Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 3, 3302 (2015)
www.sbfisica.org.br
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173731811

Método de Ritus para o cálculo do propagador de Feynman

(Ritus' method for calculating the Feynman propagator)

E.B.S. Corrêa, J.E. Oliveira[1]

Instituto de Ciências Exatas, Faculdade de Física, Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Marabá, PA, Brasil

Recebido em 26/1/2015; Aceito em 24/4/2015; Publicado em 30/9/2015

Neste artigo vamos resgatar a sensasional ideia devida a V. Ritus para o cálculo do propagador de Feynman. Faremos uma discussão geral do método e o aplicaremos ao cálculo do propagador de um campo bosônico e fermiônico sujeitos a um campo magnético não quantizado constante e homogêneo.
Palavras-chave: método de Ritus, propagador de Feynman, níveis de Landau.

We reveiw the remarkable idea due V. Ritus for calculating the Feynman propagator. We present a general discussion about the method and apply it for calculating the bosonic as well fermionic propagators in a homogeneous and constant classical magnetic field.
Keywords: Ritus' method, Feynman propagator, Landau levels.

1. Introdução

O propagador de Feynman é uma quantidade imprescindível em Teoria Quântica de Campos (TQC) e, portanto, deve ser calculado para as mais diversas situações nas quais os campos quânticos estejam sujeitos. Na década de 1970, embora já existissem muitas técnicas para o cálculo do propagador [1], o físico russo Vladimir Ritus abordou o problema do cálculo do propagador de Feynman de um campo fermiônico sujeito a um campo eletromagnético externo, de uma forma assaz inovadora e simplória [2–4], qual seja: pela diagonalização do operador de Dirac. Em linhas gerais, o método consiste em encontrar autofunções do operador de Dirac, de tal modo que o propagador seja escrito como na forma livre, ou seja, é encontrada uma espécie de transformada de Fourier para o operador $\hat{\not{\Pi}}$. Embora originalmente tenha sido elaborado para o cálculo do propagador de uma partícula carregada de spin 1/2, nos anos 2000 o método de Ritus foi usado para o cômputo do propagador de uma partícula carregada de spin 1, no contexto da teoria eletrofraca [5, 6]. Recentemente, o método de Ritus foi utilizado também em baixas dimensões [7] e em eletrodinâmica [8].

Ao submetermos partículas carregadas a um campo magnético externo, surgem os chamados níveis de Landau (níveis de energia quantizados no plano perpendicular ao campo magnético). Os níveis de Landau foram tema de uma discrepância recente na literatura, quando os autores das referências [5, 6] usaram o nível de Landau mais baixo ($\ell = 0$) em virtude de considerarem campos magnéticos fortes, enquanto que os autores de [9] contestaram estes resultados ao mostrarem que os próximos níveis de Landau apresentavam igual contribuição no mesmo contexto. Nesta perspectiva, e tendo em vista os recentes desenvolvimentos em física da Matéria condensada, sobretudo na física do grafeno, cálculos exatos (incluindo todos os níveis de Landau) no propagador fermiônico são sempre oportunos.

Por isso, conhecer uma expressão analítica, tratável e exata para o propagador do elétron sujeito a um campo magnético externo, pode representar uma grande simplificação nos cálculos que o envolvem. No que se segue, vamos obter o propagadador de um campo bosônico e fermiônico sujeitos a um campo magnético externo com o uso da técnica desenvolvida por Ritus. Nossos cálculos incluirão todos os níveis de Landau. O trabalho está dividido assim: Na seção 2, definiremos o problema do cálculo do propagador bosônico livre e sujeito a um campo magnético homogêneo e constante no espaço de Minkowski. Exporemos a ideia de Ritus, calcularemos as autofunções do operador $\hat{\Pi}^2$, mostraremos que elas formam um conjunto completo e, no final da seção, apresentaremos o propagador no espaço dos momenta, coordenadas e no espaço euclidiano. Na seção 3, novamente como recurso pedagógico, partiremos do propagador fermiônico livre e passaremos ao caso com campo externo. Encontraremos as autofunções de Ri-

[1]E-mail: emersonunifesspa@gmail.com.

tus para o operador $\hat{\not{\Pi}}$ e mostraremos as relações de completeza e ortogonalidade que elas obedecem, além de calcularmos o propagador. Faremos nossas considerações finais na seção 4.

