

Operadores-escada generalizados para sistemas quânticos

Ladder operators for quantum systems

Hugo de Oliveira Batael¹, Josimar Fernando da Silva^{*1}, Alexandre Nogueira da Silva¹, Saiara Fabiana Menezes dos Santos¹, Elso Drigo Filho¹

¹Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus São José do Rio Preto, São José do Rio Preto, SP, Brasil.

Recebido em 14 de Junho, 2017. Revisado em 16 de Agosto, 2017. Aceito em 19 de Agosto, 2017.

A superálgebra vem sendo aplicada na resolução de diversos problemas quânticos. Ela permite, por exemplo, obter soluções para potenciais exatamente solúveis e ampliar a construção de operadores de criação e destruição. Neste trabalho, o método de construção dos operadores-escada generalizados é revisado e usado para obter os autovalores de energia e as autofunções de dois potenciais, a partícula em uma caixa unidimensional e o potencial de Rosen-Morse unidimensional.

Palavras-chave: supersimetria; mecânica quântica; *shape invariance*; operadores-escada generalizados; partícula em uma caixa; potencial de Rosen-Morse.

Supersymmetry has been applied to obtain the solution of several kinds of quantum problems. For example, it allows us to solve the Schrödinger equation and to introduce the creation and annihilation operators. In this work, the method to obtain the generalized ladder operators is revised and it is used to determine the energy eigenvalues and the eigenfunctions for two potentials, a particle in a box and the one-dimensional Rosen-Morse potential.

Keywords: supersymmetry; quantum mechanics; shape invariance; ladder operators; particle in a box; Rosen-Morse potential.

1. Introdução

Em estudos envolvendo sistemas descritos pela Mecânica Quântica, podemos fazer uso do formalismo da supersimetria para a resolução da equação de Schrödinger [1,2]. Em comparação à resolução direta da equação de Schrödinger independente do tempo, este formalismo permite, por exemplo, uma simplificação dos cálculos e atacar outros tipos de problemas, como aqueles envolvendo potenciais parcialmente solúveis [3–6]. Assim, essa abordagem tem motivado muitos estudos e estendido a compreensão sobre diversos sistemas quânticos (vide, por exemplo, Ref. [3–20]).

O tratamento envolvendo a supersimetria em Mecânica Quântica pode ser visto como generalização do método de fatorização [1,2]. Neste sentido, são introduzidos os operadores que fatorizam a equação de Schrödinger. Assim, ao invés de resolver uma equação diferencial de segunda ordem, é preciso resolver uma equação diferencial de primeira ordem, conhecida como equação de Riccati [21].

O formalismo da Mecânica Quântica Supersimétrica pode ser aplicado em diversos contextos. Em especial, ele é útil para estudar potenciais exatamente solúveis [1–3,7–16] e parcialmente solúveis [1–6,18]. Em potenciais exatamente solúveis, o formalismo oferece duas vias de solução: através da Hierarquia de Hamiltonianos [1–3,7,

11] e usando a chamada *Shape Invariance* do potencial [1,2,9,10,12–16].

Em potenciais para os quais não é possível determinar soluções analíticas exatas, a superálgebra ainda é útil como suporte nos métodos aproximativos, tais como perturbativo [1], aproximação WKB [13] e variacional [2,3,18]. Recentemente, a superálgebra tem sido empregada para auxiliar a solução da equação de Fokker-Planck [18,20] e para a obtenção de funções de onda teste (*ansatz*) para o estudo de interações intermoleculares [17,19].

Problemas que envolvem sistemas quânticos em que os potenciais tratados são invariantes na sua forma funcional por transformações de supersimetria (*shape invariant*) podem ser resolvidos via superálgebra usando os operadores-escada generalizados [9,12] que atuam simultaneamente na coordenada espacial e no parâmetro da *shape invariance*.

É oportuno lembrar que a construção de operadores-escada permite determinar estados coerentes [22–25] para os sistemas estudados. Em termos didáticos, os estados coerentes são discutidos na referência [26], enquanto a aplicação deste formalismo pode ser vista, por exemplo, nas referências [27] e [28]. Esses estados encontram aplicação em diferentes contextos, sendo particularmente importantes em óptica quântica [29,30].

