

Como sincronizar uma rede?

How to sync a network?

Antonio Mihara*¹

¹Universidade Federal de São Paulo, Departamento de Física, Diadema, SP, Brasil.

Recebido em 27 de julho de 2023. Revisado em 19 de setembro de 2023. Aceito em 17 de outubro de 2023.

De bando de aves a internet, vários dos sistemas complexos que encontramos na natureza ou em nosso cotidiano podem ser modelados como redes. Cada elemento (ou nó) de uma rede, por sua vez, pode ser um sistema dinâmico, ou seja, com suas variáveis evoluindo ao longo do tempo conforme alguma(s) regra(s). Mas ao se conectar sistemas dinâmicos numa rede, diversos fenômenos coletivos podem se manifestar. Dentre esses fenômenos a sincronização completa (SC) de uma rede pode ter papel indispensável em algumas aplicações práticas, o que tem levado vários pesquisadores a investigar, por exemplo, quais as condições e/ou estrutura de uma rede que garantem sua sincronização, ou então como controlar uma rede de modo a levá-la para a SC. Neste manuscrito tentaremos abordar essas questões tomando o modelo de Kuramoto como ponto de partida, analisando a estabilidade de suas soluções e apresentando alguns resultados que possa nos ajudar a compreender alguns aspectos dinâmicos de redes de osciladores e a responder a pergunta enunciada no título.

Palavras-chave: Sistemas complexos, dinâmica de redes, sincronização.

From flocks of birds to the internet, many of the complex systems that we find in nature or in our daily lives can be modeled as networks. Each element (or node) of a network, in turn, can be a dynamical system, i.e., with its variables evolving over time according to some rule(s). But when connecting dynamical systems in a network, several collective phenomena can manifest. Among these phenomena the complete synchronization (CS) of a network can play an indispensable role in some practical applications, which has led several researchers to investigate, for example, what are the conditions and/or structure of a network that guarantee its synchronization, or how to control a network in order to take it to CS. In this manuscript we will try address these issues by taking Kuramoto model as a starting point, analyzing the stability of its solutions and presenting some results that can help us to understand some dynamic aspects of oscillator networks and to answer the question stated in the title.

Keywords: Complex systems, network dynamics, synchronization.

1. Introdução

Os mais variados sistemas complexos encontrados tanto na natureza (cadeia alimentar, neurônios no cérebro, bando de aves, etc.) quanto em nosso cotidiano (internet, redes sociais, sistema financeiro, etc.) podem ser modelados como redes complexas. Intuitivamente podemos pensar numa *rede* como uma representação das relações existentes entre pares de elementos de um conjunto. Os elementos da rede são, geralmente, chamados de *nós* ou *vértices* e as relações entre eles podem ser chamadas de *arestas*, *ligações* ou *conexões*. Numa rede social como o Facebook, por exemplo, cada usuário é um nó dessa rede e a “amizade” entre dois usuários pode ser representada por uma aresta/conexão entre os nós.

Ademais, cada nó de uma rede pode ser um sistema dinâmico, ou seja, com as variáveis (que o caracterizam) evoluindo ao longo do tempo conforme um conjunto de regras. Claramente uma parte dessas regras diz respeito à maneira como cada nó evolui no tempo independentemente dos outros nós e a outra parte diz respeito à maneira como a evolução do nó é influenciada pela interação

com os outros nós. Como resultado dessas interações, podemos esperar manifestações de diversos fenômenos coletivos na rede. A sincronização é, certamente, um fenômeno de grande relevância, sendo observada nas mais variadas situações.

Um bom exemplo é a sincronização de relógios acoplados, tal como foi observado por Huygens [1]. Uma demonstração que ilustra muito bem a sincronização entre “relógios” pode ser feita utilizando-se alguns metrônimos (uma espécie de marcador de tempo) sobre uma placa *Foam* (*foam board*: placa de poliestireno recoberto por papel)¹: quando a placa com os metrônimos está apoiada sobre a mesa, os mesmos oscilam com frequências muito próximas e fora de fase. Ao se colocar o conjunto (metrônimos sobre a placa) em cima de duas latas (de refrigerante ou cerveja) vazias, o suporte (placa + latas) é tão leve que pode reagir ao movimento oscilatório dos braços dos metrônimos, proporcionando um pequeno acoplamento mecânico entre os metrônimos. Em pouco tempo os metrônimos entram

¹ Veja o vídeo em: <http://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/synchronization-metronomes> ou em <http://youtu.be/Aaxw4zbULMs>.

*Endereço de correspondência: mihara@unifesp.br

em sincronia completa. Após atingir a sincronização, a placa com os metrônimos é retirada de cima das latas e colocada novamente sobre a mesa. Em poucos segundos os metrônimos voltam à situação inicial (oscilam fora de fase com frequências próximas), evidenciando que a sincronização desaparece ao se eliminar o acoplamento. Uma abordagem didática sobre sincronização de metrônimos e relógios de pêndulo pode ser encontrada na Ref. [1].

A sincronização também ocorre em diversos sistemas biológicos e, em alguns casos, parece ter um papel crucial na reprodução. Como exemplo podemos citar o fato curioso de algumas espécies de vaga-lumes do Sudeste Asiático [2]: à noite milhares de vaga-lumes machos se juntam em árvores e piscam sincronizadamente para atraírem as fêmeas. Recentemente também, observou-se que [3] um alto nível de sincronização bio-comportamental² entre homem e mulher é um potencial mecanismo de atração sexual/interesse romântico.