Ao longo do texto, usaremos a métrica de Minkowski com signatura $\eta = diag(1,-1,-1,-1)$ e o sistema de unidades natural, no qual $c = \hbar = 1$.

2. O método de Ritus e o campo bosônico

Para fins didáticos, primeiro vamos obter o propagador bosônico livre, mas sob um ponto de vista peculiar. A equação de Klein-Gordon para um partícula livre de massa m_0 e carga elétrica e_0 (um campo bosônico no contexto da TQC), no espaço de Minkowski, é dada por

$$\left(-\hat{P}^2 + m_0^2\right)\phi\left(x^\rho\right) = 0,$$

onde $\hat{P}_\mu = i\partial_\mu$ e $x^\rho = (t,x,y,z)$. Em TQC, para computar amplitudes de probabilidade de certos eventos ocorrerem (através dos elementos da matriz de espalhamento e de diagramas), usamos a função de Green de Feynman, ou propagador de Feynman, que para o caso bosônico livre, satisfaz

$$\left(-\hat{P}^2 + m_0^2\right)G\left(x,x'\right) = -i\delta^4\left(x-x'\right), \qquad (1)$$

onde o fator -i mostrar-se-á conveniente quando desejarmos ir para o espaço euclidiano. Note que $[\hat{P}^2, \hat{P}_\nu] = 0$. Com efeito, autofunções do operador $\hat{P}_\nu$ são também autofunções do operador $\hat{P}^2$. Logo, a onda plana, $\exp(-ip_\mu x^\mu)$, é autofunção de $\hat{P}^2$. É fácil ver que

$$\hat{P}^2\left[\exp\left(-ip_\mu x^\mu\right)\right] = p^2\left[\exp\left(-ip_\mu x^\mu\right)\right]. \qquad (2)$$

Pode-se mostrar que as ondas planas formam um conjunto completo, isto é,

$$\int d^4x\left[\exp\left(-ip_\mu x^\mu\right)\right]\left[\exp\left(-ip'_\nu x^\nu\right)\right]^* = (2\pi)^4\,\delta^4\left(p-p'\right),$$

$$\int d^4p\left[\exp\left(-ip_\mu x^\mu\right)\right]\left[\exp\left(-ip_\nu x'^\nu\right)\right]^* = (2\pi)^4 \times\delta^4\left(x-x'\right). \qquad (3)$$

Assim, o propagador bosônico livre pode ser escrito através da transformada de Fourier usual

$$G\left(x,x'\right) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\left[\exp\left(-ip_\mu x^\mu\right)\right]g\left(p\right) \times \left[\exp\left(-ip_\nu x'^\nu\right)\right]^*, \qquad (4)$$

onde a função $g\left(p\right)$ (o propagador no espaço dos momenta) é determinada após aplicarmos o operador $(-\hat{P}^2 + m_0^2)$ à Eq. (4), usarmos as Eqs. (2), (1) e a Eq. (3). Fazendo isso, encontramos $(-p^2+m_0^2)g(p) = -i$, ou seja,

$$g\left(p\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \qquad (5)$$

Agora vamos calcular o propagador do campo bosônico sujeito a um campo magnético externo B, uniforme e homogêneo, na direção z. Neste caso, a equação de Klein-Gordon se modifica para

$$\left(-\hat{\Pi}^2 + m_0^2\right)\Phi\left(x^\rho\right) = 0,$$

onde $\hat{\Pi}_\mu = \hat{P}_\mu - e_0A_\mu$ e usaremos o calibre de Landau: $A^\mu = (0,0,xB,0)$. O propagador de Feynman associado ao campo magnético de fundo, satisfaz a equação

$$\left(-\hat{\Pi}^2 + m_0^2\right)G\left(x,x',A\right) = -i\delta^4\left(x-x'\right). \qquad (6)$$