Neste trabalho é feito uma revisão do formalismo que leva a construção dos operadores de criação e des-

*Endereço de correspondência: josimarfsilva@sjrp.unesp.br.

truição para potenciais *shape invariant*, incluindo detalhes algébricos normalmente omitidos nos textos técnicos que tratam do assunto. Depois, são usados os operadores-escada generalizados para obter os autovalores de energia e as autofunções para dois exemplos particulares, a partícula em uma caixa unidimensional e o potencial de Rosen-Morse unidimensional. A partícula em uma caixa constitui um exemplo peculiar, pois não exibe uma invariância explícita, sendo necessária uma discussão mais aprofundada desse caso. O potencial de Rosen-Morse, por seu turno, embora tenha solução conhecida, não conta ainda com a descrição dos operadores-escada indicada aqui.

Embora o formalismo apresentado aqui se concentre em problemas unidimensionais, ele pode ser diretamente estendido para sistemas com mais dimensões.

Na próxima seção, a metodologia adotada é apresentada. Em seguida, a metodologia é aplicada ao problema da partícula em uma caixa [2, 12, 31]. Depois, um caso particular do potencial de Rosen-Morse unidimensional ($V(x) \propto -\text{sech}^2(x)$) [7, 10] é estudado. Por fim, na última seção, são indicadas as conclusões a cerca do formalismo adotado.

2. Metodologia

Consideremos um sistema quântico descrito por um potencial e cujo Hamiltoniano associado pode ser fatorizado em termos de dois operadores de primeira ordem [2]:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) = A^+ A^- + E_0, \tag{1}$$

nessa expressão H é o Hamiltoniano do sistema, A^+ e A^- são chamados de operadores bosônicos e E_0 é o autovalor do nível mais baixo de energia do Hamiltoniano H . Por simplificação adotamos $\hbar = 2m = 1$.

Os operadores bosônicos são definidos como:

$$A^+ = -\frac{d}{dx} + W(x, a) \tag{2}$$

e

$$A^- = \frac{d}{dx} + W(x, a), \tag{3}$$

sendo $W(x, a)$ chamado de superpotencial, dado em função da variável de posição e de um conjunto de parâmetros (a) presentes no potencial. Por razões didáticas e de apresentação, os exemplos tratados nesse trabalho possui apenas um parâmetro, a . Substituindo as equações (2) e (3) na equação(1), obtemos uma equação de Ricatti [21] para o superpotencial $W(x, a)$:

$$W^2(x, a) - \frac{dW(x, a)}{dx} = V(x) - E_0. \tag{4}$$

Conhecendo o superpotencial, os companheiros supersimétricos são construídos através dos operadores bosônicos definidos nas equações (2) e (3):

$$H_0 = A^+ A^- = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2 - \frac{dW}{dx} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) = H - E_0 \tag{5}$$

e

$$H_1 = A^- A^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2 + \frac{dW}{dx} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x). \tag{6}$$

Os Hamiltonianos H_0 e H_1 possuem o mesmo espectro de energia, com exceção do estado fundamental de H_0 , para o qual não há correspondência no espectro de H_1 [2].

Notamos na equação (5) que H_0 é definido como Hamiltoniano original (H) subtraído da energia do estado fundamental (E_0). Desse modo, a função de onda para o estado fundamental, ψ_0 , é obtida pela equação de autovalor, dada por:

$$H_0 \psi_0(x, a_0) = (H - E_0) \psi_0(x, a_0) = A^+ A^- \psi_0(x, a_0) = 0. \tag{7}$$

Para que a expressão (7) seja satisfeita é suficiente que o operador de destruição aplicado à autofunção seja igual à zero, ou seja, $A^- \psi_0(x, a_0) = 0$. Dessa forma, a função de onda para o estado fundamental, a menos da constante de normalização, é dada por:

$$\psi_0(x, a_0) \propto \exp\left(-\int_x W(\bar{x}, a_0) d\bar{x}\right). \tag{8}$$

Seguindo na construção dos operadores-escada ou de criação e destruição é necessário que o potencial a ser estudado seja *shape invariant* [1, 2], ou seja, satisfaça a seguinte condição:

$$R(a_0) = H_1 - H_0 = V_1(x, a_0) - V_0(x, a_1). \tag{9}$$

Nesse caso, a diferença entre os potenciais $V_1(x, a_0)$ e $V_0(x, a_1)$ não depende da coordenada espacial, ou seja, o resíduo $R(a_0)$ depende apenas do parâmetro a_0 .

A invariância na forma funcional (*shape invariance*) pode envolver diferentes transformações nos parâmetros [32], entre elas, a translação, cujos parâmetros são relacionados da seguinte forma:

$$a_n = a_0 + \eta n, \tag{10}$$

onde η é o parâmetro de translação e o parâmetro a_n é obtido transladando a_0 n vezes.

