

# Aspectos geométricos da teoria gravitacional: representações equivalentes da gravitação

Geometrical aspects of gravitational theory: equivalent representations of gravitation

R. Bufalo<sup>\*1</sup>, José Tarciso S.S. Junior<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Lavras, Departamento de Física, 37200-900, Lavras, MG, Brasil.

<sup>2</sup>Universidade Federal do Pará, Faculdade de Física, Programa de Pós-graduação em Física, 66075-110, Belém, PA, Brasil.

Recebido em 17 de fevereiro de 2024. Revisado em 24 de junho de 2024. Aceito em 26 de junho de 2024.

Neste trabalho apresentamos uma análise de diferentes abordagens geométricas não-riemannianas para a gravitação que apresentam conteúdos físicos equivalentes à teoria gravitacional de Einstein. Num primeiro momento, revisaremos os principais aspectos matemáticos e físicos das geometrias e como cada uma delas contém conceitos e pontos de vistas distintos (mas ainda equivalentes) sobre a teoria gravitacional. Dentre as diversas formulações da interação gravitação, em particular, discutiremos a geometria riemanniana e a teoria da relatividade geral (em termos do tensor de curvatura  $R$ ), a geometria de Weitzenböck e a teoria teleparalela (em termos do tensor de torsão  $T$ ), e por fim a geometria de Weyl e a teoria teleparalela simétrica (em termos do tensor de não-metricidade  $Q$ ). Em seguida, mostraremos que elas são fisicamente equivalentes ao encontrarmos que elas têm as mesmas equações de campo, obtidas a partir do princípio variacional. Por fim, a fim de ilustrar alguns aspectos da teoria teleparalela simétrica, analisamos a cosmologia no contexto da teoria  $f(Q)$  e as suas contribuições para as equações de Friedmann, e também como ela pode contribuir para fenômenos nos estágios iniciais do Universo (regime de alta curvatura) e também à época tardia (regime de baixa curvatura).

**Palavras-chave:** Gravitação Modificada, Geometria de Weitzenböck, Geometria de Weyl, Teoria Teleparalela, Teoria Teleparalela Simétrica.

In this work we present an analysis of different non-riemannian geometrical approaches to the gravitation that possess equivalent physical content to Einstein's gravitational theory. At a first moment, we review mathematical and physical aspects of the geometries and how each of them have distinct concepts and point-of-view (but equivalent) on regard to the gravitational theory. Among the many approaches to the gravitational interaction, in particular, we discuss the riemannian geometry and the general theory of relativity (in terms of the curvature tensor  $R$ ), the Weitzenböck geometry and the teleparallel theory (in terms of the torsion tensor  $T$ ), at last Weyl's geometry and the symmetric teleparallel theory (in terms of the non-metricity tensor  $Q$ ). Next, we establish that they are physically equivalent by showing that they have the same field equations, obtained from the variational principle. Finally, in order to illustrate some aspects of the symmetric teleparallel theory, we analyze the cosmology in terms of the theory  $f(Q)$  and its contributions to the Friedmann equations, and also how it can contribute to phenomena at early universe (high curvature regime) and at late-time cosmology (low curvature regime).

**Keywords:** Modified Gravity, Weitzenböck geometry, Weyl geometry, Teleparallel theory, Symmetric Teleparallel theory.

## 1. Introdução

O papel da geometria, seja da geometria tridimensional euclidiana da física newtoniana ou ainda da geometria multidimensional da teoria de cordas, foi sempre de grande destaque na física. Podemos encontrar aplicações da geometria nas mais diferentes áreas da física como uma elegante formulação dos problemas. De fato, a formulação de leis físicas no contexto de geometria tem se mostrado extremamente profícua, uma vez que o conteúdo de simetria se torna evidente e também comum em diferentes contextos. Em geral, todas as formulações de problemas modernos da física buscam estabelecer

justamente uma descrição geométrica, vista a robustez desta formulação. Um dos exemplos mais célebres dessa abordagem geométrica são as teorias de gauge, seja a eletrofraca ou gravitacional, em que podem ser formuladas na teoria de fibrados, sendo que a diferença entre elas nesse contexto se resume à escolha do conteúdo de simetria que cada uma delas possui [1, 2].

Podemos dizer que, após os trabalhos de Minkowski na eletrodinâmica de Maxwell, o grande marco científico no uso de geometria na descrição de um sistema físico é devido à proposta de Einstein, em 1915, da descrição da interação gravitacional em termos da teoria da relatividade geral (RG) [3]. Essa teoria descreve a gravitação a partir da curvatura do espaço-tempo  $\mathcal{R}^\sigma_{\alpha\mu\nu}$ , sendo a geometria riemanniana a estrutura matemática presente

\*Endereço de correspondência: [rodrigo.bufalo@ufla.br](mailto:rodrigo.bufalo@ufla.br)

nesta formulação [4–7]. Em termos geométricos, a curvatura é uma medida da rotação que um vetor experimenta ao sofrer transporte paralelo ao longo de um circuito fechado.

A fenomenologia da relatividade geral é extremamente rica, servindo como base para o Modelo Cosmológico Padrão<sup>1</sup> [8, 9] sendo que suas previsões foram escrutinizadas em diversos experimentos com enorme precisão [10]. Podemos citar ainda, neste contexto, as observações das ondas gravitacionais geradas a partir da colisão de buracos negros [11] e também a verificação direta da própria existência dos buracos negros [12].

Observamos que a formulação geométrica de Einstein para a teoria gravitacional é intimamente relacionada com o princípio de equivalência que essencialmente consiste na interpretação de que a interação gravitacional é alheia a um tipo específico de matéria mas sim estabelece uma relação entre a gravidade e a inércia [4–6]. Portanto, o movimento de partículas pode ser associado a propriedades geométricas do espaço-tempo. Ademais, ao adotarmos o caráter geométrico da gravidade proposto pelo princípio de equivalência, é natural explorar maneiras equivalentes em que a gravidade pode ser geometrizada.

À época da proposta da RG, a geometria riemanniana era recente e muitos conceitos ainda estavam sendo desenvolvidos ou melhor compreendidos. Naturalmente, à luz do sucesso da descrição da interação gravitacional a partir do tensor métrico da geometria de Riemann na RG, novas estruturas geométricas foram sendo propostas, conhecidas como geometrias não-riemannianas [13–16]. Dentre os principais exemplos podemos citar a geometria teleparalela de Weitzenböck descrita em termos do tensor de torsão, ou ainda a geometria de Weyl descrita em termos do tensor de não-metricidade, ou ainda a classe mais geral conhecida como a geometria métrica-afim [17–20]. Essas geometrias permitem uma descrição equivalente à teoria da relatividade geral (curvatura) mas agora sob um olhar distinto sobre o objeto matemático responsável pela descrição dos fenômenos gravitacionais (torsão e/ou não-metricidade) [21, 22].

Portanto, modelos baseados nessas geometrias tornam-se interessantes na compreensão e descrição de fenômenos gravitacionais em que a RG aborda de maneira insatisfatória e/ou incompleta [21, 23–26]. Temos testemunhado nos últimos anos um grande número de observações experimentais e tensões de fenômenos cosmológicos, que indicam a possível presença de física além do modelo  $\Lambda$ CDM [27–29]. Por exemplo, diversas observações indicam a existência de matéria escura (não bariônica); ademais, outra dificuldade a ser mencionada é a expansão do universo em seus

estágios iniciais e também a tempos tardios, que exigem a introdução de um campo inflaton e energia escura, respectivamente [25, 26].

Pode-se dizer que as teorias teleparalelas tiveram origem a partir dos trabalhos de H. Weyl em 1918 [13, 30] e A. Einstein em 1928 [31] em suas propostas de unificação das interações eletromagnética e gravitacional [32, 33]. Embora a proposta de unificação de Weyl não tenha obtido êxito, ele introduziu as noções de teorias de gauge na gravitação [13]. As teorias teleparalelas surgem nesse contexto de teorias de gauge [34–41], em que o tensor de torsão  $T_{\beta\mu\nu} \neq 0$  é responsável pela mediação da interação gravitacional e que o tensor de curvatura da conexão teleparalela é nulo  $\mathcal{R}^\sigma_{\alpha\mu\nu} = 0$ , resultando num espaço-tempo plano conhecido como a geometria teleparalela [34, 42, 43]. Do ponto de vista geométrico, por sua vez, a torsão mede o não fechamento do paralelograma (soma de vetores) formado quando dois vetores infinitesimais são transportados paralelamente um em relação ao outro (maiores detalhes na seção 4.1).

Vale destacar que além de oferecer uma alternativa à curvatura na descrição da interação gravitação, o tensor de torsão é intimamente relacionado com a presença de spin de campos de matéria [4, 44–48], recebendo portanto bastante destaque em diversos contextos cosmológicos [34, 49–56].

Por outro lado, é possível formular teorias gravitacionais teleparalelas em geometrias com torsão nula  $T_{\beta\mu\nu} = 0$ , mas agora em termos do tensor de não-metricidade  $Q_{\mu\nu\alpha} \equiv \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \neq 0$ , essa abordagem é conhecida como teoria teleparalela simétrica [57, 58]. Neste caso, a interação gravitacional é definida na geometria de Weyl, onde a quantidade geométrica principal é o tensor de não-metricidade  $Q_{\mu\nu\alpha}$  [13, 14, 30, 59–61]. Em relação a seu aspecto geométrico, o tensor de não-metricidade mensura quanto o comprimento de vetores muda ao realizarmos o transporte paralelo deles (maiores detalhes na seção (5.1)). Essa abordagem tem recebido significativa atenção em aplicações cosmológicas [20, 62–71].

Para cada uma das teorias destacadas anteriormente elaboraremos o processo de formular estruturas geométricas não-riemannianas a fim de estabelecer uma classe de equivalência com a RG (em certo regime das teorias) em termos da formulação da ação funcional. Este manuscrito busca oferecer um panorama sobre teorias gravitacionais modificadas definidas em geometrias não-riemannianas e é voltado para estudantes (de graduação ou pós-graduação) com conhecimento prévio em conceitos da geometria riemanniana e também na RG e que estejam interessados em abordar problemas cosmológicos a partir de novas estruturas geométricas.

Para atingir estes propósitos, este manuscrito tem a seguinte estrutura: estabelecemos na seção 2 os principais elementos da geometria métrica-afim, que serve como um pilar para toda a discussão, em que definimos o conceito de conexão métrica-afim, tensor de contorsão e disformação, bem como o tensor de curvatura; inclusive, abordando como é possível definir uma série de

<sup>1</sup> Este modelo também é conhecido na literatura como Modelo  $\Lambda$ CDM – Lambda Cold Dark Matter e é embasado no princípio cosmológico, que enuncia que o universo em largas escalas é homogêneo e isotrópico.

estruturas (subclasses) geométricas a partir da conexão métrica-afim; sendo que nas seções seguintes abordamos três dessas subclasses geométricas.

Na seção 3 desenvolvemos os principais aspectos da geometria riemanniana e da teoria da relatividade geral, apresentando a noção de transporte paralelo, e as definições de conexão e derivada covariante. A partir dessas definições, introduzimos o tensor de curvatura, as equações de campo de Einstein e também a ação funcional de Hilbert-Einstein.

Em seguida, abordamos a geometria de Weitzenböck e a teoria teleparalela na seção 4 e a geometria de Weyl e a teoria teleparalela simétrica na seção 5. Caracterizamos os principais aspectos dessas geometrias a partir dos tensores de torsão e de não-metricidade, respectivamente; além de definir uma ação a partir de um funcional quadrático e com paridade par envolvendo os tensores de torsão e não-metricidade, respectivamente. Em ambos os casos o conceito de paralelismo absoluto tem papel importante para estabelecer, em nível de ação funcional, uma classe de teorias teleparalelas fisicamente equivalentes à relatividade geral.

Por fim, a fim de ilustração, examinamos na seção 6 aspectos cosmológicos da teoria não linear  $f(\mathbb{Q})$ , explorando, em especial a sua aplicabilidade em relação à expansão do universo (em épocas iniciais e tardias). Na seção 7 apresentamos nossos comentários finais.

## 2. Conexão Métrica-afim e Subclasses Geométricas

A interação gravitacional em escalas do sistema solar e cosmológicas é descrita pela Relatividade Geral (RG), sendo que dados observacionais com alta precisão têm colaborado que o modelo cosmológico padrão, baseado na RG, é de fato a teoria gravitacional. Contudo, certos fenômenos e dados observacionais indicam a incompletude do modelo cosmológico padrão. Naturalmente, é interessante explorar modelos geométricos que possuem representações equivalentes à teoria de Einstein mas que podem fornecer maiores detalhes sobre tais discrepâncias.

A relatividade geral é formulada em termos de uma geometria riemanniana, descrita a partir de uma conexão de Christoffel (12) e do tensor de curvatura (15). Entretanto, a partir da universalidade da interação gravitacional, podemos formular representações fisicamente equivalentes à teoria da RG<sup>2</sup>; por exemplo, a partir da geometria de Weitzenböck que dá origem à teoria teleparalela [34, 35], descrita a partir da conexão de Weitzenböck e do tensor de torsão [4, 44–48], ou ainda a partir da geometria de Weyl que dá origem à teoria teleparalela simétrica [57, 58], descrita a partir da conexão de Weyl e do tensor de não-metricidade [13, 30].

<sup>2</sup> As equações de campo e seu conteúdo físico são idênticos nessa classe de teorias.

