdot \{1 + \theta_0^2/16\}$, de onde

$$g_{\theta_0} \cong g_0 \cdot \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8}\right) \quad (23)$$

Ocorre que, na presença do ar, após n ciclos, a equação (23) deve ser aprimorada considerando a variação da amplitude angular oriunda do arrasto, para não superestimar a correção. A equação (17) mostra que, a cada ciclo, a amplitude angular é aproximadamente reduzida pelo fator de decaimento

$$q = \frac{\theta(T)}{\theta_0} = e^{-\frac{b}{2m} \cdot T} \quad (24)$$

Considerando-se que o intervalo de tempo necessário para que a primeira oscilação ocorra seja $T_1 = T_0 \cdot [1 + \theta_0^2/16]$, no segundo ciclo, como a amplitude reduziu para $\theta_2 = \theta_0 \cdot q$, o intervalo de tempo necessário para que esta oscilação complete será $T_2 = T_0 \cdot [1 + (\theta_0 \cdot q)^2/16]$, e assim, sucessivamente, até a k -ésima oscilação, onde o período seria dado por $T_k = T_0 \cdot [1 + (\theta_0 \cdot q^{k-1})^2/16]$. Então, o intervalo de tempo necessário para n oscilações completas ocorrerem, $\Delta t_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, $n \geq 1$,

será $\Delta t_n = T_0 \cdot \{n + [\theta_0^2/16] \cdot [1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2(n-1)}]\}$, com $\Delta t_n = n \cdot T_n$, encontra-se

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_0}} \cdot \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16 \cdot n} \cdot \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}\right) \quad (25)$$

de modo que o valor de g considerando-se a queda na amplitude angular após n ciclos seja:

$$g_{\theta,n} = g_0 \cdot \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8n} \cdot \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}\right) \quad (26)$$

ou seja, $g_{\theta,n} \cong g_0 + \Delta g_{\theta,n}$, e

$$\Delta g_{\theta,n} = g_0 \cdot \frac{\theta_0^2}{8n} \cdot \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2} \quad (27)$$

3. Valor de Referência para Validação do Resultado Experimental

O estudo precedente forneceu as equações para que o valor da aceleração gravitacional possa ser determinado experimentalmente empregando-se um pêndulo. Contudo, para avaliar a exatidão do valor obtido através destas equações, será necessário um valor de referência (g_{ref}). Com este intuito, para se obter g_{ref} serão analisadas as equações [66, 67]

$$g1(\lambda, h) = 9,80613 \cdot (1 - 2,6325 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 2\lambda) \cdot (1 - 3,92 \cdot 10^{-7} \cdot h) \quad (28)$$

$$g2(\lambda, h) = 9,78032677$$

$$\cdot \frac{[1 + 0,0052790414 \cdot (\text{sen } \lambda)^2 + 0,0000232718 \cdot (\text{sen } \lambda)^4]}{1 + [h/(6,371 \cdot 10^6)]^2} \quad (29)$$

as quais fornecem, em unidades do Sistema Internacional, os valores da aceleração em função da latitude e da altitude h . Para se determinar qual destas equações seria a mais adequada para o presente estudo, suas previsões foram confrontadas com os dados gravimétricos das estações da Rede Nacional de Estações Gravimétricas Absolutas (RENEGA) [68] e do Relatório das Estações Geodésicas 8061171 do IBGE [69, 70], cujos dados estão expressos na Tabela 1. No gráfico da Figura 4 estão os valores obtidos com as equações (28) e (29) e os valores gravimétricos absolutos (Tabela 1).

Objetivando enfatizar a discrepância entre os valores teóricos de g , previstos pelas equações (28) e (29), em relação ao valor gravimétrico absoluto, elaborou-se o gráfico apresentado na Figura 5. A partir desta figura, observa-se que a equação (29) apresenta melhor exatidão na maioria dos casos, contudo, para Londrina, a equação (28) apresenta melhor previsão. Considerando também que, na tabela 1, o valor de g referente a Londrina é fornecido pela estação 8061171 (IBGE), a qual dista somente algo em torno de 2,5 km do campus

Tabela 1: Valores da aceleração gravitacional (gravimétricos absolutos) em algumas cidades brasileiras.

Cidade	Latitude sul (°)	h (m)	g (m/s ²)
1-Teresina (PI)	5,060000	70	9,78016343
2-Brasília (DF)	15,660000	1100	9,78048798
3-Viçosa (RJ)	20,760000	653	9,78460230
4-Valinhos (SP)	23,004167	850	9,78563778
5-Vassouras (MG)	22,400000	400	9,78637581
6-Londrina (PR)	23,305833	539,7	9,7864001
7-Curitiba (PR)	25,454167	910	9,78760387
8-Sta. Maria (RS)	29,720000	85	9,79261636

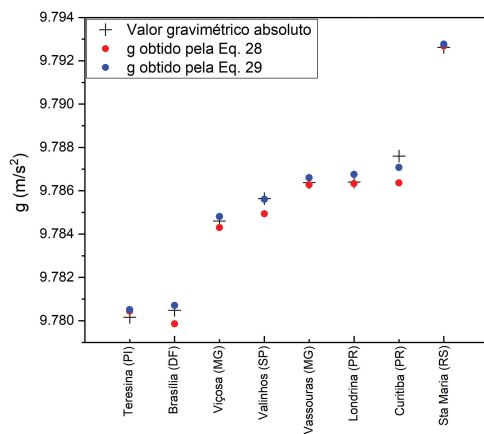


Figura 4: Valores da aceleração gravitacional: valor gravimétrico absoluto (Tabela 1) e valores obtidos com as equações (28) e (29), para algumas cidades brasileiras.

