Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 46, e20240200 (2024)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0200

Artigos Gerais

Sobre a covariância da equação de d'Alembert: os casos do som e da luz

On the covariance of the d'Alembert equation: the cases of sound and light

Francisco Caruso[*1], Vitor Oguri[2]

[1]Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Coordenação de Física de Altas Energias, 22290-180, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
[2]Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 03 de junho de 2024. Revisado em 08 de julho de 2024. Aceito em 10 de julho de 2024.

A covariância da equação de d'Alembert para fenômenos acústicos, descritos por ondas mecânicas em uma ou três dimensões espaciais, sob as transformações de Galileu, é demonstrada sem a necessidade de abandonar a hipótese de que o tempo é absoluto na Mecânica Clássica. Isto só é verdade se e somente se a velocidade de fase do som depender da velocidade do observador. Por outro lado, mostra-se também que a mesma equação de d'Alembert é covariante sob as transformações de Lorentz se e somente se a velocidade de fase da luz não depender do observador.
Palavras-chave: Equação de d'Alembert, transformações de Galileu, transformações de Lorentz, propagação do som, propagação da luz.

The covariance of the d'Alembert equation for acoustic phenomena, described by mechanical waves in one or three spatial dimensions, under Galilean transformations, is demonstrated without the need to abandon the hypothesis that time is absolute in Classical Mechanics. This is true only if and only if the phase velocity of sound depends on the velocity of the observer. On the other hand, it is also shown that the same d'Alembert equation is covariant under Lorentz transformations if and only if the phase velocity of light does not depend on the observer.
Keywords: d'Alembert equation, Galilean transformations, Lorentz transformations, sound propagation, light propagation.

1. Introdução

Originalmente, o matemático francês Jean le Rond d'Alembert, derivou, em 1747, uma equação diferencial parcial, da qual se obtém a solução geral para a propagação de onda unidimensional, considerando o problema de uma corda vibrante [1–3]. Com o tempo, ficou conhecida pelo seu sobrenome e passou a ter várias aplicações físicas em Acústica. De um ponto de vista mais prático, é eficazmente utilizada no levantamento sísmico e na previsão do comportamento do mar em um *tsunami*, ou ainda em diagnósticos médicos detalhados usando tecnologia de ultrassom. Do ponto de vista da Física Básica, é importante ter consciência do fato de, sendo a Acústica um ramo da Mecânica e sendo $v_s \ll c$, em que v_s é velocidade de fase do som e c, a da luz, deve-se esperar que a equação de d'Alembert, aplicada aos fenômenos acústicos, seja *covariante* em relação às transformações de Galileu.[1] Cabe lembrar que a covariância de uma equação não deriva, necessariamente, da invariância de seus termos. Diz-se de uma equação que ela é *covariante* com relação a uma dada transformação quando as mudanças de seus termos são tais que a forma da equação é mantida, mesmo que seus termos não sejam *invariantes*.[2]

Em 2023, foi afirmado em um trabalho publicado que, no caso da Acústica, a equação de d'Alembert *não é* covariante pelas transformações de Galileu, levando os autores a modificar essas transformações [4]. Entretanto, em 2024, veio à luz outro artigo mostrando que isso não é verdade [5]. Foi esse embate que serviu de motivação para a elaboração desse artigo didático, ampliando a discussão.

Por outro lado, o físico escocês James Clerk Maxwell, tal qual todos os seus predecessores e contemporâneos que se dedicaram aos estudos da eletricidade e do magnetismo, buscou, de algum modo, compatibilizar a descrição desses fenômenos com um modelo mecânico, que dependia da aceitação de um meio (fluido, para alguns

[*]Endereço de correspondência: francisco.caruso@gmail.com

[1] As transformações de Galileu são as equações bem conhecidas que relacionam as coordenadas espaço-temporais em dois sistemas associados a referenciais inerciais distintos, quando as velocidades relativas entre os referenciais são muito menores que a velocidade da luz no vácuo.

