Teorema de Ehrenfest e o Limite Clássico da Mecânica Quântica

Ehrenfest Theorem and the Classical Limit of Quantum Mechanics

A. O. Bolivar*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, CBPF-DCP,

Rua Dr. Xavier Sigaud 150, 22290-180 - Rio de Janeiro, Brasil

Recebido em 20/10/2000. Aceito em 11/05/2001

Apresentamos argumentos sustentando que o teorema de Ehrenfest não é formal e conceitualmente adequado para conectar a mecânica quântica à mecânica clássica. Além disso, a fim de ressaltarmos a importância pedagógica de jamais deixarmos de ler os textos originais, traduzimos o artigo de Paul Ehrenfest publicado em 1927 na revista *Zeitschrift für Physik.*

We present arguments against the use of the Ehrenfest theorem as a classical limiting method of quantum mechanics. In addition, in order to point out the pedagogical relevance of reading the original texts we translate the article by Paul Ehrenfest published in the journal *Zeitschrift für Physik* in 1927.

I Teorema de Ehrenfest e o limite clássico

Sistemas mecânicos isolados são descritos, na física clássica, pelas equações de Newton (consideramos o caso unidimensional)

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m},$$

onde x é a posição, p o *momentum* linear e $V(x,t)$ um potencial externo. Dadas as condições iniciais (x_0, p_0), a *trajetória* do sistema é deterministicamente determinada para qualquer tempo t.

Em mecânica quântica, o estado de um sistema físico é determinado pela função de onda $\psi(x,t)$, solução da equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi = \imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

e o valor esperado da grandeza física A é calculado por meio da equação

$$\langle A\rangle_\psi = \int \psi^\dagger A\psi dx.$$

Supondo que a teoria quântica seja uma teoria universal da matéria, é importante mostrar como a mecânica clássica surge como um caso particular de dentro do arcabouço teórico do formalismo quântico. Em 1927, Ehrenfest [1] (ver seção II) obteve as expressões

$$\frac{d\langle p\rangle_\psi}{dt} = -\langle\frac{\partial V}{\partial x}\rangle_\psi$$

$$\frac{d\langle x\rangle_\psi}{dt} = \frac{\langle p\rangle_\psi}{m}$$

que chamamos de equações de Ehrenfest; estas não conectam a mecânica quântica à clássica. Isto é feito apenas usando o teorema de Ehrenfest[1], como veremos abaixo.

Expandindo a função potencial $V(x,t)$ em torno do ponto médio $\langle x\rangle_\psi$, diferenciando V e, em seguida, calculando a média $\langle\partial V/\partial x\rangle_\psi$, chegamos a[2]

*Endereço permanente: Instituto Cultural Eudoro de Sousa, Grupo "Mário Schönberg" de estudos em Física-Matemática, Ceilândia, 72221-970 (C.P. 7316), D.F, Brasil.

[1] Chamamos a atenção do leitor que vários livros-textos [2] identificam as equações de Ehrenfest com o próprio teorema de Ehrenfest. No entanto, ao lermos o artigo original [1] (ver também seção 2) e os trabalhos mais recentes [3,5,6] verificamos que tal identificação não pode ser efetuada. As equações de Ehrenfest são exatas, ao passo que, em geral, o teorema de Ehrenfest é obtido aproximadamente (com a exceção do oscilador harmônico, por exemplo) via considerações acerca do grau de localização da função de onda. A preocupação de Ehrenfest era obter as equações de Newton como aproximação da equação de Schrödinger (vide o título de seu artigo: *Bemerkung über die angenärte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik*). Esta idéia foi apreendida por Heisenberg [7] que, em seu livro (que não é livro-texto) de 1930, ao fazer referência ao trabalho de Ehrenfest, usa corretamente as condições de validade deste teorema para conectar a física quântica à física clássica, embora ele não use explicitamente a expressão "teorema".