É importante mencionar que, embora seja possível formular essas teorias equivalentemente à teoria da RG, essas formulações alternativas carregam novos pontos de vista conceituais e permitem abordar fenômenos que a RG não consegue descrever de maneira satisfatória. Ademais, tais representações alternativas podem ser formuladas a não reproduzir necessariamente a RG, e portanto podem ser tratadas como teorias gravitacionais além do modelo padrão cosmológico (maiores detalhes serão discutidos na seção 6).

A fim de discutir detalhadamente cada uma das teorias gravitacionais elencadas acima, apresentaremos inicialmente a conhecida geometria métrica-afim [17, 18, 20], em que a curvatura, torsão e não-metricidade contribuem para a dinâmica do campo gravitacional. A conexão métrica-afim possui a seguinte representação em termos de três quantidades<sup>3</sup>

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \{\beta_{\mu\nu}\} + K^\beta_{\mu\nu} + L^\beta_{\mu\nu} \tag{1}$$

o primeiro termo é compatível com a métrica e denota o símbolo de Christoffel,

$$\{\beta_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \tag{2}$$

que permite definir o tensor de curvatura de Riemann  $R(g)$  e a geometria riemanniana [4–7]. Por sua vez, temos o termo da contorsão  $K^\beta_{\mu\nu}$ ,

$$K^\beta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^\beta_{\mu\nu} - T^\beta_{\nu\mu}), \tag{3}$$

que é definida em termos do tensor de torsão

$$T^\beta_{\mu\nu} = 2\Gamma^\beta_{[\mu\nu]} = -T^\beta_{\nu\mu}, \tag{4}$$

que é a componente anti-simétrica da conexão, além de ser responsável por definir a geometria de Weitzenböck [6, 34]. Por fim, o último termo da expressão (1) é o tensor de deformação  $L^\beta_{\mu\nu}$ ,

$$L^\beta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Q^\beta_{\mu\nu} - Q^\beta_{(\mu\nu)} = L^\beta_{\nu\mu}, \tag{5}$$

que é definido em termos do tensor de não-metricidade

$$Q_{\beta\mu\nu} \equiv \nabla_\beta g_{\mu\nu}, \tag{6}$$

sendo que a derivada covariante  $\nabla_\mu$  é descrita em termos da conexão métrica-afim (1). A geometria de Weyl é construída a partir do tensor de não-metricidade [57, 58].

Ademais, podemos calcular a curvatura relacionada com a conexão métrica-afim (1)

$$\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = R^\alpha_{\beta\mu\nu}(g) + T^\sigma_{\mu\nu}\Omega^\alpha_{\sigma\beta} + 2\mathcal{D}_{[\mu}\Omega^\alpha_{\nu]\beta} + 2\Omega^\alpha_{[\mu|\sigma}\Omega^\sigma_{\nu]\beta}, \tag{7}$$

<sup>3</sup> A dedução detalhada desta conexão é apresentada no Apêndice A.

em que o tensor  $\Omega^\sigma{}_{\nu\beta}$  é a soma dos tensores contorsão e disformação  $\Omega^\sigma{}_{\nu\beta} = K^\sigma{}_{\nu\beta} + L^\sigma{}_{\nu\beta}$ , e também que  $\mathcal{D}$  é a derivada covariante em relação à conexão de Christoffel (13). De fato, a expressão da curvatura (7) será bastante útil em nossa análise das teorias gravitacionais teleparalelas, inclusive para estabelecer a equivalência delas com a RG.

Essas quantidades geométricas permitem a caracterização de um espaço-tempo nos seguintes casos:

- **espaço-tempo métrico:** a conexão  $\Gamma$  é compatível com a métrica,  $Q_{\beta\mu\nu} = 0$ . A não-metricidade mede quanto o comprimento de vetores muda ao realizarmos o transporte paralelo deles;
- **espaço-tempo sem torsão:** a conexão  $\Gamma$  é simétrica,  $T_{\beta\mu\nu} = 0$ . A torsão nos dá a medida do não fechamento do paralelograma formado quando dois vetores infinitesimais são transportados paralelamente um em relação ao outro;
- **espaço-tempo plano:** a conexão  $\Gamma$  não é curva,  $\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\alpha}(\Gamma) = 0$  (curvatura da conexão métrica-afim). A curvatura mede a rotação que um vetor experimenta ao sofrer transporte paralelo ao longo de um circuito fechado.

Por fim, a partir da geometria métrica-afim, definida em termos da conexão (1), é possível determinar outras estruturas geométricas por meio de certas condições na estrutura da conexão. Discutimos a seguir as possíveis estruturas geométricas:

1. **Geometria de Riemann-Cartan:** esta geometria é obtida da estrutura métrica-afim (1) quando tomamos o tensor de não-metricidade nulo, ou seja  $Q_{\beta\mu\nu} = 0$ ; mantendo apenas o tensor de curvatura  $\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\alpha}(\Gamma) \neq 0$  e o tensor de torsão  $T_{\beta\mu\nu} \neq 0$ ;
2. **Geometria teleparalela:** nesta subclasse (plana) a curvatura é nula  $\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\alpha}(\Gamma) = 0$ , considerando apenas as componentes do tensor de torsão  $T_{\beta\mu\nu} \neq 0$  e o tensor de não-metricidade  $Q_{\beta\mu\nu} \neq 0$ . Portanto, nesta geometria temos que o transporte de vetores é independente do caminho percorrido, ou ainda, que os vetores transportados são independentes da trajetória;
3. **Geometria livre de torsão:** definimos esta geometria ao eliminarmos a torsão  $T_{\beta\mu\nu} = 0$  em (1), e a conexão fica expressa apenas em termos do tensor de curvatura  $\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\alpha}(\Gamma) \neq 0$  e do tensor de não-metricidade  $Q_{\beta\mu\nu} \neq 0$ ;
4. **Geometria de Riemann:** é obtida ao tomarmos uma dupla restrição nas componentes da conexão métrica-afim: tomamos nulas as componentes do tensor de torsão  $T_{\beta\mu\nu} = 0$  e do tensor de não-metricidade  $Q_{\beta\mu\nu} = 0$ ; neste caso, a geometria depende apenas do tensor de curvatura  $\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\alpha}(\Gamma) = R(g) \neq 0$  e temos a conexão de Christoffel  $\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} = \{\beta{}_{\mu\nu}\}$ .
5. **Geometria de Weitzenböck:** nesta geometria (plana) desprezamos os tensores de curvatura

$\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\alpha}(\Gamma) = 0$  e o tensor de não-metricidade  $Q_{\beta\mu\nu} = 0$ , sendo considerado apenas o tensor de torsão  $T_{\beta\mu\nu} \neq 0$ . A conexão nesse caso é a de

Weitzenböck  $\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} = \{\beta{}_{\mu\nu}\} + K^\beta{}_{\mu\nu}$ , a soma dos símbolos de Christoffel com o tensor de contorsão;

6. **Geometria teleparalela simétrica:** obtém-se esta geometria (plana) ao tomarmos nulas as componentes do tensor de curvatura  $\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\alpha}(\Gamma) = 0$  e do tensor de torsão  $T_{\beta\mu\nu} = 0$ , ficando apenas a contribuição do tensor de não-metricidade  $Q_{\beta\mu\nu} \neq 0$ .

A conexão é a de Weyl  $\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} = \{\beta{}_{\mu\nu}\} + L^\beta{}_{\mu\nu}$ , a soma dos símbolos de Christoffel com o tensor de disformação;

7. **Geometria de Minkowski:** E finalmente, considerando que todas as componentes da conexão (1) sejam nulas, tensor de curvatura  $\mathcal{R}^\beta{}_{\mu\nu\alpha}(\Gamma) = 0$ , tensor de torsão  $T_{\beta\mu\nu} = 0$  e tensor de não-metricidade  $Q_{\beta\mu\nu} = 0$ , teremos o espaço plano de Minkowski.

A fim de ilustrar a discussão acima, apresentamos um diagrama em que os casos limites são obtidos a partir da geometria métrica-afim, veja a Figura 1.

Todos os modelos geométricos apresentados acima têm uma grande diversidade conceitual em relação a aspectos físicos e principalmente matemáticos que se fazem presentes nas teorias gravitacionais alternativas à RG. Neste momento, não cabe ao escopo deste trabalho elaborar os aspectos fundamentais de cada uma dessas formulações gravitacionais. Entretanto, neste manuscrito discutiremos dois modelos gravitacionais alternativos: i) a teoria teleparalela, definida em termos da geometria de Weitzenböck, e ii) a teoria teleparalela simétrica, definida em termos da geometria de Weyl. Nesses dois casos formularemos primeiramente as teorias em termos de uma representação equivalente à RG, e em seguida como elas podem ser estendidas a fim de produzir conteúdo físico além do modelo padrão cosmológico. Vale destacar que as três formulações são fisicamente equivalentes pois possuem as mesmas equações de campo, propagam os mesmos graus de liberdade, e portanto possuem o mesmo espaço de soluções físicas.

## 2.1. Aspectos conceituais sobre a equivalência entre as teorias gravitacionais

Antes de iniciarmos a nossa exposição sobre as teorias gravitacionais equivalentes é interessante abordar alguns aspectos conceituais pertinentes dessas teorias, principalmente em relação à dinâmica de partículas e também a questão do acoplamento da matéria com a gravitação.

### 2.1.1. Dinâmica de partículas

Embora seja fisicamente equivalente à RG, a gravitação teleparalela é, conceitualmente, uma teoria completamente diferente. Temos que na RG, a curvatura



que ela preserve as simetrias de gauge dos campos de matéria [74].

Para o propósito deste manuscrito, que é fornecer um panorama sobre teorias gravitacionais formuladas em geometrias não-riemannianas, acreditamos que seja suficiente estabelecer que o princípio de acoplamento mínimo apresenta critérios suficientes para obter o acoplamento da matéria com a gravitação de maneira consistente. Para os interessados, uma discussão detalhada do acoplamento da matéria com geometrias métrica-afim pode ser encontrada na ref [74].

A seguir, iniciaremos a nossa discussão com uma breve revisão da geometria riemanniana e da RG a fim de estabelecer conceitos matemáticos importantes para o desenvolvimento das teorias alternativas.

### 3. Geometria Riemanniana e a Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral tem como estrutura fundamental em sua formulação a geometria de Riemann, a partir da qual desenvolveu-se o modelo cosmológico padrão que possui significativa concordância com dados observacionais. Devido ao importante papel que a geometria do espaço-tempo desempenha na descrição da interação gravitacional, iremos revisar alguns aspectos da geometria riemanniana antes de tratarmos outras geometrias a fim de estabelecer modelos alternativos (e/ou equivalentes) à teoria da RG.

#### 3.1. Transporte paralelo e a conexão de Christoffel

A fim de definir a noção de curvatura e consequentemente da geometria de Riemann, usaremos a abordagem de leis de transformação de tensores: queremos descrever a variação de tensores sob transformações gerais de coordenadas. Em especial, faremos uso da noção de “transporte paralelo” [4–7] que consiste na comparação de tensores definidos em pontos infinitesimalmente próximos, o tensor original com a sua versão transformada, e que permite determinar a variação das componentes de um tensor ao longo de uma geometria.

Podemos ilustrar a noção de transporte paralelo primeiramente na geometria euclideana, em que as componentes de um vetor são mantidas constantes [4, 6]. Se  $A^\beta$  são as componentes de um vetor no ponto  $P(x)$ , e  $A^\beta + dA^\beta$  são as componentes em  $Q(x + dx)$  (infinitesimalmente próximo a  $P$ ), observamos que o transporte paralelo do vetor  $A$  do ponto  $P$  para  $Q$  (esta situação é ilustrada na figura 2) não altera as suas componentes e também que a diferença entre tais vetores é simplesmente o diferencial ordinário  $dA$  definido por<sup>6</sup>

$$dA^\beta(x) = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} dA'^\alpha(x') + A'^\alpha(x') \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha} dx'^\mu. \quad (9)$$

<sup>6</sup> Esta relação pode ser obtida a partir da diferenciação direta da lei de transformação de vetores contravariantes  $A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu(x')$ .

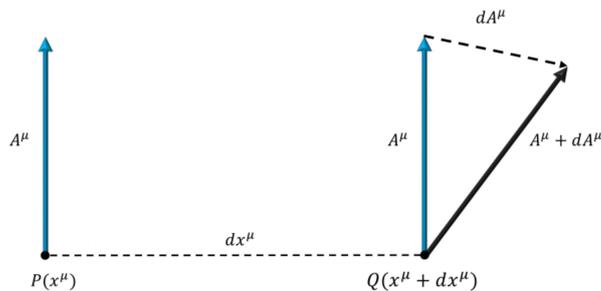


Figura 2: Transporte paralelo sobre uma superfície plana, adaptado de [4].

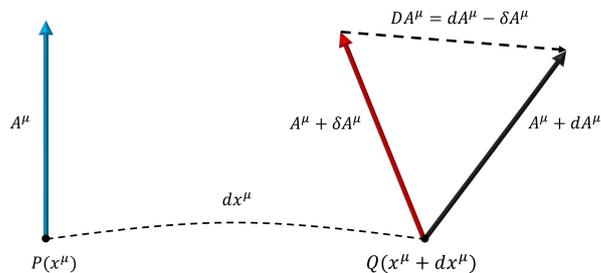


Figura 3: Transporte paralelo sobre uma superfície curva, adaptado de [4].

Ademais, a relação (9) não corresponde a uma transformação correta deste vetor, a menos que tenhamos transformações lineares, tal que  $\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha} = 0$ .