Para os potenciais que são *shape invariant* e cujos parâmetros estão relacionados por translação é possível definir os operadores-escada [2, 12] como:

$$B_+(a_0) = A^+(a_0)T^+(a_0) = A^+ \exp\left(\eta \frac{\partial}{\partial a_0}\right) \tag{11}$$

e

$$B_-(a_0) = T^-(a_0)A^-(a_0) = \exp\left(-\eta \frac{\partial}{\partial a_0}\right) A^-, \tag{12}$$

onde A^+ e A^- são os operadores bosônicos, equações (2) e (3), e $T^+(a_0)$ e $T^-(a_0)$ são os operadores de translação no parâmetro.

Os operadores-escada B_{\pm} , correspondem a uma generalização dos operadores criação e destruição [2]. Neste sentido, a função de onda para o estado fundamental ψ_0 é obtida aplicando o operador destruição ao estado fundamental:

$$B_-(a_0)\psi_0(x, a_0) = T^-(a_0)A^-(a_0)\psi_0(x, a_0) = 0. \quad (13)$$

Dessa forma, é suficiente que $A^-(a_0)\psi_0(x, a_0) = 0$ o que conduz a um resultado similar ao obtido na equação (8):

$$\psi_0(x, a_0) \propto \exp\left(-\int_x W(\bar{x}, a_0)d\bar{x}\right). \quad (14)$$

Na sequência, é importante identificar a seguinte relação entre os resíduos $R(a_n)$ e os operadores de translação [2]:

$$R(a_n) = T^+(a_0)R(a_{n-1})T^-(a_0), \quad (15)$$

ou ainda,

$$R(a_n)B_+(a_0) = B_+(a_0)R(a_{n-1}). \quad (16)$$

A relação da equação (16) é verificada devido à independência de $R(a_n)$ em relação à variável espacial, o que implica que os operadores bosônicos e $R(a_n)$ comutem entre si.

O próximo passo do processo é a obtenção da relação de comutação entre H_0 e o operador $B_+^n(a_0)$, para isso inicialmente temos,

$$\begin{aligned} [H_0, B_+^n(a_0)] &= [B_+(a_0)B_-(a_0), B_+^n(a_0)] \\ &= B_+(a_0)B_-(a_0)B_+^n(a_0) \\ &\quad - B_+^n(a_0)B_+(a_0)B_-(a_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Lembrando que o Hamiltoniano da equação (7) pode ser escrito em termos dos operadores $B_+(a_0)$ e $B_-(a_0)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} H_0 &= B_+(a_0)B_-(a_0) \\ &= A^+(a_0)T^+(a_0)T^-(a_0)A^-(a_0) \\ &= A^+(a_0)A^-(a_0), \end{aligned} \quad (18)$$

a relação de comutação da equação (17) pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} [H_0, B_+^n(a_0)] &= B_+(a_0) [B_-(a_0)B_+(a_0)B_+^{n-1}(a_0) \\ &\quad - B_+^{n-1}(a_0)B_+(a_0)B_-(a_0)] \\ &= B_+(a_0) [H_1B_+^{n-1}(a_0) - B_+^{n-1}(a_0)H_0]. \end{aligned} \quad (19)$$

Usando a definição:

$$[H_0, B_+^{n-1}(a_0)] = H_0B_+^{n-1}(a_0) - B_+^{n-1}(a_0)H_0, \quad (20)$$

a equação (19) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} [H_0, B_+^n(a_0)] &= B_+(a_0) [H_1B_+^{n-1}(a_0) \\ &\quad - H_0B_+^{n-1}(a_0) + [H_0, B_+^{n-1}(a_0)]] \end{aligned} \quad (21)$$

No lado direito da equação (21) os termos $H_1B_+^{n-1}(a_0) - H_0B_+^{n-1}(a_0)$ remetem a relação entre os Hamiltonianos encontrada na equação (9), deste modo, obtemos:

$$\begin{aligned} [H_0, B_+^n(a_0)] &= B_+(a_0)[R(a_0)B_+^{n-1}(a_0) \\ &\quad + [H_0, B_+^{n-1}(a_0)]] \end{aligned} \quad (22)$$

A partir da equação (16), a equação (22) pode ser escrita da seguinte maneira

$$[H_0, B_+^n(a_0)] = R(a_1)B_+^n(a_0) + B_+(a_0) [H_0, B_+^{n-1}(a_0)]. \quad (23)$$