[2] Para potenciais no máximo quadráticos, temos uma relação exata.

$$\langle \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \rangle_\psi = \frac{\partial V(\langle x \rangle_\psi, t)}{\partial x} + \langle x - \langle x \rangle_\psi \rangle_\psi \frac{\partial^2 V(\langle x \rangle_\psi, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \triangle x \frac{\partial^3 V(\langle x \rangle_\psi, t)}{\partial x^3} + ... \quad ,$$

onde $\triangle x = \sqrt{\langle x^2 \rangle_\psi - \langle x \rangle_\psi^2}$ mede a largura de ψ. O teorema de Ehrenfest consiste em supor que ψ seja normalizável, i.e., $\langle x - \langle x \rangle_\psi \rangle_\psi = 0$, e que $\triangle x$ seja bem pequeno (para uma pacote de Ehrenfest ψ_{PE}) de modo que V varie muito pouco em torno de $\langle x \rangle_\psi$, isto é, $\partial^3 V / \partial x^3 \approx 0$. Assim, obtemos

$$\langle \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \rangle_{\psi_{PE}} = \frac{\partial V(\langle x \rangle_{\psi_{PE}}, t)}{\partial x}.$$

Desta forma, diz-se que as equações de Newton são recuperadas, como aproximação, a partir da equação de Schrödinger. Em outras palavras, os valores médios $\langle x \rangle_\psi$ e $\langle p \rangle_\psi$ de um sistema quântico descrito por ψ_{PE} seguem uma *trajetória clássica*. Isto é o que é propalado, em geral, nos livros-textos usados em nossas universidades.

Contudo, vale notar que o teorema de Ehrenfest não explica o fato de como a álgebra não-comutativa das observáveis quânticas desaparece no limite clássico [3]. Além deste pequeno detalhe geralmente olvidado, conceitualmente, isto é, no que tange a interpretações do formalismo quântico, ao teorema de Ehrenfest é levantada a seguinte objeção:

(α) Na interpretação de Copenhague, o "x" que aparece no argumento de $\psi_{PE}(x,t)$ não representa a localização *real* de uma partícula, mas somente uma possível posição, entre outras, de ser *realizada* com uma probabilidade $|\psi_{PE}|^2$, desde que uma medição seja feita para determinar a posição da partícula. Ao passo que nas equações de Newton o "x" denota a posição bem definida de um sistema, em todo instante, independentemente de ser ou não observada [4,5]. A seguinte questão ainda permanece não respondida: como transpor este abismo conceitual entre as duas teorias?

Recentemente, Ballentine *et al.* [6] mostraram de modo definitivo que, do ponto de vista formal, as condições de validade do teorema de Ehrenfest não são suficientes, pois quando aplicadas ao oscilador harmônico, por exemplo, não bastam para caracterizar a sua classicalidade; muito menos são necessárias, visto que há sistemas quânticos (partícula unidimensional entre paredes refletoras, oscilador quártico forçado) que podem violar o teorema de Ehrenfest e ainda assim se comportarem classicamente. Nosso objetivo neste artigo é reforçar este ponto de vista. Para isto, apresentamos duas versões do teorema de Ehrenfest: uma quântica e outra clássica.

(a) *Teorema de Ehrenfest clássico.*

Na formulação de Liouville da mecânica clássica, o estado de um sistema físico é especificado pela função distribuição de probabilidade $F(x,p,t)$ no espaço de fase (x,p). A dinâmica de F, gerada pelas equações de Newton, é dada por

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial p} = 0. \tag{1}$$

O valor esperado das observáveis físicas $A(x,p,t)$ é calculado a partir da fórmula

$$\langle A \rangle_F = \int AF dxdp. \tag{2}$$

Assim, é fácil mostrar que

$$\frac{d\langle x \rangle_F}{dt} = \frac{\langle p \rangle_F}{m} \tag{3}$$

$$\frac{d\langle p \rangle_F}{dt} = -\langle \frac{\partial V}{\partial x} \rangle_F = -\frac{\partial V(\langle x \rangle_F, t)}{\partial x}, \tag{4}$$

desde que a largura da distribuição de probabilidade F seja pequena. Segue, então, que a evolução temporal do centróide $(\langle q \rangle_F, \langle p \rangle_F)$ do *ensemble* clássico F pode ser descrito por equações formalmente similares às de Newton. No entanto, como é óbvio notar, o sistema mantém-se clássico mesmo violando (3) e (4), i.e., as condições de validade do teorema de Ehrenfest *não são necessárias* para estabelecer a *classicalidade* de um sistema físico.

