

# Vínculos dependentes de velocidades e condição de integrabilidade de Frobenius

(Velocity-dependent constraints and the Frobenius integrability condition)

Nivaldo A. Lemos<sup>1</sup>

Departamento de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil

Recebido em 26/5/2015; Aceito em 20/6/2015; Publicado em 12/12/2015

Sistemas mecânicos sujeitos a vínculos dependentes de velocidades ocorrem com frequência. O teorema de Frobenius permite decidir de forma inequívoca se vínculos que dependem linearmente das velocidades são ou não integráveis. Mostramos como se formula a condição de integrabilidade de Frobenius por meio da teoria das formas diferenciais exteriores e ilustramos sua aplicação a problemas interessantes de mecânica clássica. Por fim, discutimos a importância prática de identificar a natureza dos vínculos no que concerne à integrabilidade.

**Palavras-chave:** vínculos dependentes de velocidades, vínculos holônomos, condição de integrabilidade de Frobenius.

Mechanical systems subjected to velocity-dependent constraints occur frequently. The Frobenius theorem allows us to unequivocally decide whether constraints that depend linearly on the velocities are integrable or not. We show how to formulate the Frobenius integrability condition by means of the theory of exterior differential forms, and illustrate its application to interesting problems in classical mechanics. Finally, we discuss the practical importance of identifying the nature of the constraints as concerns integrability.

**Keywords:** velocity-dependent constraints, holonomic constraints, Frobenius integrability condition.

## 1. Introdução

Os vínculos dependentes das velocidades mais comuns são aqueles em que as velocidades ocorrem linearmente. Casos típicos são vínculos que exprimem as condições de rolamento sem deslizamento de corpos rígidos. Se  $q_1, \dots, q_n$  são coordenadas *inicialmente* escolhidas para especificar a configuração de um sistema mecânico, os vínculos em que estamos interessados são da forma

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} \dot{q}_l + a_{kt} = 0, \quad k = 1, \dots, r. \quad (1)$$

Os coeficientes  $a_{kl}, a_{kt}$  são funções de  $q_1, \dots, q_n, t$ . Vínculos desta categoria são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que restringem os movimentos possíveis. Multiplicando formalmente a Eq. (1) por  $dt$ , somos levados a definir as 1-formas diferenciais

$$\omega^k = \sum_{l=1}^n a_{kl} dq_l + a_{kt} dt, \quad k = 1, \dots, r, \quad (2)$$

em termos das quais os vínculos (1) podem ser expressos do seguinte modo equivalente:

$$\omega^k = 0, \quad k = 1, \dots, r. \quad (3)$$

Nesta linguagem, o movimento está restrito às trajetórias ao longo das quais as 1-formas diferenciais  $\omega^1, \dots, \omega^r$  são nulas. Sistemas de equações constituídos por 1-formas, tais como na Eq. (3), são chamados de *sistemas de Pfaff*.

Considere, por exemplo, um cilindro de raio  $R$  descendo um plano inclinado. O movimento do cilindro pode ser descrito pela coordenada  $x$  que dá a posição do centro de massa e a coordenada angular  $\phi$  que descreve a rotação do cilindro em torno do centro de massa. Em geral,  $x$  e  $\phi$  são coordenadas independentes. Mas se o cilindro rola sem deslizar, vale o vínculo  $\dot{x} - R\dot{\phi} = 0$ . Este vínculo é integrável e equivale a  $x - R\phi = C$ , onde  $C$  é uma constante.<sup>2</sup> Trata-se de um vínculo holônomo: o espaço de configuração é unidimensional e consiste na reta  $x = R\phi + C$  no plano das variáveis  $(x, \phi)$  inicialmente escolhidas para descrever o movimento. O sistema tem apenas um grau de liberdade, que pode ser

<sup>1</sup>E-mail: nivaldo@if.uff.br.

<sup>2</sup>Se quisermos, podemos tornar  $C = 0$  por uma escolha da origem do eixo que define a coordenada  $x$ .

expresso por  $x$  ou por  $\phi$ , conforme as conveniências. Se optarmos por  $x$  como coordenada generalizada, com  $\phi = (x - C)/R$  a equação de vínculo  $\dot{x} - R\dot{\phi} = 0$  é identicamente satisfeita.

De modo geral, se os vínculos são integráveis o sistema é holônomo: existem coordenadas generalizadas em termos das quais os vínculos são identicamente satisfeitos e a dimensão do espaço de configuração (o número de graus de liberdade) é menor do que o número de coordenadas originalmente escolhidas para a descrição do movimento. Caso contrário, o sistema não é holônomo e os vínculos restringem apenas as velocidades: a totalidade do espaço de configuração original é acessível ao sistema.