Porém, agora $[\hat{\Pi}^2, \hat{P}_\nu] \neq 0$. Portanto, não podemos expandir $G(x,x',A)$ em termos das autofunções do operador $\hat{P}_\mu$, isto é, em termos das ondas planas.

A essência do método de Ritus consiste em encontrar autofunções do operador $\hat{\Pi}^2$ tal que formem um conjunto completo. Desse modo, podemos proceder como no caso livre e buscar expressões análogas às Eqs. (4) e (5).

De um ponto de vista pragmático, devemos encontrar um conjunto completo de autofunções E_p que satisfaçam

$$\hat{\Pi}^2 E_p = p^2 E_p. \qquad (7)$$

No calibre proposto, o operador $\hat{\Pi}^2$ fica escrito como

$$\hat{\Pi}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2i\omega_0 x\frac{\partial}{\partial y} - \omega_0^2x^2, \qquad (8)$$

sendo $\omega_0 \equiv e_0B$, a frequência de ciclotron. Notamos que o operador $\hat{\Pi}^2$ é de segunda ordem em todas as coordenadas, e que as variáveis t, y e z são desacopladas entre si. Vamos tentar uma solução "tipo"onda plana em t, y e z (sem explicitar, entretanto, a dependência em x), por meio do insight [10, 11]:

$$E_p\left(x^\mu\right) = X(x)\exp\left[-i\left(p_t t - \omega_0 p_y y - p_z z\right)\right]. \qquad (9)$$

Substituindo a Eq. (9) na Eq. (7), obtemos

$$X''(x) - \omega_0^2(x-p_y)^2X(x) + const\cdot X(x) = 0, \qquad (10)$$

onde a constante de separação é definida por

$$const \equiv p_t^2 - p_z^2 - p^2.$$

A Eq. (10) é a equação diferencial de Hermite, cujas soluções são finitas apenas para $const = \omega_0(2\ell+1)$, com $\ell = 0,1,2,3,...$ representando todos os níveis de Landau. Claramente, temos que

$$p^2 = p_t^2 - p_z^2 - \omega_0(2\ell+1). \qquad (11)$$

As soluções da Eq. (10), já normalizadas, são bem conhecidas [12],

$$\begin{aligned} X_\ell(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^\ell \ell!}}\left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{\omega_0}{2}\,(x-p_y)^2\right] \\ &\times \; H_\ell\left[\sqrt{\omega_0}(x-p_y)\right], \end{aligned}$$

onde H_ℓ são os Polinomios de Hermite. Por conveniência futura, definiremos as chamadas funções de Hermite [13]

$$h_\ell(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{2^\ell \ell! \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) H_\ell(s).$$

Estas funções são ortonormais e satisfazem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\; h_\ell(s)\; h_m(s) = \delta_{\ell,m} \tag{12}$$

e

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} h_\ell(s)\; h_\ell(s') = \delta(s-s'). \tag{13}$$