[2] No presente trabalho, considera-se que, além das grandezas dinâmicas, os parâmetros que caracterizam os sistemas e os fenômenos físicos, como a frequência ou a velocidade de fase de uma onda harmônica, não são necessariamente constantes para qualquer referencial inercial.

e sólido para outros) imponderável, mas elástico, permeando todo o espaço: o *éter luminífero* [6]. A hipótese revolucionária de Maxwell foi considerar que, mesmo na ausência de matéria ponderável (no vácuo), haveria uma corrente de deslocamento, análoga a uma corrente de condução em um metal, a qual estaria presente se o campo elétrico fosse variável no tempo, dando origem a um campo magnético e acarretando perturbações no éter. Foi a introdução da corrente de deslocamento que consolidou a simetria das leis do Eletromagnetismo (no vácuo) e permitiu a Maxwell inferir que os campos eletromagnéticos não eram tão-somente artifícios matemáticos para expressar os fenômenos eletromagnéticos. Eles se propagavam, mesmo no espaço "vazio" (no éter), de um modo que a corrente de deslocamento provocada pela variação do campo elétrico produzia um campo magnético também variável, o qual, pela lei de Faraday, gerava também um campo elétrico variável e, dessa forma, a perturbação era transmitida através do éter [7]. Foi desse modo que Maxwell chegou a uma das sínteses mais espetaculares da Física, publicando, em 1865, seu conjunto de equações [8].

Apesar de terem sido estabelecidas no contexto da existência de um éter, as equações de Maxwell, à semelhança das leis de Newton, são ora consideradas leis fundamentais da Física que transcendem suas gêneses. As grandezas e conceitos envolvidos passam a ter significados que só são interpretados apropriadamente a partir das próprias leis. No caso do Eletromagnetismo, expresso pelas equações de Maxwell, a definição dos campos eletromagnéticos não necessita mais dos modelos mecânicos utilizados por Faraday e Maxwell.

A partir do conjunto das equações de Maxwell, pode-se mostrar que tanto as componentes dos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$, como os potenciais escalar ϕ e vetorial $\vec{A}$ satisfazem à equação de d'Alembert. Maxwell havia compreendido, assim, que a luz era uma onda eletromagnética, que se propagava no vácuo com velocidade constante $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Entre 1886 e 1889, o físico alemão Heinrich Rudolf Hertz conduziu uma série de experimentos com um circuito ressonante tentando provar que as ações eletromagnéticas se propagam no ar com velocidade finita, com os quais acabou mostrando que os efeitos de propagação de ondas que observava eram manifestações das ondas eletromagnéticas previstas por Maxwell.

Além desse fato, merece ser recordado que o físico alemão Woldemar Voigt, em 1887, em um estudo sobre o princípio do efeito Doppler, demandou a covariância da equação de d'Alembert para dois sistemas de referência inerciais, admitindo a invariância da velocidade da luz para os dois observadores inerciais. Obteve, dessa maneira, um conjunto de transformações espaço-temporais diferente das transformações de Lorentz [9, 10]. Não se pretende aqui discutir quem teve a prioridade em propor uma generalização das transformações de Galileu para o caso de velocidades próximas à da luz. O intuito aqui é apenas ressaltar, mais uma vez, a relevância da equação de d'Alembert para a Física Básica. Lorentz chegou às suas transformações de uma maneira *ad hoc*, mas baseado no conjunto completo das equações de Maxwell e não em sua previsão de uma onda eletromagnética. Quanto a Voigt, mais tarde ele se referiu com essas palavras a esse seu trabalho [11]:

> *Tratava-se das aplicações do princípio Doppler, que ocorrem em partes especiais, embora não apenas com base na teoria eletromagnética, mas com base na teoria elástica da luz. Contudo, já então foram encontradas algumas das mesmas consequências, que, mais tarde, foram obtidas a partir da teoria eletromagnética.*

Entretanto, requerer a covariância da equação de d'Alembert, independente da motivação, foi uma atitude científica de Voigt que veio para ficar.