Como descobrir se os vínculos são ou não integráveis? A teoria das formas diferenciais é o ambiente em que a condição de integrabilidade de vínculos que podem ser escritos da maneira da Eq. (3) se exprime do modo mais cristalino. A fim de tornar inteligível a condição de integrabilidade de Frobenius, tópico central do presente artigo, torna-se necessária uma breve introdução à teoria das formas diferenciais exteriores. Nossa exposição será sucinta, pragmática e informal. Definições precisas e provas rigorosas encontram-se no belo livro de Flanders [1], cujo estudo é altamente recomendável e no qual parte do texto a seguir é baseado.

Na Seção 2 definimos formas diferenciais, produto exterior e derivada exterior. Na Seção 3 é apresentada a condição de integrabilidade de Frobenius, uma condição necessária e suficiente para que um sistema de vínculos que dependem linearmente das velocidades seja integrável. Na Seção 4 a condição de Frobenius é aplicada a vários casos interessantes. Finalmente, na Seção 5, são discutidas razões práticas que justificam o interesse em desvendar a natureza dos vínculos no que diz respeito à integrabilidade.

## 2. Elementos do cálculo diferencial exterior

O cálculo de formas diferenciais exteriores é uma ferramenta matemática poderosa e de grande utilidade em áreas da Física tão díspares quanto termodinâmica e

relatividade geral, o que justifica apresentá-lo aos estudantes de graduação o mais cedo possível.

### 2.1. Motivações físicas e matemáticas

Formas diferenciais surgem naturalmente na Física. Dado um campo vetorial  $\mathbf{F} = (A, B, C)$  em coordenadas cartesianas, sua integral de linha ao longo de uma curva orientada  $\mathcal{C}$  é

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}} (A dx + B dy + C dz), \quad (4)$$

e sua integral de superfície através de uma superfície orientada  $\mathcal{S}$  é

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} \int (A dy dz + B dz dx + C dx dy). \quad (5)$$

Se  $\mathbf{F}$  representa a força sobre uma partícula, a integral (4) é o trabalho realizado pela força durante o deslocamento da partícula ao longo da curva  $\mathcal{C}$ ; se  $\mathbf{F}$  é a densidade de corrente, a integral (5) é a corrente elétrica através de  $\mathcal{S}$ ; se  $\mathbf{F}$  é um campo elétrico e  $\mathcal{S}$  é uma superfície fechada, a integral (5) é o fluxo do campo elétrico através de  $\mathcal{S}$  envolvido na expressão da lei de Gauss do eletromagnetismo.

Somos, assim, levados naturalmente a considerar a um-forma (ou 1-forma)

$$\omega = A dx + B dy + C dz \quad (6)$$

e a dois-forma (ou 2-forma)

$$\lambda = A dy dz + B dz dx + C dx dy. \quad (7)$$

Intuitivamente, portanto, formas diferenciais são coisas que podem ser integradas.

A ausência de  $dz dy$ ,  $dx dz$  e  $dy dx$  em  $\lambda$  sugere simetria ou antissimetria do produto de diferenciais; a ausência de  $dx dx$ ,  $dy dy$  e  $dz dz$  favorece a antissimetria. A antissimetria é reforçada por tornar imediata a regra de mudança de variáveis numa integral múltipla. Sob a mudança de variáveis  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , o uso de  $du du = dv dv = 0$  e  $dv du = -du dv$  dá lugar a

$$\begin{aligned} \int \int f(x, y) dx dy &= \int \int f(x(u, v), y(u, v)) \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ &= \int \int f(x(u, v), y(u, v)) \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du dv - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} du dv \right) \\ &= \int \int f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv, \end{aligned} \quad (8)$$

em que aparece automaticamente o jacobiano da transformação

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

### 2.2. Produto exterior de formas diferenciais

Em  $\mathbb{R}^n$ , com coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ , as formas diferenciais são construídas a partir das diferenciais básicas  $dx^1, \dots, dx^n$  por meio de uma operação conhecida como *produto exterior*.

**Definição 1.** O **produto exterior** (denotado pelo símbolo  $\wedge$ ) das diferenciais básicas é definido por

$$dx^i \wedge dx^i = 0, \quad dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad \text{se } i \neq j \quad (i, j = 1, \dots, n). \tag{10}$$

No caso de produto exterior de mais que duas diferenciais básicas, vale a associatividade

$$dx^i \wedge (dx^k \wedge dx^l) = (dx^i \wedge dx^k) \wedge dx^l = dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l. \tag{11}$$

**Esclarecimento.** Para tranquilizar o leitor zeloso da consistência lógica: as diferenciais básicas não são fantasmagóricas quantidades infinitesimais - embora *heurísticamente* possam ser assim encaradas quando aparecem numa integral -, mas definem-se rigorosamente como elementos do espaço dual do espaço  $T_p$  de vetores tangentes a uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  em cada ponto  $p \in \mathcal{M}$ , isto é, são aplicações lineares de  $T_p$  em  $\mathbb{R}$ . Consulte, por exemplo, o segundo capítulo de Hawking e Ellis [2].