Reescrevemos a Eq. (9) em termos destas funções,

$$\begin{aligned} E_p(x^\mu) &= (\omega_0)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-i\left(p_t t - \omega_0 p_y y - p_z z\right)\right] \\ &\times \; h_\ell\left[\sqrt{\omega_0}(x-p_y)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Usando as Eqs. (14), (13), e a propriedade $\delta(as) = |a|^{-1}\delta(s)$, não é difícil demonstrar que as autofunções $E_p(x^\mu)$ satisfazem a relação de completeza

$$\begin{aligned} \sum_\ell \int d^3p E_p(x) E_p^*(x') &= (2\pi)^3\, \delta\left(t-t'\right) \delta\left(x-x'\right) \\ &\times \; \delta\left(y-y'\right) \delta\left(z-z'\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Analogamente, e tendo em vista a Eq. (12), podemos mostrar que as autofunções E_p satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \int d^4x E_{p'}^*(x) E_p(x) &= (2\pi)^3\, \delta_{\ell,\ell'} \delta\left(p_t - p'_t\right) \\ &\times \; \delta\left[\omega_0\left(p_y - p'_y\right)\right] \delta\left(p_z - p'_z\right). \end{aligned}$$

Portanto, as autofunções $E_p(x^\mu)$ formam um conjunto completo e, como fizemos na Eq. (4), podemos escrever

$$G\left(x,x',A\right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \int d^3p E_p(x) \mathcal{G}\left(p,A\right) E_p^*(x'). \tag{16}$$

Aplicando o operador $(-\hat{\Pi}^2 + m_0^2)$ à relação (16) e usando as Eqs. (7), (6) e (15), encontramos o propagador no espaço dos momenta

$$\mathcal{G}\left(p,A\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}, \tag{17}$$

com p, dado pela Eq. (11).

No espaço euclidiano, conectado ao espaço de Minkowski através das transformações (veja, por exemplo, [14,15]): $p_t = ip_{tE}$; $p^j = p^j_E$; $t = -it_E$, a integral de *loop* e o propagador, no limite $x' \to x$, são dados por

$$G_E\left(x,x,A\right) = \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} \int \frac{dp_{tE}}{(2\pi)} \frac{dp_z}{(2\pi)} \frac{1}{p_E^2 + m_0^2}, \tag{18}$$

onde $p_E^2 = p_{tE}^2 + p_z^2 + \omega_0(2\ell+1)$ e usamos a Eq. (12). Na Ref. [11], o mesmo propagador foi encontrado via termo cinético da Hamiltoniana do sistema.

3. O método de Ritus e o campo fermiônico

Antes de apresentarmos o método de Ritus no contexto original em que foi proposto - na teoria fermiônica, vamos obter o propagador fermiônico livre, novamente sob uma perspectiva incomum. A equação de Dirac para um partícula livre, de massa m e carga elétrica e, no espaço de Minkowski, é dada por

$$\left(\hat{\not{P}} - m\right) \psi\left(x^\rho\right) = 0,$$

onde

$$\hat{\not{P}} \;=\; \gamma^\mu \hat{P}_\mu \; ; \; \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \; ; \; \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right].$$

Usaremos a representação Quiral para as matrizes γ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix};$$
$$\sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \tag{19}$$

com $\sigma^1 = \sigma_x$, $\sigma^2 = \sigma_y$, $\sigma^3 = \sigma_z$, representando as matrizes de Pauli.

O propagador de Feynman, neste caso livre, satisfaz

$$\left(\hat{\not{P}} - m\right) S\left(x,x'\right) = -i\delta^4\left(x-x'\right). \tag{20}$$

Os operadores $\hat{\not{P}}$ e $\hat{P}_\nu$ comutam. Consequentemente, autofunções do operador $\hat{P}_\nu$ são também autofunções do operador $\hat{\not{P}}$. Assim como no caso bosônico livre, a onda plana é autofunção de $\hat{\not{P}}$, mas com autovalor $\not{p}$, ou seja:

$$\hat{\not{P}}\left[\exp\left(-ip_\mu x^\mu\right)\right] = \not{p}\left[\exp\left(-ip_\mu x^\mu\right)\right], \tag{21}$$

e

$$\begin{aligned} S\left(x,x'\right) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \left[\exp\left(-ip_\mu x^\mu\right)\right] \tilde{s}\left(p\right) \\ &\times \; \left[\exp\left(-ip_\nu x'^\nu\right)\right]^*. \end{aligned} \tag{22}$$