Embora o transporte paralelo do vetor  $A^\beta$  no sistema cartesiano não produza uma variação nas suas componentes, isso não é verdade para geometrias curvas [4, 6]. Como ilustramos na Figura 3, o transporte paralelo do vetor  $A^\beta$  da posição  $P(x)$  para a posição  $Q(x + dx)$  ao longo de uma superfície curva, resultará numa mudança  $\delta A^\beta$  nas suas componentes, de modo que agora elas são  $A^\beta + \delta A^\beta$ . Desta forma, a diferença entre os vetores na geometria curva não é somente  $dA$ , mas é dada por

$$DA^\beta(x) = dA^\beta(x) - \delta A^\beta(x). \quad (10)$$

Do ponto de vista geométrico, interpretamos a quantidade  $DA^\beta$  como a medida do “desvio” oriundo do transporte paralelo do vetor  $A^\beta$  [4, 6].

Ademais, como a variação  $\delta A^\beta$  depende das componentes deste vetor, podemos assumir que esta variação tenha dependência linear nas componentes de  $A^\beta$  e também no deslocamento  $dx^\beta$  (a fim de respeitar a lei de transformação de vetores), de modo que podemos expressá-la como

$$\delta A^\beta(x) = -\Gamma^\beta_{\mu\alpha} A^\alpha(x + dx) dx^\mu, \quad (11)$$

em que as funções  $\Gamma^\beta_{\mu\alpha}$  são conhecidas como as componentes da conexão métrica-afim. A forma explícita desses coeficientes depende da escolha do sistema de coordenadas.

Na geometria riemanniana a conexão é compatível com a métrica ( $Q_{\mu\lambda\sigma} = \nabla_\mu g_{\lambda\sigma} = 0$ ) e também simétrica

(o tensor de torsão é nulo  $T_{\beta\mu\nu} = 0$ ), neste caso, a conexão é conhecida como símbolo de Christoffel ou conexão de Levi-Civita. Portanto, a conexão simétrica da geometria de Riemann, descrita em termos da derivada do tensor métrico, é escrita como,<sup>7</sup>

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \{\mu\nu\}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}(\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}). \quad (12)$$

Desta forma, define-se a derivada covariante de um vetor (com respeito à conexão de Christoffel) da seguinte forma,

$$\frac{DC^{\beta}}{Dx^{\mu}} \equiv \mathcal{D}_{\mu}C^{\beta} = C^{\beta}_{;\mu} = \partial_{\mu}C^{\beta} + \{\mu\alpha\}^{\beta}C^{\alpha}, \quad (13)$$

tal que este operador diferencial seja covariante sob transformações de coordenadas,  $DA^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}}DA'^{\lambda}$  e que também preserva os aspectos tensoriais de tensores quando eles são diferenciados.

Vale a pena mencionar uma importante propriedade da derivada covariante (13) que nos será bastante útil na discussão da conexão teleparalela: a derivada covariante de um tensor na mesma direção em que ele é transportado paralelamente é sempre zero. Seja  $u = u^{\alpha}\partial_{\alpha}$  um vetor tangente à curva  $C$ . Logo, ao transportarmos paralelamente o vetor  $v^{\mu}$  ao longo da curva  $C$ , encontramos que

$$u^{\lambda}\nabla_{\lambda}v^{\mu} = 0. \quad (14)$$

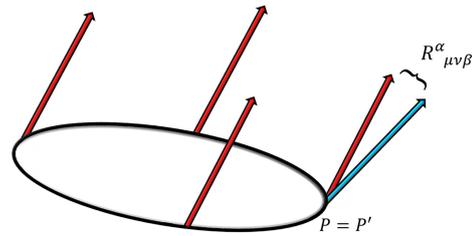
Para concluir a caracterização da geometria de Riemann devemos definir o tensor de curvatura. Para isso, usaremos a derivada covariante (13) para introduzirmos o tensor de Riemann (uma medida da curvatura da geometria), essa abordagem é pertinente pois a derivada covariante de um tensor em certa direção mede a mudança na orientação deste tensor ao ser transportado paralelamente ao longo de uma curva.

### 3.2. A ação de Hilbert-Einstein e as equações de campo

O deslocamento paralelo de um vetor, realizado em uma geometria não-Euclídeana, é, em geral, dependente da trajetória. Assim, se deslocamos um vetor ao longo de um circuito fechado, como uma seção de uma esfera, a direção do vetor final não coincidirá com a sua direção inicial. O tensor de Riemann, como veremos, determina

<sup>7</sup> Podemos citar duas maneiras para determinar a forma explícita de  $\{\mu\nu\}^{\beta}$ : i) a análise da geodésica de partículas em uma superfície curva, e ii) da identidade  $\nabla_{\mu}g_{\lambda\sigma} - \nabla_{\lambda}g_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma}g_{\mu\lambda} = 0$ . Ademais, usaremos a segunda abordagem no apêndice A para determinar a expressão geral da conexão métrica-afim (1), em que a conexão não é compatível com a métrica  $Q_{\mu\lambda\sigma} = \nabla_{\mu}g_{\lambda\sigma} \neq 0$  e também não é simétrica  $T_{\beta\mu\nu} \neq 0$ .

<sup>8</sup> Para que essa lei de transformação seja verificada é necessário que a conexão tenha o seguinte comportamento  $\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\rho}} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}\partial x'^{\rho}}$ , caracterizando a sua natureza como um pseudo-tensor.



**Figura 4:** Mudança que um vetor experimenta ao percorrer um circuito fechado sob efeito da curvatura.

justamente as variações de um vetor ao longo do seu deslocamento paralelo em um contorno fechado infinitesimal (que corresponde a uma geodésica<sup>9</sup>). Ilustramos a interpretação do tensor de Riemann ser uma medida da curvatura (rotação em vetores) de uma geometria na Figura 4.

Dentre as possíveis maneiras de definir o tensor de Riemann destaca-se duas: i) podemos definir a curvatura a partir da seguinte integral de linha  $\Delta A_{\mu} = \oint_{\Gamma} \delta A_{\mu} = \oint_{\Gamma} \{\alpha\mu\}^{\beta} A_{\beta} dx^{\alpha} = \frac{1}{2}R_{\alpha\nu\mu}^{\beta} A_{\beta} \Delta\Sigma^{\alpha\nu}$  (em que  $\Sigma^{\alpha\nu}$  é um elemento infinitesimal da superfície  $S$ , limitada pela curva  $\Gamma$ ), que é uma medida das variações do vetor  $A$  ao longo da curva  $\Gamma$  devido à curvatura da geometria [4, 20]; equivalentemente, ii) o tensor de Riemann pode ser obtido equivalentemente a partir do comutador de duas derivadas covariantes, que mede precisamente a rotação que um vetor experimenta a partir do transporte paralelo em um circuito fechado [4–6].

A partir dessas manipulações encontramos

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}(g) = \partial_{\mu} \{\nu\beta\}^{\alpha} - \partial_{\nu} \{\mu\beta\}^{\alpha} + \{\alpha\sigma\}^{\mu} \{\nu\beta\}^{\sigma} - \{\alpha\sigma\}^{\nu} \{\mu\beta\}^{\sigma}. \quad (15)$$

Vale a pena comentar que embora seja possível escolher um referencial em que localmente a conexão seja nula  $\Gamma = 0^{10}$ , as suas derivadas não necessariamente serão nulas  $\partial\Gamma \neq 0$ , logo implicando que o tensor de curvatura também será não-nulo  $R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} \neq 0$ .

Além do tensor de Riemann, se faz pertinente definir novos tensores na geometria riemanniana: o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu\nu}^{\lambda}$  e o escalar de Ricci  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ . Essas quantidades têm um importante papel no estudo da interação gravitacional como veremos a seguir a partir da definição da equação de Einstein (16) e também da ação de Hilbert-Einstein (21).

O conteúdo físico das equações de Einstein relaciona a geometria do espaço-tempo com o conteúdo de matéria presente na respectiva região do espaço-tempo. A universalidade da interação gravitacional é presente nesta

<sup>9</sup> A equação da geodésica corresponde à equação de movimento de uma partícula, obtida a partir da minimização da trajetória entre dois pontos do espaço-tempo [4–6].

<sup>10</sup> É possível escolher um referencial (coordenadas adequadas) em que as componentes da conexão sejam nulas; todavia, devido ao caráter pseudo-tensorial da conexão as suas componentes não serão necessariamente nulas em outros referenciais.

equação de campo, na qual a natureza não “escolhe” nenhuma geometria a priori.<sup>11</sup> De fato, é a distribuição de matéria que é responsável por criar dinamicamente a estrutura da geometria. As equações de campo de Einstein para a interação gravitacional são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa \Theta_{\mu\nu}, \quad (16)$$

em que  $\kappa = 8\pi G$ , sendo  $G$  a constante gravitacional, enquanto  $\Theta_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento cuja componentes fornecem todos os aspectos do sistema relacionados à distribuição de energia e matéria (em termos de uma descrição de fluidos): densidade de energia, pressão, tensão (viscosidade), etc [6].

Observamos que as equações de Einstein (16) são altamente não lineares no campo métrico  $g_{\mu\nu}$ , e com derivadas primeiras e segundas do campo gravitacional, o que resulta num sistema complexo de equações diferenciais que somente em casos especiais possuem solução analítica. Os principais casos de interesse são aqueles que apresentam conteúdo de simetria bem definido, por exemplo: o princípio cosmológico, que enuncia que o universo em largas escalas é homogêneo e isotrópico. Essas condições permitem propor um ansatz para o campo  $g_{\mu\nu}$ , cujas componentes são determinadas a partir das equações de Einstein (16) para uma dada fonte  $\Theta_{\mu\nu}$ .

Como exemplo, consideremos a descrição da cosmologia moderna a partir do princípio cosmológico, em que a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walter (FLRW) é o nosso ponto de partida<sup>12</sup>

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)), \quad (17)$$

em que  $a(t)$  é o fator de escala do espaço-tempo de FLRW e contém informação sobre a evolução temporal do Universo.

Ademais, assumimos como fonte desta geometria o tensor energia-momento de um fluido perfeito  $\Theta^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$ , sendo  $\rho$  e  $p$  a densidade e pressão do fluido, respectivamente [6]. Neste contexto, encontramos as seguintes equações de Friedmann

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (18)$$

$$\dot{\mathcal{H}} = -4\pi G(\rho + p), \quad (19)$$

em que  $\mathcal{H} = \frac{\dot{a}}{a}$  é o parâmetro de Hubble. Enquanto que, a partir da conservação (covariante) do tensor energia-momento  $\nabla_{\mu}\Theta^{\mu}_{\nu} = 0$ , obtemos

$$\dot{\rho} + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0, \quad (20)$$

sendo a derivada temporal definida como  $\dot{\rho} = d\rho/dt$ . O conjunto de equações (18), (19) e (20), com uma

<sup>11</sup> A não ser alguns ansatz iniciais, por exemplo, isotropia e homogeneidade da geometria.

<sup>12</sup> É importante destacar que todas as métricas abordadas neste trabalho têm natureza lorentziana (inclusive a métrica (17)), com assinatura mais negativa (+, -, -, -).

equação de estado  $p = w\rho$  (em que  $w$  é uma constante) [6], permite a completa caracterização da evolução temporal do nosso universo, desde os seus instantes iniciais (singularidade do big bang) até os tempos atuais (expansão acelerada) [8, 9].

Por fim, podemos obter as equações de campo de Einstein (16) a partir do princípio de mínima ação ao tratarmos o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  como a variável dinâmica da teoria. Observamos que o escalar de Ricci  $R$  envolve apenas derivadas de segunda ordem da métrica, e que pode ser usado para a construção da ação funcional de Hilbert-Einstein para a teoria gravitacional

$$S_{\text{HE}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R(g) + S_m[g_{\mu\nu}, \psi] \quad (21)$$

em que  $S_m$  é a ação para o conteúdo de matéria (representado pelo campo  $\psi$ ). As equações de Einstein (16) são obtidas ao variarmos a ação invariante (21) em relação à métrica  $g_{\mu\nu}$  [4, 6, 7].

O método de obter as equações de campo a partir do princípio de mínima ação se mostra bastante útil e interessante no contexto de teorias alternativas à RG, isto se dá porque é possível fazer uso de conceitos de simetria, por exemplo, para construir-se ações funcionais invariantes. Faremos uso dessa abordagem da ação funcional em nosso estudo sobre a teoria teleparalela e teleparalela simétrica, discutindo inicialmente as principais características das geometrias de cada teoria e as suas particularidades, para então apresentar as ações invariantes e as suas respectivas equações de campo.

#### 4. Geometria de Weitzenböck e a Teoria Teleparalela

Logo após a proposta da Relatividade Geral em 1915, algumas formulações alternativas foram sugeridas, como por exemplo a proposta de H. Weyl em 1918 [30] e posteriormente A. Einstein em 1928 [31], que trabalharam na unificação da gravitação e do eletromagnetismo [32, 33]. Apesar de Weyl não ter obtido êxito na construção da sua teoria unificada, ele introduziu as noções de teorias de gauge na gravitação [13, 34].

As teorias teleparalelas surgem nesse contexto de teorias de gauge, em que o tensor de torsão  $T_{\beta\mu\nu} \neq 0$  é responsável pela dinâmica do campo gravitacional e também que o tensor de curvatura da conexão teleparalela é nulo  $\mathcal{R}^{\sigma}_{\alpha\mu\nu}(\Gamma) = 0$  (condição de teleparalelismo). Observamos assim que teorias teleparalelas são descritas num espaço-tempo plano.