Com  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , uma 1-forma é definida por

$$\omega = \sum_{k=1}^n a_k(x) dx^k; \tag{12}$$

uma 2-forma escreve-se

$$\alpha = \frac{1}{2!} \sum_{k,l} a_{kl}(x) dx^k \wedge dx^l \tag{13}$$

onde  $a_{kl} = -a_{lk}$ ; uma  $p$ -forma (com  $p < n$ ) é definida por

$$\lambda = \frac{1}{p!} \sum_{k_1 \dots k_p} a_{k_1 \dots k_p}(x) dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p} \tag{14}$$

onde  $a_{k_1 \dots k_p}$  é totalmente antissimétrico nos seus  $p$  índices. Uma  $n$ -forma é

$$\epsilon = g(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \tag{15}$$

e uma 0-forma é simplesmente uma função  $f$ . Todas as funções  $a_k, a_{kl}, a_{k_1 \dots k_p}, f$  e  $g$  são aplicações de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , isto é, são funções infinitamente diferenciáveis. A presença do denominador  $p!$  na expressão de uma  $p$ -forma com  $p < n$  é para cancelar o fator  $p!$  proveniente dos termos iguais repetidos que resultam das permutações dos índices de soma na Eq. (14).

Pode-se omitir o fator  $1/p!$  convencionando que a soma é restrita aos índices  $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ .

Uma  $p$ -forma é também chamada de forma de grau  $p$ . Uma forma diferencial é não-nula se pelo menos um dos coeficientes de sua expressão em termos das diferenciais básicas não é zero. Note que num espaço de dimensão  $n$  qualquer  $p$ -forma com  $p > n$  é zero.

A partir da Definição 1, o produto exterior de duas formas diferenciais arbitrárias é naturalmente determinado por linearidade, distributividade e associatividade.

Exemplos em  $\mathbb{R}^3$  ilustram não apenas o cálculo de produtos exteriores, mas também como as operações elementares com vetores emergem naturalmente da álgebra exterior de formas diferenciais. Por exemplo, o produto exterior

$$\begin{aligned} (Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Edx + Fdy + Gdz) \\ = (BG - CF)dy \wedge dz + (CE - AG)dz \wedge dx + \\ (AF - BE)dx \wedge dy \end{aligned} \tag{16}$$

faz aparecer as componentes do produto vetorial dos vetores  $(A, B, C)$  e  $(E, F, G)$ . Por outro lado, do produto exterior

$$\begin{aligned} (Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + \\ Rdx \wedge dy) = (AP + BQ + CR)dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \tag{17}$$

emerge automaticamente o produto escalar dos vetores  $(A, B, C)$  e  $(P, Q, R)$ .

**Observação.** Pode-se fazer o produto exterior de duas formas diferenciais arbitrárias, mas só está definida a soma de formas diferenciais de mesmo grau. Mais geralmente, se  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , a combinação linear  $c_1\lambda + c_2\mu$  só faz sentido se  $\lambda$  e  $\mu$  são formas de mesmo grau. Em outras palavras, as formas diferenciais de um grau específico formam um espaço vetorial.

O produto exterior tem as seguintes propriedades

**(PE1)**  $\lambda \wedge (\mu + \nu) = \lambda \wedge \mu + \lambda \wedge \nu$

(distributividade);

**(PE2)**  $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$

(associatividade);

**(PE3)**  $\lambda \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda$

( $p$  é o grau de  $\lambda$  e  $q$  é o grau de  $\mu$ ).

Para comprovar a terceira propriedade, basta considerar o produto de monômios

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}.$$

O deslocamento de  $dx^{j_1}$  para a esquerda de  $dx^{i_1}$  provoca  $p$  trocas de sinal; da mesma forma para  $dx^{j_2}$  e assim por diante,

$$\begin{aligned}
& dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\
&= (-1)^p dx^{j_1} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\
&= (-1)^{2p} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_3} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\
&= \cdots = (-1)^{qp} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.
\end{aligned} \tag{18}$$

**Comentário.** Da terceira propriedade do produto exterior segue-se que  $\lambda \wedge \lambda = 0$  para qualquer forma  $\lambda$  de grau ímpar.

**Exercício 1.** Combinando as propriedades **PE1** e **PE3**, prove que o produto exterior também é distributivo no primeiro fator, isto é,  $(\lambda + \mu) \wedge \nu = \lambda \wedge \nu + \mu \wedge \nu$ . Lembre-se de que  $\lambda$  e  $\mu$  têm o mesmo grau.