Repetindo um procedimento similar ao adotado para chegar a equação (23), a relação de comutação $[H_0, B_+^{n-1}(a_0)]$ é dada por:

$$\begin{aligned} [H_0, B_+^{n-1}(a_0)] &= R(a_1)B_+^{n-1}(a_0) \\ &\quad + B_+(a_0) [H_0, B_+^{n-2}(a_0)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Substituindo a equação (24) na equação (23), temos:

$$\begin{aligned} [H_0, B_+^n(a_0)] &= R(a_1)B_+^n(a_0) \\ &\quad + R(a_2)B_+^n(a_0) + B_+^2(a_0) [H_0, B_+^{n-2}(a_0)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Este procedimento pode ser repetido n vezes até que o comutador do lado direito da equação (25) seja igual à zero, isto é, $[H_0, B_+^{n-n}(a_0)] = 0$. Sendo assim, obtemos:

$$[H_0, B_+^n(a_0)] = \left[\sum_{i=0}^n R(a_i) \right] B_+^n(a_0). \quad (26)$$

Aplicando o comutador na função de onda para o estado fundamental e notando que para esse estado $H_0\psi_0(a_0, x) = 0$, temos:

$$H_0B_+^n(a_0)\psi_0(a_0, x) = \left[\sum_{i=0}^n R(a_i) \right] B_+^n(a_0)\psi_0(a_0, x). \quad (27)$$

Percebe-se que a equação (27) é uma equação de autovalor para o operador H_0 , onde $B_+^n(a_0)\psi_0(a_0, x)$ e $\sum_{i=0}^n R(a_i)$ são as autofunções e os autovalores de energia, respectivamente. Desse modo, temos que as autofunções e os autovalores de energia do Hamiltoniano original são dados por:

$$E_n = E_0 + \sum_{i=0}^n R(a_i) \tag{28}$$

e

$$\psi_n(a_0, x) = B_+^n(a_0)\psi_0(a_0, x), \tag{29}$$

onde E_0 é a constante subtraída do Hamiltoniano original para definir H_0 (equação (5)) e corresponde ao autovalor do estado fundamental do problema tratado.

3. Partícula numa caixa unidimensional

O formalismo desenvolvido na seção anterior pode ser aplicado a qualquer potencial quântico que seja *shape invariant*. Um caso trivial é o oscilador harmônico onde o parâmetro de translação é nulo [12].

Um exemplo mais elaborado do uso do método dos operadores-escada para determinar as soluções da equação de Schrödinger é o sistema composto por uma partícula confinada numa caixa unidimensional [12]. O potencial que descreve esse sistema é dado por:

$$V_{PC}(x) = \begin{cases} \infty, & x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \infty, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \tag{30}$$

sendo que os extremos do poço de potencial estão localizados em $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Esses valores foram escolhidos por simplicidade de cálculo.

Para esse sistema, o Hamiltoniano dentro da caixa é dado por:

$$H_{PC} = -\frac{d^2}{dx^2}, \tag{31}$$

onde H_{PC} é o Hamiltoniano original.

Para a construção da hierarquia de Hamiltonianos, é necessária a fatorização do Hamiltoniano original [11]. Assim, obtemos o primeiro termo constituinte da hierarquia,

$$H_0 = H_{PC} - E_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x), \tag{32}$$

sendo E_0 o autovalor do estado fundamental do problema.

Neste caso, o superpotencial obtido de modo à fatorizar o Hamiltoniano H_0 é conhecido [11, 12] e dado por:

$$W(x) = tg(x). \tag{33}$$

Com este superpotencial, os operadores bosônicos são

$$A^\pm = \mp \frac{d}{dx} + tg(x). \tag{34}$$

A partir das equações (33) e (34) a fatorização do Hamiltoniano é escrita como:

$$H_0 = H_{PC} - E_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + tg^2(x) - sec^2(x). \tag{35}$$

Utilizando na expressão (35) e a relação trigonométrica $tg^2(x) - sec^2(x) = -1$, obtemos que:

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} - 1, \tag{36}$$

o que permite a obtenção do autovalor de energia do estado fundamental do sistema, $E_0 = 1$.

A fim de verificar se esse potencial é *shape invariant* obtemos o companheiro supersimétrico de H_0 que é dado por:

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} - V_1(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{cos^2(x)} - 1. \tag{37}$$

Este problema é especialmente interessante, pois, em uma primeira análise, as formas obtidas para os companheiros supersimétricos, H_0 e H_1 , indicam que este potencial não é *shape invariant*, uma vez que $V_0 = -1$ e $V_1 = \frac{2}{cos^2(x)} - 1$. Entretanto, uma análise mais profunda permite identificar uma invariância escondida [12] neste caso.