(b) *Teorema de Ehrenfest quântico.*

Comumente, o teorema de Ehrenfest (quântico) é apresentado ou na representação de Schrödinger [1] ou na representação de Heisenberg [5,6]. Para efeito de comparação com a versão clássica deste teorema, e seguindo a Ref.[8], reformulamo-lo no espaço de fase quântico. (Ao leitor menos familiarizado com o formalismo de Wigner, recomendamos a leitura das Refs.[5,8,9]).

Da equação de Schrödinger sob a ação de um potencial escalar V

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+V(x_1,t)\psi=\imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{5}$$

no ponto x_1 e da sua complexa-conjugada

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi^\dagger}{\partial x_2^2}+V(x_2,t)\psi^\dagger=-\imath\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}, \tag{6}$$

no ponto x_2, obtemos a equação de evolução

$$\left\{\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\hbar\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}-\hbar\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(\hbar/2)^{2k}}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}V}{\partial q^{2k+1}}\frac{\partial^{2k+1}}{\partial p^{2k+1}}\right\}\mathcal{W}=0, \tag{7}$$

para a função de Wigner [9]

$$\mathcal{W}(p,x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\psi^\dagger(x+\frac{\eta\hbar}{2},t)\psi(x-\frac{\eta\hbar}{2},t)e^{-\imath p\eta}d\eta, \tag{8}$$

depois de usarmos a mudança de variáveis

$$x_1=x-\frac{\eta\hbar}{2}\quad;\quad x_2=x+\frac{\eta\hbar}{2}. \tag{9}$$

(Notemos que para potenciais da forma polinomial $V=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$, a Eq.(7) passa a ter um número finito de termos).

Na formulação da mecânica quântica no espaço de fase, os valores esperados da posição x e do *momentum* p são calculados por meio das relações

$$\langle x\rangle_{\mathcal{W}}=\int x\mathcal{W}(x,p,t)dpdx \tag{10}$$

$$\langle p\rangle_{\mathcal{W}}=\int p\mathcal{W}(x,p,t)dpdx. \tag{11}$$

O teorema de Ehrenfest, reformulado neste formalismo de Wigner [8], consiste basicamente em impor condições para que a função quântica $\mathcal{W}$ *simule* um comportamento de modo que ela possa ser descrita "classicamente". Isto é possível se

(i) a função de Wigner $\mathcal{W}$ for suficientemente bem localizada, ou seja, se for construída a partir de um pacote de Ehrenfest ψ_{PE} de tal modo que o potencial V não varie muito dentro das dimensões de $\mathcal{W}$:

$$\frac{\partial^3V}{\partial x^3}\ll\frac{\partial V}{\partial x}; \tag{12}$$

(ii) a função de Wigner for sempre definida positiva. Isto ocorre sempre para funções de onda gaussianas.

Decorre das condições de validade i) e ii) que a Eq.(7) torna-se [3]

$$\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial t}+\frac{p}{m}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial p}=0, \tag{13}$$

por sua vez, esta permite que

$$\frac{d\langle x\rangle_{\mathcal{W}}}{dt}=\frac{\langle p\rangle_{\mathcal{W}}}{m} \tag{14}$$

$$\frac{d\langle p\rangle_{\mathcal{W}}}{dt}=-\int\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\mathcal{W}(x,p,t)dxdp$$

$$=-\langle\frac{\partial V}{\partial x}\rangle_{\mathcal{W}}=-\frac{\partial V(\langle x\rangle_{\mathcal{W}},t)}{\partial x}. \tag{15}$$