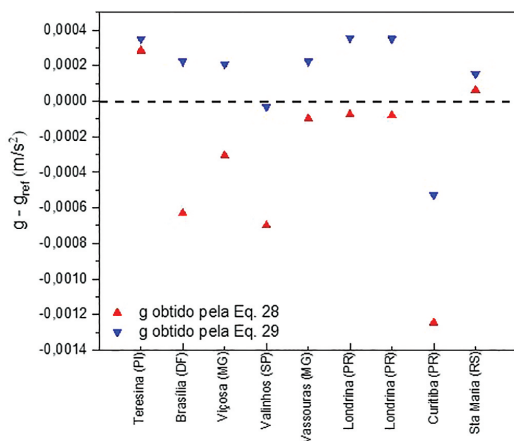


Figura 5: Diferenças (“erros”) entre os valores obtidos com as equações (28) e (29) e o valor gravimétrico absoluto (Tabela 1).

da UTFPR, entendeu-se que a equação (28) seria mais acertada para a determinação de g_{ref} para este ensaio. No campus, com $h = 568 \text{ m}$ e $= 23,3071^\circ$ [69], a equação (28) fornece o valor $9,786226 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, e considerando-se que o valor fornecido pela equação (28) divergiu em $0,000074 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ do valor gravimétrico

absoluto, acrescentou-se este valor a $9,786226 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ para se adotar como o valor de referência

$$g_{ref} = 9,786300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

para a aceleração gravitacional no campus Londrina da UTFPR.

4. Procedimento Experimental

Foram realizados cinco ensaios independentes com pêndulos distintos que divergiam somente no comprimento por alguns milímetros. Os pêndulos foram confeccionados com um fio de algodão, densidade linear $\mu_f = (0,095326 \pm 0,000008) \text{ g/m}$, e uma esfera de aço, diâmetro $D = (25,40 \pm 0,05) \text{ mm}$ e massa $m_{esf} = (67,26 \pm 0,03) \text{ g}$. Para conectar-se o fio à esfera, utilizou-se uma miçanga com diâmetro d e massa $m_{miç}$, a qual foi colada à esfera com adesivo instantâneo (“supercola”), sendo $D + d = (29,30 \pm 0,05) \text{ mm}$ e massa $m_{esf} + m_{miç} = (67,26 \pm 0,03) \text{ g}$, (Figura 2). Posteriormente, com auxílio de um ímã de neodímio, fixou-se o pêndulo em uma calha de aço rígida (Figura 6). O comprimento total do pêndulo (L) foi medido com uma trena de aço, distendida desde o ímã até a lâmina nivelada, que resvalava delicadamente a porção inferior da esfera (Figura 6). Para avaliar a calibração da trena empregada, quatro trenas de fabricantes distintos foram esticadas horizontalmente e, até o comprimento de $5,0000 \text{ m}$, a olho nu, não se observaram divergências, sendo a calibração das trenas definida em norma estabelecida [71]. É importante apontar que se deixou os pêndulos pendurados por cerca de 24 h para que as fibras dos fios se acomodassem. Surpreendentemente, o comprimento inicial, medido imediatamente à fixação dos pêndulos, era cerca de $1,8 \text{ cm}$ inferior àquele medido no dia seguinte. Após a acomodação, mesmo depois dos ensaios, não se observaram alterações nos comprimentos, dentro dos limites de precisão das medições com a trena.

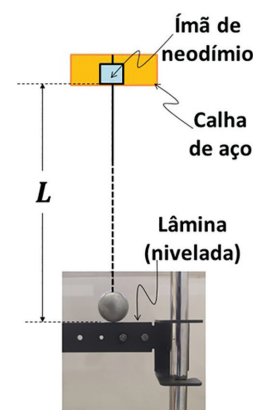


Figura 6: Esquema da fixação do pêndulo auxiliada por um ímã de neodímio, e detalhe da lâmina metálica (nivelada) empregada na medição do comprimento total do pêndulo (L).

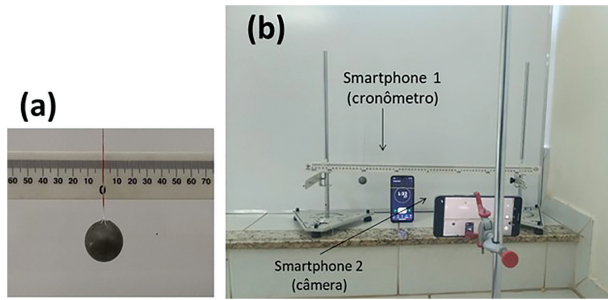


Figura 7: (a) Posição de equilíbrio do pêndulo coincidindo com a origem da escala; (b) Filmagem do conjunto (pêndulo e cronômetro).

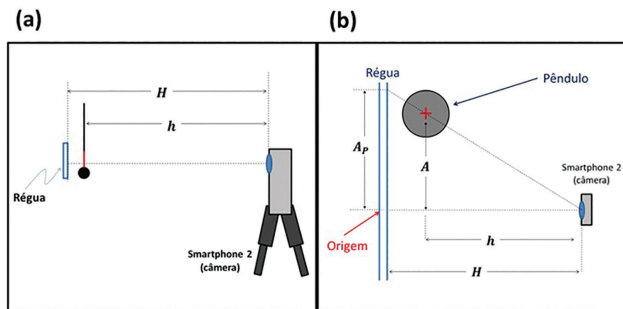


Figura 8: (a) Vista de perfil do pêndulo, da câmera e da régua; (b) Vista superior dos mesmos elementos.

Uma régua milimetrada foi posicionada horizontalmente atrás do pêndulo (Figura 7a), coincidindo sua posição de equilíbrio com a origem da escala (Figura 7a). Dois smartphones foram utilizados, um operava como cronômetro, o outro filmava o conjunto experimental (Figura 7b). A câmera foi posicionada de forma que não houvesse paralaxe (horizontal ou vertical) em relação à origem (Figuras 8a e 8b). O pêndulo foi posto para oscilar, e a filmagem só foi concluída após 150 ciclos serem completados. A seguir, o vídeo foi projetado quadro a quadro para se determinar o período de oscilação, com incerteza de 0,02 s. Objetivando-se otimizar a acuracidade na medição do período, considerou-se a posição de equilíbrio para a determinação de cada ciclo. Evitou-se empregar os pontos extremos, onde a pequena velocidade do pêndulo dificultaria a obtenção precisa do instante em que este pararia e inverteria o sentido do movimento. A medição das amplitudes de oscilação também foi feita por intermédio do vídeo, e considerando o esquema apresentado na Figura 8, onde A_P é o valor da amplitude segundo a leitura direta do vídeo, sujeita a erro de paralaxe, e A é a amplitude corrigida, dada pela relação $A = (h/H) \cdot A_P$.