O propagador fermiônico no espaço dos momenta é encontrado após aplicarmos o operador $(\hat{\not{P}} - m)$ à Eq. (22), usarmos as Eqs. (21), (20) e a Eq. (3),

$$\tilde{s}\left(p\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{-i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{23}$$

Ao submetermos o campo fermiônico a um campo magnético externo B, uniforme e homogêneo na direção z, a equação de Dirac adquire a forma

$$\left(\hat{\not{\Pi}} - m\right) \Psi\left(x^\nu\right) = 0,$$

onde, $\hat{\Pi}_\mu = \hat{P}_\mu - eA_\mu$. O propagador, neste caso, satisfaz

$$\left(\hat{\not{\Pi}} - m\right) S\left(x, x', A\right) = -i\delta^4\left(x - x'\right). \tag{24}$$

Contudo, observamos que $[\hat{\not{\Pi}}, \hat{P}_\nu] = -e\gamma^\mu[A_\mu, \hat{P}_\nu] \neq 0$. Logo, não podemos expandir $S(x, x', A)$ em termos das ondas planas. Por outro lado, segundo Ritus [2–4], a função de Green do campo de Dirac, é uma função de escalares envolvendo as matrizes γ, o operador $\hat{\Pi}_\mu$ e o campo $F_{\mu\nu}$. As quantidades escalares possíveis são: $\hat{\not{\Pi}}, (\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}), (\tilde{F}^\mu\hat{\Pi}_\mu)^2$ e $(\gamma_5 F^{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})$, onde $\tilde{F}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ e $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Como $F^{\mu\nu}F^*_{\mu\nu} \approx (\vec{E}\cdot\vec{B})$, temos que para o caso de um campo puramente magnético, $F^{\mu\nu}F^*_{\mu\nu} = 0$. Ritus percebeu que estes operadores comutam como operador de Dirac ao quadrado, isto é,

$$\left[(\hat{\not{\Pi}})^2, \hat{\not{\Pi}}\right] = \left[(\hat{\not{\Pi}})^2, \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] = \left[(\hat{\not{\Pi}})^2, \tilde{F}^\mu\hat{\Pi}_\mu\right] = 0.$$

Desse modo, se encontrarmos autofunções $\mathbf{E_p}$ do operador $(\hat{\not{\Pi}})^2$, estas também serão autofunções do operador de Dirac, $\hat{\not{\Pi}}$ e de $S(x, x', A)$. Além disso, caso estas autofunções formem um conjunto completo, poderemos escrever a função de Green em termos delas, como feito na Eq. (22).

As autofunções $\mathbf{E_p}$ são conhecidas como autofunções de Ritus, e devem satisfazer

$$(\hat{\not{\Pi}})^2\mathbf{E}_p = p^2\mathbf{E}_p. \tag{25}$$

Vamos encontrar a estrutura matricial $\mathbf{E}_p$ que satisfaz a Eq. (25). Levando em conta o calibre escolhido, os únicos elementos não-nulos de $F_{\mu\nu}$ são: $F_{12} = -F_{21} = -B$. Com efeito, após usarmos σ^{ij}, dado em (19), podemos mostrar que

$$(\hat{\not{\Pi}})^2 = \hat{\Pi}^2 + \omega\sigma^{12} = \hat{\Pi}^2 + \omega(I_2 \otimes \sigma_z), \tag{26}$$

onde $\hat{\Pi}^2$ é dado na Eq. (8) com a substituição de ω_0 por $\omega \equiv eB$. A partir da expressão (26), percebemos que a autofunção $\mathbf{E}_p$ deve ser a análoga a do caso bosônico, graças ao operador $\hat{\Pi}^2$, mas com um elemento matricial que satisfaça o produto tensorial relacionado à matriz σ_z. A partir do que já conhecemos do caso bosônico e da Ref. [5], tentaremos uma solução da forma