Construindo a forma geral do superpotencial na hierarquia de hamiltonianos [11, 12] obtemos:

$$W_n(x) = n tg(x), \tag{38}$$

onde n é um número natural diferente de zero, ($n = 1, 2, 3, \dots$). A hierarquia fornece o enésimo termo da superfamília de potencias e que $E_n^1 = n^2$,

$$V_n - E_0^{(n)} = \frac{n(n-1)}{cos^2(x)} - n^2. \tag{39}$$

Para identificar a *shape invariance* escondida neste problema é necessário explicitar a dependência dos potenciais com os parâmetros dos problemas. Assim, reescrevendo a hierarquia em termos de um parâmetro a_0 , obtemos um caso particular do potencial de Infeld-Hull do tipo E como discutido nas referências [12, 33]:

$$W(x, a_0) = a_0 tg(x). \tag{40}$$

A fatorização com o superpotencial da equação (40) leva ao Hamiltoniano:

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} - V_0(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a_0(a_0-1)}{cos^2(x)} - a_0^2. \tag{41}$$

O companheiro supersimétrico de H_0 , é escrito então:

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} - V_1(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a_0(a_0+1)}{cos^2(x)} - a_0^2. \tag{42}$$

É importante notar que fazendo $a_0 = 1$ no hamiltoniano da expressão (41), o hamiltoniano original (equação (36)) é recuperado.

Após a obtenção dos companheiros supersimétricos, o próximo passo é usar a expressão (9) para verificar a *shape invariance* do potencial. Nesse caso, temos que:

$$R(a_1) = \left[\frac{a_0(a_0 + 1)}{\cos^2(x)} - a_0^2 \right] - \left[\frac{a_1(a_1 - 1)}{\cos^2(x)} - a_1^2 \right]. \quad (43)$$

Para que $R(a_1)$ seja independente de x , a seguinte relação precisa ser observada,

$$a_1 = a_0 + 1. \quad (44)$$

Assim, da relação (10) obtemos que $\eta = 1$. Deste modo, o resíduo obtido vale:

$$R(a_1) = a_1^2 - a_0^2 = 2a_0 + 1. \quad (45)$$

Generalizando o resíduo (equação (45)), fazendo $a_k = a_0 + \eta k$, encontramos:

$$\begin{aligned} R(a_k) &= a_k^2 - a_{k-1}^2 \\ &= (a_0 + k)^2 - [a_0 + (k - 1)]^2 \\ &= 2a_0 + 2k - 1, \end{aligned} \quad (46)$$

onde $\eta = 1$. Em seguida, podemos determinar os níveis de energia usando a equação (28):

$$E_n = E_0 + \sum_{k=1}^n R(a_k) = 1 + \sum_{k=1}^n (2a_0 + 2k - 1) = n^2 + 2a_0n + 1, \quad (47)$$

com $a_0 = 1$ como identificado anteriormente. Esses autovalores são os mesmos obtidos por outros métodos [2]. Na sequência, obtemos os operadores-escada de acordo como foi apresentado nas equações (11) e (12):

$$B_+(a_0) = \left[-\frac{d}{dx} + tg(x) \right] \exp\left(\eta \frac{\partial}{\partial a_0}\right) \quad (48)$$

e

$$B_-(a_0) = \exp\left(-\eta \frac{\partial}{\partial a_0}\right) \left[\frac{d}{dx} + tg(x) \right], \quad (49)$$

as autofunções para este potencial podem ser obtidas usando os operadores das equações (48) e (49).

Utilizando o operador $B_-(a_0)$ (equação (49)) na função do estado fundamental, obtemos:

$$B_-(a_0)\psi_{PC_0}(x, a_0) = 0, \quad (50)$$

o que permite encontrar a autofunção para o estado fundamental de uma partícula confinada em uma caixa unidimensional ($\psi_{PC_0}(x, a_0)$):

$$\psi_{PC_0}(x, a_0) = N_0 \exp\left[-\int_x a_0 tg(\bar{x})d\bar{x}\right] = N_0 \cos^{a_0}(x), \quad (51)$$

sendo N_0 a constante de normalização.

Para o caso em que $a_0 = 1$, temos:

$$\psi_{PC_0}(x) = N_0 \cos(x). \quad (52)$$

Para o primeiro estado excitado e $a_0 = 1$, a seguinte autofunção é encontrada:

$$\psi_{PC_1}(x) = N_1 \cos(2x), \quad (53)$$

onde N_1 é a constante de normalização para este estado.