Por outro lado, o modelo de Kuramoto (MK) [4] é, sem dúvida, um dos modelos mais importantes para o estudo de sincronização em redes [5]. No MK considera-se uma rede com N osciladores de fase (ou ainda rotores, ou seja, o estado de cada nó é caracterizado apenas por um ângulo θ_k) globalmente acoplados e cuja evolução temporal é governada por um conjunto de N equações diferenciais de primeira ordem (notação/convenção: um ponto sobre a variável indica derivada da mesma em relação ao tempo):

$$\dot{\theta}_k = \omega_k + \frac{K}{N} \sum_j \text{sen}(\theta_j - \theta_k), \quad (1)$$

onde ω_k é a frequência natural do k -ésimo oscilador e $K > 0$.

É importante notar que o título do manuscrito pode sugerir algo bem mais amplo como, por exemplo, a sincronização de sistemas dinâmicos mais complicados (do que meros osciladores de fase) conectados em redes complexas. Tudo isso seria com certeza mais realista e interessante, mas exigiria uma análise mais complicada e, muito provavelmente, com pouca ou nenhuma possibilidade de se obter resultados analíticos. Optamos por estudar aqui um modelo que é, essencialmente, um *toy model*, devido à sua simplicidade matemática, entretanto o MK e suas variantes podem conter dinâmicas ricas e complicadíssimas, tendo sido amplamente utilizados para estudar sincronização nos mais variados sistemas complexos. Para se ter uma noção da relevância do MK, mencionamos abaixo alguns exemplos que, apesar de poucos, evidenciam o vasto espectro de aplicações do MK (e suas variantes):

- oscilações de neutrinos [6],
- sincronização de aplausos em uma sala de concerto [7],
- sincronização em redes (*ladder arrays*) de junções Josephson [8],
- sincronização em redes elétricas [9],
- para mineração de dados (*data mining*): um MK modificado foi proposto como algoritmo para “sincronizar dados” em grandes bancos de dados [10],
- estudo do comportamento de redes de neurônios (*spiking neurons*) [11],
- a auto-organização de enxames, bandos de pássaros ou cardumes [12].

Uma rede com vários osciladores (sistemas dinâmicos) acoplados pode apresentar diversos comportamentos coletivos, mas em várias aplicações a sincronização completa de seus nós pode ser de grande relevância, como em sistemas distribuídos (redes) de sensores sem fio [13], de rádios de baixa potência [14] e também na dinâmica de opiniões [15]. Por outro lado, como podemos então garantir que uma rede estará sempre (ou quase sempre) sincronizada? Para simplificar, vamos considerar uma rede de sistemas dinâmicos idênticos ou quase idênticos: (i) em que condições essa rede entrará em sincronia, com todos seus nós agindo como um só? (ii) como a capacidade de sincronização de uma rede depende da maneira como os nós estão conectados? e (iii) qual é a melhor topologia para alcançar a sincronização completa – ou então para evitá-la quando indesejável? No presente artigo pretendemos abordar tais questões, tentando apresentar de forma didática e compacta alguns aspectos relevantes da dinâmica do MK. O artigo é organizado nas seguintes partes: na próxima seção apresentamos um estudo analítico para o MK com osciladores idênticos, ou seja, todos eles possuem a mesma frequência natural: $\omega_k = \omega, \forall k$. Na seção 3 apresentamos algumas aplicações dos resultados analíticos e na seção 4 apresentamos nossas conclusões.

2. Estudo analítico do MK com osciladores idênticos

Em seu trabalho seminal, Kuramoto [4] considerou uma rede com N osciladores de fase globalmente acoplados e com evolução temporal governada pelo sistema de equações (1) e com as frequências naturais ω_k distribuídas aleatoriamente de acordo com alguma densidade de probabilidade simétrica em relação à frequência média (gaussiana ou lorentziana, por exemplo). Um estudo detalhado do modelo original de Kuramoto pode ser encontrado na Ref. [16]. Mas aqui nosso objetivo é estudar o MK com osciladores idênticos, ou seja, $\omega_k = \omega, \forall k$ na Eq. (1). Outra diferença em relação ao MK original é que aqui vamos considerar uma situação mais geral no que diz respeito à forma como os nós estão acoplados: no MK original cada nó é acoplado a todos os

² No artigo citado, atividades bio-comportamentais são padrões de atividade eletrodérmica e de comportamento motor que foram observados nos experimentos.

outros nós da rede — dito “acoplamento global” — com a mesma intensidade. Aqui vamos considerar que cada nó está acoplado a seus R vizinhos mais próximos de cada lado (com $K > 0$). Com essas alterações o sistema (1) vira:

$$\dot{\theta}_k = \omega + \frac{K}{N} \sum_{\langle j,k \rangle} \text{sen}(\theta_j - \theta_k), \quad (2)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$ identifica o k -ésimo oscilador. A notação $\langle j, k \rangle$ significa que a somatória é feita sobre os R vizinhos mais próximos do nó k , de ambos lados, então j assume os valores $k - R, k - R + 1, \dots, k, \dots, k + R$. (lembrando que temos condições periódicas de contorno: o nó $k = 0$ é o vizinho à “direita” do nó $k = (N - 1)$ e assim por diante, então a somatória é, na verdade, no índice $\|j\| \equiv j \text{ mod } N$). Podemos reescrever a somatória de (2) como:

$$\dot{\theta}_k = \omega + \frac{K}{N} \sum_{n=-R}^R \text{sen}(\theta_{\|k+n\|} - \theta_k). \quad (3)$$

Note que R pode variar de $R = 1$ (acoplamento *local*) a $R = (N - 1)/2$ (acoplamento *global*, todos ligados com todos) para N ímpar³. E se $R > 1$ mas os nós não estão totalmente acoplados, o acoplamento é dito *não local*. Mas antes de analisar um sistema com muitos osciladores, vamos tentar entender a dinâmica de sincronização considerando o caso mais simples com apenas dois osciladores.