$$\mathbf{E}_p(x^\mu) = \sum_{\sigma=\pm1} E_{p,\sigma}(x^\mu)\mathbf{\Omega}_\sigma, \tag{27}$$

onde σ representa a variável de spin do campo fermiônico e $E_{p,\sigma}(x^\mu)$ é dada pela Eq. (9) com $\omega_0 \to \omega$ e $X(x) \to X_\sigma(x)$. A matriz $\mathbf{\Omega}_\sigma$ deve ser tal que

$$(I_2 \otimes \sigma_z)\mathbf{\Omega}_\sigma = \sigma\mathbf{\Omega}_\sigma. \tag{28}$$

A exigência imposta pela Eq. (28) revela uma matriz $\mathbf{\Omega}_\sigma$ da forma

$$\mathbf{\Omega}_\sigma = diag(\delta_{\sigma,1}, \delta_{\sigma,-1}, \delta_{\sigma,1}, \delta_{\sigma,-1}). \tag{29}$$

Ao substituir a Eq. (27) na Eq. (25) e usar as Eqs. (26) e (28), descobrimos, como esperado, que $X_\sigma(x)$ satisfaz novamente a Eq. (10), mas agora com $\omega_0 \to \omega$ e constante de separação

$$const' \equiv p_t^2 - p_z^2 + \omega\sigma - p^2,$$

com a restrição: $const' = \omega(2\ell + 1)$. Observamos que as funções $E_{p,1}$ e $E_{p,-1}$ são na verdade dadas pela expressão (14) com $\omega_0 \to \omega$ e,

$$p^2 = p_t^2 - p_z^2 - \omega(2\ell + 1 - \sigma). \tag{30}$$

Usando a Eq. (27) e o fato de que $\sum_{\sigma,\sigma'} \mathbf{\Omega}_\sigma\mathbf{\Omega}_{\sigma'} = I_4$, podemos facilmente demonstrar que as autofunções $\mathbf{E}_p(x^\mu)$ satisfazem

$$\begin{aligned}\sum_\ell \int d^3p\mathbf{E}_p(x)\overline{\mathbf{E}}_p(x') &= (2\pi)^3\,\delta\left(t - t'\right)\delta\left(x - x'\right) \\ &\times\ \delta\left(y - y'\right)\delta\left(z - z'\right),\end{aligned} \tag{31}$$

e

$$\begin{aligned}\int d^4x\overline{\mathbf{E}}_{p'}(x)\mathbf{E}_p(x) &= (2\pi)^3\,\delta_{\ell,\ell'}\delta\left(p_t - p_t'\right) \\ &\times\ \delta\left[\omega\left(p_y - p_y'\right)\right]\delta\left(p_z - p_z'\right).\end{aligned}$$

onde $\overline{\mathbf{E}}_p(x') = \gamma^0\mathbf{E}_p^\dagger(x'^\nu)\gamma^0$. Fica claro então, que as autofunções $\mathbf{E_p}$ formam um conjunto completo e, como fizemos na Eq. (22), podemos escrever

$$S(x, x', A) = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{\ell=0}^{\infty}\int d^3p\mathbf{E}_p(x)\tilde{S}(p, A)\overline{\mathbf{E}}_p(x'). \tag{32}$$

Para encontrar o propagador fermiônico no espaço dos momenta, devemos aplicar o operador $(\hat{\not{\Pi}} - m)$ à Eq. (32), usar as Eqs. (24) e (31). Contudo, sabemos que $\mathbf{E}_p(x)$ é autofunção de $\hat{\not{\Pi}}$, mas não sabemos com qual autovalor. Em outros termos, não temos o análogo das Eqs. (2), (7) e (21).