Ademais, vale destacar que o spin dos campos de matéria acopla com o tensor de torsão, logo as geometrias de Einstein-Cartan e a de Weitzenböck são comumente usadas para levar-se em consideração a interação do spin com a gravitação [34, 46]<sup>13</sup>. Discutiremos a seguir,

<sup>13</sup> A teoria teleparalela também pode ser desenvolvida como uma teoria de *gauge* do grupo de translações, descrição que naturalmente inclui a conexão de spin, para maiores detalhes recomendamos o livro [34].

em particular, como podemos desenvolver uma teoria teleparalela equivalente à RG em termos da geometria de Weitzenböck [34].

### 4.1. Geometria de Weitzenböck

A fim de apresentarmos a teoria teleparalela gravitacional, precisamos definir alguns aspectos da geometria de Weitzenböck, que é caracterizada em termos do tensor de torsão. Por sua vez, o tensor torsão está relacionado com a parte anti-simétrica da conexão de Weitzenböck, sendo definido como

$$T^\lambda_{\mu\rho} \equiv 2\Gamma^\lambda_{[\mu\rho]} = -T^\lambda_{\rho\mu}. \tag{22}$$

Do ponto de vista geométrico, como vimos anteriormente, a torsão se relaciona ao fato de uma trajetória nesta geometria não apresentar um circuito fechado em um plano tangente a uma dada superfície. Na Figura 5 podemos visualizar o transporte paralelo de dois vetores infinitesimalmente em um circuito, mostrando que não conseguimos realizar o fechamento do circuito no plano tangente.

Para entender melhor essa questão consideremos os seguintes cenários: na geometria euclideana a soma de dois vetores pode ser visualizada como um paralelograma; por outro lado, no caso de uma geometria não-euclideana isso pode não ser mais verdadeiro. Iniciamos a nossa análise ao realizar o transporte paralelo de vetores infinitesimais: primeiramente, transportamos um vetor  $A^\alpha$  ao longo da direção de  $B^\alpha$  (resultando no vetor  $A'^\alpha$ ), e comparamos essa situação com o transporte do vetor  $B^\alpha$  ao longo da direção de  $A^\alpha$  (resultando no vetor  $B'^\alpha$ ) [4, 20]. Essa ilustração é apresentada na Figura 6.

Ademais, podemos identificar que a soma dos vetores à esquerda do paralelograma é dada por

$$C^\alpha = B^\alpha + A'^\alpha = B^\alpha + A^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} B^\mu A^\nu, \tag{23}$$

que corresponde ao deslocamento  $\overline{OR}$ , enquanto a soma dos vetores à direita do paralelograma é

$$D^\alpha = A^\alpha + B'^\alpha = A^\alpha + B^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \tag{24}$$

e corresponde ao deslocamento  $\overline{OS}$ .

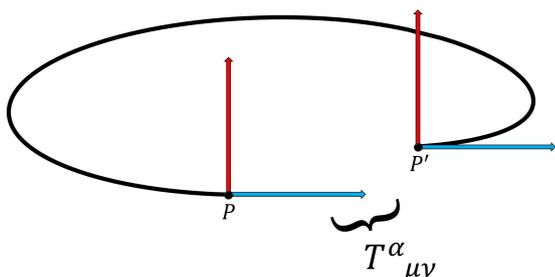


Figura 5: O não fechamento do circuito ao transportarmos um vetor paralelamente é mensurado pelo tensor de torsão.

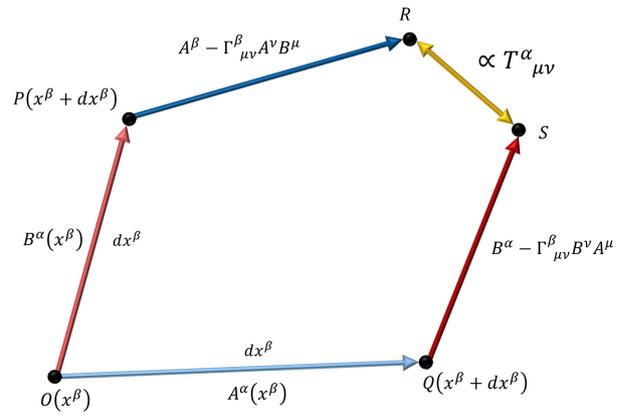


Figura 6: Representação geométrica do não fechamento do paralelograma através do transporte paralelo dos vetores infinitesimais  $A^\alpha$  e  $B^\alpha$  na geometria de Weitzenböck.

O fechamento ou não do paralelograma infinitesimal (o deslocamento total quando  $R = S$ ) nesta geometria é mensurado pela diferença

$$E^\alpha = C^\alpha - D^\alpha, \tag{25}$$

que explicitamente resulta em

$$E^\alpha = 2\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]} A^\mu B^\nu = T^\alpha_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \tag{26}$$

Observamos claramente que o não fechamento do paralelograma é proporcional ao tensor torsão [20, 34, 35], e que geometricamente corresponde ao fato de que os pontos  $R$  e  $S$  não se sobrepõem, veja Figura 6.

Definiremos a seguir alguns aspectos matemáticos da geometria de Weitzenböck necessários para definir o tensor de torsão e a conexão de Weitzenböck: os campos *vierbein*.

#### 4.1.1. Propriedades dos campos *vierbein*

Em nossa discussão da relatividade geral na seção 3 descrevemos tensores em termos de bases coordenadas, ou seja, bases que são adaptadas para coordenadas, pois são simples e naturais para se trabalhar. Todavia, podemos definir bases mais gerais que não são deriváveis de sistema de coordenadas, essas são conhecidas como bases não-coordenadas. As estruturas que caracterizam tal formulação são os vetores da base não-coordenada, os campos *vierbein*  $h^a$  [6, 34].

A observação anterior sobre bases não-coordenadas é crucial para a caracterização da geometria teleparalela e na definição da conexão de Weitzenböck. A geometria (teleparalela) de Weitzenböck é definida em termos do formalismo dos campos *vierbein*  $h^a$ , que são quantidades dinâmicas no espaço-tempo (i.e. relacionadas com gravitação). O campo *vierbein*  $h^a$  é uma base linear que permite relacionar, ponto a ponto, quantidades definidas no espaço-tempo (com coordenadas  $\{x^\mu\}$ ) com

quantidades no espaço tangente (com coordenadas  $\{x^a\}$ ) [6, 34]<sup>14</sup>.

A fim de entender o mapeamento de tensores em diferentes bases no espaço-tempo vamos considerar a seguinte situação: para as coordenadas do espaço-tempo as bases são definidas como

$$\{\partial_\mu\} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}, \quad \{dx^\mu\}, \quad (27)$$

para campos vetoriais e covetoriais, respectivamente [6, 34].

A partir dessas observações podemos escrever que as componentes dos *vierbeins* estão relacionadas com as bases a partir de<sup>15</sup>

$$h^a = h^a_\mu dx^\mu, \quad h_a = H_a^\mu \partial_\mu. \quad (28)$$

onde introduzimos as componentes dos campos *vierbeins*  $h^a_\mu$  e inversa  $H_a^\mu$ . Ademais, tais componentes satisfazem as condições de ortonormalidade

$$\begin{cases} h^a_\mu(x) H_a^\nu(x) = \delta^\nu_\mu, \\ h^b_\mu(x) H_a^\mu(x) = \delta^b_a. \end{cases} \quad (29)$$

Por fim, observamos que o campo *vierbein* é uma base linear que relaciona (ponto a ponto) a métrica do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$  com a métrica do espaço tangente  $\eta_{ab}$  a partir de

$$\begin{cases} g_{\mu\nu}(x) = h^a_\mu(x) h^b_\nu(x) \eta_{ab}, \\ g^{\mu\nu}(x) = H_a^\mu(x) H_b^\nu(x) \eta^{ab}, \end{cases} \quad (30)$$

em que  $\eta_{ab}$  é a métrica de Minkowski  $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Naturalmente, as relações entre as métricas (30) são inversíveis

$$\begin{cases} \eta_{ab} = H_a^\mu(x) H_b^\nu(x) g_{\mu\nu}(x), \\ \eta^{ab} = h^a_\mu(x) h^b_\nu(x) g^{\mu\nu}(x). \end{cases} \quad (31)$$

A partir das definições acima temos que o elemento de linha (invariante) pode ser expresso

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} h^a h^b, \quad (32)$$

em que  $h^a$  são definidos em (28).

Por fim, vale a pena destacar que um sistema físico pode ser descrito de maneira equivalente a partir do campo métrico  $g_{\mu\nu}(x)$  ou do campo vierbein  $h^a_\mu(x)$ . Isto se verifica a partir do fato de que essas quantidades são fisicamente equivalentes, pois contém as mesmas

informações, e também possuem 10 componentes independentes, sendo reduzidas a 2 modos de helicidade após a fixação de *gauge* [34].

Para concluir esta seção, consideraremos um exemplo para ilustrar o cálculo das componentes do campo *vierbein* (28) para o espaço-tempo de Schwarzschild [5, 34]: um espaço-tempo estático, isotrópico e homogêneo, descrito pelo seguinte elemento de linha (em coordenadas esféricas)

$$ds^2 = f(r) dt^2 - g(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (33)$$

sendo os fatores  $f(r)$  e  $g(r)$  determinados a partir das equações de campo [5]. O processo para estabelecer as componentes do campo *vierbein* é simples, e resulta que a base ortonormal para esta métrica é dada por [5]

$$h^0 = f^{1/2} dt, \quad h^1 = g^{1/2} dr, \quad (34)$$

$$h^2 = r d\theta, \quad h^3 = r \sin \theta d\phi \quad (35)$$

ou ainda, em notação matricial

$$h^a_\mu = \begin{pmatrix} f^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (36)$$

A partir dessas expressões e da condição de ortonormalidade (29) podemos também determinar as componentes da inversa  $H_a^\mu$  [5].

Com essa discussão concluímos a nossa exposição sobre o formalismo dos campos *vierbein* e usaremos esses elementos para definir a geometria de Weitzenböck.

#### 4.2. Conexão teleparalela de Weitzenböck

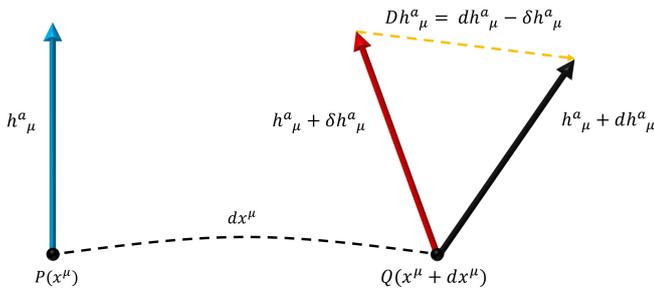
Caracterizaremos a geometria de Weitzenböck a partir da definição da sua derivada covariante e conexão.<sup>16</sup> A fim de estabelecermos tais quantidades seguiremos a abordagem do transporte paralelo de vetores, análogo ao caso da geometria de Riemann.

Iniciamos a análise ao aplicarmos o conceito de transporte paralelo no campo  $h^a_\mu$  ao longo da geometria Weitzenböck. Assim, ao transportarmos paralelamente o campo  $h^a_\mu$  da posição  $P(x)$  até uma posição infinitesimalmente próxima  $Q(x + dx)$ , observamos que as

<sup>14</sup> A nossa notação a partir deste momento, é que as letras gregas  $\mu, \nu, \alpha \dots$  descreverão o espaço-tempo de Weitzenböck, enquanto que as letras latinas,  $a, b, c, \dots, i, j, \dots$  designarão o espaço tangente ou espaço-tempo de Minkowski.

<sup>15</sup> É importante destacar que existem casos particulares de *vierbeins* (triviais) que formam uma base coordenada  $\{h_a\} = \{\partial_a\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} \right\}$  e  $\{h^a\} = \{dx^a\}$ . Tal estrutura de *vierbeins* (referencial trivial) é presente na relatividade restrita [34].

<sup>16</sup> Devemos mencionar que no caso geral da teoria teleparalela temos a presença de duas conexões,  $\nabla_\mu A_\nu^a = \partial_\mu A_\nu^a - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma^a + \omega^a_{\mu b} A_\nu^b$ , em que  $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$  é a conexão relacionada com a gravitação, enquanto  $\omega^a_{\mu b}$  é a conexão de spin relacionada com a inércia [34]. Essas conexões são manifestações da invariância local por transformações gerais de coordenadas e por transformações de Lorentz, respectivamente. Em nossa análise, por simplicidade, consideraremos uma teoria teleparalela em uma classe especial de referenciais de Lorentz: aqueles em que a conexão de spin teleparalela  $\omega^a_{\mu b}$  é nula, isto é, focaremos apenas em efeitos gravitacionais [34].



**Figura 7:** Representação geométrica do transporte paralelo do campo  $h^a_\mu$ .

componentes do campo *vierbein* tornam-se  $h^a_\mu + \delta h^a_\mu$  (devido à geometria), enquanto que a mudança do campo entre esses pontos é simplesmente  $h^a_\mu + dh^a_\mu$ . A derivada covariante é definida como sendo a diferença

$${}^W D h^a_\mu = dh^a_\mu - \delta h^a_\mu, \tag{37}$$

em que  $D$  denota a diferenciação na geometria de Weitzenböck. Ilustramos essa situação na Figura 7.