Por fim, usando as equações (29), (48) e (51) obtemos a função de onda para o n ésimo estado excitado:

$$\begin{aligned} \psi_{PC_n}(x, a_0) &\propto \left[\left(-\frac{d}{dx} + tg(x) \right) \right. \\ &\times \left. \exp\left(\eta \frac{\partial}{\partial a_0}\right) \right]^n \cos^{a_0}(x)|_{a_0=1}, \end{aligned} \quad (54)$$

e os autovalores de energia são dados pela equação (47),

$$E_n = n^2 + (2a_0n + 1)|_{a_0=1}. \quad (55)$$

4. Potencial de Rosen-Morse

Usando o formalismo descrito anteriormente é possível determinar os operadores-escada para qualquer potencial *shape invariant*. Outro exemplo ilustrativo do formalismo introduzido e ainda não explorado na literatura é o potencial de Rosen-Morse [34]:

$$V_{RM}(\alpha y) = -V_a \operatorname{sech}^2(\alpha y) + V_b \tanh(\alpha y), \quad (56)$$

onde α , V_a e V_b são constantes. O potencial unidimensional de Rosen-Morse estudado aqui, se restringe a um caso particular em que: $V_b = 0$ e $\alpha y = x$. Dessa maneira, reescrevemos a equação (56) como:

$$V_{RM}(x) = -V_a \operatorname{sech}^2(x). \quad (57)$$

O Hamiltoniano para este caso pode ser escrito de forma conveniente como:

$$H_{RM} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{RM}(x) = -\frac{d^2}{dx^2} - V_a \operatorname{sech}^2(x) \quad (58)$$

Fatorizando o Hamiltoniano (equação (58)) da mesma maneira feita na equação (1) temos que definir os operadores bosônicos, ou seja, obter um superpotencial $W_0(x)$ que fatorize H_0 . Um superpotencial viável é:

$$W_0(x) = \beta_0 \tanh(x), \quad (59)$$

onde β_0 é uma constante. Assim, os operadores bosônicos para este caso são definidos como:

$$A^\pm = \mp \frac{d}{dx} + \beta_0 \tanh(x). \quad (60)$$

A fatorização deste caso é escrita como:

$$H_{RM} - E_0 = A^+ A^- = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta_0^2 \tanh^2(x) - \beta_0^2 \operatorname{sech}^2(x). \quad (61)$$

Usando a relação $sech^2(x) + tanh^2(x) = 1$, a equação 61 pode ser expressa de uma maneira conveniente por:

$$H_0 = H_{RM} - E_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta_0^2(1 - sech^2(x)) - \beta_0^2 sech^2(x). \tag{62}$$

Para determinar a constante é preciso igualar a equação (62) com o Hamiltoniano original (equação (58)), isto é,

$$-\frac{d^2}{dx^2} - V_a sech^2(x) - E_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta_0^2(1 - sech^2(x)) - \beta_0^2 sech^2(x). \tag{63}$$

A equação (63) é verdadeira quando:

$$\beta_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4V_a}}{2} \text{ onde } V_a > 0 \tag{64}$$

e

$$E_0 = -\beta_0^2. \tag{65}$$

É oportuno observar que β_0 foi escolhido de forma que $\beta_0 > 0$ para todo $V_a > 0$. Essa condição é importante, pois possibilita a existência de estados ligados e que as funções de onda obtidas adiante sejam normalizáveis.

Observa-se que o potencial $V_0(x)$ nesse caso, é definido como:

$$V_0(x) = \beta_0^2(1 - sech^2(x)) - \beta_0 sech^2(x). \tag{66}$$

Seguindo a metodologia apresentada, é necessário verificar se esse potencial é *shape invariant*. Assim, usando a equação (6) determinamos o companheiro supersimétrico de H_0 :

$$\begin{aligned} H_1 &= A^- A^+ \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + \beta_1^2 tanh^2(x) + \beta_1^2 sech^2(x) \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + \beta_1^2(1 - sech^2(x)) + \beta_1^2 sech^2(x). \end{aligned} \tag{67}$$