Nesse ponto, o que confunde muitos estudantes é como uma mesma equação pode ser covariante por dois grupos de transformações diferentes? No caso do som, a equação, como já mencionado, deve ser covariante por Galileu, enquanto que, para a luz, covariante por Lorentz. Assim que deve ser e assim que é. O que é um resultado muito interessante é que, para isso ocorrer, vínculos são impostos sobre se a velocidade de fase da onda depende ou não da velocidade de um observador (inercial). É isso que será abordado nas próximas Seções.

2. A Covariância da Equação de d'Alembert para as Ondas Sonoras: O Caso Unidimensional

Em um primeiro momento, mostra-se a covariância da equação de d'Alembert para fenômenos acústicos, sob as transformações de Galileu, em uma dimensão espacial. A prova para três dimensões é apresentada em sequência (Seção 3).

Com relação a um sistema cartesiano de coordenadas S, associado a um referencial estacionário em um meio não dispersivo, a equação de onda que rege a propagação de uma onda sonora ao longo de um de seus eixos de coordenadas, por exemplo, o eixo x, é dada por

$$\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)$$

em que v_s é a velocidade de fase do som,[3] (x,t) são as coordenadas espacial e temporal de um ponto do meio, segundo S, e $\Psi(x,t)$ é um campo escalar,[4] como a

[3] Para um referencial estacionário no meio de propagação, a velocidade de fase do som não depende do movimento da fonte, a fonte estabelece apenas a frequência da onda gerada. Toda onda harmônica se propaga com a velocidade de fase constante v_s, em relação ao meio.

[4] Genericamente, denominado função de onda, como todo campo que obedece à equação de onda.

pressão ou a densidade do meio, cujo valor, em um dado instante e ponto do meio, não depende do referencial.

Sendo (x', t') as coordenadas espaço-temporais de um ponto do meio, com relação a um sistema S' associado a um referencial não estacionário, com eixos paralelos a S, que se desloca no sentido positivo do eixo x de S, com velocidade V, tal que no instante inicial $t' = t = 0$, a equação seguinte deve ser válida.

$$\Psi(x,t) = \Psi'(x',t') \tag{1}$$

Sabe-se também que a forma geral da função de onda, $\Psi(x,t)$, de um pulso que se propaga em um meio não dispersivo, no sentido positivo do eixo x de S, é dada por[5]

$$\Psi(x,t) = f(x - v_s t)$$

Além disso, as transformações de Galileu, entre as coordenadas em S e S',

$$x = x' + Vt'$$

pressupõem um tempo absoluto e implicam as seguintes relações entre as derivadas espaciais e temporais,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x'} = \overbrace{\dfrac{\partial x}{\partial x'}}^{1} \dfrac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2}{\partial x'^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial t'} = \overbrace{\dfrac{\partial t}{\partial t'}}^{1} \dfrac{\partial}{\partial t} + \overbrace{\dfrac{\partial x}{\partial t'}}^{V} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2}{\partial t'^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + 2V \dfrac{\partial^2}{\partial t \partial x} + V^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{cases}$$

Desse modo, tem-se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x'^2} \Psi'(x',t') = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t'^2} \Psi'(x',t') = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x,t) + 2V \dfrac{\partial^2}{\partial x t \partial x} \Psi(x,t) \\ \qquad + V^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) \end{cases}$$

Levando-se em conta a forma geral da função de onda, obtém-se:

$$\Psi(x,t) = f\,\underbrace{(x - v_s t)}_{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x,t) = v_s^2 f'' \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t \partial x} \Psi(x,t) = -v_s f'' \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) = f'' \end{cases}$$

na qual $f'' = \mathrm{d}^2 f / \mathrm{d}y^2$. Com esse resultado, a equação de d'Alembert se escreve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \Psi'(x',t') &= \underbrace{\left(v_s^2 - 2v_s V + V^2\right)}_{(v_s - V)^2} f'' \\ &= {v_s'}^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \Psi'(x',t') \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{1}{{v_s'}^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \Psi'(x',t') = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \Psi'(x',t')}$$

sendo $v_s' = v_s - V$, a velocidade de fase do som, segundo S'.

