Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 41, nº 2, e20180194 (2019)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0194

Dificultades conceptuales y matemáticas del modelo convencional de oscilaciones amortiguadas

Conceptual and mathematical difficulties of the conventional model of damped oscillations

César Francisco Medina*[1], Sandra Velazco[2]

[1]Universidad Nacional de Tucumán, Avenida Independencia 1800, San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina
[2]Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologia, San Miquel de Tucuman, Tucumán, Argentina

Recibida en 28 de junio, 2018. Revisado en 20 de septiembre, 2018. Aceptado en 04 de noviembre, 2018.

Se desarrolla un estudio matemático de oscilaciones amortiguadas centrado en el cálculo de las constantes de la ecuación de movimiento, su significado matemático y sus implicancias en el comportamiento de los sistemas. Se ejemplifica el método de los valores iniciales para el cálculo de las constantes, tanto en oscilaciones libres como amortiguadas. Se deducen expresiones algebraicas para el modelo convencional amortiguado y se discuten comparativamente con las del formalismo de Crawford. Se discute el significado de las constantes y se ofrecen respuestas a algunas preguntas frecuentes entre estudiantes y profesionales. Se introduce el concepto de "función exponencial secante" y se establece la diferenciación entre ésta y la envolvente de la ecuación de movimiento. Se dan ejemplos de los errores sistemáticos cometidos al imponer arbitrariamente las constantes, y se discute su significado y razón matemática. En el apéndice, se deduce la ecuación general de oscilaciones amortiguadas y se ejemplifican los tres casos posibles de sistema (sobreamortiguamiento, amortiguamiento crítico, y oscilaciones subamortiguadas). Se deduce el modelo convencional de oscilaciones amortiguadas como un caso particular de la ecuación general.
Palabras clave: oscilaciones amortiguadas; constantes de la ecuación de movimiento, método de los valores iniciales.

A mathematical study on the subject of damped oscillations is expounded, focused on the computation of the constants of the equation of movement, their mathematical meaning and their implications on the behavior of systems. Examples are given of the initial value method for computing the constants, both for free and damped oscillations. Algebraic expressions are deduced for the conventional damped model and they are comparatively discussed with those from Crawford's formalism. The meaning of the constants is discussed and answers are offered for questions frequently asked by students and professionals. The concept of secant exponential function is introduced, and the distinction between this function and the envelope of the equation of motion is established. Examples are given of systematic errors committed when constants are arbitrarily imposed, and their meaning and the mathematical reason is discussed. In the appendix, the general equation of damped oscillations is deduced and examples are given for all three possible cases of systems (overdamping, critical damping, and underdamped oscillations). The conventional model of damped oscillations is deduced as a particular case of the general equation.
Keywords: damped oscillations; constants of the equation of movement; initial value method.

1. Introducción

El tema de oscilaciones mecánicas, en el ciclo básico universitario, tiene una importancia formativa fundamental para todas las carreras científicas y tecnológicas.

Aunque los problemas y experimentos propuestos en este nivel curricular suelen limitarse a sistemas sencillos tales como resortes y péndulos de diversas clases (simple, físico, de torsión), el campo de aplicación de las oscilaciones es, indudablemente, mucho más amplio. Una oscilación mecánica es, en esencia, un movimiento de vaivén de un dado cuerpo, bajo la acción de una fuerza que tiende a restituirlo a una posición de equilibrio. En la naturaleza hay una gran cantidad de sistemas que cumplen esta condición. Sus dimensiones abarcan un rango muy amplio que va desde la escala atómica (vibraciones de los núcleos atómicos) hasta la escala de un puente colgante bajo la acción de los vientos, o bien un movimiento sísmico. Existen fenómenos oscilatorios en todos los estados de la materia (sólidos, líquidos, gases y plasmas), incluyendo el vasto e importante campo de las ondas.

Desde una perspectiva histórica, el estudio de los fenómenos oscilatorios ha jugado un rol decisivo en el desarrollo de la ciencia, la tecnología y la cultura, desde el siglo XVI hasta nuestros días. Grandes figuras de la Revolución Científica le dedicaron especial atención a sistemas tan simples como el péndulo [1], entre ellos,

*Endereço de correspondência: cfmedina@herrera.unt.edu.ar.

Galileo, Huygens, Newton y Hooke, cuyas investigaciones fueron decisivas para establecer resultados de gran importancia, como el valor de la aceleración de la gravedad y sus variaciones espaciales, métodos precisos para medir el tiempo, algunos principios de conservación, y las leyes de las colisiones, entre otros. A mediados del siglo XIX, merecen especial mención el trabajo de Stokes sobre amortiguamiento viscoso [2] y la demostración de la rotación terrestre realizada por Foucault [3]. En el siglo XX, las investigaciones en esta temática han abarcado un espectro bastante amplio. Desde la perspectiva educativa y la sicología del aprendizaje, uno de los hitos más significativos lo marcó el trabajo de Inhelder y Piaget [4], que clasifica distintos estadios evolutivos del desarrollo del pensamiento en niños y adolescentes, según su capacidad de establecer relaciones, separar variables y extraer conclusiones sobre el comportamiento de un péndulo (entre otros dispositivos experimentales), con el cual pueden interactuar bajo ciertas consignas.

Los trabajos más recientes sobre oscilaciones abordan diversos problemas técnicos, experimentales y numéricos. Algunos tratan el modelado matemático, diseño y construcción de recursos didácticos para ilustrar algunos aspectos de la teoría del caos [5, 6 ,7]. Otros se enfocan en temas puntuales de mecánica. Por ejemplo, se ha analizado el movimiento de un péndulo simple amortiguado, utilizando cámaras digitales y programas de computadora adecuados, lo que ha permitido determinar los parámetros de movimiento con gran precisión [8]. Se ha estudiado, también experimentalmente, cómo las variaciones de amplitud y la fricción modifican el período de un péndulo amortiguado que oscila en el aire, utilizando métodos numéricos para ajustar curvas teóricas a datos experimentales [9]. Algunos trabajos estudian los efectos no lineales de la "fricción interna" de los péndulos, ya sea en el soporte o en masas viscosas colocadas en el interior del cuerpo suspendido [10, 11]. Otros controlan experimentalmente la validez de hipótesis y modelos en casos específicos [12, 13], o analizan la influencia de ciertas características geométricas de los sistemas en los parámetros físicos del movimiento [14, 15], o bien la influencia de unos parámetros sobre otros y sus respuestas no lineales [16].

Por otra parte, algunas investigaciones analizan críticamente los desarrollos presentados por textos de uso habitual en ciclos básicos universitarios. Por ejemplo, se discute la introducción del tema movimiento armónico simple en textos de mecánica [17], o se analiza el desarrollo del tópico oscilaciones electromagnéticas libres y amortiguadas, en libros de electromagnetismo de nivel universitario básico [18]. Estos trabajos definen ciertos criterios para comparar, en distintos textos, la presentación del tema investigado. Los resultados obtenidos señalan que algunos conceptos no se presentan con suficiente claridad o que ciertos aspectos merecerían una mayor elaboración. Sin embargo, no incluyen desarrollos o secuencias de enseñanza que tengan en cuenta las dificultades detectadas y que por lo tanto constituyan una propuesta superadora.

Como docentes e investigadores en educación en ciencias hemos advertido que, a pesar de la importancia del tema, la mayoría de los libros de texto de uso habitual presenta, a menudo, una falta de claridad y precisión en su tratamiento. Entre los aspectos más notorios cabe mencionar:

a) Las soluciones de las ecuaciones de movimiento se dan, no sólo sin demostración (lo cual es admisible pues son ecuaciones diferenciales que el alumno aún no ha estudiado), sino incluso sin referencias a textos especializados, y en algunos casos, sin explicaciones o justificaciones apropiadas.

b) El modelo de oscilaciones amortiguadas que ofrece la mayoría de los textos tiene un ámbito de aplicación limitado.

c) Varios conceptos importantes se enuncian de un modo un tanto vago, ambiguo o confuso, y esto dificulta su comprensión por parte de los estudiantes.

d) En muchos casos, no se explican ni ejemplifican principios metodológicos fundamentales, como por ejemplo, el cálculo de las constantes del movimiento a partir de las condiciones iniciales.