Ou seja, o centróide do *ensemble* quântico $\mathcal{W}$ segue "trajetórias" determinadas por equações do tipo Newton. Contudo, as condições (i) e (ii) não bastam para que um sistema quântico esteja em domínio clássico, pois sabemos que, embora a condição (15) seja exata, um oscilador harmônico quântico é totalmente diferente de um oscilador clássico, devido à presença da energia do ponto zero inerente ao primeiro e ausente no segundo. Muito menos (i) e (ii) são necessárias, pois de acordo com Ballentine *et al.* [6], há sistemas quânticos que se comportam classicamente sem levar em consideração as condições de validade deste teorema.

Em suma, da existência das versões quântica e clássica do teorema de Ehrenfest, segue a questão: de que trata, afinal, o teorema de Ehrenfest? Ao contrário do que comumente se pensa, tal teorema não é um processo de limite clássico. Ele é simplesmente um procedimento estritamente *matemático*, ou seja, estabelece condições para que os valores esperados da posição e do *momentum* linear, calculados a partir de um dado *ensemble* (quântico ou clássico) evoluam de acordo com equações de movimento similares às equações de Newton. Algo análogo aos parêntesis de Lie que ora se realizam como colchetes de Poisson (mecânica clássica) ora como comutador (mecânica quântica). Por si só, os

[3] Notemos que para potenciais da forma polinomial $V=a+bx+cx^2$, a Eq.(13) é exata.

parêntesis de Lie não possuem a função de conectar as duas teorias.

A seguir, apresentamos a tradução[4] do artigo original de Paul Ehrenfest publicado no periódico *Zeitschrift für Physik*, volume **45**, ano 1927 e páginas 455 a 457. Antes, porém, queremos notar que para transpor o abismo conceitual, Ehrenfest usou, neste trabalho, do expediente de aplicar as leis da mecânica quântica a um objeto macroscópico (massa de um grama) cuja trajetória é, supõe-se, descrita pelas equações de Newton independentemente de qualquer aparelho de medida. O propósito, então, de Ehrenfest era estender as leis quânticas ao domínio macroscópico justificando as leis clássicas como meras aproximações daquelas: justifica-se a noção de trajetória ao afirmar que o pacote de onda (associado a esta partícula macroscópica) mantém-se bem localizado no tempo, levando 10^{21} s para se dispersar. Ao passo que para partículas atômicas, o conceito de trajetória ainda permanece como uma ilusão: o pacote de onda se dispersa rapidamente (cerca de 10^{-13} s). Vale ressaltar que este procedimento parte da hipótese de que a teoria quântica seja universal, ou seja, suas leis podem ser utilizadas em qualquer situação física; no entanto, como foi enfatizado por Einstein [10], o princípio de superposição é incompatível com o teorema de Ehrenfest: uma ψ_{PE} não pode ser construída a partir de funções de onda superpostas (vide Eqs.(14,15)). Esta incompatibilidade, sem justificativa teórica, demonstra uma forte restrição deste teorema. A fim de superar esta dificuldade, recentemente a abordagem da descoerência [11] tenta explicar por meio de um mecanismo físico porque objetos macroscópicos não são caracterizados por funções de onda superpostas.

II Tradução:

Nota sobre a validade aproximada da mecânica clássica a partir da mecânica quântica

por **P. Ehrenfest**, Leiden, Holanda

(Recebido em 5 de setembro de 1927)

Por meio de um cálculo elementar sem aproximação, pode-se deduzir a relação

$$m\frac{d^2}{dt^2}\int\int\int d\tau\psi\psi^* x = \int\int\int d\tau\psi\psi^*(-\frac{\partial V}{\partial x})$$

que significa — considerando um pacote de onda (m da ordem de $1g$) pequeno e que permaneça bem pequeno — que a aceleração de sua posição obedece à equação de movimento de Newton para uma força local $-\partial V/\partial x$.