**Definição 2.** Dada a 1-forma diferencial não-nula  $\omega = a_1(x)dx^1 + \cdots + a_n(x)dx^n$ , a equação  $\omega = 0$  determina todas as curvas parametrizadas  $x(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$  que satisfazem a equação diferencial ordinária  $a_1(x(t))\dot{x}^1(t) + \cdots + a_n(x(t))\dot{x}^n(t) = 0$ , isto é,

$$\begin{aligned}
& a_1(x)dx^1 + \cdots + a_n(x)dx^n = 0 \implies \\
& a_1(x(t))\frac{dx^1(t)}{dt} + \cdots + a_n(x(t))\frac{dx^n(t)}{dt} = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Vale a pena enfatizar: a equação  $\omega = 0$  **não afirma** que a 1-forma diferencial  $\omega$  é identicamente nula, mas **especifica as trajetórias ao longo das quais a referida 1-forma se anula.**

**Exemplo 1.** A 1-forma  $\omega = \sin \theta dx - \cos \theta dy$  definida em  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x, y, \theta)$  nunca se anula, já que  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  não se anulam simultaneamente. A equação  $\omega = 0$  representa a equação diferencial ordinária  $\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$ . A curva  $x(t) = \sin t, y(t) = -\cos t, \theta(t) = t$  satisfaz  $\omega = 0$ .

### 2.3. Derivada exterior

A derivada exterior de uma  $p$ -forma

$$\lambda = \frac{1}{p!} \sum_{k_1 \dots k_p} a_{k_1 \dots k_p}(x) dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p} \tag{20}$$

$$d(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p} = 0 \tag{25}$$

por causa da igualdade das segundas derivadas parciais mistas. A propriedade **DE3** da derivada exterior costuma ser expressa concisamente por  $d^2 = 0$ .

Aplicada a formas diferenciais definidas em  $\mathbb{R}^3$ , a de-

$$\begin{aligned}
d\omega &= \left( \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\
&+ \left( \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\
&= \left( \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy,
\end{aligned} \tag{26}$$

é a  $(p+1)$ -forma definida por

$$d\lambda = \frac{1}{p!} \sum_k \sum_{k_1 \dots k_p} \frac{\partial a_{k_1 \dots k_p}}{\partial x^k}(x) dx^k \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}. \tag{21}$$

A derivada exterior tem as seguintes propriedades:

$$\text{(DE1)} \quad d(\mu + \nu) = d\mu + d\nu;$$

$$\text{(DE2)} \quad d(\mu \wedge \nu) = d\mu \wedge \nu + (-1)^p \mu \wedge d\nu$$

onde  $p$  é o grau de  $\mu$ ;

$$\text{(DE3)} \quad d(d\lambda) = 0 \text{ para toda forma } \lambda;$$

$$\text{(DE4)} \quad \text{Se } f \text{ é uma 0-forma, } df = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

Provaremos apenas a propriedade **DE3**, que é de suma importância. Para tanto, tendo em vista a linearidade da derivada exterior, basta considerar um monômio

$$\lambda = a(x) dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}. \tag{22}$$

Temos

$$d\lambda = \sum_j \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}. \tag{23}$$

e

$$d(d\lambda) = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p}. \tag{24}$$

O intercâmbio  $i \leftrightarrow j$  dos índices não altera a soma. Portanto, somando a Eq. (24) a si própria com os índices de soma intercambiados e levando em conta que  $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$ , resulta

derivada exterior engendra as operações mais importantes da análise vetorial.

**Exemplo 2.** Dada a 1-forma  $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ , temos

onde aparecem as componentes do rotacional do campo vetorial  $(A, B, C)$ . No caso da 2-forma  $\lambda = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ , calculamos

$$d\lambda = \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx + \left( \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \tag{27}$$

e eis que surge a divergência do campo vetorial  $(P, Q, R)$ .

**Exercício 2.** A partir de  $d^2 = 0$ , prove as seguintes identidades importantes da análise vetorial:  $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$ ;  $\text{div}(\text{rot} \mathbf{V}) = 0$ .

### 3. Condição de integrabilidade de Frobenius

Seja  $\omega$  uma 1-forma que não se anula em nenhum ponto do conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $\omega = fdg$ , dizemos que  $f$  é um fator integrante da equação diferencial de primeira ordem  $\omega = 0$ . Neste caso, a condição  $\omega = 0$  equivale a  $dg = 0$  ou  $g(x^1, \dots, x^n) = \text{constante}$ , que define uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^n$ . Se representa uma restrição imposta ao movimento de um sistema mecânico, o vínculo  $\omega = 0$  é holônomo e a dimensão do espaço de configuração original é reduzida de uma unidade, de modo que o sistema tem  $n - 1$  graus de liberdade.

Em que condições existem funções  $f$  e  $g$  tais que  $\omega = fdg$ ? Suponhamos que  $\omega = fdg$  para certas funções  $f$  e  $g$ . Como  $\omega$  não se anula em  $U$ , o mesmo vale para  $f$ . Assim, levando em conta que  $d^2 = 0$ , podemos escrever

$$d\omega = df \wedge dg = df \wedge \left( \frac{1}{f} \omega \right) \implies d\omega = \theta \wedge \omega \quad \left( \theta = \frac{1}{f} df \right). \tag{28}$$

Segue-se que  $d\omega \wedge \omega = \theta \wedge \omega \wedge \omega = 0$  porque, dado que o grau de  $\omega$  é ímpar,  $\omega \wedge \omega = 0$ . Portanto uma condição necessária para que se tenha  $\omega = fdg$  é  $d\omega \wedge \omega = 0$ .