2.1. Dois osciladores acoplados

Para um sistema com dois osciladores, com frequências naturais $\omega_{1,2}$, vamos considerar inicialmente que não são idênticos. A dinâmica da dupla é governada pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 + (K/2) \cdot \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 + (K/2) \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (4)$$

Vamos considerar, sem perda de generalidade, que $\omega_2 \geq \omega_1$ e que a constante de acoplamento $K > 0$. Definimos então $x \equiv \theta_2 - \theta_1$, a diferença de fase entre os osciladores, e, subtraindo a primeira da segunda equação, ficamos com:

$$\dot{x} = \Delta\omega - K \cdot \text{sen}(x), \quad (5)$$

onde $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \geq 0$. Para entender a sincronização aqui, podemos nos concentrar na Eq. (5) que é um sistema com apenas uma dimensão.

Para facilitar, vamos dividir os dois lados da Eq. (5) por K . No lado esquerdo podemos considerar que fizemos um escalonamento no tempo: $t \rightarrow \tau = Kt$, ou seja,

$$\frac{\dot{x}}{K} = \frac{1}{K} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}, \quad (6)$$

e é fácil notar que τ é uma variável adimensional, já que K tem unidade de inverso de tempo. Para não utilizar uma notação carregada demais, vamos utilizar \dot{x} para denotar $dx/d\tau$, definimos também $r \equiv \Delta\omega/K$ e, assim a Eq. (5) vira:

$$\dot{x} = r - \text{sen}(x), \quad r \geq 0. \quad (7)$$

Vamos agora analisar os pontos/estados de equilíbrio da Eq. (7). Para isso devemos procurar soluções para $f(x) = r - \text{sen}(x) = 0$, com $-\pi < x \leq \pi$.⁴

Só podemos encontrar solução para $r = \text{sen}(x)$ se $r \leq 1$. Como podemos observar no gráfico da Fig. 1, com $r < 1$, temos dois estados de equilíbrio: $x^* = \arcsen(r)$ e $x^* = \pi - \arcsen(r)$. Entretanto, apenas a primeira solução (da esquerda) é estável. Aqui podemos dizer que ocorre o **travamento de fase** (em inglês *phase locking*): os dois osciladores se movimentam com mesma velocidade angular ($\Omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$) e com diferença de fase constante igual a x^* . Aqui só teremos sincronização completa ($\theta_1(t) = \theta_2(t)$, para $t \gg 1$) com $r = 0$, ou seja, se $\omega_1 = \omega_2$. Mas, em princípio, se tivermos osciladores quase idênticos, ou seja, com frequências bem próximas e também com acoplamento K suficientemente forte, temos $r \rightarrow 0$ numa situação muito próxima da SC.

Se $r = 1$, há apenas um estado de equilíbrio $x^* = \pi/2$. E para $r > 1$, não existe solução para $r = \text{sen}(x)$, o que significa que não há ponto/estado de equilíbrio e, por conseguinte, não haverá travamento de fase nem sincronização.

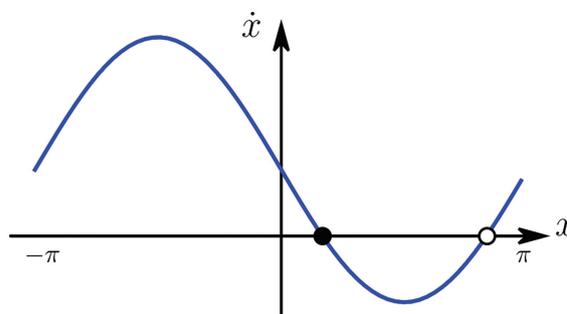


Figura 1: Gráfico de $\dot{x} = r - \text{sen}(x)$, com $0 < r < 1$. A “bola cheia • (vazia ◦)” representa que a solução/ponto de equilíbrio é estável (instável). Note que a variável x é mod 2π .

³ Note que, para um sistema com um número par de nós **globalmente** acoplados, a somatória no índice n não poderá ser de $n = (-N/2) \text{ mod } N$ a $n = (N/2) \text{ mod } N$, pois, devido às condições periódicas, correspondem ao mesmo nó e contribuiriam duas vezes para a somatória.

⁴ Aos leitores com pouca ou nenhuma experiência no estudo de dinâmica não-linear, recomendamos fortemente que leiam antes o Apêndice A (um breve resumo sobre soluções/estados de equilíbrio de sistemas 1D) e, em seguida, retomem a leitura desta parte do texto.

2.2. MK com vários osciladores idênticos

Vamos agora considerar uma rede com vários osciladores idênticos acoplados. Mas, antes de mergulhar nos cálculos, vamos tentar ganhar alguma intuição sobre a dinâmica do sistema (3).

Caso 1. Osciladores desacoplados: Primeiramente, vamos considerar a situação em que $\omega \neq 0$, mas com os nós desacoplados ($K = 0$). Neste caso, a solução pode ser obtida diretamente pela integração das equações (3) com $K = 0$:

$$\dot{\theta}_k = \omega \Rightarrow \theta_k(t) = \theta_k(0) + \omega t, \quad (8)$$

indicando que cada nó está oscilando/rodando com frequência/velocidade angular $\omega = \text{constante}$. É um sistema com osciladores desacoplados mas com todos na mesma frequência angular e com as diferenças de fase $\Delta_{j,k}(t) \equiv \theta_j(t) - \theta_k(t)$ constantes ao longo do tempo.