5. Análise de Dados

A seguir serão apresentados e analisados os dados referentes a um dos pêndulos de comprimento total

$L = (2,4775 \pm 0,0003)m$, e $L_{CM} = (2,4605 \pm 0,0005)m$ (equação (5)). Na Figura 9 estão os valores do tempo e das amplitudes de oscilação (A) deste pêndulo a cada 10 ciclos, até que fossem completadas 150 oscilações, $\Delta T_{150} = 472,960 s$. A curva de decaimento da amplitude será utilizada posteriormente para se obter o fator de decaimento definido na equação (24). Com os dados apresentados na Figura 9, empregando-se a equação (1), foram gerados os valores de g_0 , os quais são apresentados na Figura 10, com os respectivos desvios (σ_{g_0}) e diferenças em relação ao valor de referência ($g_0 - g_{ref}$). O desvio padrão em g_0 , $\sigma_{g_0} = \sqrt{\sigma_{g_L}^2 + \sigma_{g_T}^2}$, depende da incerteza em L_{CM} , $\sigma_{g_L} = g_0 \cdot \sigma_{L_{CM}}/L_{CM}$, a qual permanece constante, $\sigma_{g_L} = 2,0 \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-2}$, e também àquela associada a medição do intervalo de tempo, $\sigma_{g_T} \cdot T_n$. Nas primeiras 10 oscilações, $\sigma_{g_T} T_n$ é $1,8 \cdot 10^{-2} m \cdot s^{-2}$ e, no último ciclo ($n = 150$), reduz-se a $1,2 \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-2}$.

O motivo de a precisão e a exatidão melhorarem com o incremento de ciclos, conforme se observa na Figura 10, deve-se ao fato de a parcela de incerteza associada à medida do tempo ($\sigma_{g_T} = g_0 \cdot 2\sigma_{T_n}/T_n$) estar reduzindo. Sendo $\Delta T_n = \langle \Delta T_n \rangle \pm \sigma_{\Delta T}$, segue-se que $T_n = \langle \Delta T_n \rangle/n \pm \sigma_{\Delta T}/n$, e para uma incerteza de 0,02 s no início e no término dos n ciclos, $\sigma_{\Delta T} = 0,02\sqrt{2} s$, implica que $\sigma_{T_n} = 0,02s \cdot \sqrt{2}/n$, e que $\sigma_{g_T} = (g_0 \cdot 2\sigma_{\Delta T}/T_n)/n \cong (0,175 m \cdot s^{-2})/n$. Desta forma, o desvio em g_0 devido à medição do período torna-se menor que a incerteza devida à medida localização do centro de massa (σ_{g_L}) após 90 iterações.

O experimentador poderá utilizar manualmente um cronômetro para determinar o intervalo de tempo (ΔT_n). Acaso o faça, a incerteza na medida seria oriunda essencialmente de três elementos: incertezas devidas ao próprio instrumento; ao tempo de reação do operador; e ainda, acerca da avaliação de onde se inicia e onde termina o ciclo por parte do operador. Quando se analisam os vídeos, fica evidente que é bem difícil de definir quando o ciclo se inicia ou termina ao se escolher um dos extremos da elongação como referência. Acaso se opte pelo acionamento manual,

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta t}^2 &= 2 \cdot (\sigma_{cr}^2 + \sigma_R^2 + \sigma_j^2) \\ &\approx 2 \cdot \{[0,01 s]^2 + (0,02 s)^2 + (0,02 s)^2\} \\ &\rightarrow \sigma_{\Delta t} \approx 0,04 s \end{aligned}$$

[72, 73], ou seja, maior que o dobro do que se encontra valendo-se da filmagem.

O valor de g_0 obtido para o ensaio número 1, (Figura 10a, $n = 150$) considerados os desvios, é

$$g_{0,1(n=150)} = (9,7706 \pm 0,0023) m \cdot s^{-2},$$

o qual que diverge do valor de referência em $-0,16 m \cdot s^{-2}$, ou seja, está 0,16% abaixo de $g_{ref} = 9,786300 m \cdot s^{-2}$. A partir do gráfico mostrado na Figura 10b, é possível observar que, a partir de quarenta ciclos, $n = 40$, os valores de g_0 não diferem significativamente. Também é possível observar, pelo gráfico,

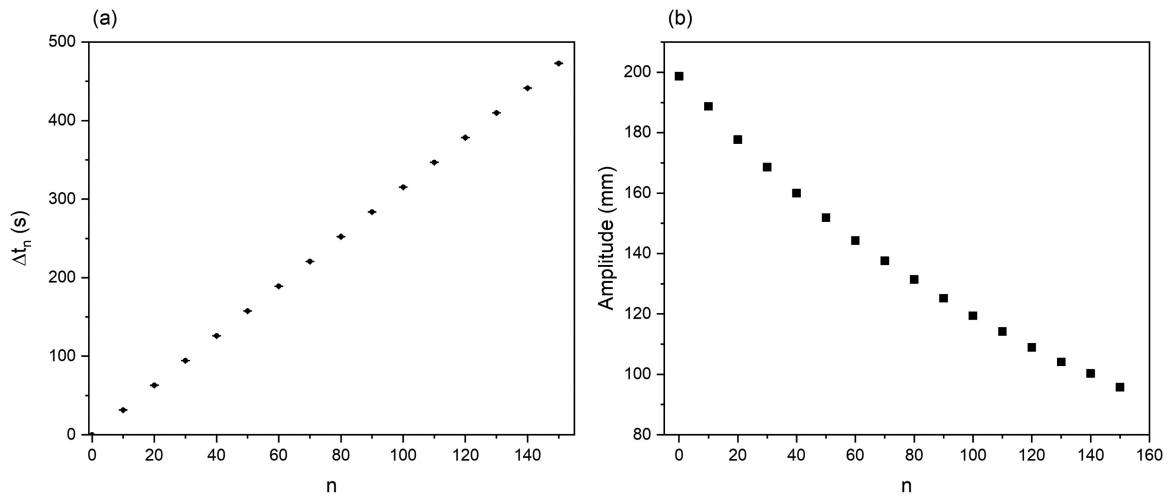


Figura 9: (a) Valores do intervalo de tempo (ΔT_n) em função do número de ciclos (n); (b) Amplitude de oscilação (A) em função do número de ciclos.

