

Medidas quânticas: abordagem experimental de medidas POVM em polarização com feixe laser intenso

Quantum measurements: experimental approach of POVM measurements in polarization with an intense laser beam

Arthur Giron Santos^{*1}, Jose Augusto Huguenin¹

¹Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, RJ, Brasil.

Recebido em 14 de outubro de 2022. Revisado em 22 de dezembro de 2022. Aceito em 06 de janeiro de 2023.

O processo de medida na mecânica quântica é um tema de muita discussão que gerou debates profundos ao longo da história. É um tema central no ramo de informação quântica. Neste trabalho, nosso principal objetivo é discutir a realização experimental de *medidas de operador positivo* (POVM) no grau de liberdade de polarização da luz a partir de um circuito apresentado por Ahnert e Payne [1] com o uso de um feixe laser intenso. Assim, o que propomos é simular os resultados de medidas POVM em polarização no regime clássico. Apresentamos detalhes que permitem a abordagem experimental dos circuitos ópticos com um feixe laser intenso usando elementos encontrados em um bom laboratório de óptica. Fazemos uma breve revisão sobre medidas quânticas, introduzindo medidas projetivas e POVM. Aplicamos o conceito de medidas POVM em um exemplo didático simples explorando o aparato de Stern-Gerlach, indicando um bom ponto de partida para introduzir a discussão de POVM em cursos básicos de Mecânica Quântica.

Palavras-chave: Mecânica Quântica, Medidas Quânticas, Medidas POVM, Polarização.

The measurement process in quantum mechanics is an extensively discussed subject that has produced deep debates throughout history. It's a key subject in quantum information theory. In this work, our main goal is to discuss the experimental realization of *positive operator-valued measure* (POVM) measurements in the light's polarization degree of freedom based on a circuit presented by Ahnert e Payne [1] using an intense light beam. By doing so, we propose a simulation of the results of POVM measurements in polarization in the classical regime. We present details that allow the experimental approach of optical circuits with an intense laser beam using elements found in a good optics laboratory. Also, we make a quick review of quantum measurements, where we introduce projective and POVM measurements. We apply the POVM measurements concept in a simple didactic example that explores the Stern-Gerlach apparatus, indicating a good starting point for introducing the discussion on POVM measurements in Quantum Mechanics' basic courses.

Keywords: Quantum Mechanics, Quantum Measurements, POVM measurements, Polarization.

1. Introdução

Ao contrário do que muitos estudantes de Física possam pensar, medidas projetivas ortogonais não são a única forma de se realizar medidas em mecânica quântica [2]. De fato, apenas através do processo de medida é possível extrair informações de sistemas quânticos, mas tal processo pode ser diferente dependendo de quais informações se deseja obter.

Além disso, estudos mostram que é possível introduzir o assunto Medidas Quânticas sem postular a regra de Born ou fazer referência a operadores auto-adjuntos [3, 4]. A regra de Born para medidas projetivas surge naturalmente de um formalismo mais geral, que usa o conceito de POVM. Isso sugere uma abordagem diferente para cursos introdutórios de mecânica quântica, destacando limitações das medidas projetivas, como o fato de elas não levarem em conta erros experimentais [4].

O uso de experimentos com feixes intensos abriu um campo de investigação muito grande. A analogia Clássico-Quântica, onde a coerência óptica faz o papel da coerência quântica para efeitos de interferência [5, 6], tem sido explorada para apresentação de propostas experimentais didáticas de temas de ponta como a criptografia quântica [7] e algoritmos quânticos [8] a nível de graduação. De fato, o uso desta analogia pode habilitar abordagens experimentais em vários temas da teoria quântica. Nesse trabalho, apresentamos mais uma.

O foco deste trabalho é discutir a realização experimental de medidas POVM a partir de um circuito apresentado na Ref.[1] que realiza medidas POVM num qubit de polarização. Mais especificamente, a tarefa do circuito é separar a polarização em 3 eixos que fazem ângulos de 120° entre si. Naturalmente, as medidas projetivas ortogonais não funcionariam nesse caso. Nosso objetivo é identificar elementos ópticos que podem ser usados para implementar tal circuito no laboratório. Além disso, apresentamos uma revisão sobre medidas quânticas em

* Endereço de correspondência: arthurgiron@id.uff.br

geral, destacando algumas diferenças fundamentais entre as medidas projetivas e POVM.

Por fim, este artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 é dedicada a apresentação de conceitos básicos para o desenvolvimento da pesquisa, como o conceito de medidas quânticas e *qubits*; em seguida, na Seção 3, apresentamos um exemplo didático simples do uso de medidas POVM, que pode servir como base para introduzir esse assunto em cursos básicos de Mecânica Quântica; na Seção 4 é explicado, de maneira simples e resumida, o processo de codificação de qubits em graus de liberdade da luz; na sequência, na Seção 5, discutimos um circuito que realiza medidas POVM em polarização, identificamos elementos ópticos úteis para a sua realização experimental e explicamos como os resultados da óptica clássica e quântica se relacionam; finalmente, as considerações finais do trabalho são apresentadas.

2. Fundamentos Teóricos

Nesta seção, apresentamos uma breve revisão do assunto **medidas quânticas** baseada nas Referências [2, 9].

2.1. Medidas quânticas

Na mecânica quântica o estado de um sistema físico é completamente representado por uma única função, chamada função de onda, cuja evolução temporal é descrita de forma determinista pela equação de Schrödinger.

Diferente do caso clássico, antes de ser medido, um sistema quântico pode ser encontrado numa superposição de estados. Durante a medição, ele sofre uma transição de uma superposição quântica para um estado não-superposto, que se dá de maneira indeterminista e, consequentemente, não pode ser descrita pela equação de Schrödinger. Essa transição ficou conhecida como **colapso do pacote de onda** ou **redução de estado** e é descrita pelo postulado da projeção de Von Neumann, que será definido na próxima subseção. A questão de *como* esse colapso ocorre é chamada de **problema geral da medição**.

Assim, existe uma oposição entre o determinismo da equação de Schrödinger e o indeterminismo do processo de medida quântica, que é o centro de um debate profundo sobre a natureza microscópica desde o início da teoria quântica moderna [9].