Para sanar este problema, o método de Ritus postula a relação

$$(\hat{\not{\Pi}})\ \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_p\ (\bar{\not{p}}). \tag{33}$$

Como antes, após aplicarmos o operador $(\hat{\not{\Pi}} - m)$ à Eq. (32), e usarmos as Eqs. (33), (24) e (31), obtemos

$$\tilde{\mathcal{S}}(p, A) = \frac{-i(\bar{\not{p}} + m)}{\bar{p}^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{34}$$

A seguir descobriremos qual quadrivetor $\overline{p}_\mu$ satisfaz a Eq. (33). A partir das Eqs. (27) e (29), escrevemos as autofunções de Ritus explicitamente

$$\mathbf{E}_p = \begin{pmatrix} E_{p,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{p,-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{p,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{p,-1} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Usando as expressões (35) e (19), temos

$$(\hat{\not{\Pi}})\mathbf{E}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(p_t+p_z)E_{p,1} & i(\partial_1+\omega p_y-\omega x)E_{p,-1} \\ 0 & 0 & i(\partial_1-\omega p_y+\omega x)E_{p,1} & -(p_t-p_z)E_{p,-1} \\ -(p_t-p_z)E_{p,1} & -i(\partial_1+\omega p_y-\omega x)E_{p,-1} & 0 & 0 \\ -i(\partial_1-\omega p_y+\omega x)E_{p,1} & -(p_t+p_z)E_{p,-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

O lado direito da Eq. (33) é expresso por

$$\mathbf{E}_p(\overline{\not{p}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-\overline{p}_0+\overline{p}_3)E_{p,1} & (\overline{p}_1-i\overline{p}_2)E_{p,1} \\ 0 & 0 & (\overline{p}_1+i\overline{p}_2)E_{p,-1} & -(\overline{p}_0+\overline{p}_3)E_{p,-1} \\ -(\overline{p}_0+\overline{p}_3)E_{p,1} & -(\overline{p}_1-i\overline{p}_2)E_{p,1} & 0 & 0 \\ -(\overline{p}_1+i\overline{p}_2)E_{p,-1} & -(\overline{p}_0-\overline{p}_3)E_{p,-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Depois de comparar a Eq. (36) com a Eq. (37) e resolvermos um sistema de equações diferenciais acopladas, encontramos

$$\overline{p}_0 = p_t \ \ ; \ \ \overline{p}_3 = -p_z \ \ ; \ \ \overline{p}_1^2+\overline{p}_2^2 = p_t^2-p_z^2-p^2. \quad (38)$$

Levando em conta a Eq. (30), descobrimos as componentes de $\overline{p}_\mu$ para que a Eq. (33) seja satisfeita

$$\overline{p}_\mu = (p_t, \overline{p}_1, \overline{p}_2, -p_z), \quad (39)$$

com

$$\overline{p}_1^2+\overline{p}_2^2 = \omega\,(2\ell+1-\sigma)\,.$$

Podemos escolher a origem do eixo coordenado x tal que $\overline{p}_1 = 0$ (a mesma escolha foi feita nos trabalhos de Ritus). Desse modo, o propagador fermiônico no espaço dos momenta fica dado pela Eq. (34), e

$$\overline{p}_\mu = \left(p_t, 0, \sqrt{\omega(2\ell+1-\sigma)}, -p_z\right).$$

Para cálculos em matéria condensada, é importante escrever o propagador dado nas Eqs. (32) e (34) no espaço euclidiano. Tendo em vista as relações $\gamma^0 = i\gamma_E^0$; $\gamma^j = \gamma_E^j$, podemos demonstrar que,

$$\{\gamma_{\mu E}, \gamma_{\nu E}\} = -2\delta_{\mu\nu}\ ,\ \overline{\not{p}} = -\overline{\not{p}}_E.$$

Assim, o propagador no background magnético é escrito, no limite $x' \to x$, como

$$S_E(x,x,A) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\int \frac{dp_{tE}}{(2\pi)}\frac{dp_z}{(2\pi)}\frac{(\overline{\not{p}}_E-m)}{\overline{p}_E^2+m^2}, \quad (40)$$

com $\overline{p}_E^2 = p_{tE}^2+p_z^2+\omega(2\ell+1-\sigma)$.