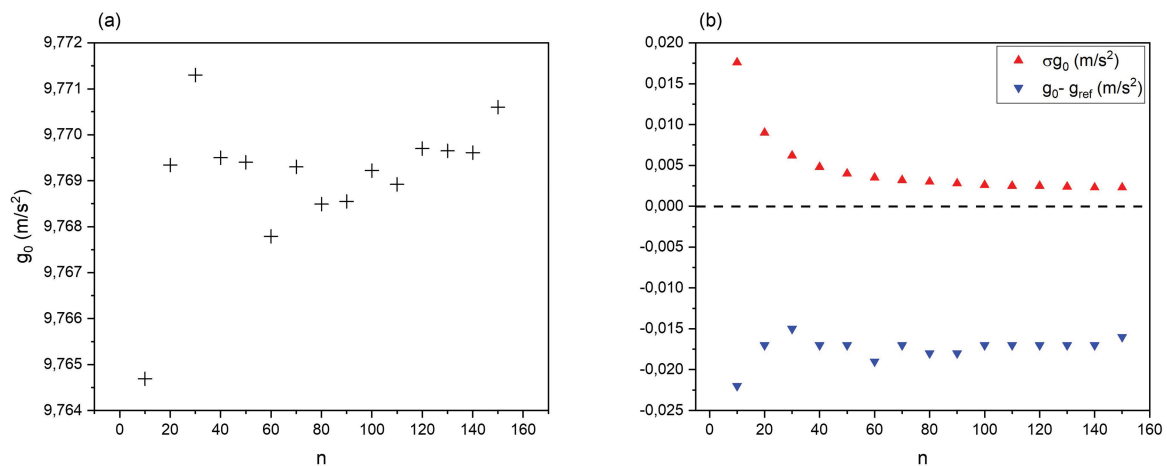


Figura 10: (a) Valores de g_0 versus n (número de ciclos); (b) Comportamento do desvio padrão associado a g_0 (σ_{g_0}) e do erro ($g_0 - g_{ref}$) em função de n .

como o desvio padrão reduz conforme o número de oscilações aumenta, assim como o erro relativo ao valor de referência ($g_0 - g_{ref}$) também diminui. Note-se que os valores de g_0 sempre estão abaixo do valor de referência ($g_0 - g_{ref} < 0 \rightarrow g_0 < g_{ref}$), como havia sido previsto.

6. Efetivando as Correções

Todas as correções, detalhadas a seguir, serão referentes a 150 oscilações do ensaio número 1, incluindo-se o orçamento de todos os desvios correlacionados aos dados experimentais. Iniciando pelo empuxo, sendo $V_{fio} = (1,871 \pm 0,005) \cdot 10^{-7} m^3$, $V_{miç} = (2,48 \pm 0,06) \cdot 10^{-7} m^3$ e $V_{esf} = (8,58 \pm 0,02) \cdot 10^{-6} m^3$, assumindo para a densidade do ar $\rho_{ar} = (1,1946 \pm 0,0003) kg/m^3$, para a pressão atmosférica de $1,0174 \cdot 10^5 Pa$, com umidade relativa de 45,5%, temperatura de $22,2^\circ C$ [74–76], encontra-se $m_{ar} = (1,0770 \pm 0,0029) \cdot 10^{-5} kg$. Com a

equação (4)

$$\Delta g_E = (0,0015656 \pm 0,0000043) m \cdot s^{-2}$$

A correção devida ao momento de inércia do pêndulo considera que $I = (0,40740 \pm 0,00012) kg \cdot m^2$ e $m \cdot L_{CM}^2 = (0,40692 \pm 0,00017) kg \cdot m^2$, substituídos na equação (8), encontra-se

$$\Delta g_I = (0,0114 \pm 0,0049) m \cdot s^{-2}$$

Com a linha de algodão utilizada, $k = (21,7 \pm 2,8) N/m$, com $\theta_0 = (0,08106 \pm 0,00020) rad$ e $m = (0,0672408 \pm 0,0000005) g$, com a equação (13) encontra-se

$$\Delta g_k = (0,000393 \pm 0,000040) m \cdot s^{-2}$$

Enfatiza-se que, embora o efeito da elasticidade do suporte tenha sido desconsiderado neste ensaio, acaso o pêndulo fosse fixado em suportes flexíveis, como hastes

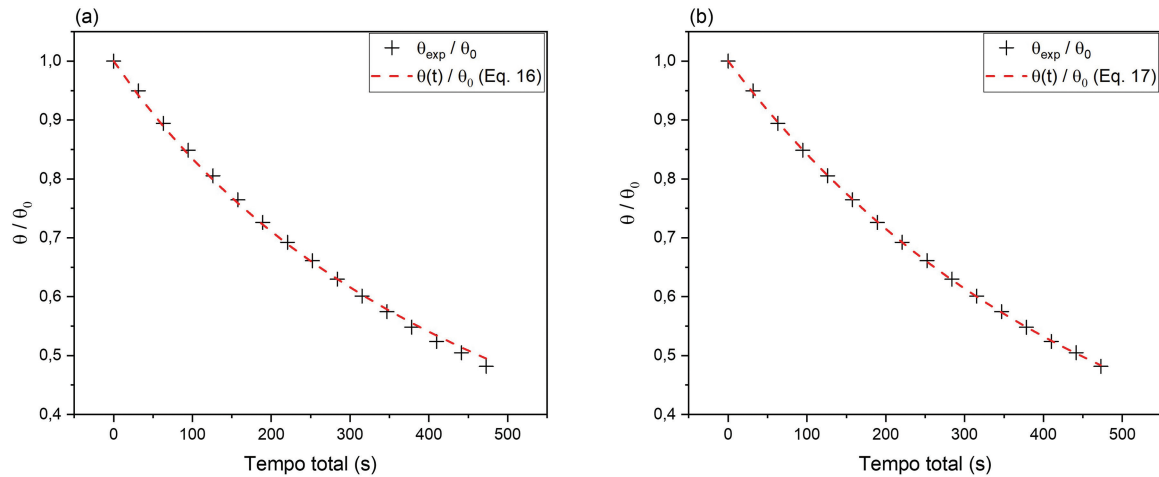


Figura 11: (a) Ajuste pela equação (16) ($R^2 = 0,9990$) aos dados experimentais. (b) Ajuste pela equação (17) ($R^2 = 0,9982$).

de aço presas em tripés costumeiramente empregados nos laboratórios didáticos, a magnitude do efeito da flexibilidade está em torno de $6.10^{-6} m \cdot s^{-2}$ [56, 77].