A seguir, apresentaremos uma definição de medida quântica conforme a Ref. [2]. O tipo mais geral de medição, chamado de **medição generalizada**, é descrito por um conjunto $\{M_m\}$ de operadores de medição M_m , onde o índice m está associado a um dos resultados experimentais possíveis. Para um sistema quântico no estado $|\psi\rangle$ antes da medida, a probabilidade de o resultado m ser medido é

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (1)$$

e o estado do sistema *imediatamente* após a medida será

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m}{\sqrt{p(m)}} |\psi\rangle. \quad (2)$$

Os operadores de medição M_m atuam no espaço de Hilbert do sistema $|\psi\rangle$ a ser medido e são definidos de maneira que

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I, \quad (3)$$

pois a soma das probabilidades $p(m)$ deve ser 1. Perceba que em nenhum momento foi dito que os operadores M_m devem ser observáveis ou hermitianos. De forma geral, a única afirmação que realmente pode ser feita sobre eles é que são **operadores lineares**. Porém, os postulados da Mecânica Quântica nos dizem que grandezas físicas são descritas por observáveis [10]. Na medida de uma grandeza física, os operadores de medição serão, necessariamente, observáveis.

2.2. Medidas projetivas

A seguir, apresentamos o conceito de medidas projetivas com base na Ref. [2]. Uma **medida projetiva** de um estado $|\psi\rangle$ é descrita por um observável O , definido no espaço de estado ε do sistema a ser medido. Pelo teorema da decomposição espectral, podemos decompor O em termos de projetores:

$$O = \sum_m m P_m \quad (4)$$

onde P_m é o operador de projeção no autosubespaço de O com autovalor m . Os únicos valores possível de serem medidos são os autovalores m do observável físico O . Ao realizar uma medida de um sistema no estado $|\psi\rangle$ a probabilidade de se obter o resultado m é

$$p(m) = \langle \psi | P_m | \psi \rangle. \quad (5)$$

Se o resultado da medida for m , então o estado do sistema *imediatamente* após a medida será

$$|\psi'\rangle = \frac{P_m}{\sqrt{p(m)}} |\psi\rangle. \quad (6)$$

Essas definições compõem o chamado **postulado da projeção** [10] e os projetores P_m satisfazem as seguintes condições:

- São operadores hermitianos: $P_m = P_m^\dagger$;
- São operadores positivos: $\langle \psi | P_m | \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle$;
- Formam um conjunto completo: $\sum_m P_m = I$;
- São ortogonais entre si: $P_m P_n = \delta_{mn} P_m$.

As medidas projetivas são muito úteis e apresentam algumas propriedades interessantes. Por exemplo,

elas fornecem uma maneira simples de calcular valor esperado de um observável,

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \sum_m m p(m) \\ &= \sum_m m \langle \psi | P_m | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \left(\sum_m m P_m \right) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | O | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

e o desvio padrão de uma medida,

$$\begin{aligned} \Delta O &= \sqrt{\langle (O - \langle O \rangle)^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Nota-se que as medidas projetivas são, na verdade, um caso particular de medidas generalizadas, considerando operadores de medição $M_m = P_m$. Apesar de ser o tipo mais conhecido de medida, pois geralmente é o único apresentado em cursos introdutórios de mecânica quântica [2], as medidas projetivas não refletem os resultados experimentais, pois não levam em consideração possíveis erros decorrentes de ruídos ou da qualidade do aparelho de medida [11]. Por isso, as medidas projetivas também são chamadas de *medições ideais*.

2.3. Medidas POVM

Geralmente, uma medição nos fornece duas informações: a probabilidade de medirmos um certo valor e o estado do sistema imediatamente após a medida. Em certos casos, nosso principal interesse é conhecer apenas as probabilidades dos resultados, pois o estado do sistema após a medida não é importante. Em experimentos realizados no regime quântico envolvendo fontes luminosas, por exemplo, os fótons são absorvidos pelos detectores no ato da medição, logo não existe um estado pós-medida [12]. Nessas situações, podemos utilizar um recurso chamado **medidas de operador positivo**, ou medidas POVM (do inglês, *positive operator-valued measure*) [2, 11].

Um operador A é dito positivo se $\langle \psi | A | \psi \rangle \geq 0$ para qualquer estado $|\psi\rangle$. Imagine que desejamos realizar uma **medição generalizada** de um sistema quântico num estado $|\psi\rangle$. Essa medida é representada por um conjunto de operadores de medição $\{M_m\}$, onde o índice m se refere a um possível resultado da medida. A probabilidade de medirmos o valor m é dada por

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle. \quad (9)$$

Assim, podemos definir operadores E_m da forma

$$E_m = M_m^\dagger M_m. \quad (10)$$

O conjunto $\{E_m\}$ é chamado POVM e cada operador E_m é um *elemento de POVM*. Esses operadores satisfazem as seguintes condições [11]:

- São operadores hermitianos: $E_m = E_m^\dagger$;
- São operadores positivos: $\langle \psi | E_m | \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle$;
- Formam um conjunto completo: $\sum_m E_m = I$.

Dessa forma, o conjunto $\{E_m\}$ é suficiente para determinar as probabilidades de todos os possíveis resultados de medição da grandeza física em questão. Percebemos que o tamanho do POVM $\{E_m\}$ não é limitado pela dimensão do espaço de Hilbert, pois, diferente dos projetores P_m , os operadores E_m não precisam ser ortogonais entre si. Considere um espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão n . Enquanto um conjunto $\{P_m\}$ de projetores deve ser menor ou igual a n , um POVM $\{E_m\}$ pode ser maior do que n .