Comparando a equação (66) com a equação (67) percebe-se que o superpotencial associado com H_1 pode ser escrito como:

$$W_1(x) = \beta_1 tanh(x), \tag{68}$$

onde β_1 é uma constante a ser determinada. Usando essa função, o potencial $V_1(x)$ é definido como:

$$V_1(x) = \beta_1^2[1 - sech^2(x)] + \beta_1 sech^2(x). \tag{69}$$

Usando as equações (66) e (69) verificamos que o potencial original é *shape invariant* (equação (9)) se:

$$\begin{aligned} R(\beta_1) &= \beta_0^2[1 - sech^2(x)] + \beta_0 sech^2(x) \\ &- \beta_1^2[1 - sech^2(x)] - \beta_1 sech^2(x), \end{aligned} \tag{70}$$

para $R(\beta_1)$ ser independente da variável espacial o parâmetro β_1 tem que ser escrito como:

$$\beta_1 = \beta_0 - 1 \tag{71}$$

Fazendo uma relação entre a equação (10) e a equação (71) nota-se que o parâmetro de translação η é -1 . Portanto, o resíduo $R(\beta_1)$ é:

$$R(a_1) = \beta_0^2 - \beta_1^2 = 2\beta_1 + 1. \tag{72}$$

No geral, o resíduo (equação (72)) é generalizado de maneira análoga a equação (10) o que implica em $\beta_k = \beta_0 + \eta k$, onde $\eta = -1$. Assim, $R(\beta_k)$ pode ser redefinido:

$$\begin{aligned} R(\beta_k) &= \beta_{k-1}^2 - \beta_k^2 = [\beta_0 - (k - 1)]^2 - (\beta_0 - k)^2 \\ &= 2(\beta_0 - k) + 1, \end{aligned} \tag{73}$$

Usando as equações (28), (65) e (73), calculamos os níveis de energia para o potencial de Rosen-Morse estudado:

$$\begin{aligned} E_n &= -\beta_0^2 + \sum_{k=1}^n [2(\beta_0 - k) + 1] \\ &= -\beta_0^2 + (2\beta_0 + 1)n - n(n + 1) \\ &= -(\beta_0 - n)^2, \end{aligned} \tag{74}$$

onde β_0 é definido pela equação (64). Esses autovalores de energia são os mesmos encontrados por outros métodos [7, 8].

Em seguida, se obtém os operadores de criação e de destruição das definições dadas pelas equações (11) e (12), respectivamente, com o superpotencial indicado pela equação (59). Para o presente problema esses operadores são dados por:

$$B_+(\beta_0) = \left[-\frac{d}{dx} + \beta_0 tanh(x) \right] exp \left(\eta \frac{\partial}{\partial \beta_0} \right) \tag{75}$$

e

$$B_-(\beta_0) = exp \left(-\eta \frac{\partial}{\partial \beta_0} \right) \left[\frac{d}{dx} + \beta_0 tanh(x) \right], \tag{76}$$

As autofunções para o potencial original, equação (57), podem ser encontrados usando os operadores de criação (equação (75)) e destruição (equação (76)). Utilizando o operador $B_-(\beta_0)$ aplicado à autofunção do estado fundamental, deve-se observar que:

$$B_-(\beta_0)\psi_{RM_0}(x, \beta_0) = 0, \tag{77}$$

o que permite determinar a autofunção para o estado fundamental do potencial de Rosen-Morse, ($\psi_{RM_0}(x, \beta_0)$):

$$\psi_{RM_0}(x, \beta_0) = N_0 cosh^{-\beta_0}(x), \tag{78}$$

onde N_0 é a constante de normalização e β_0 é dado na equação (64).

$$\psi_{RM_1}(x, \beta_0) = N_1 \operatorname{senh}(x) \operatorname{cosh}^{-(\beta_0+2)}(x), \quad (79)$$

onde N_1 é a constante de normalização para este estado.

Por fim, usando as equações (29), (75) e (78) obtemos a função de onda para o enésimo estado excitado:

$$\psi_{RM_n}(x, \beta_0) \propto \left[\left(-\frac{d}{dx} + \beta_0 \operatorname{tanh}(x) \right) \times \exp \left(\eta \frac{\partial}{\partial \beta_0} \right) \right]^n \operatorname{cosh}^{-\beta_0}(x) \Big|_{\beta_0 = \frac{-1 + \sqrt{1+4V_a}}{2}}, \quad (80)$$

onde $V_a > 0$ e os autovalores de energia (equação (74)) são dados por:

$$E_n = -(\beta_0 - n)^2 \Big|_{\beta_0 = \frac{-1 + \sqrt{1+4V_a}}{2}}. \quad (81)$$

5. Conclusões

Neste trabalho foram introduzidos os operadores-escada generalizados, originários da aplicação do formalismo da Supersimetria em Mecânica Quântica. O formalismo foi introduzido com detalhes algébricos e usado para obtenção das autofunções e dos autovalores de energia, para a partícula em uma caixa e um caso particular do potencial de Rosen-Morse.

Para os dois casos estudados a *shape invariance* foi identificada, o que viabilizou a construção dos operadores-escada generalizados. No caso da partícula numa caixa, diferentemente do que ocorre para o potencial de Rosen-Morse, a *shape invariance* não se deu de forma direta. Ela só pode ser identificada após a introdução de um parâmetro fixado a posteriori, o que foi indicado com uma invariância escondida.