Dada a coleção  $\omega^1, \dots, \omega^r$  de 1-formas linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$ , suponha que existam funções  $f_j^i$  e  $g^j$  tais que  $\omega^i = \sum_{j=1}^r f_j^i dg^j$ . A independência linear de  $\omega^1, \dots, \omega^r$  exige  $\det(f_j^i) \neq 0$ . Escrevendo  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{F}d\mathbf{g}$ , em notação matricial em que  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{g}$  são matrizes-coluna, temos

$$d\boldsymbol{\omega} = d\mathbf{F} \wedge d\mathbf{g} = d\mathbf{F} \wedge \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\omega} \quad \left( \boldsymbol{\theta} = d\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \right), \tag{29}$$

isto é, existem 1-formas  $\theta_j^i$  tais que  $d\omega^i = \sum_{j=1}^r \theta_j^i \wedge \omega^j$ . Definindo  $\Omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r$ , é imediato que  $d\omega^i \wedge \Omega = 0$  para  $i = 1, \dots, r$ . O teorema de Frobenius estabelece que a condição  $d\omega^i \wedge \Omega = 0$  é não apenas necessária, mas suficiente para a integrabilidade.

**Teorema (Frobenius).** Seja  $\omega^1, \dots, \omega^r$  uma coleção de 1-formas linearmente independentes num

conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , com  $r < n$ . Seja  $\Omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r$ . Então existem funções  $f_j^i$  e  $g^j$  tais que

$$\omega^i = \sum_{j=1}^r f_j^i dg^j \quad (i = 1, \dots, r) \tag{30}$$

em  $U$  se e somente se

$$d\omega^i \wedge \Omega = 0 \quad (i = 1, \dots, r). \tag{31}$$

A demonstração deste importante resultado está longe de ser trivial e será omitida. Na Seção 7.3 de Flanders [1] há duas provas de pontos de vista distintos.

No caso em que a Eq. (30) é válida, de  $\det(f_j^i) \neq 0$  deduz-se que os vínculos diferenciais expressos por  $\omega^1 = 0, \dots, \omega^r = 0$  são equivalentes a  $g^1(x) = C^1, \dots, g^r(x) = C^r$ , onde  $C^1, \dots, C^r$  são constantes. Em outras palavras, os vínculos são holônomos e o movimento do sistema é restrito a uma subvariedade de dimensão  $n - r$  do espaço de configuração original, isto é, existem  $n - r$  coordenadas generalizadas em termos das quais os vínculos são identicamente satisfeitos. A dimensão do espaço de configuração original é reduzida de  $r$  unidades, o sistema tem  $n - r$  graus de liberdade.

**Exercício 3.** Prove que, em duas dimensões, qualquer 1-forma admite um fator integrante. *Ressalva:* isto só é garantido em regiões de  $\mathbb{R}^2$  em que a 1-forma não se anula. Por exemplo,  $\omega = xdy - ydx$  não possui fator integrante numa vizinhança da origem porque  $\omega \equiv 0$  na origem.

**Exercício 4.** No caso da 1-forma  $\omega = Adx + Bdy + Cdz$  em  $\mathbb{R}^3$ , mostre que a condição  $\omega \wedge d\omega = 0$  equivale a  $\mathbf{V} \cdot (\text{rot} \mathbf{V}) = 0$ , onde  $\mathbf{V} = (A, B, C)$ .

Este último exercício estabelece o seguinte fato geométrico relevante: dado um campo vetorial  $\mathbf{V}$ , existe uma família de superfícies  $g(x, y, z) = C$  tal que  $\mathbf{V}$  é normal em cada ponto a uma das superfícies da referida família se e somente se  $\mathbf{V} \cdot (\text{rot} \mathbf{V}) = 0$ . Com efeito, como o vetor  $\nabla g$  é normal à superfície  $g = C$ ,  $\mathbf{V}$  será normal à superfície se e somente se existir uma função  $f$  tal que  $\mathbf{V} = f\nabla g$ , o que equivale a  $\omega = fdg$ .

### 4. Teorema de Frobenius em ação

A condição de integrabilidade de Frobenius (31) tem a virtude de ser extremamente simples e de fácil aplicação, como passamos a ilustrar.

#### 4.1. Vínculo com dependência temporal explícita

No Exemplo 2.4.1 na Ref. [3] são resolvidas as equações de movimento de uma partícula num plano sujeita ao vínculo

$$\dot{x} - ay = 0, \quad a = \text{constante}, \quad (32)$$

onde  $(x, y)$  são coordenadas cartesianas. Examinemos este vínculo quanto à holonomia (integrabilidade).