Inclusive, quando os operadores de medição são projetores, ou seja, $M_m = P_m$, segue que $E_m = P_m^\dagger P_m = P_m^2 = P_m$. Esse é o único caso no qual os elementos de POVM são iguais aos operadores de medição. Outro fato interessante de ser notado é que qualquer conjunto de operadores $\{E_m\}$ cujos elementos satisfaçam as condições dadas acima é um POVM, sem que os operadores M_m precisem ser definidos. Logo, pode existir mais de um conjunto $\{M_m\}$ associado ao mesmo POVM. Isso pode ser demonstrado através da **decomposição em valores singulares** (do inglês, *singular value decomposition*), definida a seguir [2]: *qualquer matriz quadrada A pode ser decomposta num produto de matrizes da forma*

$$A = VDU, \quad (11)$$

sendo V e U matrizes unitárias e D uma matriz diagonal cujos elementos são chamados de *valores singulares de A* . Podemos, então, escrever os operadores de medição como $M_m = V_m D_m U_m$ e, conseqüentemente, os E_m serão

$$\begin{aligned} E_m &= M_m^\dagger M_m \\ &= U_m^\dagger D_m^\dagger V_m^\dagger V_m D_m U_m \\ &= U_m^\dagger D_m^\dagger D_m U_m \end{aligned} \quad (12)$$

onde usamos $V_m^\dagger V_m = I$. Perceba que os operadores E_m não dependem de V_m , ou seja, mudar V_m altera M_m , mas não E_m . Isto posto, um POVM $\{E_m\}$ pode ser originado por mais de um conjunto $\{M_m\}$. Uma vez obtido o POVM, podemos calcular as probabilidades através da Eq. (9).

2.4. Qubits

Faremos agora uma breve revisão sobre o conceito de bits quânticos (qubits), apresentando suas representações matemática e geométrica, com base na Ref. [2].

Na Computação Clássica, a menor unidade de informação que pode ser armazenada e transportada é

conhecida como *bit*. No ramo da Computação Quântica, foi cunhado um termo similar chamado *qubit*, a menor unidade de informação quântica, que carrega a informação do *estado* de um sistema quântico.

Ao serem medidos, tanto um bit quanto um qubit retornam dois resultados possíveis: 0 ou 1. A principal diferença entre o bit e o qubit é que, antes de ser medido, o primeiro só pode existir nos estados 0 ou 1, enquanto o último pode existir em estados diferentes de 0 e 1, chamados de estados de superposição. Através do fenômeno da superposição de estados é possível realizar uma técnica chamada paralelismo quântico [2], um aspecto que demonstra a superioridade da computação quântica com relação à clássica.

Matematicamente, o estado de um qubit pode ser representado por um vetor $|\psi\rangle$ que pertence a um espaço vetorial complexo bidimensional. Um qubit é qualquer sistema quântico de 2 níveis, ou seja, um espaço com apenas duas dimensões é o suficiente para representá-lo completamente. A base canônica utilizada para representar qubits é composta pelos vetores ortonormais $|0\rangle$ e $|1\rangle$, conhecida como base computacional. Assim, o estado $|\psi\rangle$ de um qubit pode ser representado nessa base por

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (13)$$

onde α e β são números complexos chamados de amplitudes de probabilidade. Sendo assim, $|\alpha|^2$ é a probabilidade de o qubit ser medido no estado $|0\rangle$, enquanto $|\beta|^2$ é a probabilidade de ele ser medido em $|1\rangle$. Logo, a fim de garantir a conservação da probabilidade, esses coeficientes devem satisfazer a relação $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, chamada de condição de normalização. Matricialmente, os vetores da base podem ser escritos como

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

e o estado $|\psi\rangle$, por conseguinte,

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

A condição de normalização nos permite reescrever a equação (13) numa forma diferente:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (16)$$

onde γ , θ e φ são números reais. O fator $e^{i\gamma}$ é uma fase global, portanto não afeta a distribuição de probabilidades do estado $|\psi\rangle$ e, conseqüentemente, pode ser desprezado. Assim,

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (17)$$

Aparentemente, essa forma é mais complicada do que a anterior, mas ela sugere uma representação geométrica para estados de um sistema com um único qubit. Cada

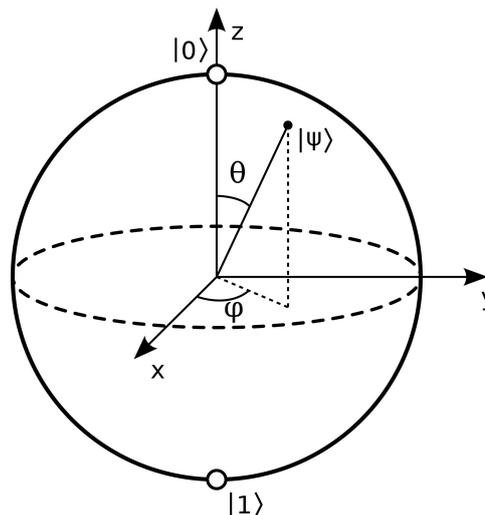


Figura 1: Representação do estado de 1 qubit na esfera de Bloch. Fonte: [13].

estado possível pode ser representado como um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário chamada *esfera de Bloch*, apresentada na Figura 1. Sob essa ótica, $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ são os ângulos polar e azimutal, respectivamente, das coordenadas esféricas. Se $\theta = 0$, o qubit se encontra no estado $|0\rangle$ e se $\theta = \pi$, no estado $|1\rangle$. Caso contrário, o sistema se encontra numa superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Para um sistema com múltiplos qubits, seu estado é dado, da maneira mais geral possível, pelo produto tensorial dos estados de cada qubit que o compõe. No caso mais simples, para um sistema com 2 qubits nos estados

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= \alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

o estado do sistema composto é

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \\ &= (\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) \otimes (\alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 |0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha_1 \beta_2 |0\rangle \otimes |1\rangle \\ &\quad + \beta_1 \alpha_2 |1\rangle \otimes |0\rangle + \beta_2 \beta_2 |1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

onde os produtos dos coeficientes foram renomeados para α_{ij} , com $i, j \in \{0, 1\}$, e devem satisfazer a condição de normalização $\sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2 = 1$. Nota-se que agora existem 4 estados para compor a superposição, pois o produto tensorial nos leva a um espaço de dimensão 2^n , onde n é o número de qubits. Com isso, as possibilidades de estados de superposição são ainda maiores e aumentam exponencialmente com o número de qubits do sistema.

Esperamos que a capacidade de armazenamento de informação aumente na mesma proporção. Porém, acessar essa informação ainda é um problema fundamental na computação quântica e informação quântica [2].