Logo, se a velocidade de fase do som depende da velocidade do referencial, a equação de ondas espacialmente unidimensional tem a mesma forma em qualquer referencial inercial.

Esse resultado mostra que, no caso unidimensional, a velocidade de fase do som, segundo um referencial não estacionário no meio, é alterada de modo similar à composição de velocidades de partículas. No entanto, é oportuno enfatizar que a velocidade de fase não é a velocidade de qualquer objeto ponderável e, portanto, não deve ser tratada como uma grandeza cinemática.

Esse ponto pode ser esclarecido, ao se considerar a propagação de um onda sonora em uma direção diferente de qualquer um dos eixos de um sistema cartesiano de coordenadas.

3. A Covariância da Equação de d'Alembert para as Ondas Sonoras: O Caso Tridimensional

Com relação a um sistema cartesiano de coordenadas S, associado a um referencial estacionário em um meio não dispersivo, a propagação de ondas sonoras no espaço obedece à equação (tridimensional) de d'Alembert, dada por

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x,y,z,t) \\ &\quad = \nabla^2 \Psi(x,y,z,t) = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x,y,z,t) \end{aligned}$$

em que (x,y,z,t) são as coordenadas espaciais e temporal, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano, $\Psi(x,y,z,t)$ representa a pressão ou a densidade do meio, e v_s é a velocidade de fase do som.

Sendo (x',y',z',t') as coordenadas espaço-temporais com relação a um sistema S' associado a um referencial não estacionário (Figura 1), mas com eixos paralelos a S, que se desloca no sentido positivo do eixo z de S, com velocidade V, tal que no instante inicial $t' = t = 0$, a equação seguinte deve ser válida.

$$\Psi(x,y,z,t) = \Psi'(x',y',z',t') \tag{2}$$

[5] Para o referencial estacionário (S) em um meio, a solução geral da equação de d'Alembert é dada pela superposição de ondas que se propagam em sentidos opostos, com a mesma velocidade de fase.

$$f(x - v_s t) + g(x + v_s t)$$

No entanto, como a velocidade de fase não é um invariante de Galileu, para o referencial não estacionário (S'), essas soluções não obedecem à mesma equação, pois não expressam ondas associadas à mesma velocidade de fase.

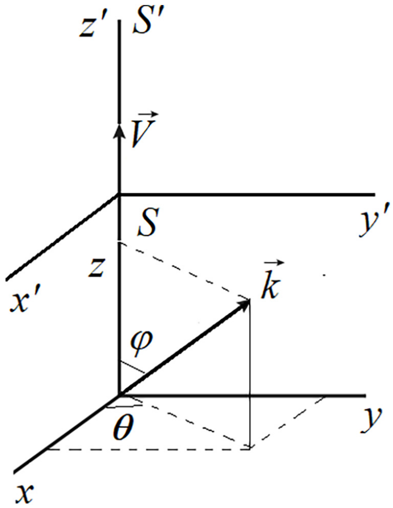

Figura 1: Sistemas de coordenadas S e S'. V é a velocidade de S'.

Em relação a S, uma onda harmônica que se propaga com o vetor de propagação $\vec{k}$, indicado na Figura 1, pode ser expressa como

$$\Psi(x, y, z, t) = A \operatorname{sen}\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)$$

sendo $k_x = k \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $k_y = k \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$ e $k_z = k\cos\varphi$, as componentes de $\vec{k}$, cuja magnitude é igual a $k = \omega/v_s$. Uma vez que, no domínio não relativístico, as coordenadas em S e S' estão relacionadas pelas transformações de Galileu, como

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z' + Vt' \qquad \text{e} \qquad t = t'$$

as relações entre as derivadas espaciais e temporais nos sistemas S e S',

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$\text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2V\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + V^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

mostram que $\nabla^2 = \nabla'^2$.