Caso 2. Osciladores acoplados: Agora vamos considerar o sistema acoplado ($K > 0$) e, para isso, que tal tratar o problema como se a somatória no lado direito de (3) fosse uma “perturbação” do sistema desacoplado? Seguindo esse raciocínio podemos nos inspirar na solução (8) acima e tentar uma solução do tipo $\theta_k(t) = \phi_k(t) + \omega t$. Derivando nosso “chute” em relação ao tempo ficamos com $\dot{\theta}_k = \dot{\phi}_k + \omega$ e, substituindo nas equações (3), obtemos:

$$\dot{\phi}_k = \frac{K}{N} \sum_{n=-R}^R \text{sen}(\phi_{\|k+n\|} - \phi_k), \quad (9)$$

que podem ser interpretadas como as equações de movimento no referencial em rotação, com velocidade angular ω . Os estados de equilíbrio são aqueles para os quais $\dot{\phi}_k(t) = 0$ para $t \gg 1$. Devido à simetria das equações e às condições periódicas da rede, pode-se mostrar que distribuições homogêneas das fases em um círculo são estados de equilíbrio. Uma classe conhecida de estados de equilíbrio são os chamados estados q -torcidos (em inglês *q-twisted states*), em que a defasagem entre dois osciladores consecutivos é:

$$\theta_{k+1} - \theta_k = \phi_{k+1} - \phi_k = \frac{2\pi}{N}q \equiv \Delta, \quad (10)$$

com $q = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$; não é difícil ver que a somatória no lado direito de (9) fica:

$$\sum_{n=-R}^R \text{sen}(n\Delta) = 0. \quad (11)$$

O inteiro q é chamado “número de voltas” (em inglês, *winding number*), pois pode ser pensado como o número de voltas que se dá ao se distribuir as fases dos osciladores ordenadamente ao longo de um círculo. O estado com $q = 0$ é o estado de **sincronização completa**, ou seja, com todos os nós em fase e, obviamente, com mesma frequência/velocidade angular. Os demais estados (com

$q \neq 0$) são caracterizados por um mesmo ângulo de defasagem ($2\pi q/N$) entre dois nós consecutivos e todos com mesma frequência angular.

Uma observação sobre os casos 1 e 2 acima: como estamos considerando o sistema com osciladores idênticos (e supostamente com mesma frequência $\omega > 0$), em ambas situações teremos geralmente sincronização em frequência. Entretanto, a sincronização completa (SC) só será um estado estável⁵ da rede no caso 2. Já no caso 1 (nós desacoplados), a SC só é possível se o estado inicial da rede também for de SC (ou seja, $\theta_0(0) = \theta_1(0) = \dots = \theta_{N-1}(0)$). Mas é um estado instável, pois qualquer perturbação externa, mesmo que pequena, em um dos nós pode tirar o sistema da sincronia completa. Uma outra maneira de se pensar nesses casos é que só há travamento de fase (*phase locking*) quando os osciladores estão acoplados (caso 2), fazendo com que o estado de equilíbrio com $\theta_k - \theta_{k-1} = \text{constante}$, $\forall k$, seja estável.

Por outro lado, devemos lembrar que Δ é mod 2π , então podemos notar que para um estado com $q = N-n$, onde $1 \leq n \leq N/2$, temos:

$$\Delta = \frac{2\pi}{N}(N-n) = 2\pi - \frac{2\pi}{N}n = -\frac{2\pi}{N}n < 0, \quad (12)$$

então os ângulos dos osciladores são distribuídos (em ordem: ϕ_0, ϕ_1, \dots) no sentido horário ao longo do círculo, de tal modo que o número de voltas desse estado poderia também ser representado por $q = -n$, denotando n voltas no sentido horário. Assim, podemos mudar a faixa de valores do número de voltas para: $q = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m$ com $m = (N-1)/2$ para N ímpar; e $m = N/2$ para N par, mas nesse caso não é difícil notar que os estados com $q = N/2$ e $q = -N/2$ correspondem à mesma situação física.

Em resumo, as soluções⁶ do sistema (3) podem ser escritas como:

$$\theta_k(t) = C + k \cdot \frac{2\pi q}{N} + \omega t, \quad (13)$$

onde C é uma constante real.

2.3. Estabilidade linear das soluções

Vamos agora analisar a estabilidade dos estados q -torcidos e, para isso, vamos adicionar uma pequena perturbação \mathcal{E}_k à solução (13) acima:

$$\theta_k(t) = C + k \cdot \frac{2\pi q}{N} + \omega t + \mathcal{E}_k(t), \quad (14)$$

No lado esquerdo de (3) fazemos $\dot{\theta}_k \rightarrow \dot{\mathcal{E}}_k + \omega$ e no lado direito expandimos até a primeira ordem de \mathcal{E} e ficamos com:

$$\dot{\mathcal{E}}_k = \frac{K}{N} \sum_{n=-R}^R [\mathcal{E}_{\|k+n\|}(t) - \mathcal{E}_k(t)] \cos(n\Delta). \quad (15)$$

⁵ Aqui significa estabilidade em relação a pequenas perturbações.

⁶ Da classe conhecida como “estados q -torcidos”.

Supondo agora uma forma $\mathcal{E}_k(t) = \mathcal{A}_k e^{\lambda t}$, o sistema (15) pode ser reescrito, após algumas manipulações, como:

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{A}_k &= \frac{K}{N} \sum_{n=1}^R [\mathcal{A}_{\|k-n\|} + \mathcal{A}_{\|k+n\|} - 2\mathcal{A}_k] \cos(n\Delta) \\ &= \frac{K}{N} \sum_{n=1}^R \rho_n [\mathcal{A}_{\|k-n\|} + \mathcal{A}_{\|k+n\|}] - \frac{K}{N} \beta \mathcal{A}_k, \end{aligned} \quad (16)$$

onde:

$$\rho_n = \cos(n\Delta), \quad \beta = 2 \sum_{n=1}^R \rho_n. \quad (17)$$

A equação de autovalores (16) pode ser reescrita na forma matricial: $\lambda \vec{A} = M \vec{A}$, onde $\vec{A} = [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \dots, \mathcal{A}_{(N-1)}]^T$ e M é

$$M = \frac{K}{N} \begin{pmatrix} -\beta & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & -\beta & \rho_1 & \cdots & \rho_3 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & -\beta & \cdots & \rho_4 & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \cdots & \rho_1 & -\beta \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Por sua vez, M é uma matriz *circulante*⁷ com autovetores [17]

$$\begin{aligned} \vec{A}_\ell &= \frac{1}{\sqrt{N}} [z_\ell^0, \dots, z_\ell^k, \dots, z_\ell^{N-1}]^T, \\ z_\ell &\equiv \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \ell\right), \end{aligned} \quad (19)$$

onde $\ell = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$. Os autovalores são reais e dados por [18]:

$$\lambda_\ell = -4 \frac{K}{N} \sum_{n=1}^R \cos\left(n \frac{2\pi}{N} q\right) \text{sen}^2\left(n \frac{\pi}{N} \ell\right) \quad (20)$$

A análise acima permite descrever o comportamento do sistema (3) nas vizinhanças dos estados de equilíbrio (14), ou seja, qualquer perturbação $\vec{\mathcal{E}}(t)$ pode ser escrita em termos dos automodos $\vec{\mathcal{E}}(t) = \sum_\ell C_\ell \vec{F}_\ell(t)$, com $\vec{F}_\ell(t) = \vec{A}_\ell e^{\lambda_\ell t}$ ou, sem notação vetorial, $\mathcal{E}_k(t) = \sum_\ell C_\ell F_\ell(k, t)$ com $F_\ell(k, t) = z_\ell^k e^{\lambda_\ell t}$, que é a função:

$$F_\ell(k, t) = e^{\lambda_\ell t} \exp\left(i \left(\frac{2\pi \ell}{N} k\right)\right). \quad (21)$$

Note que o modo $\ell = 0$, com autovalor $\lambda_0 = 0$ e autovetor $\vec{A}_0 \sim [1, 1, \dots, 1]^T$, resulta da invariância do sistema Eq. (3) sob rotações globais: $\theta_k \rightarrow \theta_k + C, \forall k$. Então, apesar de N equações no sistema (3), os estados de equilíbrio são $(N - 1)$ -dimensionais já que são relacionados a diferenças de fase. Daqui para frente vamos nos referir apenas a autovalores/modos com $\ell > 0$.

⁷ É uma matriz quadrada, com elementos reais, em que cada linha i é o deslocamento cíclico de $i - 1$ posições para a direita de uma lista de elementos. Veja, por exemplo, https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_circulante.

3. Aplicações

3.1. Estabilidade dos estados q -torcidos

Os autovalores (20), com $\ell > 0$, determinam se um estado será estável ou não. Quando o sistema, que é uma rede com N osciladores, está próximo de um estado q -torcido, o estado de cada oscilador (índice k) pode ser descrito por (14) e (21). Mas se existir algum(ns) autovalor(es) $\lambda_\ell = \lambda_\ell(q) > 0$, os osciladores começarão a se afastar do estado q -torcido⁸, sendo assim o estado q -torcido é instável. Em contraste, o estado será estável apenas se todos os autovalores (com $\ell > 0$) forem negativos.

Sendo assim, cada um dos estados q -torcidos pode ser classificado como [18]:

- (a) **atrator** se $\lambda_\ell < 0, \forall \ell > 0$;
- (b) **repulsor** se $\lambda_\ell > 0, \forall \ell > 0$;
- (c) **sela** se $\exists \lambda_\ell \lambda_{\ell'} < 0$;
- (d) **não-hiperbólico** se $\exists \lambda_\ell = 0$, para algum $\ell > 0$.

Como exemplo consideramos uma rede em anel com $N = 20$ osciladores acoplados. Nós variamos R de acoplamento local ($R = 1$) a não-local e testamos a estabilidade dos estados q -torcidos observando os sinais de $\lambda_\ell, \forall \ell > 0$. O resultado está compilado na Fig. 2 com a seguinte convenção de cores nos diagramas: **atratores** em azul; **selas**, **repulsores** e também estados instáveis **não hiperbólicos** em branco.

Os estados estáveis, destacados em azul na Fig. 2, podem ser comparados com os da Figura 1(a) da Ref. [19]

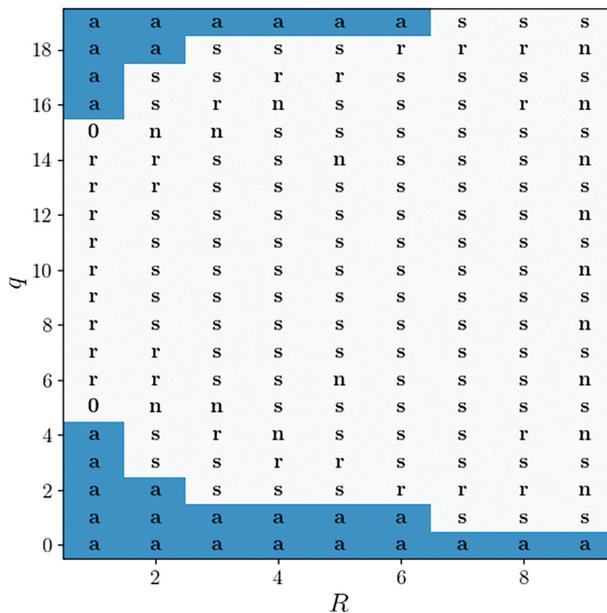


Figura 2: Estabilidade dos estados q -torcidos de uma rede com $N = 20$ e de acordo com o valor de R . Classificação conforme as condições (a-d) descritas no texto, estados instáveis em branco e estados estáveis em azul [18].