Infelizmente, ainda não existe uma generalização da esfera de Bloch para sistemas de múltiplos qubits em 3 dimensões. Porém, esses sistemas poderiam ser representados por variedades em dimensões maiores do que 3.

Adicionalmente, existem alguns estados de sistemas quânticos que não podem ser escritos como produto tensorial dos estados de seus subsistemas. Esses são conhecidos como *estados emaranhados*. Um sistema de 2 qubits, por exemplo, pode existir no estado

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{20}$$

que é um estado emaranhado chamado *estado de Bell* ou *EPR*.

3. Introdução de Medidas POVM no Curso de Mecânica Quântica da Graduação

A introdução de medidas POVM em cursos básicos de Mecânica Quântica pode trazer novos cenários de discussão dessa importante teoria física.

Medidas quânticas são discutidas, em geral, através do aparato de Stern-Gerlach (S-G), que foi usado para demonstrar a quantização da orientação espacial do momento angular [10]. Após a abordagem clássica do aparato, pode-se introduzir o tema POVM e fazer uma aplicação destes conceitos. Essa aplicação é simples e direta e permitirá ao(à) estudante perceber a base do método antes da aplicação em situações em que o uso de POVM é relevante e mais complexo, no caso o POVM de três elementos apresentado. Trata-se, portanto, de um exemplo didático.

No experimento S-G, mostrado na Figura 2, é estudado o comportamento de um feixe de átomos paramagnéticos (originalmente, átomos de prata) ao passar por um eletroímã. Inicialmente, um forno *F* aquece os átomos até altas temperaturas. Ao sair do forno, eles passam por um colimador *C*, que filtra os átomos que viajam numa direção específica. Esses átomos, então, passam pelo eletroímã *I*, que produz um campo magnético não-homogêneo na direção *z*. Por fim, esse campo magnético divide o feixe de átomos de acordo com a direção do spin. Os átomos atingem uma placa *P* em

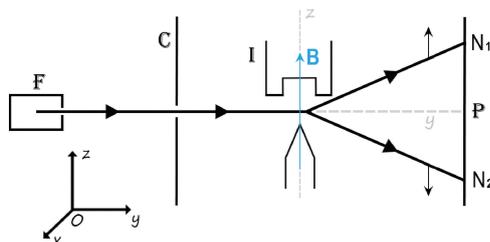


Figura 2: Representação do experimento de Stern-Gerlach. Adaptado de [10].

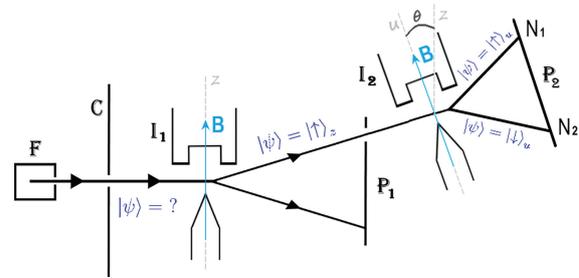


Figura 3: Representação de um sistema composto por 2 aparatos de Stern-Gerlach. É mostrada a evolução do estado quântico $|\psi\rangle$ do spin de um átomo que passa por esse sistema. Adaptado de [10].

torno do ponto N_1 (se tiverem o spin para cima) ou do ponto N_2 (se tiverem o spin para baixo).

Vejam como podemos aplicar as medidas POVM a essa situação. A ideia central das medidas POVM é nos preocuparmos apenas com as probabilidades dos resultados. Porém, quando se fala em prever os resultados de uma medida quântica, precisamos conhecer o estado do sistema imediatamente antes da medida [10]. Para isso, podemos usar 2 aparatos de Stern-Gerlach: um para preparar o sistema (nesse caso, o spin do átomo) no estado “spin para cima”, por exemplo, e o outro para realizar a medida (Figura 3). A diferença é que os átomos, antes de passarem pelo primeiro S-G, possuem spins completamente aleatórios, enquanto aqueles que passam pelo segundo S-G estão todos no mesmo estado.

O spin de um átomo pode ser considerado um sistema de 2 níveis e, portanto, um qubit. Considere α e β as amplitudes de probabilidade de o átomo ser medido com o spin para cima e para baixo, respectivamente. Denotaremos o spin para cima como o estado $|\uparrow\rangle$ e o spin para baixo como $|\downarrow\rangle$.

Imagine que queremos prever os resultados de uma medição do spin numa direção qualquer, dada por um vetor unitário \mathbf{u} (Figura 3). Se o sistema for preparado no estado “spin para cima na direção z ”, denotado por $|\uparrow\rangle_z$, então o estado do sistema antes da medida pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_z = \alpha |\uparrow\rangle_u + \beta |\downarrow\rangle_u. \tag{21}$$

O POVM implementado por um circuito formado por 2 aparatos de Stern-Gerlach é dado por

$$E_{\uparrow} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{\downarrow} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Facilmente verifica-se que esse POVM satisfaz as condições dadas na Subseção 2.3. A probabilidade de um átomo passar pelo eletroímã e a medida resultar em spin para cima, por exemplo, é

$$\langle\psi| E_{\uparrow} |\psi\rangle = [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = |\alpha|^2,$$

analogamente, $\langle\psi| E_{\downarrow} |\psi\rangle = |\beta|^2$. Considerando que o primeiro S-G prepara o estado de spin $|\uparrow\rangle_z$, se o spin

for medido, no segundo S-G, na direção x ou y , as probabilidades serão $|\alpha_x|^2 = |\alpha_y|^2 = 1/2$ e $|\beta_x|^2 = |\beta_y|^2 = 1/2$. Já se a medição for feita na direção z , naturalmente as probabilidades serão $|\alpha_z|^2 = 1$ e $|\beta_z|^2 = 0$.

Note que os projetores E_\uparrow e E_\downarrow formam um POVM de dois elementos. Nesse exemplo didático, parece redundante o uso de POVM, porém, para sistemas mais complexos, a aplicação desse formalismo é justificada.

Na Seção 5, veremos um sistema mais complexo que realiza medidas POVM, dessa vez no grau de liberdade de polarização da luz.