Expressando-se a função de onda no sistema S, em termos dos ângulos θ e φ,

$$\begin{aligned}&\Psi(x, y, z, t)\\ &= A \operatorname{sen} k\Big[(\underbrace{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}_{\alpha}\, x + \underbrace{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta}_{\beta}\, y + \underbrace{\cos\varphi}_{\gamma}\, z) - v_s t\Big]\\ &= f(\alpha x + \beta y + \gamma z - v_s t)\end{aligned}$$

e tendo em conta que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi = \alpha^2 f'', \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Psi = \beta^2 f'', \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi = \gamma^2 f''$$
$$\text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial t \partial z}\Psi = -\gamma v_s f''$$

resulta

$$\nabla^2\Psi = \nabla'^2\Psi' = \big(\underbrace{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}_{1}\big) f''$$

Portanto, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\Psi' &= \left(v_s^2 - 2\gamma v_s V + \gamma^2\right) f''\\ &= \big(\underbrace{v_s^2 - 2v_s V\cos\varphi + V^2\cos^2\varphi}_{(v_s - V\cos\phi)^2}\big)\nabla'^2\Psi'\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\nabla'^2\Psi'(x', y', z', t') = \frac{1}{v_s'^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\Psi'(x', y', z', t')}$$

sendo $v_s' = (v_s - V\cos\varphi)$ a velocidade de fase do som, segundo S'.

Desse modo, pode-se concluir que a equação de propagação das ondas sonoras tem a mesma forma em qualquer referencial inercial, se e somente se a velocidade de fase do som depender da velocidade do referencial. Alternativamente, essa propriedade é expressa dizendo-se que a equação de d'Alembert para ondas acústicas é *covariante* com relação às transformações de Galileu.

Esse resultado, no caso tridimensional, mostra, sem dúvidas, que a velocidade de fase do som, segundo um referencial não estacionário no meio, não é alterada de modo similar à composição de velocidades de partículas.[6] Ou seja, a velocidade de fase do som não obedece à regra de composição de velocidades da cinemática newtoniana. Assim, a abordagem tridimensional, além da covariância da equação de onda sonora, mostra que de fato a velocidade de fase não é uma grandeza vetorial.

4. A Covariância da Equação de d'Alembert para as Ondas Luminosas

Sejam dois referenciais inerciais (S e S'), tal que

$$\begin{cases} x' = \gamma(V)\ (x - Vt) \\ t' = \gamma(V)\ (t - Vx/c^2) \end{cases} \qquad \gamma = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2}$$

em que c é a velocidade de fase da luz para o referencial S e V, a velocidade relativa entre eles.

Para a luz, com base nas equações de Maxwell, pode-se mostrar que as componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, bem como os potenciais escalar ϕ e vetorial $\vec{A}$, satisfazem também a equação de d'Alembert.

[6] Em geral, quando a propagação da onda não tem a mesma direção que a velocidade de translação do referencial não estacionário no meio (S'), essa similaridade não ocorre.

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0200

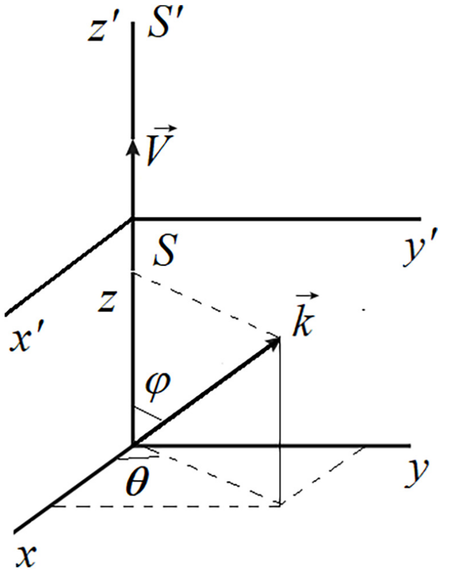

Figura 2: Onda plana eletromagnética segundo S.