⁸ Em que cada oscilador se comporta conforme (13).

que foram obtidos exclusivamente através de grande e intenso trabalho de integração numérica das equações de Kuramoto.

Finalmente, os estados com ‘0’ na Fig. 2 possuem $\lambda_\ell = 0$, $\forall \ell$ e nossa análise de primeira ordem não é capaz de determinar sua estabilidade.

3.2. A bacia de sincronização

O modelo (2)–(3) acima, apesar de representar uma enorme simplificação de uma rede de osciladores real, tem recebido considerável atenção na literatura [18–23], com o intuito de compreender como a estrutura da rede influencia na sua capacidade de sincronização completa, ou seja, as questões (i)–(iii) enunciadas na Introdução. Um desses primeiros estudos foi realizado por Wiley, Strogatz e Girvan [20] em 2006. Com base em um intenso e sistemático trabalho de experimentos numéricos/computacionais, os autores estudaram os tamanhos das bacias de atração dos estados de equilíbrio, ou seja, os estados q -torcidos e como as bacias variavam com as configurações da rede.

Obviamente, o método “tradicional” de se mapear bacias de atração (ou seja, faz-se uma grade/reticulado no espaço de fase e evolui-se as equações do sistema a partir de cada ponto da grade e anota-se em qual dos atratores o sistema termina) torna-se computacionalmente inviável para sistemas com alta dimensionalidade. Então eles utilizaram uma abordagem estatística para realizar a tarefa: tomaram um grande número de pontos aleatórios no espaço de fase, evoluíram as equações (3) a partir de cada um dos pontos e anotaram em qual dos estados q -torcidos o sistema terminava. Tal procedimento foi realizado para diferentes valores de N e de R (ou seja, redes com diferentes configurações) e, após extenso trabalho de experimentos numéricos, os autores concluíram que [20]:

- I. a estabilidade de cada estado q -torcido depende da configuração da rede, ou seja, de N e de R , e observaram que para $R/N \gtrsim 0.34$ apenas o estado $q = 0$ (de sincronização completa) é estável,
- II. para cada configuração de rede (N, R fixos) o histograma dos estados q -torcidos finais tem a forma de uma distribuição gaussiana $\sim \exp(-q^2)$, centrada em $q = 0$ e
- III. o desvio padrão da distribuição depende de N, R dessa maneira: $\sigma \sim 0.2\sqrt{N/R}$.

O item I pode ser melhor entendido com base no sinal dos autovalores [18], como vimos nas seções anteriores e está ilustrada na Figura 2 para o caso de uma rede com 20 osciladores. A sincronização completa (estado com $q = 0$) é sempre estável para o MK (3) com $K > 0$, mas de acordo com o número de conexões entre os osciladores (ou seja, do valor de R) vários outros estados com $q \neq 0$ podem ser estáveis também e, portanto, diminuem a bacia de atração do estado de SC. Os autores da Ref. [20]

chamaram a bacia do estado de SC como “*sync basin*”, ou seja, a bacia de sincronização.

Os itens II e III indicam que a fração do volume do espaço de fase ocupada pela bacia de atração de um estado q -torcido pode ser estimada [20] como a probabilidade de que, para um estado inicial qualquer, o estado final terá número de voltas q :

$$P_q = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x=q-1/2}^{x=q+1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx, \quad (22)$$

sendo que o estado de SC ($q = 0$) é o estado com maior probabilidade, ou seja, com maior bacia de atração (“*sync basin*”), mas seu volume dependerá da razão N/R .

Para o caso de acoplamento local ($R = 1$), este problema foi revisitado em [21] com um método numérico preciso para medir o volume da bacia de cada estado estável. Os autores obtiveram o tamanho linear típico $[\alpha_\tau(q)]$ da bacia de atração de cada estado q -torcido estável, de modo que o volume da bacia de cada estado estável é proporcional a $V_q \sim \alpha_\tau^N(q)$.

Recentemente foi demonstrado que para um fluxo de gradiente de Morse-Smale⁹ atuando em uma variedade lisa, compacta e orientada sem fronteira, o espectro do operador de transferência (um operador de evolução temporal, com informações sobre a dinâmica global de um sistema) é dado por combinações lineares dos expoentes de Lyapunov nos pontos críticos da função de Morse (isto é, os autovalores do jacobiano nos estados de equilíbrio) [24] e vale globalmente na variedade.

Por outro lado, devemos notar que o sistema de equações (2)–(3) acima é um sistema de fluxo de gradiente de Morse-Smale com função de Morse dada pelo potencial $V(\theta_0, \theta_1, \dots) \sim \sum_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j)$, os pontos críticos de V são os estados q -torcidos e os expoentes de Lyapunov, nos pontos críticos, são os autovalores $\lambda_\ell(q)$. Mas os resultados matemáticos [24] garantem que $\lambda_\ell(q)$, apesar de serem obtidos por métodos locais, de alguma forma contém informações globais do sistema e, portanto, é possível usar os autovalores para explorar as bacias de atração dos estados q -torcidos. Para representar a estabilidade de um estado q -torcido estável, em todas as direções do espaço de estados, consideramos a soma de seus autovalores

$$\hat{\gamma}_q \equiv \sum_{\ell=1}^{N-1} \lambda_\ell(q), \quad \lambda_\ell(q) < 0 \quad (23)$$

que se assemelha ao funcional de entropia para difeomorfismos de Morse-Smale, no contexto do princípio variacional para sistemas dinâmicos [25].

Então define-se Γ_q , a *medida de estabilidade* do estado q -torcido, como a soma dos autovalores de um estado q -torcido estável, normalizado pelo $\hat{\gamma}_q$ mais negativo que

⁹ Sistema de equações diferenciais do tipo: $\dot{\vec{x}} = -\nabla V(\vec{x})$.