O vínculo escreve-se  $\omega = 0$  em termos da 1-forma exterior

$$\omega = dx - aydt. \quad (33)$$

Cuidado: a presença do termo proporcional a  $dt$  faz com que  $\omega$  seja uma 1-forma em  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $x, y, t$ . Temos  $d\omega = -ady \wedge dt$  e

$$d\omega \wedge \omega = (-ady \wedge dt) \wedge (dx - aydt) = -adx \wedge dy \wedge dt \neq 0. \quad (34)$$

Pelo teorema de Frobenius, o vínculo (32) não é holônomo.

#### 4.2. Integrabilidade de vínculos isolados ou em conjunto

Vínculos que não são integráveis quando vigoram isoladamente podem ser integráveis quando válidos simultaneamente. Consideremos o seguinte exemplo (Neĭmark e Fufaev [4])

$$\begin{aligned} \omega^1 &= (x^2 + y^2)dx + xzdz, \\ \omega^2 &= (x^2 + y^2)dy + yzdz. \end{aligned} \quad (35)$$

Temos

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= 2ydy \wedge dx + zdx \wedge dz \implies \\ d\omega^1 \wedge \omega^1 &= -2xyzdx \wedge dy \wedge dz \neq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Portanto, o vínculo  $\omega^1 = 0$  sozinho não é integrável em nenhum conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  cujos pontos satisfazem  $xyz \neq 0$ . Idem para o vínculo  $\omega^2 = 0$  isoladamente, pois

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= 2xdx \wedge dy + zdy \wedge dz \implies \\ d\omega^2 \wedge \omega^2 &= 2xyzdx \wedge dy \wedge dz \neq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

No entanto, como

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega^1 \wedge \omega^2 = (x^2 + y^2)^2 dx \wedge dy + \\ &yz(x^2 + y^2)dx \wedge dz + xz(x^2 + y^2)dz \wedge dy, \end{aligned} \quad (38)$$

verifica-se por simples inspeção que  $d\omega^1 \wedge \Omega = d\omega^2 \wedge \Omega = 0$ . Pelo teorema de Frobenius, o sistema de Pfaff definido por  $\omega^1 = 0$  e  $\omega^2 = 0$  é integrável. Não é difícil mostrar que, juntos, os vínculos  $\omega^1 = 0$  e  $\omega^2 = 0$  implicam  $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$  e  $y/x = C_2$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias.

Em suma, um sistema de Pfaff pode ser integrável embora cada um de seus componentes seja separadamente não-integrável.

#### 4.3. Patinete

Um modelo rudimentar de patinete (Fig. 1) consiste numa haste rígida que se move num plano sem derrapar transversalmente [3]. Isto significa que a velocidade do centro de massa da haste não tem componente perpendicular à haste. Sendo  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$  a velocidade do centro de massa da haste e  $\hat{\mathbf{n}}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$  um vetor unitário perpendicular à haste, o vínculo é  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\theta = 0$ , ou seja,

$$\sin \theta \dot{x} - \cos \theta \dot{y} = 0. \quad (39)$$

A 1-forma associada a este vínculo é

$$\omega = \sin \theta dx - \cos \theta dy. \quad (40)$$

É imediato que

$$\begin{aligned} d\omega \wedge \omega &= (\cos \theta d\theta \wedge dx + \sin \theta d\theta \wedge dy) \wedge \\ &(\sin \theta dx - \cos \theta dy) \\ &= -\cos^2 \theta d\theta \wedge dx \wedge dy - \sin^2 \theta d\theta \wedge dx \wedge dy = \\ &-d\theta \wedge dx \wedge dy \neq 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Pelo teorema de Frobenius, o vínculo (39) não é holônomo.

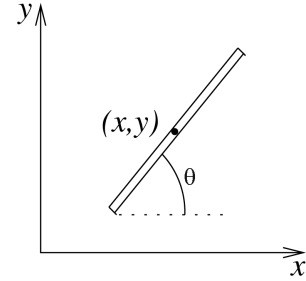


Figura 1 - Modelo simples de patinete.

#### 4.4. Automóvel

Num modelo cinemático simples de um automóvel,  $(x, y)$  fornece a localização das rodas traseiras no plano horizontal do movimento,  $\theta$  é o ângulo do corpo do automóvel com o eixo  $x$  e  $\phi$  é o ângulo que as rodas dianteiras fazem com o corpo do veículo (vide Fig. 2). Para que o carro não derrape, tanto as rodas traseiras quanto as dianteiras não podem ter velocidade perpendicular às suas respectivas direções. A velocidade das rodas traseiras é  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ , ao passo que a das rodas dianteiras é  $\mathbf{v}_d = \mathbf{v} + l\theta \hat{\mathbf{n}}_\theta$ , onde  $\hat{\mathbf{n}}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$  é o vetor unitário na direção de  $\theta$  crescente e  $l$  denota a distância entre as rodas dianteiras e traseiras.