4. Codificação de Qubits em Graus de Liberdade da Luz

Até então, tratamos o qubit apenas como um objeto matemático e abstrato. Uma ótima oportunidade para introduzi-lo como um sistema físico é codificando-o em graus de liberdade da luz, pois as propriedades luminosas são muito exploradas, por exemplo, no ramo da criptografia quântica [11]. Essa realização é perfeitamente possível uma vez que a manipulação desses graus de liberdade através de elementos ópticos é análoga à aplicação de transformações unitárias em qubits.

A seguir, vamos apresentar dois graus de liberdade da luz, sendo eles polarização e caminho, além de explicar como codificar qubits nesses graus de liberdade.

4.1. Polarização

Quando o campo elétrico oscila numa direção específica, dizemos que a luz está polarizada [14]. A forma como ele oscila determina o tipo de polarização. Se o campo não apresenta uma direção preferencial de oscilação, trata-se de luz não-polarizada, ou luz natural. Mais geralmente, o estado de um qubit pode ser expresso como

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (23)$$

com $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. A codificação de um qubit em estados de polarização de um fóton é feita associando-se os estados da base computacional com as polarizações horizontal ($\theta = 0$) e vertical ($\theta = \pi$) da seguinte forma [15]:

$$\begin{aligned} |H\rangle &= |0\rangle \\ |V\rangle &= |1\rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Assim, qualquer estado de polarização pode ser descrito pela relação

$$|\psi_{pol}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|H\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|V\rangle. \quad (25)$$

O principal tipo de polarização é a **polarização linear**, que pode ser obtida considerando uma diferença de fase de $\varphi = n\pi$, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$|\psi_{pol}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|H\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|V\rangle, \quad (26)$$

sendo o sinal $+$ para n par e $-$ para n ímpar. Particularmente, se as amplitudes $\cos(\theta/2)$ e $\sin(\theta/2)$ forem iguais, ou seja, $\tan(\theta/2) = 1$, obtemos os estados

$$|\psi_{pol}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \pm |V\rangle), \quad (27)$$

que podem ser usados para definir a base ortogonal $\pm 45^\circ$:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle). \end{aligned} \quad (28)$$

O estado $|+\rangle$ está associado à polarização $+45^\circ$ e o estado $|-\rangle$, à polarização -45° .

4.2. Direção de propagação

Outro grau de liberdade da luz a ser notado, e talvez o mais fácil de visualizar, é o **grau de liberdade de caminho**, ou **direção de propagação** da luz.

No caso da polarização, a 1ª coisa a ser feita foi encontrar estados a partir dos quais poderíamos, através de combinações lineares, obter todos os outros estados possíveis. Para isso, trabalhamos com a ideia de *horizontal* e *vertical* [16].

No caso da codificação na direção de propagação, não será diferente. Não é difícil imaginar que podemos associar os estados da base computacional às direções *horizontal* e *vertical*, representados aqui pelas letras a e b , respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{horizontal} &\rightarrow |a\rangle = |0\rangle \\ \text{vertical} &\rightarrow |b\rangle = |1\rangle \end{aligned} \quad (29)$$

Visto que se trata de um sistema de 2 níveis, o estado associado à direção de propagação pode ser escrito de maneira mais geral, pela equação (23), como

$$|\psi_{path}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|a\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|b\rangle. \quad (30)$$

Porém, em aplicações práticas, como em circuitos ópticos, não é comum utilizarmos somente o grau de liberdade de caminho. Geralmente, ele aparece acompanhado, por exemplo, da polarização e/ou dos modos transversos. No próximo capítulo, lidaremos com estados do tipo $|\psi\rangle = \alpha|H\rangle \otimes |a\rangle + \beta|V\rangle \otimes |b\rangle$. Lembrando que, quando queremos levar em conta mais de 1 grau de liberdade na análise de sistemas quânticos, acrescentamos matematicamente esses graus aplicando o produto tensorial [10].

5. Medidas POVM em Polarização

Na sequência, apresentamos um circuito óptico que implementa medidas POVM em polarização, seguindo a Ref. [1].

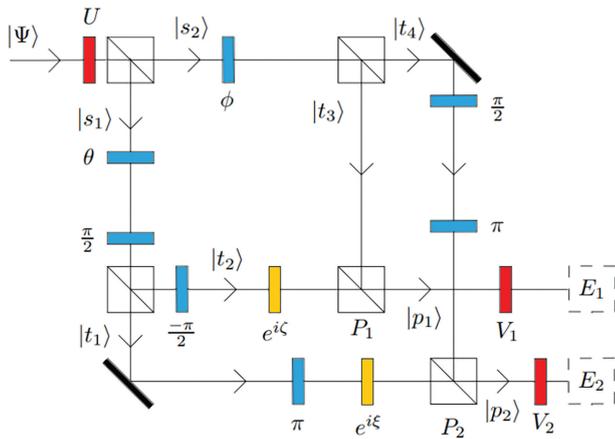


Figura 4: Módulo óptico que implementa medidas POVM em polarização para um POVM de 2 elementos. Adaptado de [1].

Recapitulando a Subseção 2.3, um conjunto de operadores positivos e hermitianos $\{E_m\}$ cujos elementos satisfazem $\sum_m E_m = I$ é chamado de POVM. Adicionalmente, podem existir vários conjuntos $\{M_m\}$ de operadores M_m tais que $E_m = M_m^\dagger M_m$. Se um sistema se encontra inicialmente no estado ρ , a probabilidade de medirmos o valor m de uma certa grandeza é

$$p(m) = \text{tr}(\rho E_m) \tag{31}$$

e o estado do sistema após a medida é

$$\rho' = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(\rho E_m)}. \tag{32}$$

Com isso, estamos prontos para começar a descrição do arranjo experimental da Figura 4. Esse sistema é composto por diferentes componentes ópticos de polarização. São necessários 5 divisores de feixe polarizado, 7 rotadores de polarização (que produzem rotações de $\theta, \phi, \pm\pi/2$ e π), 2 deslocadores de fase ($e^{i\xi}$ e $e^{i\zeta}$) e 3 operações unitárias (U, V_1 e V_2), que servirão para implementar os operadores M_m .