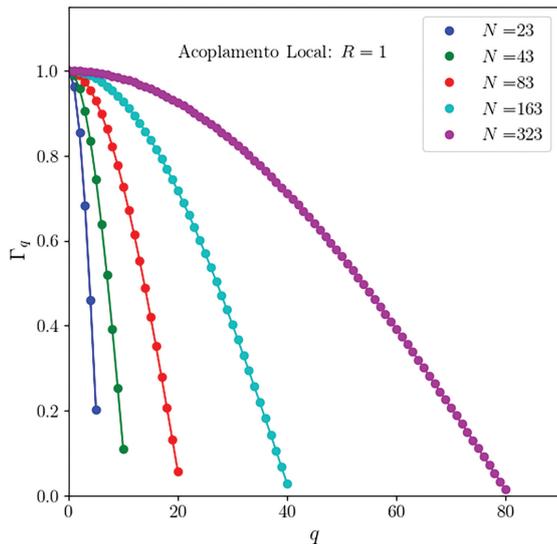


Figura 3: Dependência de Γ_q com q , para diferentes tamanhos de rede. Comparando com a inserção da Fig. 3 da Ref. [21], podemos notar que Γ_q comporta-se de modo muito parecido com o tamanho linear das bacias de atração dos estados q -torcidos.

neste caso é $\hat{\gamma}_0$ [26]:

$$\Gamma_q \equiv \frac{\hat{\gamma}_q}{\hat{\gamma}_0}. \tag{24}$$

Para se ter uma noção de como Γ_q depende do valor de q apresentamos na Fig. 3 o gráfico de Γ_q versus q para diferentes tamanhos de rede com acoplamento local ($R = 1$). É notável a semelhança entre o gráfico da Fig. 3 e o gráfico de $\alpha_\tau(q)$, o tamanho linear típico da bacia de atração apresentado na (inserção da) Fig. 3 da Ref. [21].

Portanto, se Γ_q tem comportamento semelhante ao tamanho linear da bacia de atração, é razoável esperar que, para uma rede com N osciladores o volume do bacia de atração de um determinado estado q se comportará como $\sim \Gamma_q^N$. Na Fig. 4 apresentamos o gráfico de Γ_q^N versus q , para $N = 60$ e $R = 2$; que pode ser bem aproximado por uma curva gaussiana (linha vermelha).

Na Ref. [26] o(a) leitor(a) poderá encontrar os detalhes do cálculo aproximado de Γ_q^N , que resulta em uma função gaussiana $\sim \exp(-q^2)$, centrada em $q = 0$ e com desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{N} \mathcal{F}(R), \quad \mathcal{F}(R) = \left[\frac{3}{2\pi^2(2R+1)(R+1)} \right]^{1/2}. \tag{25}$$

Por outro lado, para pequenos valores de R ($R \lesssim 0.1N$) pode-se obter a seguinte aproximação numérica

$$\sigma \approx 0.2014 \sqrt{\frac{N}{R}} - 0.04188 \sqrt{N}, \tag{26}$$

que possui o mesmo comportamento $\sigma \sim 0.2\sqrt{N/R}$ observado nos estudos numéricos da Ref. [20].

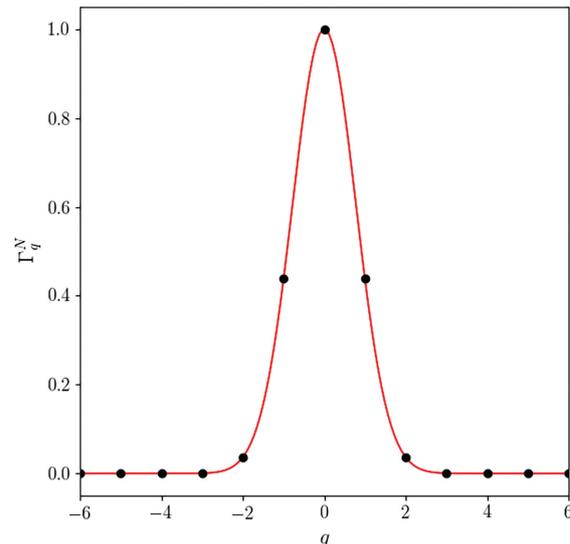


Figura 4: Gráfico de Γ_q^N , para $N = 60$ and $R = 2$ (círculos pretos), e a curva gaussiana ajustada (linha vermelha).

4. Considerações Finais

No presente trabalho tentamos apresentar alguns aspectos dinâmicos da sincronização em redes de osciladores de fase, tomando o modelo de Kuramoto (MK) com osciladores idênticos como nosso principal objeto de estudo. O MK, apesar de sua relativa simplicidade matemática, é um dos principais modelos utilizados para a investigação de diversos fenômenos coletivos que se manifestam em redes.

Consideramos uma rede de osciladores de fase em uma dimensão e com condições periódicas de contorno (ou seja, em “anel”). Cada oscilador (indexado com k) é acoplado a seus R primeiros vizinhos de cada lado e com evolução temporal governada pela equação diferencial (3). Apresentamos soluções do sistema, os estados (chamados) q -torcidos e fizemos uma análise de estabilidade linear dessas soluções (obtivemos os autovalores e autovetores) que nos permitiu classificar o tipo de estabilidade de cada estado/solução e vimos também como a estrutura da rede, caracterizada pelos parâmetros N (número de osciladores da rede) e R , influencia nessa estabilidade.