Seja uma onda eletromagnética plana que se propaga no sentido positivo do eixo x (Figura. 2) de um sistema de referência S, cujos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são dados por

$$\begin{cases} \vec{E} = \hat{y}\ \underbrace{E_0 e^{i(kx-\omega t)}}_{E_y(x,t)} \\ \vec{B} = \hat{z}\ \underbrace{B_0 e^{i(kx-\omega t)}}_{B_z(x,t)} \end{cases} \tag{3}$$

e, portanto, suas componentes obedecem à equação de onda em uma dimensão,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

Esta equação tem um papel decisivo na própria interpretação da Teoria de Maxwell, pois é ela que evidencia a natureza ondulatória da propagação das ondas eletromagnéticas e, em especial, da luz.

Admita-se, por ora, do mesmo modo como era esperado na época da realização do experimento de Michelson-Morley, que a velocidade de fase da luz, segundo o observador em S', que se desloca com velocidade constante em relação ao referencial S, tenha um valor diferente c', por causa do vento do éter [7]. Logo, espera-se que nesse referencial,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\begin{pmatrix} E'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$

em que os campos dependem agora de (x', t').

Relacionando-se as derivadas nos referenciais S e S', ou seja

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial x'} - \dfrac{V}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t'}\right) \quad \Rightarrow \\ \qquad \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma^2\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\dfrac{V}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \dfrac{V^2}{c^4}\dfrac{\partial^2}{\partial t'^2}\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial t'} - V\dfrac{\partial}{\partial x'}\right) \quad \Rightarrow \\ \qquad \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2\left[\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\dfrac{V}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \dfrac{V^2}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x'^2}\right] \end{cases} \tag{6}$$

Apesar de os campos eletromagnéticos observados em S não serem os mesmos do que aqueles observados em S', eles dependem linearmente uns dos outros, ou seja,

$$\begin{cases} E_y(x,t) = aE'_y(x',t') + bB'_z(x',t') \\ B_z(x,t) = dE'_y(x',t') + eB'_z(x',t') \end{cases} \tag{7}$$

Substituindo as equações (6) e (7) na equação (4), resulta

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\frac{V}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \frac{V^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right](aE'_y + bB'_z) + \\ -\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{V}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \frac{V^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right](aE'_y + bB'_z) = 0$$

ou,

$$a\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E'_y}{\partial x'^2} + b\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 B'_z}{\partial x'^2} \\ - \frac{a}{c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E'_y}{\partial t'^2} - \frac{b}{c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 B'_z}{\partial t'^2} = 0$$

Dessa forma, obtém-se

$$a\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)E'_y + b\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)B'_z = 0 \\ \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\begin{pmatrix} E'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = 0$$

Dessa maneira, em relação ao sistema S', as equações de propagação para as componentes dos campos eletromagnéticos só mantêm a mesma forma se e somente se $c' = c$. Ou seja, se a velocidade de fase de uma onda eletromagnética no vácuo é uma constante c, independentemente da fonte e do observador.

Portanto, a covariância da equação de onda de d'Alembert para os fenômenos luminosos exige que a velocidade de fase da luz seja um invariante de Lorentz, princípio adotado por Einstein, em 1905. Baseando-se nesse resultado, pode-se pensar que $c' = c$ não seja um princípio que "estranhamente dá certo", mas como uma condição necessária para que, não apenas a equação de onda para os campos eletromagnéticos, mas também as próprias equações de Maxwell do Eletromagnetismo,[7] e todas as leis e equações fundamentais da Física sejam covariantes nas mudanças de referenciais inerciais, segundo as transformações de Lorentz.

Deve-se, a este ponto, mencionar um detalhe epistemológico relevante, que pode nos levar a fazer uma leitura do resultado aqui obtido para a luz com certa cautela. Isso advém do fato de as transformações de Lorentz terem sido construídas tendo o Eletromagnetismo de Maxwell como paradigma de teoria física. Naturalmente, pode-se questionar se, de alguma forma, ela não contempla a invariância da velocidade da luz, como proposto no artigo [12]. Uma vez convencido dessa possibilidade, o resultado da Seção 4 deve ser entendido mais como uma verificação de consistência do que como uma prova. Espera-se discutir esse ponto em outra publicação.