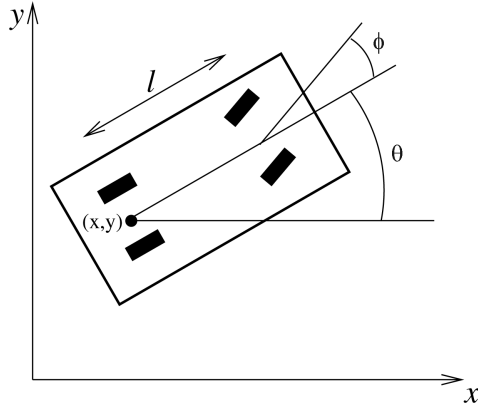


Figura 2 - Modelo cinemático de um automóvel.

Os vínculos, portanto, são  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\theta = 0$  e  $\mathbf{v}_d \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\theta+\phi} = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta \dot{x} - \text{cos } \theta \dot{y} &= 0 \\ \text{sen } (\theta + \phi) \dot{x} - \text{cos } (\theta + \phi) \dot{y} - l \text{cos } \phi \dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Estes vínculos exprimem-se como  $\omega^1 = 0$  e  $\omega^2 = 0$  pondo

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \text{sen } \theta dx - \text{cos } \theta dy, \\ \omega^2 &= \text{sen } (\theta + \phi) dx - \text{cos } (\theta + \phi) dy - l \text{cos } \phi d\theta. \end{aligned} \quad (43)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega^1 \wedge \omega^2 = \text{sen } \phi dx \wedge dy - \\ &l \text{sen } \theta \text{cos } \phi dx \wedge d\theta + l \text{cos } \theta \text{cos } \phi dy \wedge d\theta. \end{aligned} \quad (44)$$

Além disso,

$$d\omega^1 = \text{cos } \theta d\theta \wedge dx + \text{sen } \theta d\theta \wedge dy \quad (45)$$

e

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= \text{cos } (\theta + \phi) d\theta \wedge dx + \text{cos } (\theta + \phi) d\phi \wedge dx + \\ &\text{sen } (\theta + \phi) d\theta \wedge dy + \text{sen } (\theta + \phi) d\phi \wedge dy + \\ &l \text{sen } \phi d\phi \wedge d\theta, \end{aligned} \quad (46)$$

É imediato que  $d\omega^1 \wedge \Omega = 0$ . No entanto, um cálculo direto embora um pouquinho laborioso dá

$$\begin{aligned} d\omega^2 \wedge \Omega &= l(\text{cos}^2 \phi + \text{sen}^2 \phi) dx \wedge dy \wedge d\phi \wedge d\theta = \\ &l dx \wedge dy \wedge d\phi \wedge d\theta \neq 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Pelo teorema de Frobenius, os vínculos (42) não são holônomos.

#### 4.5. Esfera rolante

Se uma esfera homogênea de raio  $R$  rola sem deslizar numa superfície plana, vigoram os vínculos

$$\begin{aligned} \dot{x} - R\dot{\theta} \text{sen } \phi + R\dot{\psi} \text{sen } \theta \text{cos } \phi &= 0, \\ \dot{y} + R\dot{\theta} \text{cos } \phi + R\dot{\psi} \text{sen } \theta \text{sen } \phi &= 0, \end{aligned} \quad (48)$$

onde  $(x, y, R)$  são coordenadas cartesianas do centro da esfera e  $(\phi, \theta, \psi)$  são ângulos de Euler (consulte, por exemplo, a Seção V-4(e) de Saletan e Cromer [5]). As 1-formas associadas a estes vínculos são

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dx - R \text{sen } \phi d\theta + R \text{sen } \theta \text{cos } \phi d\psi, \\ \omega^2 &= dy + R \text{cos } \phi d\theta + R \text{sen } \theta \text{sen } \phi d\psi, \end{aligned} \quad (49)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 &= dx \wedge dy + R \text{cos } \phi dx \wedge d\theta \\ &+ R \text{sen } \theta \text{sen } \phi dx \wedge d\psi \\ &+ R \text{sen } \phi dy \wedge d\theta \\ &- R \text{sen } \theta \text{cos } \phi dy \wedge d\psi \\ &- R^2 \text{sen } \theta d\theta \wedge d\psi. \end{aligned} \quad (50)$$

Temos, ainda,

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= -R \text{cos } \phi d\phi \wedge d\theta + R \text{cos } \theta \text{cos } \phi d\theta \wedge d\psi - \\ &R \text{sen } \theta \text{sen } \phi d\phi \wedge d\psi, \end{aligned} \quad (51)$$