Digamos que o circuito óptico da Figura 4 seja um módulo. A fim de implementar um POVM de n elementos, serão necessários $(n-1)$ módulos. Dessa forma, o circuito da Figura 4 implemente um POVM de 2 elementos. A partir desse módulo, é possível implementar qualquer POVM para medidas de um único qubit de polarização [1]. Essas medidas podem ser projetivas ortogonais, projetivas não-ortogonais ou não-projetivas.

5.1. POVM com 2 elementos

Consideremos o caso mais simples: a implementação de um POVM com 2 elementos. Primeiramente, o feixe é dividido pelo primeiro **divisor de feixe polarizado** (do inglês, *polarized beam splitter* (PBS)). As componente horizontal, no caminho $|s_1\rangle$, e vertical, no caminho $|s_2\rangle$, são rodadas de ângulos arbitrários θ e ϕ , respectivamente. Em seguida, cada feixe é dividido por um outro

PBS, criando um total de quatro feixes, nos caminhos $|t_{1,2,3,4}\rangle$. Por fim, os caminhos $|t_2\rangle$ e $|t_3\rangle$ são unificados no caminho $|p_1\rangle$ pelo PBS P_1 , enquanto os caminhos $|t_1\rangle$ e $|t_4\rangle$ são unificados em $|p_2\rangle$ por P_2 .

Na sequência, vamos descrever a evolução do estado de um qubit, inicialmente num estado de polarização arbitrário, nesse sistema. Para simplificar, considere $U = V_1 = V_2 = I$ e $\zeta = \xi = 0$.

Partindo do estado de polarização

$$|\psi_0\rangle = a|H\rangle + b|V\rangle, \tag{33}$$

com $|a|^2 + |b|^2 = 1$, um feixe atinge o primeiro PBS e passa para o estado

$$|\psi_1\rangle = a|H\rangle|s_1\rangle + b|V\rangle|s_2\rangle. \tag{34}$$

As componentes nos caminhos $|s_1\rangle$ e $|s_2\rangle$ sofrem rotações de θ e ϕ , respectivamente:

$$|\psi_2\rangle = a(\cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle)|s_1\rangle + b(\cos\phi|V\rangle - \sin\phi|H\rangle)|s_2\rangle. \tag{35}$$

Em seguida, a polarização no caminho $|s_1\rangle$ é rodada de $\pi/2$:

$$|\psi_3\rangle = a(\cos\theta|V\rangle - \sin\theta|H\rangle)|s_1\rangle + b(\cos\phi|V\rangle - \sin\phi|H\rangle)|s_2\rangle. \tag{36}$$

Agora, ambos os feixes são divididos por outros dois PBSs:

$$|\psi_4\rangle = a(\cos\theta|V\rangle|t_2\rangle - \sin\theta|H\rangle|t_1\rangle) + b(\cos\phi|V\rangle|t_3\rangle - \sin\phi|H\rangle|t_4\rangle). \tag{37}$$

Feito isso, as polarizações em $|t_1\rangle, |t_2\rangle$ e $|t_4\rangle$ são rodadas de $\pi, -\pi/2$ e $(3/2)\pi$, respectivamente:

$$|\psi_5\rangle = a(\cos\theta|H\rangle|t_2\rangle + \sin\theta|H\rangle|t_1\rangle) + b(\cos\phi|V\rangle|t_3\rangle + \sin\phi|V\rangle|t_4\rangle). \tag{38}$$

Finalmente, os estados nos caminhos $|t_2\rangle$ e $|t_3\rangle$ são combinados por P_1 e os estados $|t_1\rangle$ e $|t_4\rangle$ são combinados por P_2 :

$$|\psi_6\rangle = (a \cos\theta|H\rangle + b \cos\phi|V\rangle)|p_1\rangle + (a \sin\theta|H\rangle + b \sin\phi|V\rangle)|p_2\rangle. \tag{39}$$

Assim, se partíssemos do estado

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle|p_1\rangle + |\psi_0\rangle|p_2\rangle \tag{40}$$

a passagem pelo módulo da Figura 4 equivaleria às transformações

$$D_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \text{ no caminho } |p_1\rangle, \\ D_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\phi \end{bmatrix} \text{ no caminho } |p_2\rangle, \tag{41}$$

sendo válida a relação

$$D_1^2 + D_2^2 = I. \tag{42}$$

Para o caso em que $\zeta, \xi \neq 0$ nos deslocadores de fase,

$$D_1 = \begin{bmatrix} e^{i\zeta} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} e^{i\xi} \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \phi \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Utilizando as transformações unitárias U e V_i , juntamente com as matrizes diagonais D_i , podemos construir os operadores de medição M_i utilizando a técnica de **decomposição em valores singulares**, apresentada na Subsecção 2.3:

$$M_i = V_i D_i U_i. \tag{44}$$

Por conseguinte, os elementos de POVM E_i podem ser escritos como

$$E_i = M_i^\dagger M_i = U_i^\dagger D_i^2 U_i, \tag{45}$$

sendo $D_i^2 = D_i^\dagger V_i^\dagger V_i D_i = D_i^\dagger D_i$. Portanto, um único módulo é capaz de implementar um POVM com 2 elementos, E_1 e E_2 , além de implementar os operadores de medição M_1 e M_2 :

$$E_1 = U_1^\dagger D_1^2 U_1 = U^\dagger D_1^2 U \quad M_1 = V_1 D_1 U$$

$$E_2 = U_2^\dagger D_2^2 U_2 = U^\dagger D_2^2 U \quad M_2 = V_2 D_2 U \tag{46}$$

com $U_1 = U_2 = U$. Perceba que podem existir vários conjuntos diferentes de operadores $\{M_i\}$ associados ao mesmo POVM, pois os elementos E_i não dependem de V_i .

5.2. POVM com 3 elementos

Se quisermos implementar um POVM com 3 elementos, a Figura 5 mostra que basta adicionar outro módulo na segunda saída do primeiro módulo.

