CARTAS AO EDITOR

Sobre o Desenvolvimento do Campo Elétrico nas Vizinhanças de um Ponto

Em interessante artigo nesta revista [1], H. Fleming reproduz e comenta dois teoremas de Helmholtz sobre campos vetoriais. O primeiro deles garante que todo campo vetorial que se anula no infinito está determinado pela sua divergência e pelo seu rotacional. O segundo versa sobre o comportamento do campo vetorial nas vizinhanças de um ponto, e que, no âmbito do Eletromagnetismo, fornece o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ nas vizinhanças de uma origem $\vec{0}$, onde o campo é $\vec{E}(\vec{0})$, como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{\vec{r}}{3}(\mathrm{div}\vec{E})_0 + \frac{1}{2}[(\mathrm{rot}\vec{E})_0 \times \vec{r}] + \vec{r}.S^o \quad (1)$$

Nesta equação, div$\vec{E} = 4\pi\rho$, sendo ρ a densidade de carga. No termo em rot $\vec{E}$, usa-se a lei de Faraday, obtendo-se

$$-\frac{1}{2}(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})_0 \times \vec{r}. \quad (2)$$

(A consideração da dependência com o tempo no campo vetorial é, certamente, de iniciativa do autor da Ref. [1] e não de Helmholtz). Em [1] esse termo é substituido por $-1/c(\partial\vec{A}/\partial t)_0$, sendo $\vec{A}$ o potencial vetor, mas preferiremos mantê-lo como na Eq.2, ou seja.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{\vec{r}}{3}(\mathrm{div}\vec{E})_0 - \frac{1}{2}[(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})_0 \times \vec{r}] + \vec{r}\cdot S^o. \quad (3)$$

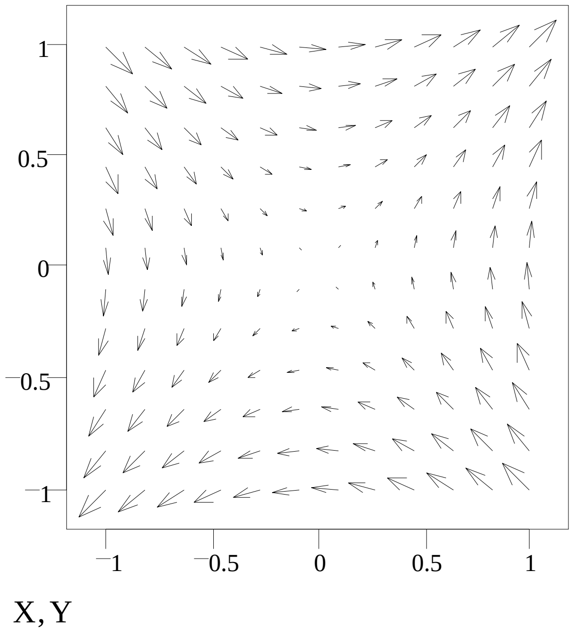
No que segue, estaremos interessados no último termo da Eq.1, $\vec{r}\cdot S^o$, em que S^o é um tensor simétrico sem traço. É fácil ver que $\vec{r}\cdot S^o$ é um campo vetorial $\vec{L}$ sem divergência e sem rotacional. Ilustrando em duas dimensões, teríamos

$$\vec{L} = (S_{11}x + S_{12}y)\hat{\imath} + (S_{21}x + S_{22}y)\hat{\jmath} \quad (4)$$

com

$$S_{11} - S_{22} = 0 \ \text{ e } \ S_{12} = S_{21}. \quad (5)$$

Na figura abaixo ilustramos $\vec{L}$ para $S_{11} = 0$ e $S_{12} = 1$. Como a Eq. 4 mostra em geral e a figura em particular, o campo $\vec{L}$ é nulo em $\vec{0}$, crescendo em módulo ao se afastar do mesmo. Sendo $\vec{L}$ sem divergência e sem rotacional, ele é um campo laplaciano, isto é, derivado de um potencial, e solução da equação de Laplace. Quem determina $\vec{L}$?



Naturalmente as fontes de $\vec{L}$ são, em princípio, as cargas e as correntes exteriores a $\vec{0}$. Notemos, porém, que o efeito das correntes já está incorporado ao termo $(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})_0$, e esta é a razão de o termos mantido como na Eq.3. Sendo assim $\vec{L} = \vec{r}.S^o$ engloba somente o efeito das cargas afastadas de $\vec{0}$. A dependência linear em $\vec{r}$ de $\vec{L}$ indica que $\vec{L}$ deriva do potencial, em geral retardado, das cargas exteriores a uma pequena esfera em torno de $\vec{0}$, vamos dizer de raio a, obtido pelo desenvolvimento do potencial das cargas exteriores à esfera, em pontos $\vec{r}$ interiores à esfera. Por ser proporcional a $\vec{r}$, $\vec{L}$ deriva de potencial do tipo quadrupolo. Isso tudo no limite em que $a \to 0$. É o que gostaríamos de comentar.

G. F. Leal Ferreira
Instituto de Física de São Carlos-USP
C.P. 369, 13560-970, São Carlos, SP.
16/07/2003

[1] H. Fleming, *Two Theorems by Helmholtz*, Rev. Bras. Ens. Fis. **23,** 153 (2001).