A determinação da correção devida ao arrasto inicia-se com o ajuste das equações (16) e (17) aos dados apresentados na Figura 9b, $A(t)/A_0 = \theta(t)/\theta_0$, sendo que a equação (16) melhor representa o decaimento porque considera o arrasto de forma mais abrangente (Figura 11a, $R^2 = 0,9990$), contudo, o ajuste com a equação (17) fornece

$$\frac{\theta(T)}{\theta_0} = 0,982965 \cdot e^{-0,00154016 \cdot T} \quad (30)$$

que também oferece uma boa concordância com os dados experimentais, (Figura 11b, $R^2 = 0,9982$), apontando que o arrasto seja predominante linear, principalmente nos últimos ciclos, quando a velocidade máxima do pêndulo é menor, conforme se cogitara precedentemente. Assim, o fator de decaimento definido pela equação (24) será $q = 0,995513 \pm 0,0026$, para um desvio quadrático médio de 0,026% entre os dados experimentais e a equação (30). Portanto, a correção pelo efeito do arrasto, equação (19) resulta em

$$\Delta g_{arr} = (0,003813 \pm 0,000076) m \cdot s^{-2}$$

A última correção refere-se ao efeito da amplitude angular, $\theta(t)$, dada pela equação (27). Para $n = 150$, $\theta_0 = (0,081061 \pm 0,000068) rad$, encontra-se:

$$\Delta g_{\theta,150} = (0,00423 \pm 0,00041) m \cdot s^{-2}.$$

Todas as correções referentes ao centésimo quinquagésimo ciclo do estudo apresentado estão reunidas na Tabela 2. Constata-se que a correção relacionada ao momento de inércia é a de maior impacto, correspondendo a cerca de 53% de toda a correção. O ângulo de abertura, o arrasto, o empuxo e a elasticidade do fio são responsáveis por de 20%, 18%, 7% e 2% da correção, respectivamente.

Tabela 2: Detalhamento dos fatores de correção para a aceleração gravitacional, $n = 150$, ensaio n° 1.

Fator de correção	Δg (m.s ⁻²)	$\Delta g/g_0$ (%)	$\Delta g/\Delta g_{TOTAL}$ (%)
Empuxo	0,001566	0,016	7
Pêndulo físico	0,0114	0,116	53
Elasticidade do fio	0,000393	0,004	2
Arrasto	0,003813	0,039	18
Ângulo (teta)	0,00423	0,043	20
Total	0,021	0,21	100

Deste modo, se o docente considerar somente o efeito do momento de inércia e do empuxo, bastante simples de serem calculados, efetivará cerca de 60% da correção.

A correção total ($\Delta g_n = \Delta g_{E,n} + \Delta g_{I,n} + \Delta g_{k,n} + \Delta g_{arr,n} + \Delta g_{\theta,150}$) apresentada no gráfico da Figura 12, reduz ciclo a ciclo. Isto era esperado porque elevando o número de ciclos, reduz-se a amplitude angular, implicando que o erro na aproximação $sen \theta = \theta$, assumido na equação (1), tornar-se cada vez menor, conforme a correção apresentada na equação (27). Acaso não se levasse o decaimento em consideração, a correção estaria

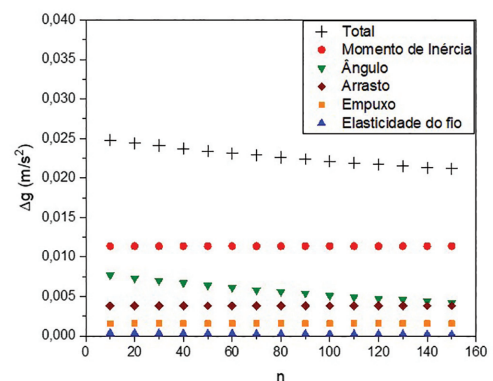


Figura 12: Fatores de correção Δg ciclo a ciclo.

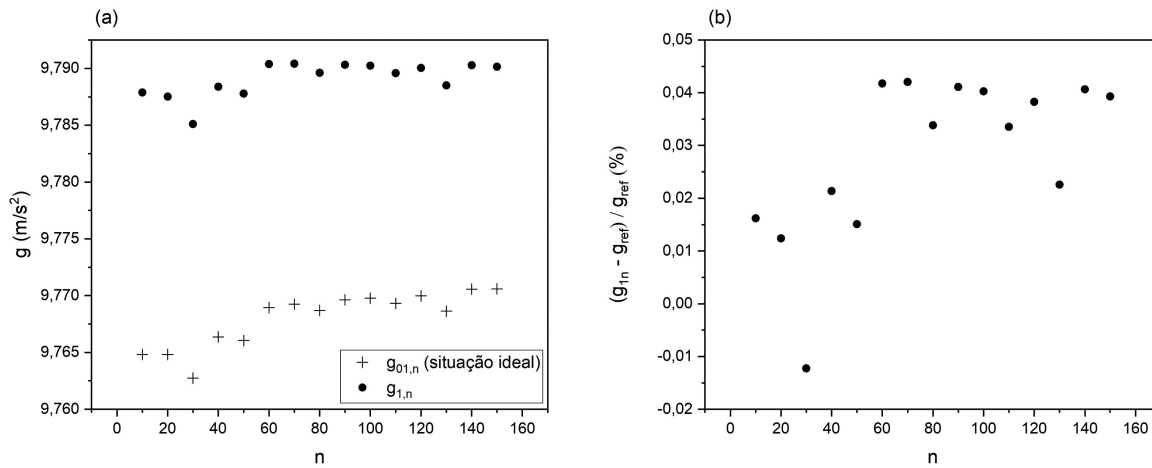


Figura 13: (a) Valores de $g_{01,n}$, (situação ideal) e de $g_{1,n}$ (valor corrigido para o n –ésimo ciclo do primeiro ensaio apresentado); (b) diferenças percentuais de $g_{1,n}$ em relação ao valor de referência.