É importante responder, de um modo o mais elementar possível, à seguinte questão: *como as equações fundamentais de Newton da mecânica clássica resultam da mecânica quântica?* Toda uma série de recentes publicações tem elucidado, de modo essencial e completo, até que ponto a mecânica clássica permanece correta, como uma boa aproximação, para processos macroscópicos[5]. No entanto, falta mostrar alguma relação em especial, elementar que seja, seguindo exatamente da equação de Schrödinger (sem qualquer aproximação) e que talvez revele com mais comodidade a conexão entre a mecânica ondulatória e a mecânica clássica.

Consideremos, então, a equação de Schrödinger na seguinte forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = \imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad ;$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + V(x)\psi^* = -\imath\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \qquad (16)$$

para o caso de um único grau de liberdade. Em seguida, chamemos [6]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x\psi\psi* \equiv Q(t), \qquad (17)$$

$$\imath\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} dx\psi\frac{\partial\psi*}{\partial x} \equiv P(t), \qquad (18)$$

e calculemos dQ/dt e dP/dt usando (16). Substituindo e integrando por partes, resulta imediatamente (e sem aproximação) que

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{m}P \qquad (19)$$

$$m\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{dP}{dt} = \int dx\psi\psi^*(-\frac{\partial V}{\partial x}). \qquad (20)$$

A equação (20) significa: sempre que a largura do pacote de onda (ou de probabilidade) $\psi\psi^*$ é tida

[4] A propósito, queremos anunciar que está em fase de preparação outras traduções do alemão de artigos muitas vezes citados, no entanto, pouco lidos e raramente discutidos em nossas universidades, tais como o artigo de Einstein de 1917 sobre sistemas não-integráveis e o artigo de Heisenberg (1927) sobre as relações de incerteza.

[5] Louis de Broglie, Thèse 1924; Journ. de Phys. et le Ra. (6) **7**, 1, 32, 1926; C. R. **180**, 498, 1925; **183**, 272, 1926. — L. Brillouin, Journ. de Phys. et le Rad. **7**, 353, 1926. — E. Schrödinger, Naturwiss. **14**, 664, 1926. — P. Debye, Phys. ZS. **28**, 170, 1927. — W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **43**, 172, 1927. — E. H. Kennard, ZS. f. Phys. **44**, 326, 1927.

[6] A expansão de ψ em termos das autofunções $\psi = \sum c_n e^{\imath E_n/\hbar t}\phi_n(x)$ leva às relações matriciais $q_{nm} = e^{\imath/\hbar(E_n-E_m)t}\int dx x\phi_n\phi_m$ e p_{nm}.

como muito pequena com respeito a distâncias macroscópicas, *a aceleração* (do centro de gravidade) *do pacote de onda obedece às equações de Newton com uma força* $(-\partial V/\partial x)$ *"atuando no ponto Q do pacote de onda"*.

Observações: a dispersão gradual de um pacote de onda foi discutida pormenorizadamente por Heisenberg, l.c.. Seu cálculo, para o exemplo de uma partícula livre no espaço unidimensional, pode talvez tornar-se mais confiável com a ajuda de uma expressão mais natural envolvendo cálculos bem conhecidos em condução térmica: a equação de Schrödinger tem, para $V = 0$, uma estrutura de equação de condução térmica

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{21}$$

com

$$a^2 = \imath\frac{\hbar}{2m}. \tag{22}$$

Substituindo sua solução geral dada por (ver, e. g., B. Riemann-Weber, Vol. II)

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\psi(0,\xi), \tag{23}$$

com a condição inicial

$$\psi(0,\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{2\omega^2}+\imath\mu\xi}, \tag{24}$$

e

$$(\psi\psi^*)_{t=0} = C^2 e^{-\frac{\xi^2}{\omega^2}}, \tag{25}$$

(μ sendo uma constante real arbitrária), acha-se uma alteração na forma do pacote de onda com a velocidade $\hbar\mu/m$ e uma dispersão que aumenta com o tempo. Este resultado é o mesmo obtido por Heisenberg:

$$\psi\psi^* = c(t)\exp\left[-\frac{(x-\hbar\mu/mt)^2}{\Omega^2}\right], \tag{26}$$

onde

$$\Omega^2 = \omega^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2\omega^2}. \tag{27}$$