Cabe mencionar que estas limitaciones no son un problema reciente. Vienen influyendo en la formación profesional en ciencias exactas desde hace mucho tiempo, y en nuestra experiencia docente hemos observado que actualmente constituyen una rémora difícil de superar, pues los profesionales formados ofrecen cierta resistencia a revisar sus conceptos y cambiar su modo de trabajar.

En el ciclo básico universitario de carreras científicas y tecnológicas, se estudian oscilaciones mecánicas y eléctricas (circuitos con resistencias, capacitores e inductores). En ambos temas se incluyen oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas. Las ecuaciones que describen estos fenómenos son esencialmente idénticas, y le dan al estudiante la oportunidad de descubrir que estas correspondencias formales están asociadas a analogías en el comportamiento de sistemas de naturaleza muy distinta. En este contexto, sus capacidades matemáticas se desarrollan no sólo como una herramienta de cálculo, sino como un lenguaje y un instrumento de razonamiento y análisis, permitiéndole desarrollar sus estructuras cognitivas y alcanzar un mayor grado de abstracción.

El tema fundamental de este trabajo es un estudio matemático de las oscilaciones amortiguadas, más amplio y profundo que el ofrecido por la mayoría de los textos de uso habitual. Este estudio está centrado en la metodología de cálculo de las constantes del modelo convencional, su significado matemático y sus implicancias en el comportamiento de los sistemas.

La sección §2, a modo de introducción a los formalismos matemáticos, presenta un breve resumen del modelo de oscilaciones libres y ejemplifica la metodología de cálculo de las constantes de movimiento en este modelo más simple, puntualizando algunas ideas básicas, antes de considerar el modelo de oscilaciones amortiguadas. En la sección §3, se presenta el modelo convencional de oscilaciones amortiguadas señalando sus limitaciones, se obtienen expresiones algebraicas generales para las constantes de movimiento, se las particulariza para un caso equivalente al de la sección §2, y se ofrecen las respuestas a algunas preguntas y dudas planteadas, a lo largo de nuestra práctica docente, en distintas instancias de discusión con profesionales (algunas de estas dudas pueden ser frecuentes, también, entre estudiantes). En la sección §4, se explica el comportamiento de la ecuación de movimiento en términos matemáticos, y se discuten varios conceptos relevantes. Asimismo, se analizan los errores sistemáticos y las incongruencias físicas a las que éstos conducen cuando se aplica un método de cálculo inapropiado, que es común observar. En la sección §5 se presenta y discute, en términos comparativos, un formalismo distinto para el cálculo de las constantes, desarrollado por F. S. Crawford, Jr. En la sección §6 se resumen las principales conclusiones. En el Apéndice A se deduce la ecuación general, se ofrecen ejemplos de las distintas clases de sistemas posibles y se demuestra que el modelo convencional puede derivarse como un caso particular de la solución general.

2. Oscilaciones libres

2.1. Breve resumen del modelo

Consideraremos, como caso genérico, un sistema masa-resorte, donde el resorte responde a la ley de Hooke, y tanto la masa del resorte como la fuerza de roce pueden considerarse despreciables (oscilaciones libres o movimiento armónico simple, *MAS*). Para tal sistema, la segunda ley de Newton ($F = m \cdot a$) puede escribirse [19, 20, 21, 22]:

$$-kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{1}$$

El primer miembro de esta ecuación representa la fuerza que actúa sobre el cuerpo unido al resorte (fuerza recuperadora del resorte), y el segundo miembro, el producto de la masa por la aceleración que adquiere dicho cuerpo. k es la constante de rigidez del resorte; m, la masa del cuerpo; x, la posición medida desde el punto de equilibrio; y t, el tiempo.

La Ec. (1) es una ecuación diferencial que el estudiante aprenderá a resolver en el ciclo superior. Cabe explicarle, por el momento, que en las ecuaciones diferenciales la incógnita no es una variable, sino una función. También consideramos conveniente escribir siempre $x(t)$ y no simplemente "x'', para que no confunda esta función con una variable.

La solución de la Ec. (1) puede escribirse:

$$x(t) = A_l \cos(\omega_0 t + \phi_l) \tag{2}$$

Donde ω_0 es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

El subíndice l, de *libre*, se ha escrito para diferenciar las constantes de este modelo de las de oscilaciones amortiguadas, que se discutirán más adelante. El subíndice *0*, por su parte es una notación convencional del *MAS* para indicar que ω_0 es la llamada *frecuencia angular natural* del sistema, la cual reviste importancia en los fenómenos de resonancia.

El estudiante debe advertir que si bien ω_0, A_l y φ_l son todas constantes de la Ec. (2), existe una importante diferencia entre la primera y las dos últimas: ω_0 es un parámetro del sistema, cuyo valor depende de propiedades inherentes al mismo (v. Ecs. (1) y (3)); en tanto que A_l y φ_l son constantes que dependen de las condiciones iniciales del movimiento y, dependiendo de tales condiciones iniciales, podrían asumir distintos valores para un mismo sistema.

En un sentido más genérico, el parámetro ω_0 –al igual que sus homólogos de oscilaciones amortiguadas y forzadas– se denomina simplemente *frecuencia angular* y es proporcional a la frecuencia f, o cantidad de oscilaciones que el sistema realiza en la unidad de tiempo ($\omega = 2\pi f$).

La Ec. (2) no es la única manera de formular la solución de la Ec. (1), pero es la más usada, y también la más conveniente para asociar al *MAS* con el movimiento circular y con los números complejos, en estudios más avanzados [23].

2.2. Cálculo de las Constantes de Movimiento

Muchos textos de física y matemática señalan que A_l y φ_l son dos constantes "independientes y arbitrarias". Esto significa que cualesquiera sean sus valores, la Ec. (2) será una solución de la Ec. (1). Pero no cualquier solución de la Ec. (1) será una solución apropiada para un sistema físico en particular, sino sólo aquella cuyas constantes sean compatibles con los valores de posición y velocidad que tal sistema tenga en un dado instante. Por sencillez, suele elegirse dicho instante como $t = 0$.

Luego, es conveniente prevenir al estudiante sobre la interpretación del término "arbitrario", que puede inducirlo a confusión: *Para un problema específico, las constantes A_l y φ_l no se pueden imponer ni elegir arbitrariamente, deben ser calculadas a partir de las condiciones iniciales de ese dado problema.* Este principio metodológico es mencionado en algunos textos, peroson pocos los que ofrecen ejemplos de cálculo al respecto [20, p. 365] [23,p. 6] [24].

En el caso de oscilaciones libres, la constante A_l puede identificarse con la *amplitud* o máximo apartamiento del equilibrio dado al resorte, el cual no debe superar el límite elástico del mismo. Convencionalmente, A_l se considera positiva, aun cuando el apartamiento del equilibrio puede ser positivo (elongación) o negativo (compresión). φ_l, por su parte, recibe el nombre de *fase inicial*, y depende del instante elegido como origen del tiempo. Si bien esta elección es arbitraria, una vez hecha se debe imponer la condición de compatibilidad con los valores iniciales del problema. Analicemos un ejemplo típico:

Ejemplo 1: Se elonga un sistema masa-resorte hasta una posición inicial x_0 y se elige, por simplicidad, medir el tiempo a partir del instante en que se libera el cuerpo. En estas condiciones, en $t = 0$, la posición medida desde el punto de equilibrio debe ser x_0, y la velocidad debe ser nula. A partir de estos datos, debe armarse un sistema de dos ecuaciones, $x(0) = x_0$ y $v(0) = 0$, con dos incógnitas, A_l y φ_l. Así,

$$x(0) = A_l \cos(\omega_0 \cdot 0 + \phi_l) = x_0 \tag{4}$$

$$v(0) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = -\omega_0 A_l sen(\omega_0 \cdot 0 + \phi_l) = 0 \tag{5}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, de la Ec. (4) por sí sola, no puede extraerse ninguna conclusión sobre el valor de ninguna de las dos constantes, A_l y φ_l. En cambio, de la Ec. (5) por sí sola, sí se puede hacer deducciones sobre el valor de φ_l. Nótese que ni ω_l ni A_l pueden ser cero, pues entonces $x(t)$ sería constante en el tiempo (v. Ec. (2)), luego lo que debe ser cero, en $t = 0$, es la expresión trigonométrica $sen(\omega_0 \cdot 0 + \phi_l) = sen(\phi_l) = 0$, lo cual implica que el valor φ_l sólo puede ser 0 o un múltiplo de π.