Os resultados apresentados mostram uma maneira alternativa de construção dos operadores-escada em Mecânica Quântica. Uma vez que quase todos os potenciais exatamente solúveis são *shape invariant* a abordagem proposta generaliza o tratamento via operadores-escada para um número maior de problemas. Alguns desses problemas já foram tratados na literatura [2, 12], como o caso da partícula em uma caixa. Entretanto, até onde podemos perceber, o caso particular do potencial de Rosen-Morse estudado aqui ainda não havia sido discutido através dessa abordagem até o presente trabalho.

Os resultados obtidos aqui podem ser usados em diferentes contextos, em especial, na construção de estados coerentes, o que amplia o interesse pela abordagem apresentada. O formalismo discutido também pode ser visto como um método alternativo de obtenção da solução da equação Schrödinger.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro parcial ao projeto.

Referências

- [1] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
- [2] E. Drigo Filho, *Supersimetria Aplicada à Mecânica Quântica: Estudo da Equação de Schrödinger* (Editora UNESP, São Paulo, 2009).
- [3] E. Drigo Filho and R.M. Ricotta, Mod. Phys. Lett. A **10**, 1613 (1995).
- [4] E. Drigo Filho and R.M. Ricotta, Phys. Lett. A **269**, 269 (2000).
- [5] D. Mikulski, J. Konarski, K. Eder, M. Molski and S. Kabaciński, J. Math. Chem. **53**, 2018 (2015).
- [6] J.C.B. Araujo, G.R.P. Borges and E. Drigo Filho, Rev. Bras. Ens. Fis. **28**, 41 (2006).
- [7] C.V. Sukumar, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 2917 (1985).
- [8] R. Dutt, A. Khare and U.P. Sukhatme, Am. J. Phys. **56**, 163 (1988).
- [9] N.A. Alves and E. Drigo Filho, J. Phys. A: Math. Gen. **21**, 3215 (1988).
- [10] G. Levai, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 689 (1989).
- [11] E. Drigo Filho, Rev. Bras. Ens. Fis. **20**, 258 (1990).
- [12] E. Drigo Filho and M.R. Ricotta, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 10057 (2004).
- [13] C.S. Jia, J.Y. Wang, S. He, and L.T. Sun, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 6993 (2000).
- [14] S.W. Qian, B.W. Huang and Z.Y. Gu, New J. Phys. **4**, 13 (2002).
- [15] B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne and V.M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 2929 (2005).
- [16] A. Ganguly and L.M. Nieto, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 7265 (2007).
- [17] C.S. dos Santos, E. Drigo Filho and R.M. Ricotta, Int. J. Quantum Chem. **115**, 765 (2015).
- [18] G.R.P. Borges, E. Drigo Filho and R.M. Ricotta, Physica A **389**, 3892 (2010).
- [19] F.R. Silva and E. Drigo Filho, Chem. Phys. Lett. **498**, 198 (2010).
- [20] F. Polotto, M.T. Araujo and E. Drigo Filho, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 15207 (2010).
- [21] S. Bittanti, A.J. Laub and J.C. Willems, *The Riccati Equation* (Springer - Verlag, New York, 2012).
- [22] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1997).
- [23] R. Dick, *Advanced Quantum Mechanics - Materials and Photons* (Springer - Verlag, New York, 2012).
- [24] A.A. Raduta, *Nuclear Structure with Coherent States* (Springer International Publishing, Switzerland, 2015).
- [25] R. Borrelli and M.F. Gelin, Chem. Phys. **481**, 91 (2016).
- [26] I. Silva, Rev. Bras. Ens. Fis. **37**, 4204 (2015).
- [27] M. Novaes, Rev. Bras. Ens. Fis. **24**, 437 (2002).
- [28] C. Valverde, A.N. Castro, E.P. Santos e B. Baseia, Rev. Bras. Ens. Fis. **37**, 2311 (2015).

- [29] W.M. Zhang, D.H. Feng and R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 867 (1990).
- [30] P.L. Knight and L. Allen, *Concepts of Quantum Optics* (Pergamon, Oxford, 2013).
- [31] D.J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004).
- [32] A.B. Balantekin, *Phys. Rev. A* **57**, 4188 (1998).
- [33] L. Infeld and T.E. Hull, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 21 (1951).
- [34] A.N. Ikot and L.E. Akpabio, *App. Phys. Res.* **2**, 202 (2010).