Por outro lado, para o som, não cabe essa ressalva. As transformações de Galileu não foram originalmente proposta tendo por base uma equação de onda e sim a Mecânica das partículas. A condição imposta sobre a velocidade de fase da onda descrita pela equação de d'Alembert, ou seja que ela dependa da velocidade do referencial, é fundamental para que esta equação possa ser também covariante pelas transformações de Galileu.

5. Comentários Finais

Que a velocidade de fase de propagação de uma onda sonora em um meio não dispersivo depende da velocidade do meio e do observador, enquanto a da luz, não, são fatos empíricos. O que se mostrou neste artigo é que, do ponto de vista teórico, é o conjunto de transformações, que deixam uma determinada equação de onda covariante, que intrinsecamente determina esse ou aquele comportamento ondulatório. Nos casos aqui considerados, tanto as transformações de Galileu quanto de Lorentz são lineares e formam grupos. O que as difere é a estrutura básica do espaço-tempo, com reflexos nas relações entre as coordenadas para dois referenciais inerciais observando o mesmo fenômeno. No caso clássico, admite-se um espaço euclideano e um tempo absolutos, *à la* Newton; no caso relativístico, Einstein introduziu a relatividade entre o espaço e tempo, que passam a não ser independentes, integrando, então, um espaço-tempo quadridimensional. Ao implementar isso, são revistos conceitos basilares como os de simultaneidade e causalidade e esses novos conceitos passam a estar, de alguma forma, incorporados nas leis de transformação das coordenadas [13]. Costuma-se dizer que a Relatividade, embora tendo sido elaborada tendo a covariância do Eletromagnetismo como paradigma, acabou transformando-se em uma teoria para o espaço-tempo. A esse respeito, veja o comentário do físico estadunidense Arthur I. Miller [14], citando o próprio Einstein,

> *A nova característica [da teoria da relatividade de 1905] foi a compreensão do fato de que a influência da transformação de Lorentz transcendia a sua ligação com as equações de Maxwell e estava preocupada com a natureza do espaço e do tempo em geral. Um outro resultado novo foi que a "invariância de Lorentz" é uma condição geral para qualquer teoria física. Isto foi para mim de particular importância porque eu já tinha descoberto anteriormente que a teoria de Maxwell não levava em conta a microestrutura da radiação e não poderia, portanto, ter validade geral* [...].
>
> *Enquanto Lorentz e Poincaré consideraram as transformações de Lorentz como um postulado separado necessário para derivar a covariância da teoria eletromagnética,* [...] *Einstein deduziu estas transformações a partir de dois axiomas que diziam respeito à "natureza do espaço e do tempo em geral" (p. 207).*

O que se viu aqui, portanto, foi que diferentes teorias para o espaço e o tempo implicam formas distintas de propagações de ondas, como é o caso para o som e para a luz.

[7] Das quais se deriva a equação de onda.

Referências

[1] J. D'Alembert, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin **3**, 214 (1747).

[2] J. D'Alembert, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin **3**, 220 (1747).

[3] J. D'Alembert, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin **6**, 355 (1750).

[4] V. Berisha e S. Klinaku, Acoustical Science and Technology **44**, 24 (2023).

[5] F. Caruso, V. Oguri e F. Silveira, Acoustical Science and Technology **45**, 45 (2024).

[6] M.C. Lima, Revista Brasileira de Ensino de Física **41**, e20190079 (2019).

[7] F. Caruso e V. Oguri, *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos* (LTC, Rio de Janeiro, 2016), 2 ed.

[8] J.C. Maxwell, Royal Society Transactions **155**, 459 (1865).

[9] R. Heras, arXiv:1411.2559v4 (2017).

[10] W. Engelhardt, International Journal of Science and Research Methodology **9**, 159 (2018).

[11] A.H. Bucherer, Physikalische Zeitschrift **9**, 755 (1908).

[12] L.A. Pars, Philosophical Magazine Series 6 **42**, 249 (1921).

[13] A. Einstein, Annalen der Physik **17**, 891 (1905).

[14] A.I. Miller, *Albert Einstein's Special Theory of Relativity: Emergence (1905) and Early Interpretation (1905–1911)* (Addison-Wesley, Reading, 1981).