Habiendo llegado a esta conclusión, retomamos la Ec (4). Si en ella impusimos $x_0 > 0$, deducimos que φ_l debe ser 0 o un múltiplo *par* de π, pues siendo $A_l > 0$, debe ser también $cos(\omega_0 \cdot 0 + \phi_l) = cos(\phi_l) > 0$. Sin perder generalidad, basta considerar $\phi_l = 0$. Una vez encontrado el valor de φ_l, también se deduce de la Ec. (4) que $A_l = 0$, y por ello dijimos que A_l puede identificarse con la amplitud o máxima elongación.

Nótese el orden lógico que se siguió en la deducción de las constantes:

De la expresión de la velocidad inicial, Ec. (5), se dedujo que el valor de φ_l, debía ser 0 o un múltiplo de π. Luego, de la expresión de la posición inicial, Ec. (4), se pudo precisar el valor de φ_l y obtener el valor de A_l.

Sin embargo, en nuestra experiencia docente, hemos detectado que la mayoría de los estudiantes, e incluso algunos profesionales formados, invierte este orden lógico en sus deducciones. Cuando se les solicita que expliquen cómo obtienen los valores de las constantes, exponen el siguiente razonamiento: "Asumiendo que en $t = 0$ la posición es $x_0 > 0$, en la Ec. (4) debe cumplirse $cos(\omega_l \cdot 0 + \phi_l) = 1$, y esto sólo puede ser cierto si φ_l es 0 o un múltiplo de 2π".

Al razonar de esta manera, asumen que $A_l = x_0$; luego, la única constante a determinar es φ_l, y para ello basta la Ec. (4). Asumen que esta igualdad es cierta porque así lo han aprendido, pero al parecer no advierten que esto es una consecuencia de resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. De hecho, es curioso que profesionales con experiencia en resolver problemas de valor inicial no razonan en términos de este formalismo ante la pregunta planteada.

Comoquiera, en oscilaciones libres, bajo las condiciones iniciales correspondientes a este ejemplo, es correcto asumir que $A_l = x_0$. Sin embargo, en oscilaciones amortiguadas, como se discutirá más adelante, el planteo apropiado de las condiciones iniciales es indispensable.

3. Oscilaciones amortiguadas

3.1. Modelo Convencional del Sistema Masa–Resorte

En la mayoría de los casos prácticos, los sistemas masa-resorte oscilan en un fluido (generalmente, aire) que opone una fuerza de roce al movimiento del cuerpo. Si la velocidad es pequeña, esta fuerza puede considerarse proporcional a la velocidad [23, p. 63] [24, p. 414]:

$$F_{roce} = -bv \tag{6}$$

donde la constante b depende de la forma y tamaño del cuerpo, y de la viscosidad del medio.

Luego, la segunda ley de Newton queda:

$$-kx(t) - b\frac{dx(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{7}$$

Que usualmente se reordena de la siguiente manera:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{8}$$

La solución de esta ecuación puede escribirse como

$$x(t) = A_a e^{-bt/2m} \cos(\omega_a t + \phi_a) \tag{9}$$

A esta ecuación, que la mayoría de los textos de física ofrecen sin demostración, la llamaremos, en este contexto, *la ecuación de movimiento del modelo convencional de oscilaciones amortiguadas.*[1] El subíndice a, de *amortiguada*, se ha escrito para enfatizar la diferencia entre las constantes y parámetros de este modelo y los correspondientes al de oscilaciones libres.

En la Ec. (9), ω_a es

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{10}$$

Luego, también en este caso ω_a es un parámetro que sólo depende de propiedades inherentes al sistema, en tanto que A_a y φ_a son constantes que a los fines de satisfacer la Ec. (8) podrían asumir valores cualesquiera, pero físicamente deben ser compatibles con las condiciones iniciales.

Si bien la mayoría de los textos de física dan, como la solución de la Ec. (8), la Ec. (9), no es ésta la solución más general. De hecho, es inaplicable a los casos de amortiguamiento crítico (cuando $k/m = b^2/4m^2$) y de sobreamortiguamiento (cuando $k/m < b^2/4m^2$). En el Apéndice A se deduce una ecuación general que contempla estos casos y se deriva de ella la Ec. (9) como un caso particular.

[1] Muchos textos llaman "subamortiguadas" a las oscilaciones que corresponden a $\omega_a > 0$, que es el único caso en que puede aplicarse la Ec. (9).

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0194

3.2. Cálculo de las Constantes del Modelo Convencional

Las constantes A_a y φ_a, al igual que en el caso de oscilaciones libres, deben calcularse a partir de los valores iniciales $x(0)$ y $v(0)$, planteando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x\left(0\right) = A_a e^{-b\cdot 0/2m}\cos\left(\omega_a \cdot 0 + \phi_a\right) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} v\left(0\right) &= -A_a \frac{b}{2m} e^{-b\cdot 0/2m}\cos\left(\omega_a \cdot 0 + \phi_a\right) \\ &- A_a \omega_a e^{-b\cdot 0/2m} sen\left(\omega_a \cdot 0 + \phi_a\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Simplificando estas ecuaciones:

$$x\left(0\right) = A_a \cos\left(\phi_a\right) \tag{13}$$

$$v\left(0\right) = -A_a \frac{b}{2m}\cos\left(\phi_a\right) - A_a \omega_a sen\left(\phi_a\right) \tag{14}$$

De las cuales se obtiene

$$tg\left(\phi_a\right) = -\frac{v\left(0\right)}{\mathrm{x}\left(0\right)\cdot \omega_a} - \frac{b}{2m\omega_a} \tag{15}$$

Ejemplo 2: Al igual que en el ejemplo anterior, se elonga un sistema masa-resorte hasta una amplitud $A_0 > 0$, y se mide el tiempo a partir del instante en que se libera el cuerpo. Luego, $x\left(0\right) = A_0$ y $v\left(0\right) = 0$. Reemplazando estos valores en las Ecs. (13) y (15), se obtiene $A_a = A_0/cos(\phi_a)$, y $\phi_a = arctg(-b/2m\omega_a)$ Es decir, a diferencia del caso de oscilaciones libres, en oscilaciones amortiguadas *la constante A_a ya no es igual a la amplitud o elongación máxima, y φ_a ya no es cero, aun cuando midamos el tiempo a partir del instante de máxima elongación.*

De la Ec. (13) se deduce que $\cos\left(\phi_a\right) > 0$, (puesto que $A_a > 0$, por convención, y $x(0) > 0$, por condición inicial, y en la Ec. (15) se advierte que para $v\left(0\right) = 0$, $tg\left(\phi_a\right) < 0$. Luego, φ_a es un ángulo del cuarto cuadrante del círculo trigonométrico. Por sencillez, y sin perder generalidad, con estas condiciones iniciales se puede considerar que $\phi_a < 0$, y en la medida en que el factor de amortiguamiento b sea pequeño, φ_a será próximo a cero y A_a será comparable a A_0.