Assim como observamos na discussão da geometria riemanniana (vide equação (11)), temos que a variação  $\delta h^a_\mu$  da geometria de Weitzenböck também apresenta dependência linear nas componentes de  $h^a_\mu$  e do deslocamento  $dx^\nu$ . Desta maneira, podemos escrever que a variação das componentes  $\delta h^a_\mu$  é descrita por

$$\delta h^a_\mu(x) = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} h^a_\sigma(x + dx) dx^\nu, \tag{38}$$

em que  $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$  é a conexão de Weitzenböck. Portanto, substituindo o resultado (38) na equação (37), encontramos a derivada covariante de Weitzenböck

$$\frac{{}^W D h^a_\mu}{D x^\nu} \equiv \nabla_\nu h^a_\mu \equiv \partial_\nu h^a_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} h^a_\sigma. \tag{39}$$

A geometria de Weitzenböck possui uma importante característica definida em termos da sua conexão: ao considerarmos a conexão de Weitzenböck obtemos uma curvatura  $\mathcal{R}(\Gamma)$  identicamente nula. Essa propriedade é conhecida como **condição de paralelismo absoluto** [34].

Podemos determinar explicitamente a forma funcional da conexão de Weitzenböck ao admitirmos um **paralelismo absoluto** dos campos *vierbeins*: isso pode ser obtido ao lembrarmos que a derivada covariante de um tensor na mesma direção em que ele é transportado paralelamente é zero (veja eq. (14)). Impondo essa condição na equação (39), encontramos que

$$\nabla_\nu h^a_\mu = \partial_\nu h^a_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} h^a_\sigma \equiv 0. \tag{40}$$

A partir da condição de teleparalelismo (40) é possível escrever a conexão de Weitzenböck em termos do campo

*vierbein* como sendo<sup>17</sup>

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = H_a^\lambda \partial_\nu h^a_\mu = -h^a_\mu \partial_\nu H_a^\lambda. \tag{41}$$

Na verdade, a forma da expressão (41) não é nada surpreendente, pois ela é válida para qualquer tipo de teoria teleparalela, vejamos a seguir a justificativa para essa afirmação.

A fim de compreender melhor as implicações da condição de teleparalelismo absoluto podemos explorar algumas propriedades da conexão. Primeiramente, podemos observar que a conexão pode ser localmente eliminada por uma transformação de coordenadas adequada (sistema de coordenadas apropriado), mas isso não implica que a conexão é nula em todos os pontos, porque ela não é um tensor. Vamos formular matematicamente essa observação.

A partir da conexão trivial (em que  $\hat{\Gamma} = 0$ , relacionada com as coordenadas  $\{\hat{x}^\mu\}$ ), encontramos que uma mudança nas coordenadas de  $\{\hat{x}^\mu\} \mapsto \{x^\mu(\hat{x})\}$  resulta em

$$\begin{aligned} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\rho} \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial^2 \hat{x}^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu} \partial_\lambda \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\rho}, \end{aligned} \tag{42}$$

se identificamos  $\frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\rho}$  como as componentes de uma matriz  $\Lambda$ , a última relação é escrita como

$$\Gamma^\nu_{\lambda\rho} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\lambda \Lambda^\mu_\rho. \tag{43}$$

A expressão (43) contém uma relação válida para todas as teorias teleparalelas, pois:

- Se o tensor de curvatura (teleparalelo) é nulo em um sistema de coordenadas, ele continuará sendo zero em qualquer outro sistema de coordenadas; se a curvatura é nula para a conexão trivial  $\hat{\Gamma} = 0$ , ela também será zero para qualquer outra conexão  $\Gamma \neq 0$  obtida a partir de uma mudança de coordenadas em que  $\hat{\Gamma} = 0$ ;
- Uma vez que a mudança de coordenadas  $\{\hat{x}^\mu\} \mapsto \{x^\mu(\hat{x})\}$  é complemente arbitrária e que o tensor de curvatura  $\mathcal{R}^\sigma_{\alpha\mu\nu}$  se anula para todas as conexões (43) (independente dos detalhes da transformação), podemos concluir que qualquer conexão que satisfaz (43) é plana.

Observamos que a discussão acima também é válida para a relação de Weitzenböck (41), pois temos que os campos de *vierbein* são definidos a partir de  $h^a_\mu = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}$ , logo identificamos a matriz  $\Lambda$  com os *vierbein*  $h$ .

Portanto, ao usarmos que a torsão é identificada como a parte antissimétrica da conexão de Weitzenböck e

<sup>17</sup> Como mencionamos anteriormente, essa expressão da conexão de Weitzenböck é válida para referenciais de Lorentz em que a conexão de spin teleparalela  $\omega^a_\mu{}^b$  é nula [34].

também considerarmos a relação (41), encontramos que o tensor de torsão é definido por

$$T^\sigma_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\sigma_{[\mu\nu]} = H^\sigma_a \partial_{[\mu} h^a_{\nu]}. \tag{44}$$

Com esse último resultado vemos que ao estabelecermos as componentes do campo *vierbein* é possível calcular diretamente as componentes do tensor de torsão.

Por fim, podemos observar que a conexão de Weitzenböck, obtida a partir da conexão métrica-afim (1), é relacionada com os símbolos de Christoffel da RG por meio de

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\beta_{\mu\nu}(Q=0) = \{ \overset{\beta}{\mu\nu} \} + K^\beta_{\mu\nu} \tag{45}$$

em que o tensor de contorsão da torsão de Weitzenböck é dado por

$$K^\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} [T^\sigma_{\nu\mu} + T^\sigma_{\mu\nu} - T^\sigma_{\mu\nu}]. \tag{46}$$

Com essas quantidades  $(h^a_\nu, T^\sigma_{\mu\nu}, \overset{W}{\Gamma}^\beta_{\mu\nu})$  conseguimos caracterizar completamente a geometria de Weitzenböck.

### 4.3. A ação da teoria teleparalela e equações de campo

Faremos uso do formalismo Lagrangeano a fim de discutir a equivalência entre a teoria teleparalela formulada na geometria de Weitzenböck com a relatividade geral, isto é, mostraremos que essas teorias são fisicamente equivalentes uma vez que são descritas pelas mesmas equações de campo.

A fim de desenvolvermos a ação funcional relacionada com a teoria teleparalela, podemos fazer uso de uma combinação irreduzível envolvendo o tensor de torsão [18, 34]. Essa combinação tem forma quadrática e paridade par, que nesse caso é escrita como

$$\mathbb{T} \equiv c_1 T_{\alpha\mu\nu} T^{\alpha\mu\nu} + c_2 T_{\alpha\mu\nu} T^{\mu\alpha\nu} + c_3 T_\alpha T^\alpha \tag{47}$$

sendo  $\{c_i\}$  os parâmetros livres (e reais) da teoria que permitem o mapeamento de diversas teorias teleparalelas, enquanto  $T_\mu = T^\beta_{\mu\beta}$  é o traço do tensor de torsão.

A ação da teoria teleparalela é escrita em termos do invariante  $\mathbb{T}$  eq. (47), enquanto as restrições na ação (para a curvatura teleparalela e não-metricidade nulas<sup>18</sup>) são implementadas por meio de multiplicadores de Lagrange

$$S_{\text{Tel}} = - \int d^4x \left[ \frac{h}{2\kappa} \mathbb{T} + \lambda_\alpha{}^{\beta\mu\nu} \mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \Lambda^\alpha{}_{\mu\nu} Q_\alpha{}^{\mu\nu} \right], \tag{48}$$

<sup>18</sup> É importante destacar que a curvatura (teleparalela) é nula devido à condição de paralelismo absoluto. E como veremos a seguir, essa condição tem importantes implicações na análise da equivalência física entre as teorias teleparalela e RG.

em que  $h = \det(h^a_\mu) = \sqrt{-g}$  é o determinante do campo *vierbein*. Essa expressão corresponde a uma estrutura geral da teoria teleparalela.

Ademais, para discutirmos a formulação teleparalela equivalente à relatividade geral é interessante considerarmos a conexão de Weitzenböck escrita em termos dos símbolos de Christoffel da RG eq. (45). O tensor de Riemann, nesse caso, pode ser obtido a partir de (7) e possui a seguinte expressão

$$\mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(g) + T^\sigma{}_{\mu\nu} K^\alpha{}_{\sigma\beta} + 2\mathcal{D}_{[\mu} K^\alpha{}_{\nu]\beta} + 2K^\alpha{}_{[\mu\sigma} K^\sigma{}_{\nu]\beta} \tag{49}$$

em que  $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(g)$  corresponde à contribuição dos símbolos de Christoffel (15), enquanto os demais termos correspondem à contribuição do tensor de torsão de Weitzenböck (41). Por sua vez, o tensor de Ricci é escrito como

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(g) + T^\sigma{}_{\nu\alpha} K^\alpha{}_{\sigma\mu} + K^\rho{}_{\nu\mu} K^\alpha{}_{\alpha\rho} - K^\rho{}_{\alpha\mu} K^\alpha{}_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\alpha K^\alpha{}_{\nu\mu} - \mathcal{D}_\nu K^\alpha{}_{\alpha\mu}. \tag{50}$$

enquanto o escalar de Ricci é

$$\mathcal{R}(\Gamma) = R(g) + \overset{\circ}{\mathbb{T}} + 2\mathcal{D}_\mu T^\mu = R(g) + \overset{\circ}{\mathbb{T}} - \frac{2}{h} \partial_\mu (h T^\mu), \tag{51}$$

em que definimos o escalar de torsão  $\overset{\circ}{\mathbb{T}}$  como

$$\overset{\circ}{\mathbb{T}} = \frac{1}{4} T^{\mu\nu\alpha} T_{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu\alpha} T_{\nu\mu\alpha} - T^\mu T_\mu, \tag{52}$$

sendo que o escalar de torsão (52) corresponde à configuração  $\overset{\circ}{\mathbb{T}} = \mathbb{T}(c_1 = 1/4, c_2 = 1/2, c_3 = -1)$  da estrutura invariante (47).

Ademais, podemos introduzir, por questão de notação, um novo funcional denotado *superpotencial* (ou conjugado à torsão) por meio de

$$S_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{\delta \overset{\circ}{\mathbb{T}}}{\delta T^\alpha{}_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} (K_\alpha{}^{\mu\nu} + \delta_\alpha^\nu T^\mu - \delta_\alpha^\mu T^\nu). \tag{53}$$

Desta forma, o escalar de torsão (52) pode ser reescrito com o auxílio do superpotencial na forma

$$\overset{\circ}{\mathbb{T}} = S_\sigma{}^{\mu\nu} T^\sigma{}_{\mu\nu}, \tag{54}$$

que permite expressar o escalar de torsão, e consequentemente a ação teleparalela (equivalente) de uma maneira mais compacta.

Ao lembrarmos que esta teoria está sujeita à condição de teleparalelismo absoluto, i.e. ao usarmos a conexão de Weitzenböck (45) obtemos uma curvatura identicamente nula  $\mathcal{R}(\Gamma) = 0$ . Logo, encontramos a partir da expressão (51) uma relação entre quantidades dinâmicas da RG e da teoria teleparalela

$$R(g) = -\overset{\circ}{\mathbb{T}} + \frac{2}{h} \partial_\mu (h T^\mu), \tag{55}$$

essa relação tem papel central para estabelecer a equivalência entre a teoria teleparalela (Weitzenböck) com a RG.

Primeiramente, podemos definir a ação da formulação teleparalela da teoria gravitacional (equivalente à RG) como

$$S_{\text{Tel-Eq}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x h \mathring{\mathbb{T}} + S_m [h^a{}_\mu, \psi], \quad (56)$$

sendo  $h$  o determinante do campo *vierbein*,  $\mathring{\mathbb{T}}$  é o escalar de torsão (52) e  $S_m$  é a ação de matéria. Observe que o funcional (56) é um caso particular da ação teleparalela (48).

A partir da definição da ação funcional para a teoria teleparalela equivalente à RG (56) podemos calcular as respectivas equações de campo ao variarmos a ação com respeito ao campo *vierbein*, obtendo assim

$$\frac{2}{h} \partial_\nu (h S_a{}^{\nu\mu}) - 2T^\lambda{}_{\nu a} S_\lambda{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathring{\mathbb{T}} H_a{}^\mu = \kappa \Theta_a{}^\mu \quad (57)$$

com o tensor de energia-momento definido de maneira usual como  $\Theta_a{}^\lambda = \frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^a{}_\lambda}$ .

Finalmente, a partir da relação (55) e das definições das ações de Hilbert-Einstein (21) e da teoria teleparalela equivalente (56), observamos que

$$\begin{aligned} S_{\text{HE}} - S_{\text{Tel-Eq}} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x h (R(g) + \mathring{\mathbb{T}}) \\ &= \frac{1}{\kappa} \int d^4x \partial_\mu (h T^\mu), \end{aligned} \quad (58)$$

ou seja, as ações de Hilbert-Einstein e a da teoria teleparalela de Weitzenböck diferem apenas por uma derivada total, que segundo o teorema de Gauss generalizado é um termo de fronteira que não tem influência nas equações de campo.

De fato, a relação (58) indica que as equações de campo das teorias são fisicamente iguais, isto é, para um dado campo métrico/*vierbein* (por exemplo, FRLW ou Schwarzschild), encontramos as mesmas relações matemáticas e conseqüentemente conteúdo físico. Essa observação demonstra que a teoria teleparalela (56) é fisicamente equivalente à teoria da relatividade geral (21).