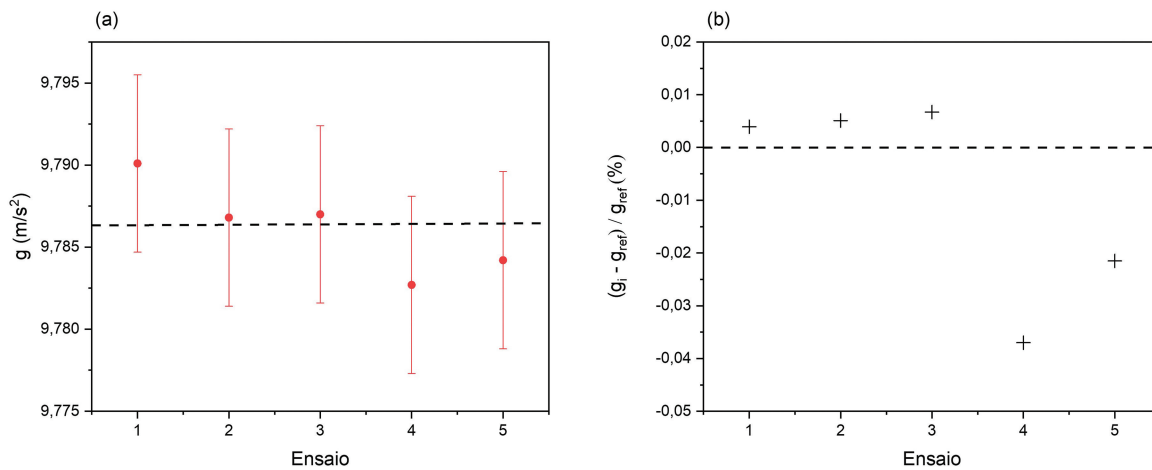


Figura 14: (a) Valores de g_i para os cinco ensaios ($i = 1, 2 \dots 5$), sendo a linha tracejada correspondente ao valor de referência. (b) Diferença percentual (relativa ao valor de referência) para os cinco ensaios realizados.

superestimada em $+0,0035 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, correspondendo a um erro da ordem de 0,036% no valor de g . A coerência desta análise fica reforçada quando se observa a Figura 13a, para $n > 70$, que o valor de g_0 sofre ligeiro acréscimo, enquanto g tende a permanecer constante, salvo ligeiras flutuações. A Figura 13b detalha as diferenças entre o valor de g_n obtido a cada n ciclos e o valor de referência, mostrando também que, para $n > 70$, as diferenças tendem a se estabilizarem, sofrendo flutuações estatisticamente esperadas.

A partir do valor de $g_{0,1(n=150)} = (9,7706 \pm 0,0023) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, com todas as correções consideradas (Figura 13) encontra-se o valor da aceleração gravitacional:

$$g_{1(n=150)} = (9,7901 \pm 0,0054) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

divergindo do valor de referência em $+0,0038 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ou seja, está 0,039% acima. As incertezas em g são maiores que aquelas em g_0 , visto que cada correção carrega a incerteza associada a seus respectivos parâmetros.

Finalmente, seguindo todos os procedimentos adotados para o primeiro ensaio, determinaram-se os valores de g , para os outros quatro ensaios, apresentados na Figura 14. Com os resultados de todos os estudos, encontrou-se a média, com seu respectivo desvio padrão, para o valor de g no campus Londrina da UTFPR:

$$g_{UTFPR-Ld} = (9,7873 \pm 0,0012) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

o qual está $0,001 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ abaixo do valor de referência, ou seja, em 0,01%. Vale Reforçar que a maior dificuldade na coleta de dados experimentais e, também, aquela que esteve mais sujeita aos erros humanos, tornando-se o calcanhar de Aquiles do trabalho, foi a medição do comprimento total do pêndulo (L , Figura 2) e, portanto, aquela que potencialmente é a maior responsável pelas flutuações apresentadas nos gráficos da Figura 14. Para ilustrar, um erro de $0,5 \text{ mm}$ em $L \approx 2500 \text{ mm}$ acarreta um erro $\Delta g_L \approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 0,5 \text{ mm}/2500 \text{ mm} \approx 0,002 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, ou seja, 0,02%, o dobro da divergência

de $0,001 m \cdot s^{-2}$ entre o valor de $g_{UTFPR-Ld}$ e o valor de referência.

7. Conclusão

O estudo desenvolvido objetivava aprimorar a acuracidade do valor da aceleração gravitacional obtido por meio de ensaios com o pêndulo simples, no laboratório didático. Para a execução da atividade, empregaram-se aparatos muito simples e amplamente disponíveis. Para a validação do resultado, duas equações que forneciam o valor da aceleração em função da latitude e da altitude foram confrontadas com o valor da aceleração gravitacional mensurada através de gravímetros absolutos, e concluiu-se que o valor de referência para a aceleração gravitacional no Campus Londrina da UTFPR, localidade onde ocorreram os ensaios, seria $g_{ref} = 9,786300 m \cdot s^{-2}$. A meta foi atingida, considerando-se que, através da metodologia apresentada, o valor obtido para a aceleração gravitacional foi $g = (9,7873 \pm 0,0012) m \cdot s^{-2}$, divergindo em $0,0001 m \cdot s^{-2}$ do valor de referência, ou seja, em 0,01%.