Estudos recentes (veja, por exemplo, [27] e referências contidas nesta) indicam que é necessária alta *conectividade*¹⁰ para assegurar que qualquer rede com osciladores de Kuramoto idênticos sincronize completamente para (quase) qualquer condição inicial. Para o caso de redes regulares que consideramos aqui, vimos que é necessário uma conectividade $\gtrsim \mu_c \sim 2R/N = 68\%$ para garantir a sincronização completa (SC). Entretanto, para redes

¹⁰ Em uma rede com N nós, a *conectividade* μ é definida [27] como o menor grau dos nós da rede, dividido por $N - 1$. O grau de um nó é o seu número de conexões.

mais gerais (em que cada nó, por exemplo, pode estar conectado a um número aleatório de nós) a conectividade crítica μ_c deve ser maior e os autores da Ref. [27] conjecturam que qualquer rede (com osciladores de Kuramoto idênticos) atingirá a SC para $\mu_c = 75\%$. Os autores também estabelecem que uma rede esparsa (com baixa conectividade) pode se tornar “globalmente sincronizante” adicionando-se $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ conexões “nos lugares certos” [27].

Por outro lado, dependendo da aplicação, a implementação de uma rede densa (ou seja, com alta conectividade) pode não ser viável do ponto de vista prático e/ou econômico, sendo assim, outras alternativas devem ser conhecidas para garantir a SC da rede em questão. Recentemente, foi descoberto um mecanismo que vai na contramão do que é preconizado pela Ref. [27]: para conduzir uma rede esparsa para a SC, ao invés de adicionar conexões, podemos diminuir o número de conexões, a sincronização “dirigida pela esparsidade” (*sparsity-driven synchronization*) [28].

Por fim, uma característica muito importante de qualquer sistema dinâmico são suas bacias de atração e o conhecimento delas pode ser também um elemento decisivo para o projeto de redes e/ou na elaboração de operações de controle que garantam a sincronização completa. Vimos que no caso do sistema (3) existe uma relação direta entre os autovalores dos estados q -torcidos e os tamanhos (relativos) de suas respectivas bacias de atração [26]. Esse resultado é, de certo modo, surpreendente, pois geralmente não se espera que quantidades locais (como autovalores de estados de equilíbrio) tenham alguma relação direta com características/quantidades globais, como as bacias de atração.

Vimos alguns aspectos da dinâmica da sincronização de osciladores de fase em redes regulares, mas ainda existe muito para se aprender sobre as condições que garantem a sincronização completa (SC), principalmente para o caso de redes complexas. Mesmo no modelo simplificado de Kuramoto, permanecem ainda muitos problemas fascinantes sobre o impacto da topologia da rede na SC [27].

Referências

- [1] R.L. Viana, Rev. Bras. Ens. Fís. **42**, e20200272 (2020).
- [2] S. Strogatz, *Sync: How Order Emerges from Chaos in the Universe, Nature, and Daily Life* (Hachette Book, Paris, 2012).
- [3] L. Zeevi, N.K. Selle, E.L. Kellmann, G. Boiman, Y. Hart e S. Atzil, Sci. Rep. **12**, 4786 (2022).
- [4] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [5] A. Pikovsky, M. Rosenblum e J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [6] J. Pantaleone, Phys. Rev. D **58**, 073002 (1998).
- [7] Z. Néda, E. Ravasz, T. Vicsek, Y. Brechet e A.L. Barabási, Phys. Rev. E **61**, 6987 (2000).
- [8] B.C. Daniels, S.T.M. Dissanayake e B.R. Trees, Phys. Rev. E **67**, 026216 (2003).
- [9] M. Rohden, A. Sorge, M. Timme e D. Witthaut, Phys. Rev. Lett. **109**, 064101 (2012).
- [10] T. Miyano e T. Tsutsui, Phys. Rev. Lett. **98**, 024102 (2007).
- [11] E. Montbrió, D. Pazó e A. Roxin, Phys. Rev. X **5**, 021028 (2015).
- [12] K. O’Keeffe, H. Hong e S. Strogatz, Nat. Commun. **8**, 1504 (2017).
- [13] J. Yick, B. Mukherjee e D. Ghosal, Computer Networks **52**, 2292 (2008).
- [14] R.K. Dokania, X.Y. Wang, S.G. Tallur e A.B. Apsel, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers **58**, 1458 (2011).
- [15] F. Baumann, P. Lorenz-Spreen, I.M. Sokolov e M. Starnini, Phys. Rev. Lett. **124**, 048301 (2020).
- [16] A.S. Reis, I.L. Caldas e R.L. Viana, Rev. Bras. Ens. Fís. **44**, e20210368 (2022).
- [17] P.J. Davis, *Circulant Matrices* (John Wiley & Sons Inc, New York, 1979).
- [18] A. Mihara e R.O. Medrano-T, Nonlinear Dyn. **98**, 539 (2019).
- [19] T. Girnyk, M. Hasler e Y. Maistrenko, Chaos **22**, 013114 (2012).
- [20] D.A. Wiley, S.H. Strogatz e M. Girvan, Chaos **16**, 015103 (2006).
- [21] R. Delabays, M. Tyloo e P. Jacquod, Chaos **27**, 103109 (2017).
- [22] J. Ochab e P.F. Góra, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. **3**, 453 (2010).
- [23] Y. Zhang e S.H. Strogatz, Phys. Rev. Lett. **127**, 194101 (2021).
- [24] N.V. Dang e G. Rivière, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **52**, 1403 (2019).
- [25] Y. Takahashi, em: *Proceedings of the Taniguchi International Symposium on Stochastic Analysis*, editado por K. Itô (Elsevier, Kyoto, 1984), v. 32.
- [26] A. Mihara, M. Zaks, E.E.N. Macau e Rene O. Medrano-T, Phys. Rev. E **105**, L052202 (2022).
- [27] A. Townsend, M. Stillman e S.H. Strogatz, Chaos **30**, 083142 (2020).
- [28] A. Mihara, E.S. Medeiros, A. Zakharova e R.O. Medrano-T, Chaos **32**, 033114 (2022).