A particularidade de cada módulo está nos deslocadores de fase (ζ_I e ξ_I no módulo I e ζ_{II} e ξ_{II} no módulo II) e nos rotadores de polarização de ângulos arbitrários (θ_I e ϕ_I no módulo I e θ_{II} e ϕ_{II} no módulo II). A fim de obter as expressões para os operadores E_i , vamos primeiro construir os operadores M_i .

O módulo I implementa os operadores U_1 e V_1 , além das transformações D_1 e D_2 , que satisfazem $D_1^\dagger D_1 + D_2^\dagger D_2 = I$. Já o módulo II implementa os operadores U_2 , V_2 e V_3 , com as transformações denotadas por D'_1 e D'_2 , sendo $D_1'^\dagger D_1' + D_2'^\dagger D_2' = I$. Seguindo cuidadosamente o sistema da Figura 5 e aplicando os operadores na ordem correta, identificamos os operadores M_i como

$$M_1 = V_1 D_1 U_1$$

$$M_2 = V_2 D'_1 U_2 D_2 U_1$$

$$M_3 = V_3 D'_2 U_2 D_2 U_1. \tag{47}$$

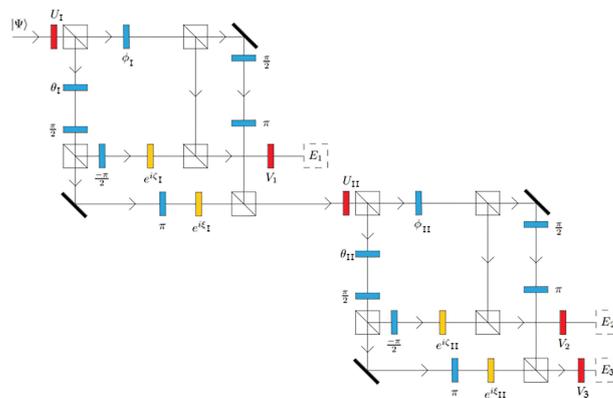


Figura 5: Sistema óptico que implementa medidas POVM em polarização para um POVM de 3 elementos. Adaptado de [1].

Nesse caso, note que o operador $U_2 D_2 U_1 = U$ se repete em M_2 e M_3 . Assim, os elementos de POVM são

$$E_1 = M_1^\dagger M_1 = U_1^\dagger D_1^2 U_1$$

$$E_2 = M_2^\dagger M_2 = U^\dagger D_1^2 U = U_1^\dagger D_2^\dagger U_2^\dagger D_1^2 U_2 D_2 U_1$$

$$E_3 = M_3^\dagger M_3 = U^\dagger D_2^2 U = U_1^\dagger D_2^\dagger U_2^\dagger D_2^2 U_2 D_2 U_1. \tag{48}$$

É interessante notar que poderíamos encontrar E_1 e E_2 e depois encontrar E_3 fazendo, simplesmente, $E_3 = I - E_1 - E_2$. Deixo a cargo do leitor conferir a generalização para a implementação de um POVM com n elementos na Ref. [1].

5.3. Proposta de simulação de medidas POVM em polarização com feixe laser intenso

Vamos discutir um exemplo apresentado na Ref. [1] que ilustra um pouco do que é possível fazer usando medidas POVM. O que propomos fazer, com base na analogia clássico-quântica [6], é a realização dos experimentos da Seção Anterior usando um feixe laser intenso. As probabilidades são relacionadas com as intensidades normalizadas em cada saída do circuito óptico. Então, passaremos a apresentar esse circuito considerando a incidência de um feixe intenso detalhando os ajustes das placas de onda necessários para obtenção do resultado da medida.

Através de um POVM de 3 elementos (Figura 5) podemos realizar medidas projetivas não-ortogonais em 3 eixos que fazem ângulos de 120° entre si. Quais dispositivos ópticos podem ser usados para implementar esse sistema no laboratório? Podemos lançar mão de **placas de meia onda** (do inglês, *half wave plate* (HWP)) para realizar as rotações na polarização. No caso de circuitos ópticos, uma transformação unitária arbitrária pode ser implementada ao combinar uma HWP com duas **placas de quarto de onda** (do inglês, *quarter wave plate* (QWP)) da seguinte forma [17]: QWP · HWP · QWP.

Vejamos agora como essas placas de onda devem ser inseridas no circuito. Primeiramente, as transformações

unitárias U_1 e U_2 devem realizar rotações de 0° e 45° na polarização, respectivamente. Para a transformação U_1 , podemos simplesmente inserir no circuito uma HWP rodada de 0° com relação a horizontal. Já a transformação U_2 é implementada usando-se uma outra HWP, dessa vez num ângulo de $22,5^\circ$. Lembrando que a HWP e a QWP podem ser representadas pelas matrizes

$$\text{HWP}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\text{QWP}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + i \sin^2\theta & (1-i)\cos\theta\sin\theta \\ (1-i)\cos\theta\sin\theta & i \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (50)$$

sendo θ o ângulo entre o eixo rápido e a horizontal. Dessa forma, os operadores U_i serão

$$U_1 = \text{HWP}(0^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$U_2 = \text{HWP}(22,5^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Para os operadores D_1 , D_2 e D'_1 , os ângulos de rotação na polarização devem ser $\theta_I = \arccos(\sqrt{2/3})$, $\theta_{II} = 0$, $\phi_I = \pi/2$, $\phi_{II} = \pi/2$ e não haverá deslocamentos de fase, isto é, $\zeta_I = \zeta_{II} = \xi_I = \xi_{II} = 0$. Logo, esses operadores podem ser implementados usando-se apenas HWPs. As equações (41) fornecem

$$D_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} D'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Conhecer esses operadores já é o suficiente para encontrar os E_i , pois D_2^2 pode ser calculado através da equação (42). Usando as equações (48), calculamos os elementos de POVM

$$E_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$E_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$E_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Por fim, os operadores unitários V_1 , V_2 e V_3 a serem implementados para que tenhamos 3 polarizações separadas por ângulos de 120° nas saídas do circuito são

$$V_1 = I \quad V_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad V_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Visando implementar essas transformações unitárias, conforme dito anteriormente, basta utilizar a seguinte combinação de placas de onda: QWP·HWP·QWP, cujos ângulos precisam ser identificados para cada operador.