Para terminar a seção e também verificar a autenticidade do quadrivetor $\overline{p}_\mu$, vamos encontrar os níveis de energia de uma partícula fermiônica imersa em um campo magnético constante. Trata-se da generalização relativística do problema de Landau. Da equação de Dirac sujeita ao campo externo, vemos que $(\hat{\not{\Pi}})^2 = m^2$, mas pelo método de Ritus, de acordo com a Eq. (25), $(\hat{\not{\Pi}})^2 = p^2$. Logo,

$$m^2 = p^2 \ \Rightarrow\ p_t = E_\ell = \sqrt{m^2+p_z^2+\omega(2\ell+1-\sigma)}, \quad (41)$$

onde usamos a Eq. (30). A expressão (41) é obtida sem o método de Ritus, na Ref. [16], p. 68.

4. Conclusões e comentários

O método de Ritus possibilita escrever o propagador de Feynman sujeito a um campo eletromagnético em uma forma diagonal e, portanto, incrivelmente simples. Nos artigos orignais de Ritus, um número quântico k é definido e permeia toda a teoria. Contudo, na base que usamos neste artigo, este número quântico não foi necessário. Como as autofunções que encontramos ao longo do texto formavam um conjunto completo, fomos capazes de expandir as funções de Green dos campos bosônico e fermiônico, sujeitas a um campo magnético de fundo, em termos destas autofunções. Nossos cálculos incluíram todos os níveis de Landau e são exatos. Com este trabalho, esperamos que o método de Ritus se torne mais difundido na comunidade acadêmica. Em trabalhos futuros, sob a perspectiva da TQC à Temperatura Finita, pretendemos usar o propagador fermiônico encontrado neste artigo, em cálculos da temperatura de transição de fase em sistemas fermiônicos, como feito em [11].

Agradecimentos

Os autores agradecem à PROPIT/UNIFESSPA pela estrutura disponibilizada e a Ademir Santana pela leitura do manuscrito e pelas sugestões. E.B.S.C também agradece à CAPES/PRODOUTORAL pelo suporte financeiro.

Referências

[1] F.A. Barone, H. Boschi-Filho, C. Farina, Am. J. Phys. **71**, 483 (2003).

[2] V.I. Ritus, Ann. Phys. (N.Y.) **69**, 555 (1972).

[3] V.I. Ritus, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 135 (1974).

[4] V.I. Ritus, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **75**, 1560 (1978).

[5] E. Elizalde, E. Ferrer, V. de la Incera, Ann. Phys. (N.Y.) **295**, 33 (2002).

[6] E. Elizalde, E. Ferrer, V. de la Incera, Phys. Rev. D **70**, 043012 (2004).

[7] G. Murguía, A. Raya, Á. Sánchez, E. Reyes, Am. J. Phys. **78**, 700 (2010).

[8] E. Fraga, T. Kodama, O. Roldán, *Anais do XXXIV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, Passa Quatro-MG (2013).

[9] A.V. Kuznetsov, N.V. Mikheev, G.G. Raffelt, L.A. Vassilevskaya, Phys. Rev. D **73**, 023001 (2006).

[10] I.D. Lawrie, Phys. Rev. Lett. **79**, 131 (1997).

[11] E.B.S. Corrêa, C.A. Linhares, A.P.C. Malbouisson, Phys. Lett. A, **377**, 1984 (2013).

[12] C.L.R. Braga, *Notas de Física-Matemática* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006).

[13] A. Wünsche, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 8267 (1998).

[14] A. Das, *Lectures On Quantum Field Theory* (World Scientific Publishing, London, 2008).

[15] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Addison-Wesley, Redwood City, 1990).

[16] C. Itzykson, J. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).