Embora tenhamos desenvolvido uma formulação da teoria teleparalela equivalente à RG em (56) é importante enfatizar que a teoria teleparalela geral (48) é uma teoria alternativa à RG, não somente do ponto de vista conceitual, mas também no conteúdo dinâmico. Fato este que levou a um considerável interesse em aplicações cosmológicas [49–51, 53–56].

## 5. Geometria de Weyl e a Teoria Teleparalela Simétrica

Abordaremos agora a terceira formulação geométrica da interação gravitacional, sujeita à condição de teleparalelismo e definida na geometria de Weyl tal que a

dinâmica gravitacional é descrita pelo tensor de não-metricidade  $Q_{\mu\nu\alpha} \equiv \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \neq 0$ <sup>19</sup> esta abordagem recebe o nome de teoria teleparalela simétrica [20, 57, 58].

A principal característica geométrica do tensor de não-metricidade, além de definir uma classe de conexões que não são compatíveis com a métrica, é que ele é associado à medida da variação da magnitude de vetores sob transporte paralelo [20].

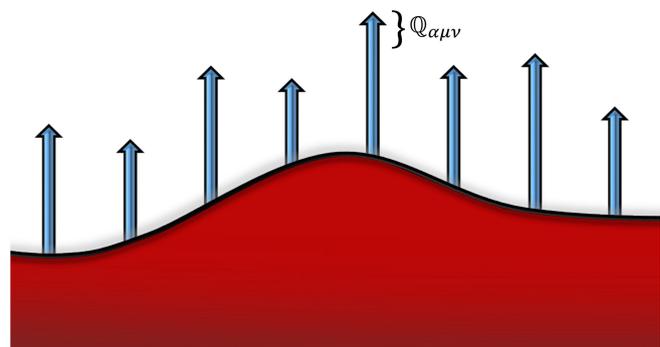
Desenvolveremos nesta seção conceitos do tensor de não-metricidade, da geometria de Weyl e da formulação da teoria teleparalela simétrica e sua equivalência com a RG.

### 5.1. Geometria de Weyl e o tensor de não-metricidade

A classe de geometrias teleparalelas é caracterizada pelo fato de terem curvatura nula  $\mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = 0$  (condição decorrente do teleparalelismo absoluto). Abordaremos nesta seção os fundamentos da teoria teleparalela simétrica definida na geometria de Weyl,<sup>20</sup> que tem o tensor de não-metricidade  $Q_{\mu\nu\alpha} \equiv \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \neq 0$  [13, 14] como quantidade responsável pela dinâmica gravitacional [20, 57, 58].

O grande diferencial dessa geometria está em torno do tensor de não-metricidade, que expressa a falha da conexão em ser compatível com métricas. Ademais, do ponto de vista geométrico, o tensor de não-metricidade mede quanto a norma de vetores muda ao realizarmos o transporte paralelo deles, ilustramos essa situação na Figura 8.

A fim de melhor entender esta situação geométrica podemos nos perguntar como a magnitude de um vetor



**Figura 8:** A variação da magnitude de um vetor transportado paralelamente é medida pelo tensor de não-metricidade.

<sup>19</sup> Vale a pena destacar que originalmente a geometria de Weyl foi definida a partir da estrutura  $Q_{\mu\nu\alpha} = \Omega_\mu g_{\nu\alpha}$ , em que  $\Omega_\mu$  é identificado com o potencial eletromagnético e mediria a não-metricidade [13, 14, 30]. Observa-se, todavia, que a condição  $Q_{\mu\nu\alpha} \equiv \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \neq 0$  generaliza a proposta original.

<sup>20</sup> Deve ficar claro que na geometria de Weyl a conexão métrica-afim é a conexão de Weyl dada por  $\overset{L}{\Gamma}{}^\beta{}_{\mu\nu} \equiv \{\overset{L}{\mu\nu}{}^\beta\} + L^\beta{}_{\mu\nu}$ , que tem a propriedade de gerar uma curvatura idênticamente nula (condição de teleparalelismo).

muda ao ser transportado paralelamente ao longo de uma curva  $C$ . Podemos responder essa pergunta ao lembrarmos da condição  $w^\mu \nabla_\mu u^\lambda = 0$  dada em (14), que corresponde ao fato de que a derivada covariante de um vetor  $u^\lambda$  é zero na mesma direção em que ele é transportado paralelamente ( $w = w^\mu \partial_\mu$  é um vetor tangente à curva).

Essa última observação nos permite determinar como a magnitude do vetor  $\|u\|^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$  varia sob transporte paralelo ao longo da curva  $C$

$$\begin{aligned} w^\lambda \nabla_\lambda \|u\|^2 &= w^\lambda \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) \\ &= (w^\lambda \nabla_\lambda g_{\mu\nu}) u^\mu u^\nu \\ &\quad + 2g_{\mu\nu} u^\mu (w^\lambda \nabla_\lambda u^\nu) \end{aligned} \tag{59}$$

que resulta em

$$w^\lambda \nabla_\lambda \|u\|^2 = Q_{\lambda\mu\nu} w^\lambda u^\mu u^\nu. \tag{60}$$

Dessa forma, vemos claramente que a interpretação geométrica do tensor de não-metricidade é a medida da variação da magnitude de vetores sob transporte paralelo. De maneira geral, podemos dizer que o tensor de não-metricidade mede como objetos que dependem da métrica variam quando eles são transportados paralelamente [20, 58].

### 5.2. Conexão e o gauge coincidente

Como estamos trabalhando com uma teoria teleparalela, os resultados da seção 4.2 são válidos, e a condição de planitude da conexão  $\Gamma^\nu_{\lambda\rho} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\lambda \Lambda^\mu_\rho$ , dada pela equação (43), pode ser usada. No caso da teoria teleparalela simétrica, temos que o tensor de torsão é nulo e isso resulta em

$$T^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{[\mu\nu]} = 0 \rightarrow \partial_{[\mu} \Lambda^\sigma_{\nu]} = 0. \tag{61}$$

Isso implica que as componentes da matriz  $\Lambda$  podem ser escritas como  $\Lambda^\mu_\rho = \partial_\rho \xi^\mu$ , em que  $\xi^\mu$  é uma coleção de funções arbitrárias das coordenadas  $\{x^\mu\}$ , i.e.  $\xi = \xi(x)$ . Portanto, uma conexão plana e livre de torsão é escrita como

$$\Gamma^\nu_{\lambda\rho} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\mu} \partial_\lambda \partial_\rho \xi^\mu. \tag{62}$$

De fato, a equação (62) estabelece uma importante propriedade de conexões plana e livres de torsão: elas podem ser iguais a zero globalmente a partir de uma escolha apropriada de coordenadas. Portanto, se escolhermos as coordenadas como  $\xi^\mu = x^\mu$  (ou ainda qualquer  $\xi$  que seja função linear de  $\{x^\mu\}$ ), a conexão será identicamente nula pois  $\partial_\lambda \partial_\rho \xi^\mu = 0$ . Essa condição é conhecida como **gauge coincidente**.

Contudo, devemos mencionar que embora o gauge coincidente simplifique (ingenuamente) a análise ao tornar a conexão nula, devemos tomar cuidado com o tipo de métrica que podemos usar [20, 21, 58]. Por exemplo,

se escolhermos um elemento de linha do tipo Schwarzschild (33) observamos que teremos componentes da conexão que são escritas em termos de funções trigonométricas que simplesmente não se anulam [6].

De fato, o que o gauge coincidente nos diz é que em um dado sistema de coordenadas em que  $\Gamma = 0$  a métrica não terá mais uma forma simples e diagonal. De maneira prática, não ganhamos nada ao usarmos o gauge coincidente, pois toda a informação que reside inicialmente na conexão é “transportada” para a métrica pela transformação do gauge coincidente  $\{x^\mu\} \rightarrow \{\xi^\mu(x)\}$  [20, 21, 58].

### 5.3. A ação da teoria teleparalela simétrica e equações de campo

A fim de discutir a equivalência entre a teoria teleparalela simétrica formulada na geometria de Weyl com a relatividade geral faremos uso do princípio de mínima ação, isto é, mostraremos que essas teorias são fisicamente equivalentes uma vez que elas têm a mesma ação funcional e portanto fornecem as mesmas equações de campo.

Primeiramente, vamos construir a ação funcional geral da teoria teleparalela simétrica (sem nos preocuparmos ainda com a questão da equivalência). Para isso, introduzimos uma combinação irreduzível contendo o tensor de não-metricidade. Ao impormos que a combinação deve ser quadrática e com paridade par, encontramos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \frac{c_1}{4} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\alpha\beta\gamma} - \frac{c_2}{2} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\beta\alpha\gamma} \\ &\quad - \frac{c_3}{4} Q_\alpha Q^\alpha + c_4 \tilde{Q}_\alpha \tilde{Q}^\alpha + \frac{c_5}{2} Q_\alpha \tilde{Q}^\alpha, \end{aligned} \tag{63}$$

em que os dois traços independentes do tensor de não-metricidade definem os seguintes vetores,

$$Q_\alpha = g^{\mu\lambda} Q_{\alpha\mu\lambda} = Q_{\alpha\lambda}{}^\lambda, \tag{64}$$

$$\tilde{Q}_\alpha = g^{\mu\lambda} Q_{\mu\alpha\lambda} = Q^\lambda{}_{\alpha\lambda}. \tag{65}$$

Observamos ainda que o conjunto da forma quadrática (63) tem cinco parâmetros livres e reais  $\{c_i\}$ .

Formulamos a ação da teoria teleparalela simétrica em termos do invariante  $\mathbb{Q}$  dado em (63), enquanto as restrições na ação (para a curvatura e torsão nulas) são impostas por meio de multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} S_{\text{TelSim}} &= - \int d^4x \left[ \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \mathbb{Q} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_\alpha{}^{\beta\mu\nu} \mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} + \Lambda_\alpha{}^{\mu\nu} T^\alpha_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \tag{66}$$

Essa expressão corresponde a uma estrutura geral da teoria teleparalela simétrica, que é uma teoria modificada da relatividade geral.

Para estabelecermos a equivalência entre a teoria teleparalela simétrica e a RG devemos encontrar a

relação entre o tensor de curvatura da conexão de Weyl com as demais estruturas da geometria. A conexão de Weyl é definida a partir da conexão métrica-afim (1) em que o tensor de torsão é nulo, tal que

$$L^{\beta}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}(T = 0) = \{\beta_{\mu\nu}\} + L^{\beta}_{\mu\nu}, \quad (67)$$

que é proporcional ao tensor de disformação

$$L^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Q^{\beta}_{\mu\nu} - Q_{(\mu}{}^{\beta}{}_{\nu)} = L^{\beta}_{\nu\mu}. \quad (68)$$

Neste caso, podemos obter o tensor de Riemann da geometria de Weyl a partir de (7) tal que o respectivo escalar de curvatura é

$$\mathcal{R}(\Gamma) = R(g) + \mathring{Q} + 2\mathcal{D}_{\mu}(Q^{\mu} - \tilde{Q}^{\mu}), \quad (69)$$

em que definimos o escalar de não-metricidade  $\mathring{Q}$  como

$$\begin{aligned} \mathring{Q} &= \frac{1}{4}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\beta\alpha\gamma} \\ &\quad - \frac{1}{4}Q_{\alpha}Q^{\alpha} + \frac{1}{2}Q_{\alpha}\tilde{Q}^{\alpha}, \end{aligned} \quad (70)$$

onde se faz uso da configuração  $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$  e  $c_4 = 0$  da estrutura invariante (63). Podemos introduzir, por questão de notação, um novo objeto (conjugado à não-metricidade) por meio de

$$\begin{aligned} P^{\alpha}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\frac{\delta\mathring{Q}}{\delta Q^{\alpha}_{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{2}L^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\left(\tilde{Q}^{\alpha}g_{\mu\nu} - Q^{\alpha}g_{\mu\nu} + \delta^{\alpha}_{(\mu}Q_{\nu)}\right). \end{aligned} \quad (71)$$

Desta forma, o escalar de não-metricidade (70) pode ser expresso como

$$\mathring{Q} = P_{\sigma\mu\nu}Q^{\sigma\mu\nu}. \quad (72)$$

Como veremos a seguir, tais definições permitem escrever a ação funcional da teoria teleparalela simétrica e suas equações de campo em termos de uma estrutura mais compacta.

Lembrando que a teoria teleparalela simétrica também é sujeita ao postulado de teleparalelismo absoluto, i.e. ao usarmos a conexão de Weyl (67) obtemos uma curvatura identicamente nula  $\mathcal{R}(\Gamma) = 0$ . Desta forma, encontramos a partir da expressão (69) uma relação entre os invariantes dinâmicos da RG e da teoria teleparalela simétrica

$$\begin{aligned} R(g) &= -\mathring{Q} - 2\mathcal{D}_{\mu}(Q^{\mu} - \tilde{Q}^{\mu}) \\ &= -\mathring{Q} + \frac{2}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}[\sqrt{-g}(Q^{\mu} - \tilde{Q}^{\mu})]. \end{aligned} \quad (73)$$

Definimos a ação da formulação teleparalela simétrica da teoria gravitacional (equivalente à RG) como

$$S_{\text{TelSim-Eq}}[g, \xi] = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \mathring{Q}[g, \xi] + S_m[g, \psi], \quad (74)$$

sendo  $S_m$  a ação de matéria. É importante enfatizar que a notação  $[g, \xi]$  destaca que o funcional (74) depende das funções  $\xi$  que parametrizam a conexão (62).