En nuestro estudio consideraremos, en todos los casos, las mismas condiciones iniciales: $x\left(0\right) = A_0$ y $v\left(0\right) = 0$, las cuales implican $A_a = A_0/cos(\phi_a)$, y $\phi_a = arctg(-b/2m\omega_a)$.

3.3. Preguntas y Respuestas sobre las Constantes $\mathbf{A_a}$ y $\varphi_\mathbf{a}$

Para el caso de oscilaciones amortiguadas, la metodología de cálculo de las constantes a partir de las condiciones iniciales está mencionada en diversos textos, pero en nuestro conocimiento, sólo está analizada detalladamente en una obra que comentamos en la sección §5, la cual no usa la formulación que discutimos en este trabajo (modelo convencional, Ec. (9)). El significado de las constantes y sus implicancias en el comportamiento de los sistemas no están analizados en ninguna obra de nuestro conocimiento, y en el marco del modelo convencional, sólo nos cabe referir un ejemplo puntual de aplicación de esta metodología desarrollado por Goicolea Ruigómez [25] para valores numéricos particulares.

En este contexto, los resultados aquí expuestos pueden ser novedosos no sólo para los estudiantes, sino también para muchos profesionales de ciencias exactas. Al presentarlos a nuestros colegas, a través de seminarios de discusión, varios de ellos se mostraron sorprendidos, y algunos inclusive, un poco incrédulos. Ante la posibilidad de que el lector tenga dudas semejantes, creemos conveniente comentar algunas de las preguntas que nos formularon nuestros colegas, y las respuestas que les ofrecimos:

Pregunta 1: ¿Cómo es posible que sea $A_a > A_0$? ¿Acaso esto significa que en algún instante la posición del cuerpo, medida desde el punto de equilibrio, puede ser mayor que la elongación inicial A_0?

Respuesta: No, en ningún instante la posición puede ser mayor que la elongación inicial A_0. En el instante inicial, la posición es $x\left(0\right) = A_0$, como lo muestra la Ec. (13), porque A_a está multiplicada por $cos(\phi_a)$; para todo instante posterior, la posición es menor que A_0.

Pregunta 2: Suponiendo $x\left(0\right) = A_0$ y $v\left(0\right) = 0$, siempre consideramos que, al igual que en el caso de oscilaciones libres, $A_a = A_0$ y $\phi_a = 0$. ¿Por qué dicen que esto es incorrecto, si la ecuación de movimiento, en $t = 0$, se verifica con estos valores?

Respuesta: Para obtener los valores de dos incógnitas son necesarias dos ecuaciones, no basta que los valores verifiquen una de ellas si no verifican también la otra. Si se impone "arbitrariamente" $A_a = A_0$ y $\phi_a = 0$, se verifica, efectivamente, la Ec. (13), pero no la Ec. (14), en donde se obtiene, bajo esta imposición arbitraria, que la velocidad inicial no es nula, lo cual contradice las condiciones iniciales impuestas al sistema.

Pregunta 3: Obviamente, A_a ya no puede interpretarse como la elongación máxima, como en el caso de oscilaciones libres ¿Cuál es entonces su significado físico?

Respuesta: Más que un significado físico, A_a tiene un significado matemático, que se explica en la sección §4. Si queremos interpretar a A_a como una amplitud, podemos decir que es la amplitud de la envolvente exponencial de las oscilaciones, la cual, desde luego, no es una propiedad fenomenológica tan directa como la amplitud de las oscilaciones mismas, como en el caso de oscilaciones libres. Esto no debe interpretarse como un menoscabo del modelo ni de los resultados: *no todas las entidades matemáticas que describen el comportamiento de un sistema son, ni deben ser, correlatos directos de alguna de sus propiedades físicas.* De hecho, en su forma más general, la ecuación de movimiento puede escribirse en términos de constantes que no tienen un "significado físico" (v. constantes C_1 y C_2 en el Apéndice A). En el caso de oscilaciones subamortiguadas, dichas constantes, por ser complejas, jamás podrían representar una propiedad del sistema real, pues tienen una componente imaginaria.

Pregunta 4: Dado que, para $x(0) = A_0$ y $v(0) = 0$, $A_a > A_0$ y $\phi_a < 0$ ¿Podría interpretarse que la Ec. (9) representa una oscilación de amplitud $A_a > A_0$ que "*proviene*" del semieje negativo del tiempo t, y que en $t = 0$ es justamente A_0?

Respuesta: El hecho de que $\phi_a < 0$ *no significa que la ecuación de movimiento, x(t), "provenga"de valores negativos de t.* Como se discute más adelante, *los máximos de la función coseno están retardados respecto de los de x(t), no adelantados, es decir, ocurren en valores posteriores de t, no anteriores.*

Sin embargo, la pregunta es interesante, porque si las constantes se imponen arbitrariamente como $A_a = A_0$ y $\phi_a = 0$ (lo cual es incorrecto pero, lamentablemente, usual), la curva sí admite una interpretación de este tipo, es decir, "como si *proviniera* del semieje negativo del tiempo, y en $t = 0$ fuese A_0". Desde luego, ésta es sólo una interpretación matemática sobre una ecuación de movimiento que adolece de errores sistemáticos. Esta interpretación permite comprender por qué estos errores conducen a predicciones equivocadas, pero no tiene sentido físico hablar del sistema en un intervalo de tiempo en el cual no oscilaba. Estas cuestiones se discuten en detalle en la sección §4.

Pregunta 5: Nos parece que este análisis tiene una complejidad matemática mucho mayor que la que solemos dar en los cursos de física del ciclo básico ¿Cómo creen Uds. que estos resultados pueden llevarse al aula?

Respuesta: En primer lugar, no se debe confundir la complejidad matemática de un trabajo científico, destinado a profesionales formados, con la que puede corresponder a una clase del ciclo básico universitario, destinada a estudiantes que ven el tema por primera vez. Desde luego que en una clase pueden omitirse las demostraciones matemáticas y muchos detalles que aquí se analizan en profundidad. En nuestra opinión, los conocimientos que, en principio, debe adquirir el estudiante no serían ni muy extensos ni muy complejos: El estudiante debe saber que, bajo las condiciones iniciales más usuales, que son $x(0) = A_0$ y $v(0) = 0$, se obtiene $A_a = A_0/cos(\phi_a)$, y $\phi_a = arctg(-b/2m\omega_a)$; y debe tener, al menos, una idea cualitativa de por qué esto es así, sin necesidad de que sepa desarrollar las demostraciones matemáticas, las cuales pueden ofrecerse como material de lectura complementario.

En particular, en clases experimentales, según el sistema de estudio propuesto, el docente podrá hacer las simplificaciones y aproximaciones que considere pertinentes, en tanto las justifique apropiadamente. Así, por ejemplo, si el cociente $-b/2m\omega_a$ es suficientemente pequeño, el hecho de aproximarlo a cero introducirá un error despreciable para muchos fines prácticos, según el margen de error experimental con que se esté trabajando.

Por otra parte, la medición indirecta de φ_a tampoco debería presentar mayores complicaciones. La masa m y la frecuencia ω_a son variables fáciles de medir con precisión, y en cuanto al parámetro b, si no se exige demasiada precisión, puede calcularse a partir de las amplitudes observadas visualmente sobre una regla graduada, y si se requiere más precisión, se puede filmar las oscilaciones durante unos pocos minutos, disponiendo adecuadamente el sistema para evitar los errores de paralaje, para ello basta usar un teléfono celular.

Más allá de estas apreciaciones y sugerencias, como docentes, todos sabemos que la implementación didáctica de una ampliación o profundización de contenidos es siempre una tarea difícil. Difícil pero indispensable, si aspiramos a dar una buena formación a nuestros estudiantes. En el último ítem de las conclusiones de este trabajo (sección §6) planteamos algunas reflexiones que complementan esta respuesta.