Ficou evidente que, acaso se considere somente o pêndulo idealizado, a aceleração gravitacional obtida tem sua exatidão comprometida por desconsiderar diversos fenômenos suprimidos na simplificação. Entretanto, a boa precisão de g_0 , o valor encontrado no caso ideal, foi essencial para que, em se considerando as correções correlacionadas ao empuxo, momento de inércia, elasticidade do fio, arrasto e ângulo de abertura, g fosse obtido com boa acuracidade. A medição cuidadosa do comprimento do fio e utilizar-se da filmagem simultânea do pêndulo oscilando, e do display do smartphone que operava como cronômetro, foi essencial. O procedimento de medição do intervalo de tempo empregando a filmagem elimina os erros humanos associados ao julgamento e eventuais erros do operador, acaso operasse manualmente um cronômetro para definir o intervalo de tempo. Dentre todas as correções, correspondendo a pouco mais de 50%, aquela associada ao momento de inércia é a mais significativa, e o efeito da elasticidade do fio poderá ser desconsiderada acaso se empregue um fio de algodão. O empuxo corresponde a apenas 5% das correções, mas pode ser incorporado por sua simplicidade aliada à oportunidade de incremento na fundamentação teórica. Os demais efeitos serão analisados de acordo com grupo de alunos e da ementa do curso. Para os pêndulos deste trabalho, $L \cong 2,5 m$ e esfera de aço com diâmetro $D \cong 2,5 cm$, os dados também sugeriram que cerca de oitenta ciclos, algo em torno de quatro minutos, serão suficientes para se obter bons resultados.

O trabalho apresentado norteou-se a fim de que os procedimentos desenvolvidos pudessem ser plenamente replicáveis em qualquer laboratório didático de um curso de graduação em Ciências Exatas. A revisão desta prática tradicional e lúdica gerou procedimentos e análises conceituais que, além de permitirem obter

a aceleração gravitacional com boa com boa acuracidade, também ofereceu ricas potencialidades de ensino de Física embasada em um dispositivo extremamente simples. Então, valendo-se desta prática tão popular e versátil, o docente sempre terá uma excelente ferramenta para desenvolver seu trabalho, podendo abordar grande espectro de fundamentos de Física Clássica. Em suma, valer-se do pêndulo como atividade didática é excelente oportunidade para construção do saber científico, reforçando a importância da proposta apresentada.

Referências

- [1] C.A.C. Castro Junior, *Contribuição ao estabelecimento de um sistema gravimétrico para a América do Sul*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo (2005).
- [2] R.C. Remache, *Ajuste de la red de control básico vertical en función de números geopotenciales*. Tese de Doutorado, Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, Sangolquí (2010).
- [3] C.A.C. Castro Junior, G.N. Guimarães e N.C. Ferreira, *Geociências* **37**, 361 (2018).
- [4] M.R.C. Silva, *Ensaio de História* **1**, 37 (1996).
- [5] J. Needham, *Science and Civilisation in China: Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth* (Cambridge University Press, Cambridge, 1959), v. 3.
- [6] C. Gauld, em: *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives*, editado por M.R. Matthews, C.F. Gauld e A. Stinner (Springer, Dordrecht, 2005).
- [7] DICIONÁRIO PRIBERAM DA LÍNGUA PORTUGUESA, *Pêndulo*, disponível em: <https://dicionario.priberam.org/pêndulo>, acessado em 11/09/2022.
- [8] P. Murdin, *Full Meridian of Glory: Perilous Adventures in the Competition to Measure the Earth* (Copernicus, New York, 2008).
- [9] M.R. Matthews, em: *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives*, editado por M.R. Matthews, C.F. Gauld e A. Stinner, (Springer, Dordrecht, 2005).
- [10] A. Stinner, *Science & Education* **10**, 323 (2001).
- [11] F.L. Silveira e L.O.Q. Peduzzi, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **23**, 26 (2006).
- [12] H. Poynting e J.J. Thomson, *A Textbook of Physics* (Legare Street Press, London, 2022).
- [13] H. Kater, *Philos Trans R Soc Lond.* **108**, 364 (1818).
- [14] V.F. Lenzen e R.P. Multihaufl, *Development of Gravity Pendulums in the 19th Century* (Smithsonian Institution, Washington, 1966).
- [15] HARVARD UNIVERSITY, *Reversible (Kater's) Pendulum*, disponível em: <https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/reversible-katers-pendulum>, acessado em 25/11/2022.
- [16] H.M. Nussenzveig, *Curso de física básica, 1: mecânica* (Blucher, São Paulo, 2013), 5 ed.
- [17] C.H. Furukawa e W. Sano, *Revista de Ensino de Física* **13**, 11 (1991).
- [18] T.C. Luchese, A. Mergen e R. Andrighetto, *Brazilian Journal of Development* **6**, 4891 (2020).