e

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= -R \text{sen } \phi d\phi \wedge d\theta + \\ &R \text{cos } \theta \text{sen } \phi d\theta \wedge d\psi + R \text{sen } \theta \text{cos } \phi d\phi \wedge d\psi. \end{aligned} \quad (52)$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} d\omega^1 \wedge \Omega &= -R \text{cos } \phi dx \wedge dy \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &+ R \text{cos } \theta \text{cos } \phi dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\psi \\ &- R \text{sen } \theta \text{sen } \phi dx \wedge dy \wedge d\phi \wedge d\psi \\ &+ R^2 \text{sen } \theta dy \wedge d\phi \wedge d\theta \wedge d\psi \neq 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Este resultado já mostra que os vínculos (48) não são integráveis sem a necessidade de calcular  $d\omega^2 \wedge \Omega$ . No entanto, como  $d\omega^1 \wedge \Omega = 0$  para  $\text{cos } \phi = \text{sen } \theta = 0$ , parece que só se pode garantir a não integrabilidade dos vínculos (48) nos pontos do espaço de configuração tais que  $\text{cos } \phi \neq 0$  ou  $\text{sen } \theta \neq 0$ . Um cálculo adicional fornece

$$\begin{aligned} d\omega^2 \wedge \Omega &= -R \text{sen } \phi dx \wedge dy \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &+ R \text{cos } \theta \text{sen } \phi dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\psi \\ &+ R \text{sen } \theta \text{cos } \phi dx \wedge dy \wedge d\phi \wedge d\psi \\ &- R^2 \text{sen } \theta dx \wedge d\phi \wedge d\theta \wedge d\psi, \end{aligned} \quad (54)$$

que só se anula se  $\text{sen } \phi = \text{sen } \theta = 0$ . Portanto,  $d\omega^1 \wedge \Omega$  e  $d\omega^2 \wedge \Omega$  não se anulam conjuntamente em nenhum ponto, de modo que os vínculos (48) não são integráveis em todo o espaço de configuração.

## 5. Considerações finais de ordem prática

Afinal de contas, saber se vínculos dependentes de velocidades são ou não integráveis serve apenas para saciar uma curiosidade intelectual - perfeitamente legítima, diga-se de passagem - ou tem alguma consequência prática? Descobrir se os vínculos são ou não integráveis tem a seguinte importância prática: é errado substituir vínculos não-integráveis na lagrangiana com o intuito de simplificá-la ou de promover uma aparente redução do número de graus de liberdade.

Reconsideremos o problema do patinete, descrito na Seção 4. Suponhamos que o patinete se mova num plano horizontal. Como a energia potencial é zero, a lagrangiana do sistema é a energia cinética de translação acrescida da energia cinética de rotação em torno do centro de massa ( $I$  é o momento de inércia pertinente)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2. \quad (55)$$

Da equação de vínculo (39) deduz-se que  $\dot{y} = \dot{x} \tan \theta$ . Substituindo esta equação na lagrangiana (55) obtém-se a nova lagrangiana

$$\bar{L} = \frac{m}{2} \sec^2 \theta \dot{x}^2 + \frac{I}{2} \dot{\theta}^2. \quad (56)$$

Aparentemente eliminamos o vínculo e reduzimos a dois o número de graus de liberdade do sistema, descritos pelas coordenadas  $x$  e  $\theta$ . Esta lagrangiana reduzida gera as equações de movimento

$$I\ddot{\theta} - m \sec^2 \theta \tan \theta \dot{x}^2 = 0, \quad \sec^2 \theta \dot{x} = a, \quad (57)$$

onde  $a$  é uma constante de integração com a dimensão de velocidade. Note que  $a \neq 0$  para condições iniciais não triviais. Segue-se que a equação de movimento para  $\theta$  é

$$I\ddot{\theta} - ma^2 \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (58)$$

Esta equação é incorreta, pois possui soluções completamente diferentes daquelas fornecidas pela equação de movimento correta  $\ddot{\theta} = 0$  que se obtém por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange - vide o Exemplo 2.4.2 na Ref. [3].

A explicação deste fenômeno é simples. Vínculos não-integráveis restringem apenas as velocidades, todos os pontos do espaço de configuração permanecem acessíveis ao sistema. Ao substituir o vínculo (39) na lagrangiana (55) tornamos o espaço de configuração bidimensional. Mas isto é incorreto porque o vínculo (39) não é integrável e, conseqüentemente, não restringe o espaço de configuração, que continua tridimensional e requer as três coordenadas  $x, y, \theta$  para sua descrição.

Vínculos integráveis podem ser impunemente substituídos na lagrangiana, visto que o sistema é holônomo e a dimensão do espaço de configuração é verdadeiramente reduzida pelas restrições ao movimento expressas pelas equações de vínculo.

Moral da história: substitua vínculos na lagrangiana somente depois de certificar-se de que os vínculos são integráveis.

Na dúvida, não substitua vínculos na lagrangiana e recorra ao método dos multiplicadores de Lagrange.

## Referências

- [1] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* (Dover, New York, 1989).
- [2] S.W. Hawking and G. F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [3] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007).
- [4] J.I. Neimark and N.A. Fufaev, *Dynamics of Nonholonomic Systems* (American Mathematical Society, Providence, 1972).
- [5] E.J. Saletan and A.H. Cromer, *Theoretical Mechanics* (Wiley, New York, 1971).