4. Discusión de los resultados

4.1. Significado de $\mathbf{A_a}$ y $\varphi_\mathbf{a}$

La Fig. 1 representa dos funciones: la ecuación de movimiento $x(t)$ en oscilaciones amortiguadas, Ec. (9) (curva verde), y la función $x_1(t) = A_a e^{-bt/2m}$ (curva azul), ambas calculadas con los mismos valores de b, m y A_0. Se puede observar que $x_1(t)$ es tangente a $x(t)$ en varios puntos de su trayectoria, y para todo instante t se cumple que $x_t \leq x_1(t)$. Decimos entonces que $x_1(t)$ es una *envolvente* de $x(t)$.

Este concepto de envolvente está mencionado en varios libros de texto, pero en casi todos ellos se dice o sugiere, incorrectamente, que $A_a = A_0$, y que tanto la curva exponencial, $x_1(t)$, como la ecuación de movimiento, $x(t)$, tienen la misma ordenada en $t = 0$. *Esto no sólo es un error conceptual, sino incluso algo matemáticamente imposible.* En $t = 0$, $x(t)$ tiene pendiente horizontal porque la velocidad inicial es nula, en tanto que $x_1(t)$ tiene pendiente negativa, por ser una exponencial de exponente

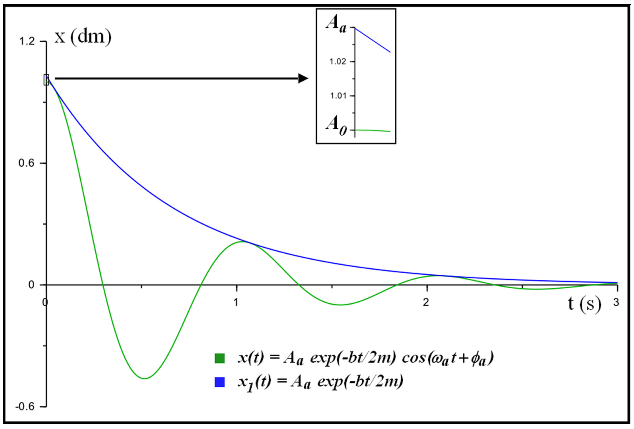

Figura 1: Oscilación amortiguada y su envolvente exponencial.

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0194

negativo. Si ambas curvas partieran del mismo punto, en $t = 0$, no podrían ser tangentes porque tienen pendiente distinta y, por tanto, nunca podría ser una la envolvente de la otra. La exponencial, para ser envolvente de la ecuación de movimiento, debe necesariamente partir de una ordenada más alta y esta ordenada es precisamente A_a. Luego, la ecuación de movimiento parte de A_0, que es justamente su posición inicial, y la exponencial envolvente parte de A_a, que es el valor que tiene $x_1(t)$ en $t = 0$, tal como ha sido definida. Esto se muestra en el recuadro superior de la Fig. 1 y en la Fig. 2a, que concuerdan cualitativamente con la gráfica obtenida por Goicolea Ruigómez en su ejemplo de aplicación.

Si bien, en un sentido fenomenológico, este resultado no le da un "significado físico" a A_a, permite apreciar el significado matemático de esta constante.

La Fig. 2 muestra dos intervalos ampliados de la Fig. 1, en el entorno de $t = 0$ (panel *a*) y de $t = T_a = 2\pi/\omega_a$ (marcado con línea de trazos violeta en el panel *b*). En ambos casos se observa que los puntos de tangencia no coinciden con los máximos de la ecuación de movimiento $x(t)$, sino que están ubicados a la derecha de los máximos. En los instantes correspondientes a los máximos, es decir en $t = nT_a$, la ordenada de la envolvente es mayor que la

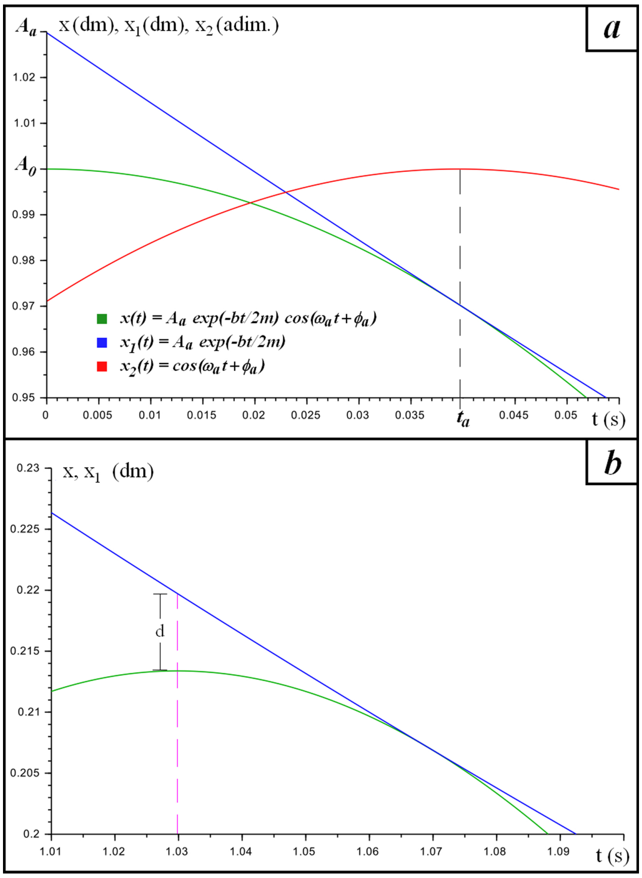

Figura 2: Ampliaciones de los primerso máximos de la Fig. 1 *a*) Entorno de $t = 0$, incluyendo factor trigonométrico de $x(t)$. *b*) Entorno de $t = \mathrm{T}a$.

de $x(t)$ (por ejemplo, en $t = 0$ esta diferencia es $A_a - A_0$ [panel *a*], y en $t = T_a$ esta diferencia es d [panel *b*]).

En la Fig. 2a, además de $x(t)$ y su envolvente exponencial $x_1(t)$, se ha graficado la componente trigonométrica de $x(t)$, es decir, $x_2(t) = cos(\omega_a t + \phi_a)$ (curva roja). Durante un breve lapso inicial, $0 < t < t_a$, esta segunda componente crece, y alcanza su primer máximo en $t = t_a$ (marcado con línea de trazos negra en la Fig. 2a, es decir alcanza el máximo cuando $cos\,(\omega_a t_a + \phi_a) = cos\,(0) = 1$, de donde se deduce que

$$t_a = -\frac{\phi_a}{\omega_a} = \frac{arctg\left(\frac{b}{2m\omega_a}\right)}{\omega_a} \tag{16}$$

(recuérdese que $\phi_a < 0$).

La ecuación de movimiento puede escribirse como el producto de sus componentes exponencial y trigonométrica: $x\,(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$. En $t = 0$, el producto de $x_1(t)$ (decreciente) y $x_2(t)$ (creciente) produce una función $x(t)$ que no es creciente ni decreciente, es decir, tiene un extremo con tangente horizontal, como corresponde al hecho de que la velocidad en este instante es nula. A partir de $t = 0$, prevalece el carácter decreciente de $x_1(t)$ sobre el carácter creciente de $x_2(t)$. En cada máximo, es decir, en cada múltiplo de T_a, sucederá algo análogo, y en cada mínimo, es decir, para $t = (n + 1/2)\,T_a$, sucederá lo inverso, es decir, a partir de ese instante, el carácter creciente de $x_2(t)$ primará sobre el carácter decreciente de $x_1(t)$.

Analizando la Fig. 2a desde una perspectiva un poco distinta, podemos decir que el flanco creciente de $x_2(t)$ está multiplicado por valores de $x_1(t)$ que son mayores que los que multiplican al flanco decreciente, y es por ello que el máximo de la función producto, $x(t)$, no coincide con el de $x_2(t)$ sino que aparece desplazado hacia la izquierda del mismo. O bien, haciendo el razonamiento inverso, que en realidad es el más técnico, deberíamos decir que *para que los máximos de $x(t)$ sucedan en los instantes correctos, nT_a, los de su componente trigonométrica, $x_2(t)$, deben suceder en instantes posteriores, $nT_a + t_a$, o dicho de un modo más simple, la componente $x_2(t)$, debe estar desfasada un ángulo $\phi_a < 0$, y éste es el significado matemático de φ_a*. Luego, el hecho de que $\phi_a < 0$, debe interpretarse como un *retardo* de la componente $x_2(t)$, respecto de $x(t)$, como ya se dijo al responder la Pregunta 4 de la sección anterior.