Especialmente na saída 1, não é necessário realizar nenhuma operação, visto que V_1 é o operador identidade I . Já nas saídas 2 e 3, as transformações V_2 e V_3 podem ser implementadas como segue

$$V_2 = \text{QWP}(30^\circ) \cdot \text{HWP}(60^\circ) \cdot \text{QWP}(90^\circ) \quad (58)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (3+i)/4 & (1-i)\sqrt{3}/4 \\ (1-i)\sqrt{3}/4 & (3i+1)/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \dots$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_3 = \text{QWP}(-30^\circ) \cdot \text{HWP}(-60^\circ) \cdot \text{QWP}(90^\circ) \quad (59)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (3+i)/4 & (i-1)\sqrt{3}/4 \\ (i-1)\sqrt{3}/4 & (3i+1)/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \dots$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

No caso de experimentos no regime quântico, combinamos todas essas placas de onda, juntamente com os divisores de feixe polarizado e os espelhos, com uma fonte de fótons únicos, no início do circuito, e fotodetectores, nas saídas do circuito. Dessa forma, realizamos medidas quânticas genuínas.

A fim de simular esse experimento no regime clássico, pode-se inserir na entrada do circuito uma fonte luminosa que emita um feixe laser. Ao passar pelo circuito, os feixes de saída podem incidir sobre anteparos e, assim, medimos suas intensidades usando câmeras CCD. Sejam I_1 , I_2 , I_3 as intensidade em cada saída e $I = I_1 + I_2 + I_3$ a intensidade total do feixe. A probabilidade de medirmos um estado $|i\rangle$ na saída i é dada pela intensidade relativa:

$$P_{|i\rangle} = \frac{I_i}{I}, \quad (60)$$

A simulação com feixes intensos nos dá a mesma probabilidade quântica através das intensidades clássicas normalizadas [5, 6]. Assim, as únicas diferenças entre os experimentos clássicos e quânticos são a fonte luminosa e os detectores. Isso pode ser explorado para abordagens experimentais em cursos de Mecânica Quântica.

6. Considerações Finais

Um dos principais objetivos deste artigo foi discutir a realização experimental de medidas POVM em polarização usando um feixe laser intenso. Os circuitos ópticos apresentados na Seção 5 podem ser utilizados para realizar medidas tanto no regime clássico quanto no quântico, sendo a única diferença entre os dois casos

a fonte luminosa e o sistema de detecção. No caso clássico, trabalhamos com feixes intensos e dispositivos que medem suas intensidades, como a câmera CCD. Já no caso quântico, precisamos de fontes de fótons únicos e aparelhos apropriados para detectá-los. Visto que trabalhar no regime clássico é mais fácil, pela dificuldade de se produzir fótons únicos, e que podemos associar as intensidades dos feixes com as probabilidades dos estados quânticos, é perfeitamente possível simular medidas quânticas com experimentos de óptica linear.

Além disso, outra meta deste trabalho era realizar uma revisão sobre medidas quânticas em geral, comentando algumas diferenças fundamentais entre as medidas projetivas e POVM. As medidas projetivas, apesar de mais simples de se trabalhar e de ser o tipo de medida mais conhecido, são medições ideais, portanto não refletem os resultados experimentais geralmente. Já as medidas POVM são muito mais abrangentes e visam apenas obter as probabilidades dos resultados. Podemos definir POVMs para efetuar vários tipos de medidas, como medidas projetivas ortogonais, não-ortogonais e até não-projetivas, que podem ser implementadas pelos sistemas vistos na Seção 5. Inclusive, um mesmo POVM pode aparecer em diferentes problemas físicos, pois é possível alterar os operadores de medição sem mudar o POVM.

A fim de dar continuidade a essa pesquisa, poderíamos buscar uma maneira de implementar medidas POVM em modos transversos, uma vez que abordamos aqui apenas medidas POVM em polarização. A partir da revisão sobre medidas quânticas apresentada neste trabalho, pode-se estudar outros tipos de medida, como as medidas quânticas de não-demolição (do inglês, *quantum non-demolition measurements*).

Referências

- [1] S.E. Ahnert e M.C. Payne, *APS* **71**, e012330 (2005).
- [2] M.A. Nielsen e I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010), 10 ed.
- [3] M.G.A. Paris, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **203**, 61 (2012).
- [4] A. Neumaier, arXiv:1912.09906 (2019).
- [5] C.V.S. Borges, M. Hor-Meyll, J.A.O. Huguenin e A.Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **82**, e033833 (2010).
- [6] L.J. Pereira, A.Z. Khoury e K. Dechoum, *Phys. Rev. A* **90**, e053842 (2014).
- [7] A.L.P. Camargo, L.O. Pereira, W.F. Balthazar e J.A.O. Huguenin, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **39**, e2305 (2017).
- [8] P.H. Grosman, D.G. Braga e J.A.O. Huguenin, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **41**, e20180201 (2019).
- [9] O. Pessoa Jr., *Caderno de História e Filosofia da Ciência* **2**, 177 (1992).
- [10] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe, *Quantum Mechanics* (Wiley, Hoboken, 1991), v. 1.
- [11] S. Barnett, *Quantum Information* (OUP Oxford, Oxford, 2009).
- [12] W.M. Pimenta, *Caracterização e evolução de estados quânticos fotônicos e atômicos de muitos níveis*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte (2014).
- [13] WIKIPEDIA, *Bloch sphere, a geometrical representation of a two-level quantum system*, disponível em: commons.wikimedia.org/wiki/File:Blloch_sphere.svg, acessado em 20/12/2022.
- [14] E. Hecht, *Optics* (Pearson Education, London, 2016).
- [15] D.G. Braga, *Estudo de discórdia em modos spin-órbita da luz*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda (2021).
- [16] M.H.M. Passos, *Modos spin-órbita como recurso em processos de Informação Quântica*. Tese de Doutorado, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda (2020).
- [17] S.G. Reddy, S. Prabhakar, A. Aadhi, A. Kumar, M. Shah, R.P. Singh e R. Simon, *OSA* **31**, 610 (2014).