Ademais, podemos calcular as equações de campo a partir da ação (74), em especial as equações de campo para a métrica são

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{-g}}\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}P^{\lambda}_{\mu\nu}) + P_{(\mu|\lambda\sigma}Q_{\nu)}{}^{\lambda\sigma} \\ - 2P^{\lambda\sigma}{}_{(\mu}Q_{\lambda\sigma|\nu)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{Q} = \kappa\Theta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (75)$$

com o tensor de energia-momento para os campos de matéria definido de maneira usual.

Por fim, a partir da condição de teleparalelismo (73) e das definições das ações de Hilbert-Einstein (21) e da teoria teleparalela simétrica equivalente (74), encontramos

$$\begin{aligned} S_{\text{HE}} - S_{\text{TelSim-Eq}} \\ &= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (R(g) + \mathring{Q}) \\ &= \int \frac{d^4x}{\kappa} \partial_{\mu}[\sqrt{-g}(Q^{\mu} - \tilde{Q}^{\mu})], \end{aligned} \quad (76)$$

ou seja, as ações de Hilbert-Einstein e da teoria teleparalela simétrica diferem por apenas um termo de fronteira que não tem influência nas equações de campo, provando assim a equivalência física entre essas teorias.

Obviamente, embora exista uma classe de teoria paralela simétrica equivalente à RG, as demais classes pertencentes à ação (66) podem ser usadas como teorias alternativas à RG, não somente do ponto de vista conceitual, mas também no conteúdo dinâmico, onde fenômenos além do modelo cosmológico padrão podem ser analisados [20, 62–71].

### 5.4. Teoria da relatividade geral coincidente

Um último aspecto que gostaríamos de abordar sobre a teoria teleparalela simétrica é a sua formulação explícita no gauge coincidente, esta teoria é conhecida como teoria da relatividade geral coincidente [20, 58]. Para formularmos tal teoria, lembremos da conexão (67)

$$L^{\beta}_{\mu\nu} = \{\beta_{\mu\nu}\} + L^{\beta}_{\mu\nu}. \quad (77)$$

Agora, ao impormos a condição de gauge coincidente  $L^{\beta}_{\mu\nu} = 0$  (obtida a partir de (62)), encontramos que

$$L^{\beta}_{\mu\nu} = -\{\beta_{\mu\nu}\}. \quad (78)$$

De maneira geral, podemos reescrever o escalar de não-metricidade  $\mathring{Q}$  eq. (70) em termos do tensor de disformação

$$\mathring{Q} = g^{\mu\nu} \left( L^{\alpha}_{\alpha\beta} L^{\beta}_{\mu\nu} - L^{\alpha}_{\beta\mu} L^{\beta}_{\nu\alpha} \right) \quad (79)$$

que ainda pode ser simplificada a partir da relação (78), o que implica em

$$\mathring{Q} = g^{\mu\nu} (\{ \alpha_\beta \} \{ \beta_{\mu\nu} \} - \{ \alpha_\beta \} \{ \nu_\alpha \} ). \tag{80}$$

A partir da estrutura (80) podemos definir uma ação funcional para a teoria coincidente

$$\begin{aligned} S_{\text{RG-C}}[g] &= S_{\text{TelSim-Eq}}[g, \Gamma = 0] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \\ &\quad \times g^{\mu\nu} (\{ \alpha_\beta \} \{ \beta_{\mu\nu} \} - \{ \alpha_\beta \} \{ \nu_\alpha \} ). \end{aligned} \tag{81}$$

Na teoria coincidente a ação funcional (81) depende apenas da métrica, uma vez que a conexão de Weyl é nula no gauge coincidente. Ademais, vale mencionar que esta ação coincidente também é conhecida como a ação de Einstein, que difere da ação de Hilbert-Einstein por não possuir derivadas de segunda ordem.<sup>21</sup> Essa característica se mostra bastante interessante na formulação variacional da teoria gravitacional coincidente pois, devido à ausência de derivadas de segunda ordem na ação, não é necessário incluir o conhecido termo de fronteira de Gibbons-Hawking-York [20, 58].

## 6. Cosmologia na Teoria $f(\mathring{Q})$

É possível generalizar as formulações discutidas ao longo deste trabalho ao nível não-linear. Neste caso, substituímos os escalares invariantes  $R(g)$ ,  $\mathring{T}$  e  $\mathring{Q}$  por funções arbitrárias

$$S_{f(R)} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \tag{82}$$

$$S_{f(\mathring{T})} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathring{T}), \tag{83}$$

$$S_{f(\mathring{Q})} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathring{Q}). \tag{84}$$

Modificações da teoria gravitacional com esta estrutura têm como grande motivação a liberdade que se ganha na escolha da função  $f$  para explicar fenômenos que não são completamente descritos pela RG ou ainda são além do modelo padrão cosmológico [23, 51, 58], por exemplo, a expansão acelerada do universo, formação de estruturas, ou ainda outros fenômenos que estão relacionadas com a introdução de conteúdos exóticos (energia escura, matéria escura, etc) no conteúdo da fonte do tensor energia-momento  $\Theta_{\mu\nu}$ .

Ademais, essas extensões não-lineares não são mais equivalentes entre si, pois a equivalência discutida anteriormente (a menos de um termo de fronteira) era válida

<sup>21</sup> É interessante observar que a ação (81) também é apresentada como uma ação equivalente à RG na seção 11.6 da ref.[7], diferindo da RG por termos de superfície. Todavia, nesse livro, ela é obtida a partir da ação de Hilbert-Einstein e também que  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ , ou seja, uma abordagem diferente da teoria teleparalela simétrica apresentada aqui em que  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \neq 0$ .

apenas no regime linear. Naturalmente, essas novas teorias não-lineares possuem seu próprio conteúdo físico, equações de campo e graus de liberdade propagantes.

Nesta seção temos como foco a discussão de aspectos cosmológicos da teoria não-linear  $f(\mathring{Q})$  (84). As suas respectivas equações de campo para a métrica são

$$\begin{aligned} f'(\mathring{Q}) G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(\mathring{Q}) - \mathring{Q} f'(\mathring{Q})) \\ + 2 f''(\mathring{Q}) P^\alpha_{\mu\nu} \partial_\alpha \mathring{Q} = \kappa \Theta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{85}$$

sendo  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(g)$  o tensor de Einstein definido em termos do campo métrico  $g$ .

Vale enfatizar que na teoria (84) a condição de teleparalelismo foi aplicada sobre a curvatura da conexão teleparalela  $\mathcal{R}(\Gamma) = 0$ , tal que os objetos de curvatura  $R_{\mu\nu}(g)$  e  $R(g)$  na expressão (85) são expressos em termos do tensor de não-metricidade e do invariante  $\mathring{Q}$ , veja a eq. (73).

Ademais, é importante destacar que a teoria gravitacional  $f(\mathring{Q})$  tem as soluções da RG como casos especiais, isso se mostra interessante em aplicações cosmológicas e de física de buracos negros. Em particular, observamos que se  $f''(\mathring{Q}) = 0$  e  $f'(\mathring{Q}) = \text{cte}$  a expressão (85) reproduz as equações de campo de Einstein com uma constante cosmológica [20, 58, 69].

Por fim, como ilustração da discussão anterior, podemos assumir uma configuração simples em que  $\mathring{Q} = \mathring{Q}_0 = \text{cte}$  tal que  $\partial_\alpha \mathring{Q} = 0$  em (85). A partir dessa consideração, as equações de campo (85) assumem a forma

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Lambda_{\text{ef}} = \kappa \tilde{\Theta}_{\mu\nu} \tag{86}$$

em que identificamos uma constante cosmológica efetiva e um tensor energia-momento normalizado dados por

$$\Lambda_{\text{ef}} = \frac{f(\mathring{Q}_0) - \mathring{Q}_0 f'(\mathring{Q}_0)}{f'(\mathring{Q}_0)}, \tag{87}$$

$$\tilde{\Theta}_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(\mathring{Q}_0)} \Theta_{\mu\nu} \tag{88}$$

Esses resultados são importantes pois mostram ser possível recuperar algumas das soluções da RG a partir de configurações gerais de  $\mathring{Q}$  na formulação  $f(\mathring{Q})$ , com  $f''(\mathring{Q}) \neq 0$ .

A fim de concluir a nossa discussão sobre a teoria  $f(\mathring{Q})$ , vamos abordar a cosmologia neste contexto a partir das equações de Friedmann modificadas [20, 58, 69]. Para isso, consideremos o gauge coincidente (conexão trivial) e a métrica FLRW como ponto de partida

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0, \tag{89}$$

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(N^2(t), -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)) \tag{90}$$

em que  $N(t)$  e  $a(t)$  são a função lapso e o fator de escala do espaço-tempo de FLRW, respectivamente. Para este caso, o escalar de não-metricidade é simplesmente dado por

$$\mathring{Q} = -\frac{6\mathcal{H}^2}{N^2} \tag{91}$$

em que  $\mathcal{H} = \frac{\dot{a}}{a}$  é o parâmetro de Hubble. Ademais, a ação (84) pode ser expressa como

$$S_{f(\mathring{Q})} = -\frac{1}{2} \int dt d^3x a^3(t) N(t) f(\mathring{Q}). \tag{92}$$

Podemos observar explicitamente a presença de uma invariância por reparametrização  $t \rightarrow \zeta(t)$  e  $N(t) \rightarrow N(t)/\dot{\zeta}(t)$ , sendo  $\zeta(t)$  uma função arbitrária de  $t$ . A partir desta simetria, e sem perda de generalidade, podemos fixar a função lapso como  $N(t) = 1$  [58]. Neste contexto, encontramos as seguintes equações de Friedmann

$$-6f'\mathcal{H}^2 - \frac{1}{2}f = 8\pi G\rho \tag{93}$$

$$(12\mathcal{H}^2 f'' + f') \dot{\mathcal{H}} = -4\pi G(\rho + p) \tag{94}$$

$$\dot{\rho} = -3\mathcal{H}(\rho + p) \tag{95}$$

sendo  $\rho$  e  $p$  a densidade e pressão do fluido, respectivamente. A fim de ilustração, podemos considerar alguns casos de interesse da função  $f(\mathring{Q})$ : o primeiro modelo seria descrito pela função

$$f(\mathring{Q}) = \mathring{Q} + \lambda\sqrt{\mathring{Q}}, \tag{96}$$

que representa uma generalização da teoria paralela simétrica (descrita pelo caso em que  $\lambda = 0$ ). Ademais, este modelo possui a mesma evolução do background FLRW como na RG, diferenciando-se da RG em nível de perturbações [20, 58, 69].

Outra família de modelos é descrita pela modificação

$$f(\mathring{Q}) = \mathring{Q} - 6g\lambda^2 \left(\frac{\mathring{Q}}{6\lambda^2}\right)^\gamma \tag{97}$$

em que  $g$  e  $\gamma$  são parâmetros adimensionais. Observamos que a função (96) é recuperada para o caso em que  $\gamma = 1/2$ , enquanto a teoria teleparalela simétrica é obtida quando  $\gamma = 1$ .

Neste caso, encontramos a partir de (97) que a equação de Friedmann modificada (93) é dada por

$$\mathcal{H}^2 \left[ 1 + (1 - 2\gamma)g \left(\frac{\mathring{Q}}{\lambda^2}\right)^{\gamma-1} \right] = \frac{\kappa}{3}\rho \tag{98}$$

Ao analisarmos o resultado (98) observamos que:

- no regime em que  $\gamma < 1$  as correções para a evolução da RG tornam-se relevantes a baixas curvaturas, ou seja, essas correções contribuem para a cosmologia à época tardia;

- enquanto que para  $\gamma > 1$  as correções se tornam significativas no regime a altas curvaturas, ou seja contribuem para os estágios iniciais do Universo.

Dessa forma, concluímos que modelos  $f(\mathring{Q})$  nos regimes discutidos acima são candidatos viáveis para a descrição do Universo inicial e tardio em termos de cenários inflacionários alternativos e sem a presença de energia escura, respectivamente.

## 7. Comentários Finais

É incontestável a importância da geometria na descrição da interação gravitacional. Podemos dizer que a proposta de Einstein em 1915 da teoria da relatividade geral é o marco científico do uso da geometria na formulação de sistemas físicos, bem como as propostas de Einstein, Weyl e também de Kaluza-Klein em suas teorias unificadoras [32, 33]. Buscamos com este trabalho apresentar diferentes estruturas geométricas que permitem a descrição de fenômenos gravitacionais.

Neste trabalho abordamos teorias gravitacionais alternativas formuladas em geometrias não-riemannianas mas fisicamente equivalentes à RG, elas são construídas a partir de quantidades geométricas distintas (mas complementares) à curvatura  $R$ , a saber, o tensor de torsão  $T$  e o tensor de não-metricidade  $Q$ . Discutimos inicialmente a geometria métrica-afim que considera todas essas estruturas para a construção da sua conexão métrica-afim. Abordamos também como é possível obter casos particulares de interesse: a teoria teleparalela de Weitzenböck descrita em termos da geometria de Weitzenböck em termos do tensor de torsão (com  $Q = 0$ ), e também a teoria teleparalela simétrica descrita na geometria de Weyl em termos do tensor de não-metricidade (com  $T = 0$ ).

Embora a RG seja construída a partir do tensor de curvatura na geometria de Riemann, é possível estabelecer novas formulações, em particular, a abordagem teleparalela que implica que a curvatura métrica-afim é identicamente nula e assim outras quantidades geométricas são responsáveis pela descrição da dinâmica gravitacional. O caso mais célebre (inclusive usado por Weyl e Einstein em suas propostas unificadoras) é a teoria teleparalela, que é formulada em geometria(s) plana(s) (a curvatura teleparalela é nula), sendo descrita pelo tensor de torsão ou em termos do tensor de não-metricidade<sup>22</sup>.