4.2. Exponenciales envolvente y secante

Los puntos de tangencia entre $x_1(t)$ y $x(t)$ corresponden, obviamente, a instantes para los cuales estas dos funciones tienen el mismo valor. De la igualdad $x\,(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$, se deduce que esto ocurre cuando $x_2\,(t) = 1$, es decir en los máximos relativos de $x_2(t)$ (en $t = t_a$ ocurre el primer máximo relativo, v. Fig. 2a). Como estos extremos relativos están desplazados hacia la derecha de los correspondientes de $x(t)$, también lo están los puntos de tangencia.

Luego, la "envolvente" $x_1(t)$ *no es útil para calcular las ordenadas de los máximos de x(t), porque los puntos de tangencia no corresponden a estos máximos.* Pero hay un modo muy simple de calcular estas ordenadas:

Las ordenadas de los máximos de $x(t)$ corresponden a valores de t que son múltiplos del período T_a. Luego, a partir de la Ec. (9),

$$\begin{aligned} A_n &= A_a e^{-bnT_a/2m} \cos(\omega_a n T_a + \phi_a) \\ &= A_a e^{-bnT_a/2m} \cos(2\pi n + \phi_a) \\ &= A_a e^{-bnT_a/2m} \cos(\phi_a) \\ &= A_0 e^{-bnT_a/2m} \end{aligned} \tag{17}$$

donde A_n representa la amplitud de la *n-ésima* oscilación.

En la Fig. 3 se grafica $x(t)$ y una función $x_3(t) = A_0 e^{-bt/2m}$. Se comprueba que esta nueva función exponencial, que no es *tangente* sino *secante* a $x(t)$, corta a $x(t)$ exactamente en todos los máximos, tal como predice la Ec. (17).

Es importante enfatizar al estudiante la diferencia entre la exponencial *envolvente* o *tangente*, $x_1(t)$, y la que acabamos de definir aquí como *exponencial secante*, $x_3(t)$, porque representan propiedades geométricas y utilidades operativas muy distintas. Muchos textos, al considerar incorrectamente que $A_a = A_0$, indican incorrectamente que las amplitudes de los máximos pueden calcularse a partir de la envolvente, confundiendo las propiedades de la envolvente con las que, en realidad, tiene la secante.

4.3. Errores Sistemáticos Introducidos por la Imposición Arbitraria de las Constantes

Si en lugar de calcular las constantes como se plantea en la sección §3, éstas se imponen arbitrariamente, se introducen errores sistemáticos que alteran el comportamiento de la ecuación de movimiento. En la Fig. 4 se presentan tres gráficas comparativas de la ecuación de movimiento calculada correctamente (curva verde, con $A_a = A_0/cos(\phi_a)$ y $\phi_a = arctg(-b/2m\omega_a)$) y la calculada incorrectamente (que en adelante llamaremos *sesgada*), por imposición arbitraria de las constantes (curva roja, con $A_a = A_0$ y $\phi_a = 0$). Los tres casos corresponden a distintos amortiguamientos: *a)* $b^2/4m^2 = 1s^{-2}$, *b)* $b^2/4m^2 = 5s^{-2}$, y *c)* $b^2/4m^2 = 10s^{-2}$. En todos los casos, $k/m = 40s^{-2}$.

Desde un punto de vista cualitativo, los principales errores sistemáticos de las curvas sesgadas son: *i)* máximo inicial anguloso, *ii)* extremos relativos desplazados hacia la izquierda, *iii)* extremos relativos demasiado pronunciados. Todos estos errores sistemáticos aumentan, en términos relativos, a medida que aumenta el amortiguamiento.

Desde un punto de vista cuantitativo, estos errores implican las siguientes incongruencias: I) la velocidad inicial es negativa, en contradicción con las condiciones iniciales, II) los máximos no ocurren en los instantes $t = nT_a$, sino en instantes $t = nT_a - t_a$, y III) las ordenadas de los máximos no son las predichas por la Ec. (17).

La Fig. 5 muestra una extrapolación en el semieje negativo del tiempo, hasta $t = -t_a$, de la curva sesgada de la Fig. 4c. En ese instante, la curva tiene un máximo relativo, como puede apreciarse en la ampliación del recuadro

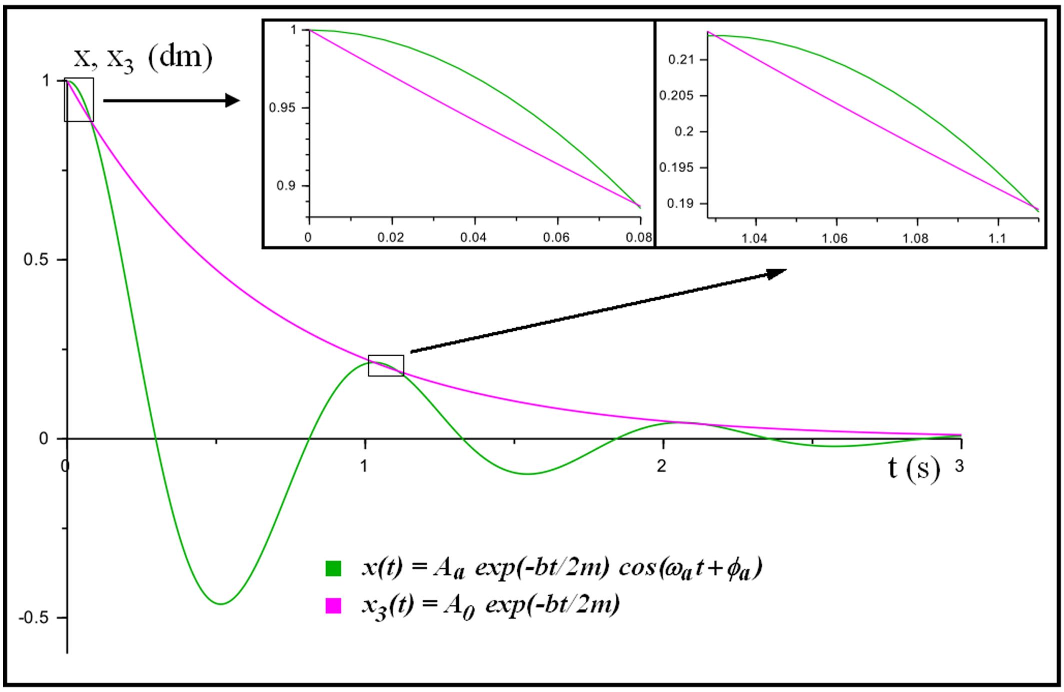

Figura 3: Ecuación de movimiento y exponencial secante.