- [19] M.S.T. Araújo e M.L.V.S. Abib, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **25**, 176 (2003).
- [20] M.D. Quirino, *O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (2020).
- [21] A.C.M. Silva, M.V.F. Tomaselli e C.P. Barbosa, *Arquivos Do MUDI* **21**, 20 (2017).
- [22] A.C.P. Fernandes, L.T.S. Auler, J.A.O. Huguenin e W.F. Balthazar, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **38**, e3504 (2016).
- [23] C. Gauld, em: *The Pendulum*, editado por: M.R. Matthews, C.F. Gauld e A. Stinner (Springer, Dordrecht, 2005).
- [24] T.D.C. Luchese e M.N. Schneider, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20200056 (2020).
- [25] G.B. Santos, D.D.A. Santos, T.D.O. Coghi, J.M. Oliveira, N. Aranha e W. Bonventi, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e0121 (2020).
- [26] M.M. Almeida, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **43**, e20200360 (2021).
- [27] A.R. Romero Castellanos, C.E. Alvarez-Salazar e P.C. Holanda, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20190154 (2020).
- [28] M.C. Agarana e S.A. Iyase, *International Journal of Physical Sciences* **10**, 364 (2015).
- [29] C.M. Falco, *Am J Phys.* **44**, 733 (1976).
- [30] A.H. MacDonald e M. Plischke, *Phys Rev B.* **27**, 201 (1983).
- [31] C.B.C. Silva, B.B. Fagundes, J.D. Ribeiro, A.P. Tonel, F.L. Silveira e P.F. Dorneles, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20190085 (2020).
- [32] D.C. Zanotta, E. Cappelletto e M.T. Matsuoka, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 2313 (2011).
- [33] O.P. Lavor e A.N. Oliveira, *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática* **7**, e3001 (2021).
- [34] A. Original, *Caminhos Da Educação Matemática em Revista* **11**, 230 (2021).
- [35] K.T. Boni, C.E. Laburú e P.S. Camargo Filho, *Investigações em Ensino de Ciências* **26**, 97 (2021).
- [36] M.R. Rossini, M.J. Alves, L.H. Amorin e P.S. Camargo Filho, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20200290 (2020).
- [37] R.A. Nelson e M.G. Olsson, *Am J Phys.* **54**, 112 (1986).
- [38] F.J. Arnold, R. Arthur, L.L. Bravo-Roger, M.S. Gonçalves e M.J.G. Oliveira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 4311 (2011).
- [39] C.G. Carvalhaes e P. Suppes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 2701 (2009).
- [40] W. Bonventi e N.N. Aranh, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **37**, 2504 (2015).
- [41] J. Kuhn e P. Vogt, *European J of Physics Education* **4**, 16 (2013).
- [42] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica. Fluidos, Oscilações e Calor* (Blucher, São Paulo, 2014), 5 ed.
- [43] W.E. Boyce, R.C. Diprima e D.B. Meade, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* (LTC, Rio de Janeiro, 2020), 11 ed.
- [44] E. Herrera e S. Morett, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **38**, e3304 (2016).
- [45] M. Alonso e E.J. Finn, *Física: um Curso Universitário – Mecânica* (Blucher, São Paulo, 2014), v. 1, 2 ed.
- [46] J.F. Price, *A Coriolis tutorial, Part 1: 1 the Coriolis force, inertial and geostrophic motion, 2018*, disponível em: www.who.edu/science/PO/people/jpricejprice@who.edu.
- [47] R. Bellman, *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering* (Dover, New York, 1972).
- [48] E.J. Routh, *The effects of finite amplitude, linear damping, and quadratic damping considered as simultaneous perturbations* (Dover, New York, 1955), 6 ed.
- [49] E.J. Routh, *A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Being part II of a treatise on the whole subject* (Macmillan, London, 1905).
- [50] L. Meirovitch, *Elements of vibration Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1975).
- [51] G.B. Thomas, *Cálculo* (Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2012), v. 2, 12 ed.
- [52] J.A. Rizcallah, *Phys Teach.* **53**, 482 (2015).
- [53] S.C. Hong e S.I. Hong, *Phys Teach.* **51**, 139 (2013).
- [54] J.F. Streib, *Am J Phys.* **57**, 181 (1989).
- [55] M.G. Olsson, *Am J Phys.* **44**, 1211 (1976).
- [56] K. Colvill, *Phys Educ.* **5**, 119 (1970).
- [57] D.D. Novaes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **35**, 1314 (2013).
- [58] H. Beyer e S. Kempfle, *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **75**, 623 (1995).
- [59] J. Śmietańska, *Kinematic Viscosity of Air Calculator*, disponível em: <https://www.Omnicalculator.Com/Physics/Kinematic-Viscosity-of-Air>.
- [60] G.D. Quiroga e P.A. Ospina-Henao, *Eur J Phys.* **38**, 065005 (2017).
- [61] A. Arora, R. Rawat, S. Kaur e P. Arun, *arXiv:physics/0608071* (2006).
- [62] J. Chasnov, em: *Scientific Computing* (The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, 2022).
- [63] M.L. Vieira, *Integrais elípticas – funções hiperbólicas e comprimento de arco*, disponível em: <https://matemati.casimplificada.com/integrais-elipticas-funcoes-hiperbolicas-e-comprimento-de-arco/>, acessado em 25/10/2022.
- [64] J. Wang, Q. Xue, L. Li, B. Liu, L. Huang e Y. Chen, *Alexandria Engineering Journal* **61**, 10563 (2022).
- [65] F.S. Lopes, R.N. Suave e J.A. Nogueira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40**, e3313 (2018).
- [66] R. Boynton, em: *60th Annual Conference of the Society of Allied Weight Engineers* (Arlington, 2001).
- [67] W. Lopes, *Cad. Bras. Ens. Fís.* **25**, 561 (2008).
- [68] C. Gemaël, S.R.C. Freitas, P.L. Faggion, J.S. Silva Junior e K. Simões, em: *Anais do Simpósio Brasileiro de Geomática* (Presidente Prudente, 2002).
- [69] *Mapa Topográfico Londrina*, disponível em: <https://Pt-Br.Topographic-Map.Com/Map-S24z4/Londrina/?C=enter=-23.30712%2C-51.11225&z=16&pop=-23.30748%2C-51.11414>.
- [70] IBGE, *Relatório de Estação Geodésica*, disponível em: <http://Www.Bdg.Ibge.Gov.Br/Bdg/Pdf/Relatorio.As p?L1=8061159>.

- [71] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, *NRB 10123 - Especificação Trena de Fita de Aço* (Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, 2012).
- [72] K. West, A. Santos, F.J. Almeida e G.M. Dantas, *A Física no trânsito: Uma discussão para sala de aula*, disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA16_ID10341_14092018013613.pdf.
- [73] A. Jain, R. Bansal, A. Kumar e K. Singh, *Int J Appl Basic Med Res.* **5**, 124 (2015).
- [74] ENGINEERING TOOLBOX, *Air - Density, Specific Weight and Thermal Expansion Coefficient vs. Temperature and Pressure*, disponível em: https://www.engineeringtoolbox.com/air-density-specific-weight-d_600.html, acessado em 11/11/2022.
- [75] L. Hoyos, *Air Density Calculator*, disponível em: <https://Www.Calctool.Org/Atmospheric-Thermodynamics/Air-Density>.
- [76] SIMEPAR. *Sistema de Tecnologia e Monitoramento Ambiental do Paraná, Estações Meteorológicas do Simepar no Paraná*, disponível em: http://previsao.simepar.br/prognozweb/simepar/dados_estacoes/25425241, acessado em 26/10/2023.
- [77] O.H.M. Silva, S.D.M. Arruda, C.E. Laburú e E.A.S. Bueno, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **30**, 409 (2013).