As teorias teleparalelas têm conteúdo geométrico e físico bastante interessantes:

- É conhecido que o tensor de torsão tem um importante papel na descrição de campos de matéria com spin, uma vez que a torsão é o objeto responsável pela interação gravitacional com o spin;

<sup>22</sup> Naturalmente, temos uma geometria teleparalela geral em que ambos os tensores de torsão e não-metricidade são não nulos,  $T \neq 0$  e  $Q \neq 0$ .

- Discutimos com detalhes importantes aspectos do tensor de torsão, inclusive a sua interpretação geométrica como uma medida do não-fechamento de paralelogramas (sob transporte paralelo);
- No caso do tensor de não-metricidade examinamos a sua interpretação como uma medida da variação da magnitude de vetores (sob transporte paralelo), a definição do gauge coincidente e consequentemente o anulamento da conexão globalmente (para uma escolha apropriada de coordenadas).

Para estabelecermos a equivalência das teorias teleparalelas com a RG usamos o princípio de mínima ação:

- Definimos teorias teleparalelas gerais, primeiramente, em nível de ação funcional em termos do tensor de torsão [não-metricidade] para construir o invariante  $\mathbb{T}$  eq. (47) [invariante  $\mathbb{Q}$  eq. (63)].
- A equivalência é estabelecida ao usarmos a condição de teleparalelismo absoluto na ação funcional (seja em termos da conexão de Weitzenböck ou da conexão de Weyl); tal que podemos estabelecer uma teoria teleparalela em termos do invariante  $\mathring{\mathbb{T}}$  eq. (52) [teleparalela simétrica, em termos do invariante  $\mathring{\mathbb{Q}}$  eq. (70)] que é fisicamente equivalente à teoria da RG.

Para concluirmos, escolhemos uma breve discussão da teoria não-linear  $f(\mathring{\mathbb{Q}})$  a fim de elucidarmos alguns aspectos de como podemos identificar, por exemplo, uma descrição efetiva da constante cosmológica por uma teoria  $f(\mathring{\mathbb{Q}}) \propto \mathring{\mathbb{Q}} + \lambda\sqrt{\mathring{\mathbb{Q}}}$ . Ou ainda, em termos da estrutura  $f(\mathring{\mathbb{Q}}) \propto \mathring{\mathbb{Q}} + g\mathring{\mathbb{Q}}^\gamma$ , que pode ter impacto nos estágios iniciais do universo a altas curvaturas ( $\gamma > 1$ ) ou ainda na época tardia do universo a baixas curvaturas ( $\gamma < 1$ ) e sem fazer uso de mecanismos e/ou conteúdo exótico de fonte no tensor energia-momento.

Esperamos com essa exposição motivar o estudo de teoria gravitacionais alternativas (mas equivalentes em certo regime) à RG, mas definidas a partir de um ponto de vista e conceitos geométricos diferenciados (geometrias não-riemannianas), permitindo a abordagem de problemas cosmológicos que o modelo padrão não consegue descrever de maneira satisfatória.

## Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores pelas críticas, comentários e sugestões que levaram à melhoria do manuscrito. R.B. agradece o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Projeto CNPq No. 306769/2022-0). O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## A. Conexão Métrica-afim

Como discutimos anteriormente, devido ao seu caráter pseudo-tensorial, a conexão não contém significado intrínseco à geometria. Todavia, ainda é possível extrair informação geométrica da conexão não-riemanniana a partir de uma composição em termos de: símbolos de Christoffel, e dos tensores de torsão e não-metricidade [4, 15, 20].

O nosso ponto de partida é a derivada covariante da métrica ser não nula (implicando no tensor de não-metricidade  $Q_{\rho\mu\nu} = \nabla_\rho g_{\mu\nu} \neq 0$ ) e considerar também suas permutações cíclicas, a saber

$$Q_{\rho\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu}, \quad (\text{A.1})$$

$$Q_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}, \quad (\text{A.2})$$

$$Q_{\nu\rho\mu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu}. \quad (\text{A.3})$$

Agora, ao subtraímos a segunda e terceira equações da primeira, encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (Q_{\rho\mu\nu} - Q_{\mu\nu\rho} - Q_{\nu\rho\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu}) \\ &+ \frac{1}{2} (\Gamma_{\nu[\mu\rho]} + \Gamma_{\rho(\mu\nu)} - \Gamma_{\mu[\rho\nu]}). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ademais, fazendo uso da identidade  $\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\Gamma_{\rho(\mu\nu)} + \frac{1}{2}\Gamma_{\rho[\mu\nu]}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\ &+ \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (T_{\nu\rho\mu} + T_{\mu\rho\nu} + T_{\rho\mu\nu}) \\ &+ \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (Q_{\rho\mu\nu} - Q_{\mu\rho\nu} - Q_{\nu\rho\mu}), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

em que fizemos uso da definição do tensor de torsão  $T^\lambda_{\mu\rho} \equiv \Gamma^\lambda_{[\mu\rho]}$ .

Por fim, identificando os símbolos de Christoffel

$$\{\sigma_{\mu\nu}\} \equiv \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.6})$$

o tensor de contorsão

$$K^\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (T_{\nu\rho\mu} + T_{\mu\rho\nu} + T_{\rho\mu\nu}), \quad (\text{A.7})$$

e o tensor de disformação

$$L^\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (Q_{\rho\mu\nu} - Q_{\mu\rho\nu} - Q_{\nu\rho\mu}), \quad (\text{A.8})$$

encontramos a expressão da conexão métrica-afim (1) dada por

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \{\sigma_{\mu\nu}\} + K^\sigma_{\mu\nu} + L^\sigma_{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

que representa todas as possíveis contribuições à conexão métrica-afim.

## Referências

- [1] B. Felsager, *Geometry, Particles and Fields* (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [2] R. Aldrovandi e J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, New Jersey, 2016), 2 ed.
- [3] B. Hoffmann, *Relativity and its Roots* (Dover Publications, New York, 1999).
- [4] V. De Sabbata e M. Gasperini, *Introduction to Gravitation* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1986).
- [5] R.M. Wald, *General Relativity* (Chicago University Press, Chicago, 1984).
- [6] S.M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2019).
- [7] Ray D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1992).
- [8] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2016), 2 ed.
- [9] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology* (Wiley, Edinburgher, 2015), 3 ed.
- [10] C.M. Will, *Living Rev. Rel.* **17**, 1 (2014).
- [11] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [12] K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, R. Azulay, A.k. Baczkó, D. Ball, M. Baloković, J. Barrett, D. Bintley et al., *Astrophys. J. Lett.* **875**, L1 (2019).
- [13] H. Weyl, *Space, Time, Matter* (Dover Publications, New York, 1952).
- [14] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1924), 2 ed.
- [15] J.A. Schouten, *Ricci Calculus* (Springer, Berlin, 1954), 2 ed.
- [16] L.P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry* (Dover Publications, New York, 2005).
- [17] F.W. Hehl, J.D. McCrea, E.W. Mielke e Y. Ne’eman, *Phys. Rept.* **258**, 1 (1995).
- [18] M. Blagojevic, *Gravitation and Gauge Symmetries* (CRC Press, Londres, 2001).
- [19] M. Hohmann, *Symmetry* **12**, 453 (2020).
- [20] L. Heisenberg, *Phys. Rept.* **1066**, 1 (2024).
- [21] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg e T.S. Koivisto, *Universe* **5**, 173 (2019).
- [22] S. Capozziello, V. De Falco e C. Ferrara, *Eur. Phys. J. C* **82**, 865 (2022).
- [23] S. Nojiri e S.D. Odintsov, *Phys. Rept.* **505**, 59 (2011).
- [24] S. Capozziello e M. De Laurentis, *Phys. Rept.* **509**, 167 (2011).
- [25] T. Clifton, P.G. Ferreira, A. Padilla e C. Skordis, *Phys. Rept.* **513**, 1 (2012).
- [26] S. Nojiri, S.D. Odintsov e V.K. Oikonomou, *Phys. Rept.* **692**, 1 (2017).
- [27] E.W. Kolb e M.S. Turner, *Front. Phys.* **69**, 1 (1990).
- [28] R.A. Battye, T. Charnock e A. Moss, *Phys. Rev. D* **91**, 103508 (2015).
- [29] W.L. Freedman, *Nature Astron.* **1**, 0121 (2017).
- [30] H. Weyl, em: *The Principle of Relativity*, editado por H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski e H. Weyl (Dover Books, New York, 1952).
- [31] A. Unzicker e T. Case, arXiv:physics/0503046 (2005).
- [32] H.F.M. Goenner, *Living Rev. Rel.* **7**, 2 (2004).
- [33] H.F.M. Goenner, *Living Rev. Rel.* **17**, 5 (2014).
- [34] R. Aldrovandi e J.G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction* (Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2013), v. 173.
- [35] M. Hohmann, *Lect. Notes Phys.* **1017**, 145 (2023).
- [36] C. Møller, *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.* **1**, 10 (1961).
- [37] Y.M. Cho, *Phys. Rev. D* **14**, 2521 (1976).
- [38] K. Hayashi, *Phys. Lett. B* **69**, 441 (1977).
- [39] K. Hayashi e T. Shirafuji, *Phys. Rev. D* **19**, 3524 (1979).
- [40] J.W. Maluf, *J. Math. Phys.* **35**, 335 (1994).
- [41] J.W. Maluf, *Annalen Phys.* **525**, 339 (2013).
- [42] R. Weitzenböck, *Invarianten-Theorie* (Noordhoff, Groningen, 1923).
- [43] A. Golovnev, arXiv:2302.13599 (2023).
- [44] D.W. Sciama, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 463 (1964).
- [45] T.W.B. Kibble, *J. Math. Phys.* **2**, 212 (1961).
- [46] F.W. Hehl, P. Von Der Heyde, G.D. Kerlick e J.M. Nester, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976).
- [47] E. Cartan, *Annales Sci. Ecole Norm. Sup.* **40**, 325 (1923).
- [48] E. Cartan, *Annales Sci. Ecole Norm. Sup.* **41**, 1 (1924).
- [49] R.T. Hammond, *Rept. Prog. Phys.* **65**, 599 (2002).
- [50] H.I. Arcos e J.G. Pereira, *Int. J. Mod. Phys. D* **13**, 2193 (2004).
- [51] P. Wu e H.W. Yu, *Phys. Lett. B* **693**, 415 (2010).
- [52] Y.F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis e E.N. Saridakis, *Rept. Prog. Phys.* **79**, 106901 (2016).
- [53] S. Bahamonde, K.F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J.L. Said, J. Mifsud e E. Di Valentino, *Rept. Prog. Phys.* **86**, 026901 (2023).
- [54] M. Krssak, R.J. van den Hoogen, J.G. Pereira, C.G. Böhmer e A.A. Coley, *Class. Quant. Grav.* **36**, 183001 (2019).
- [55] F. D’Ambrosio, L. Heisenberg e S. Kuhn, *Class. Quant. Grav.* **39**, 025013 (2022).
- [56] A. Golovnev, T. Koivisto e M. Sandstad, *Class. Quant. Grav.* **34**, 145013 (2017).
- [57] J.M. Nester e H.J. Yo, *Chin. J. Phys.* **37**, 113 (1999).
- [58] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg e T. Koivisto, *Phys. Rev. D* **98**, 044048 (2018).
- [59] F.P. Poulis e J.M. Salim, *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **3**, 87 (2011).
- [60] C. Romero, J.B. Fonseca-Neto e M.L. Pucheu, *Class. Quant. Grav.* **29**, 155015 (2012).
- [61] J.T. Wheeler, *Gen. Rel. Grav.* **50**, 80 (2018).
- [62] R. Lazkoz, F.S.N. Lobo, M. Ortiz-Baños e V. Salzano, *Phys. Rev. D* **100**, 104027 (2019).
- [63] I. Ayuso, R. Lazkoz e V. Salzano, *Phys. Rev. D* **103**, 063505 (2021).
- [64] O. Sokoliuk, S. Arora, S. Praharaj, A. Baransky e P.K. Sahoo, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **522**, 252 (2023).

- [65] N. Dimakis, A. Paliathanasis e T. Christodoulakis, *Class. Quant. Grav.* **38**, 225003 (2021).
- [66] F. Bajardi, D. Vernieri e S. Capozziello, *Eur. Phys. J. Plus* **135**, 912 (2020).
- [67] A. De e T.H. Loo, *Class. Quant. Grav.* **40**, 115007 (2023).
- [68] M. Hohmann, *Phys. Rev. D* **104**, 124077 (2021).
- [69] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, T.S. Koivisto e S. Pekar, *Phys. Rev. D* **101**, 103507 (2020).
- [70] L. Atayde e N. Frusciante, *Phys. Rev. D* **104**, 064052 (2021).
- [71] F.K. Anagnostopoulos, S. Basilakos e E.N. Saridakis, *Phys. Lett. B* **822**, 136634 (2021).
- [72] S. Capozziello, M. Capriolo e S. Nojiri, *Phys. Lett. B* **850**, 138510 (2024).
- [73] S. Capozziello, M. Capriolo e M. Transirico, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **15**, 1850164 (2018).
- [74] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg e T. Koivisto, *Class. Quant. Grav.* **37**, 195013 (2020).