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0194

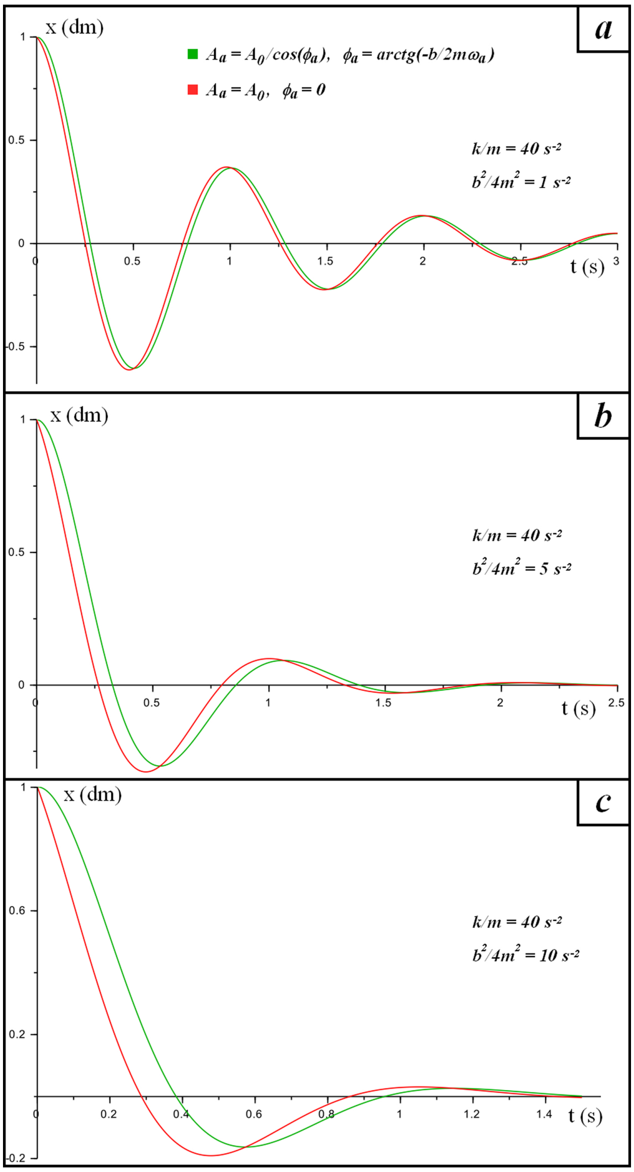

Figura 4: Comparación entre las ecuaciones de movimiento calculadas con las constantes correctas (verde) y con las constantes impuestas arbitrariamente (rojo) para distintos amortiguamientos.

superior. Considerada a partir de este máximo, esta curva es cualitativamente comparable a la curva correcta: los extremos relativos del mismo signo están separados por intervalos T_a (ambas curvas tienen la misma frecuencia angular), y las amplitudes siguen el mismo decaimiento exponencial, guardando la misma proporción con el máximo inicial. *El hecho de que en $t = 0$ tenga un punto anguloso se debe a que ese instante no corresponde a un extremo relativo.*

El comportamiento cualitativo de la curva sesgada se podría explicar del mismo modo que el de la curva correcta de la Fig. 2a: los extremos relativos se dan como resultado del producto de una función creciente por otra decreciente, y los máximos de la ecuación de movimiento están siempre adelantados, por una diferencia de tiempo t_a, respecto de los correspondientes máximos de la componente trigonométrica.

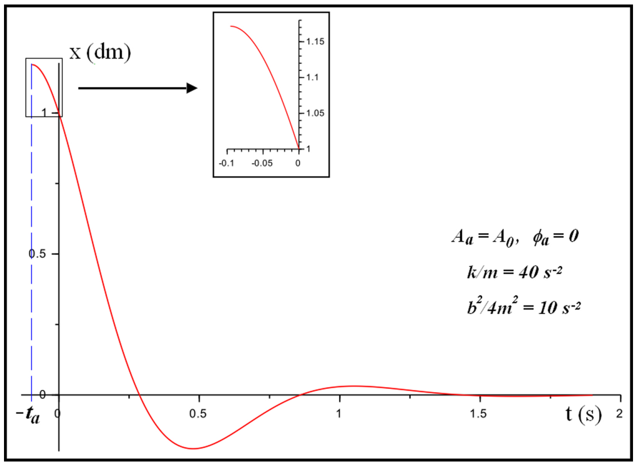

Figura 5: Extrapolación matemática de la ecuación de movimiento con constantes arbitrarias hasta $t = -ta$.

Desde este punto de vista, podría decirse que la aparente diferencia cualitativa entre las curvas sesgadas y las correctas se debe a que, al imponer incorrectamente $\phi_a = 0$, se produce un corrimiento de la curva hacia la izquierda, y al imponer incorrectamente $A_a = A_0$ se está imponiendo una elongación mayor que A_0 al primer máximo a la izquierda del origen. Desde luego, sólo tiene sentido hablar del sistema físico a partir del instante $t = 0$, pero la extrapolación a $t < 0$ permite comprender las razones matemáticas de las diferencias entre las curvas sesgadas y las correctas, así como las incongruencias físicas a que conduce la imposición arbitraria de las constantes.

5. El Formalismo de Crawford

En su obra "*Waves*", F. S. Crawford, Jr., [26], usando una formulación distinta pero equivalente a la que discutimos en este trabajo (*modelo convencional* (Ec. (9)), también obtuvo expresiones algebraicas generales para las constantes de la ecuación de movimiento.

Con una notación algo distinta a la que empleamos aquí, este autor usa la ecuación

$$x(t) = e^{-bt/2m}\left[D_1 \cos(\omega_a t) + D_2 sen(\omega_a t)\right] \quad (18)$$

(cuya equivalencia con el modelo convencional se demuestra en el Apéndice A), y aplicando la metodología de los valores iniciales, *x(0)*, *v(0)*, encuentra:

$$D_1 = x(0) \quad (19)$$

$$D_2 = \frac{v(0)}{\omega_a} + \frac{b \cdot x(0)}{2m\omega_a} \quad (20)$$

(Nótese la similitud entre las Ecs. (19) y (20) y las Ecs. (13) y (15) de la sección 3.2).

Para el caso de nuestro ejemplo, $x(0) = A_0$ y $v(0) = 0$, de las Ec. (18), (19) y (20) se obtiene

$$x(t) = A_0 e^{-bt/2m} \cos(\omega_a t) + e^{-bt/2m} \frac{b}{2m\omega_a} sen(\omega_a t) \tag{21}$$

Si se grafica la Ec. (21) se puede comprobar que concuerda exactamente con nuestros resultados.

El primer término del segundo miembro de la Ec. (21) no es otra cosa que la ecuación de las curvas que hemos llamado "*sesgadas*" en la sección 4.3 (v. Fig. 4). Luego, el mero hecho de que el segundo término es distinto de cero verifica, en forma independiente, que las curvas sesgadas son incorrectas, como lo discutimos en nuestro análisis.

Crawford extiende este formalismo a los casos de amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento. Para el caso de amortiguamiento crítico, simplemente considera que $\omega_a = 0$, obteniendo

$$x(t) = e^{-bt/2m} \left\{ x(0) + \left[v(0) + \frac{b}{2m} \right] t \right\} \tag{22}$$

Para el caso de sobreamortiguamiento, usando las identidades $\cos(ix) = \cosh(x)$, y $sen(ix) = isenh(x)$, obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) e^{-bt/2m} \cosh(|\omega_a| t) \\ &+ \left[\frac{v(0)}{|\omega_a|} + \frac{b}{2m|\omega_a|} \right] senh(|\omega_a| t) \end{aligned} \tag{23}$$

Donde $|\omega_a| = \pm i\omega_a$.

Esta posibilidad de extenderse a los casos de amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento constituye, a nuestro parecer, la principal ventaja de este formalismo sobre el modelo convencional discutido en las secciones §3 y §4. En cambio, su limitación radica en que no ofrece ninguna información sobre la exponencial envolvente: su amplitud A_a y el desplazamiento de los puntos de tangencia respecto de los máximos de la curva de movimiento.

Por otra parte, debe notarse que, al igual que en nuestro estudio, el cálculo de los máximos sólo puede plantearse de un modo sencillo si las condiciones iniciales son $x(0) = A_0$ y $v(0) = 0$, en cuyo caso los dos primeros factores del primer término del segundo miembro de la Ec. (21) se corresponden con la exponencial secante.