Duplicando-se a largura inicial (i.e., $\Omega^2 = 4\omega^2$), leva-se o tempo

$$T = \sqrt{3}\frac{m\omega^2}{\hbar} \quad (\hbar = \frac{6,6.10^{-27}}{2\pi}). \tag{28}$$

para que o pacote se dispersa. Para $m = 1g$, $\omega = 10^{-3}$cm, T é igual a 10^{21}s; enquanto que para $m = 1,7.10^{-24}$g e $\omega = 10^{-8}$cm, T é igual a 10^{-13}s.

Agradecimentos

O autor agradece ao árbitro pelas observações pertinentes que tornaram a apresentação deste trabalho pedagogicamente mais compreensível. O apoio financeiro do CNPq também é reconhecido.

References

[1] Ehrenfest, P., "Bemerkung über die angenärte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik", Zeitschrift für Physik **45**, 455 (1927).

[2] Schiff, L., *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, Tokyo, 1955); Messiah, A., *Mécanique Quantique* (Dunod, Paris, 1958); Merzbacher, E., *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1961); Cohen-Tannoudji, C., Diu, F., Laloë, F., *Mécanique Quantique* (Hermann, Paris, 1977); Sakurai, J. J., *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, New York, 1994).

[3] Grib, A. A. and Rodrigues Jr., W. A., *Nonlocality in Quantum Mechanics* (Plenum Press, New York, 1998).

[4] Holland, P. R., *The Quantum Theory of Motion* (Cambrigde University Press, Cambridge, 1993).

[5] Ballentine, L. E.,*Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore, 1998).

[6] Ballentine, L. E., Yang, Y., and Zibin, J. P., "Inadequacy of Ehrenfest's theorem to characterize the classical regime", Physical Review **50**, 2854 (1994).

[7] Heisenberg, W., The Physical Principles of the Quantum Theory (University of Chicago Press, Chicago, 1930).

[8] Royer, A., "Ehrenfest's theorem reinterpreted and extended with Wigner's function", Foundations of Physics **22**, 727 (1992).

[9] Wigner, E. P., "It On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", Physical Review **40**, 749 (1932).

[10] Einstein, A., *Elementare Überlegungen zur Interpretation der Grundlagen der Quantenmechanik*, in Scientific Papers Presented to Max Born on his Retirement from the Tait Chair of Natural Philosophy in the University of Edinburgh (Olivier and Boyd, Edinburgh, 1953) pp.: 33-40; in The Born-Einstein Letters, M. Born, ed., (Walker and Company, New York, 1969).

[11] Joos, F. and Zeh, H. D., "The emergence of classical properties through interaction with the environment", Zeitschrift für Physik B **59**, 223 (1985); Zurek, W. H., "Decoherence and the transition from quantum to classical", Physics Today **44** (October), 36 (1991); Zurek, W. H., "Preferred states, predictability, classicality and the environment-induced decoherence", Progress of Theoretical Physics **89**, 281 (1993); Zurek, W. H., "Decoherence, einselection and the existential interpretation (the rough guide)", Philosophical Transactions of the Royal Society of London A **356**, 1793 (1998); Zurek, W. H., "Decoherence, Chaos, quantum-classical correspondence, and the algorithmic arrow of time", Physica Scripta T **76**, 186 (1998); Zurek, W.

H., "Decoherence, Chaos, quantum-classical correspondence, and the arrow of time", Acta Physica Polonica B **29**, 3689 (1998); Zurek, W. H. and Paz, J. P., "Decoherence, chaos, and second law", Physical Review Letters **72**, 2508 (1994); Zurek, W. H. and Paz, J. P., "Decoherence, chaos, the quantum and the classical", Nuovo Cimento B **110**, 611 (1995); Habib, S., Shizume, K. and Zurek, W. H., "Decoherence, chaos and the correspondence principle", Physical Review Letters **80**, 4361 (1998).