6. Conclusiones

• El calificativo "arbitrario", aplicado a las constantes de las ecuaciones de movimiento, es un ejemplo de la terminología ambigua y confusa empleada por muchos textos de física. A fin de evitar confusiones y errores metodológicos, debe ponerse énfasis en la diferencia conceptual que implica según el contexto en que se usa. En un contexto matemático, y en sentido genérico, suele usarse para indicar que cualesquiera sean los valores que se asignen a las constantes, en una solución de una dada ecuación, ésta seguirá siendo una solución. Pero debe advertirse que una solución así obtenida no es aplicable a cualquier problema físico y, por tanto, las constantes no pueden elegirse arbitrariamente.

• En un problema específico de oscilaciones, las constantes de las ecuaciones de movimiento deben calcularse bajo la condición de compatibilidad con las condiciones iniciales, que son la posición y la velocidad en un instante determinado. No se puede imponerlas arbitrariamente, ni suponer que las correspondientes a oscilaciones libres son apropiadas para oscilaciones amortiguadas. En el caso de oscilaciones amortiguadas, en el modelo convencional, la constante A_a no representa la amplitud inicial, y la constante φ_a es distinta de cero para una velocidad inicial nula.

• La exponencial *envolvente* de la ecuación de movimiento parte de una amplitud A_a que es mayor que el máximo desplazamiento y no toca a la curva de movimiento en los máximos, sino en puntos que están a la derecha de éstos. La exponencial *secante*, definida en este trabajo, parte de una amplitud A_0 (amplitud inicial, máximo desplazamiento de la posición de equilibrio). Esta última es la apropiada para calcular las ordenadas de los máximos.

• El hecho de imponer arbitrariamente las constantes A_a y φ_a conduce a errores sistemáticos en la ecuación de movimiento, tales como el carácter anguloso del máximo inicial, el corrimiento de los extremos relativos hacia valores de t menores a los reales, y la sobreestimación de la amplitud de dichos extremos relativos. Matemáticamente, estos errores se pueden interpretar como consecuencia de un corrimiento de la ecuación de movimiento en el sentido decreciente del tiempo, con valores de condiciones iniciales incompatibles con el sistema real.

• Las expresiones algebraicas generales obtenidas en este trabajo para calcular las constantes de la ecuación de movimiento conducen exactamente a los mismos resultados que el formalismo desarrollado por Crawford. Comparativamente, la ventaja de nuestro análisis, basado en el modelo convencional, es la información que ofrece sobre la exponencial envolvente (amplitud, puntos de tangencia); la limitación es no poder aplicarse a los casos de amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

• Una de las inquietudes planteadas por algunos colegas fue cómo llevar al aula estos resultados.

Como docentes, sabemos que la implementación didáctica de un nuevo contenido, o de un nuevo enfoque, ampliación o profundización de un contenido, es siempre una tarea difícil. Esto no sólo se debe a la complejidad matemática o física del tema que se trate, sino a la necesidad de adaptarlo al nivel de un dado curso, y de incluirlo en el programa de una asignatura que está pautado por plazos y objetivos.

Más allá de las observaciones puntualizadas en respuesta a la pregunta 5 (sección 3.3), creemos que, ante esta pluralidad de variables, no es posible dar lineamientos ni sugerencias generales aplicables a cualquier caso. Cada docente, en cada situación curricular, deberá tomar sus propias decisiones sobre qué aspectos debe priorizar al enseñar cada tema. Sin embargo, creemos recomendable tener presentes algunas premisas básicas:

a) Un docente debe saber mucho más de lo que enseña, es decir, su formación debe ser mucho más amplia y profunda que el programa de su asignatura. Si él tiene un conocimiento claro y detallado de los temas que dicta, podrá decidir con más acierto qué debe enseñar y cómo debe hacerlo. Luego, *más allá de la implementación didáctica que en cada caso se decida, nos parece indudable que los conocimientos que aquí se discuten deben ser parte de la formación docente.*

b) Es posible simplificar u omitir algunos aspectos matemáticos complicados (tales como las demostraciones, por ejemplo) siempre y cuando se ofrezcan al estudiante las referencias o el material bibliográfico donde pueda acceder a ellos con todo el detalle que lo requiera.

c) Asimismo, un docente bien formado podrá –según el sistema que en cada caso proponga para estudio– hacer las simplificaciones o aproximaciones que él considere pertinentes, haciendo las salvedades y dando las justificaciones correspondientes. De hecho, todo modelo supone simplificaciones y aproximaciones, pero éstas deben ser explicitadas claramente y, en lo posible, cuantitativamente.

Creemos oportuno recordar una frase célebre de Einstein: *"Todo debería hacerse tan simple como sea posible, pero no más simple"*.

Material suplementario

El siguiente material suplementario está disponible en línea:

Apéndice A.

Referencias

[1] M.R. Mathews, C.F. Gauld y A. Stinner, en: *The Pendulum – Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives*, editado por M.R. Mathews, C.F. Gauld y A. Stinner (Springer, Dordrecht, 2005).

[2] G.G. Stokes, en: *Trans. Camb. Phil. Soc.* (Cambridge University Press, Cambridge, 1851), p. 8.

[3] J.B.L. Foucault, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences* (Bachelier, Paris, 1851).

[4] B. Inhelder y J. Piaget, *The Growth of Logical Thinking* (Basic Books, Nueva York, 1958).

[5] J. Petrzela, Z. Kolka y S. Hanus, Radioengineering **15**, 1 (2006).

[6] A. Tamasevicius, G. Mykolaitis, V. Pyragas y K. Pyragas, European Journal of Physics **26**, 61 (2005).

[7] `https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html`

[8] M. Chávez, R. Rojas, R. Cachay, F. Rabanal y M. Tantaquispe, Revista de Investigaciones Aplicadas **1**, 20 (2017).

[9] H.G. Riveros y E. Cabrera, Latin American Journal of Physics Education **1**, 13 (2007).

[10] R.D. Peters, en: *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives* (Springer Netherlands, Dordrecht, 2005), p. 19.

[11] R.D. Peters, en: *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives* (Springer Dordrecht, Reino Unido, 2005), p. 77.

[12] C. Medina, S. Velazco y J. Salinas, en: *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives* (Springer Dordrecht, Reino Unido, 2005), p. 67.

[13] N. Aranha, J. Martins de Oliveira, L.O. Bellio y W. Bonventi, Rev. Bras. Ensino Fís. **38**, 4, (2016).

[14] C.A. Triana y F. Fajardo, Eur. J. Phys. **33**, 1 (2012).

[15] C.A. Triana y F. Fajardo, Rev. Bras. Ensino Fís. **35**, 4 (2013).

[16] M. Matar, M.A. Parodi, C.E. Repetto y A. Roatta, Rev. Bras. Ensino Fís. **40**, 2 (2018).

[17] L. Marino, S. Giorgi, C. Cámara y R. Carreri, Revista de Enseñanza de la Física **27**, 79 (2015).

[18] N. Giacosa, R. Galeano, P. Wagner Boián, M. Boari, A. Such y C. Zang, Revista de Enseñanza de la Física **29**, 87 (2017).

[19] F.W. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young y R.A. Freedman, *Física Universitaria* (Pearson Educación, Ciudad de México, 2009), v. 2, p. 421.

[20] M. Alonso y E.J. Finn, *Física* (Fondo Educativo Interamericano, Ciudad de México, 1970), v. 1, p. 365.

[21] R. Resnick, D. Halliday y K. Krane, *Física I* (Casa Editrice Ambrosiana, Milán, 2003), 5ªed., p. 390.

[22] R.A. Serway y J.W. Jewett, *Physics for Scientists and Engineers* (Books/Cole, Boston, 2014), 9ªed., p. 452.

[23] A.P. French, *Vibrations and Waves* (W.W. Norton & Company Inc., Nueva York, 1971), p. 9.

[24] D. Kleppner y R.J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* (McGraw-Hill, Boston, 1973), p. 411.

[25] J.M. Goicolea Ruigómez, *Curso de Mecánica* (Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 2001), v. 1, p. 3.

[26] F.S. Crawford, *Waves (Berkeley Physics Course)* (McGraw-Hill, Nueva York, 1968), v. 3, p. 103.