Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2701 (2009)
www.sbfisica.org.br

Notas e Discussões

O cálculo de alta precisão do período do pêndulo simples

(The high-precision computation of the period of the simple pendulum)

Claudio G. Carvalhaes[1,2] e Patrick Suppes[1]

[1] *Center for the Study of Language and Information, Ventura Hall, Stanford University, Stanford, CA, USA*
[2] *Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*
Recebido em 31/10/2008; Aceito em 30/12/2008; Publicado em 26/6/2009

Apresentamos o método iterativo da média aritmética-geométrica no cálculo preciso do período temporal do pêndulo simples e o comparamos com o método da série de potências. Aproximações analíticas para o período são obtidas pelos dois métodos e comparadas em termos de suas precisões numéricas. Os resultados são amplamente favoráveis à média aritmética-geométrica em virtude de sua rápida convergência.
Palavras-chave: pêndulo simples, integral elíptica, média aritmética-geométrica, renormalização.

We present the iterative method of using the arithmetic-geometric mean in the computation of the time period of the simple pendulum and compare it with the power-series method. Analytical approximations are derived by both methods and compared in terms of their numerical precision. The results are strongly favorable to the arithmetic-geometric mean due to its fast convergence.
Keywords: simple pendulum, elliptic integral, arithmetic-geometric mean, renormalization.

1. Introdução

Os livros-texto introdutórios [1] apresentam a seguinte fórmula aproximada para o período temporal do pêndulo circular simples, conhecida como *aproximação harmônica*

$$T_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{1}$$

Aqui, L representa o comprimento do pêndulo e g a aceleração local da gravidade. Esta aproximação foi descoberta pelo inventor do relógio de pêndulo, Christiaan Huygens, e publicada [2] em um célebre tratado, em 1673. Nos textos modernos, a aproximação harmônica é obtida linearizando-se a equação de movimento do pêndulo por meio de

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta, \tag{2}$$

onde θ denota a posição angular do pêndulo em relação ao equilíbrio. Essa linearização leva à equação do oscilador harmônico, de onde a aproximação (1) é facilmente identificada e por esse motivo chamada de aproximação harmônica.

A aproximação harmônica tem dois problemas básicos que a tornam de pouca utilidade fora do laboratório didático. O primeiro é fato dela produzir resultados numéricos bastante imprecisos se a amplitude de oscilação estiver fora do chamado regime de pequenas oscilações. Esse regime não é definido com clareza na literatura, mas é comum tomá-lo como sendo o maior intervalo de amplitudes dentro do qual o período da aproximação harmônica difere em menos de 1% do valor exato. Isto corresponde a uma amplitude máxima de cerca de 23°, valor não muito pequeno para um pêndulo de corda. No entanto, a amplitude máxima cai para menos de 0,5° se o comprimento do pêndulo for maior ou igual a 25 cm e for exigida uma concordância com o período exato de apenas 3 casas decimais. O segundo problema é que a aproximação harmônica descreve o pêndulo como um sistema cujo período não depende da amplitude de oscilação. Esse comportamento uniforme, chamado de *isocronismo*, contrasta com o do pêndulo real, chamado de *anisocronismo*, para o qual o período cresce monotonicamente com a amplitude.

Apesar dos problemas, a aproximação harmônica é largamente usada nos cursos introdutórios pela necessidade de se contornar dificuldades matemáticas. Embora seja possível obter uma expressão analítica exata para o período do pêndulo simples usando apenas a conservação da energia mecânica, essa expressão envolve uma função não elementar do Cálculo, a *integral elíptica completa do primeiro tipo*, que na prática requer algum tipo de aproximação para ser avaliada.

Mas há várias alternativas à aproximação harmônica disponíveis na literatura [3-10]. Essas derivam de

[1] E-mail: claudioc@stanford.edu.

abordagens que variam de procedimentos geométricos simples ao uso de séries e funções especiais. As aproximações mais precisas, no entanto, só foram apresentadas recentemente [11], empregando-se um método iterativo para o cálculo da integral elíptica, chamado *método da média aritmética-geométrica*. Esse método é tão eficiente que apenas três iterações são suficientes para gerar uma aproximação para o período que difere em menos de 1% do valor exato para amplitudes de até 179°. As iterações consistem simplesmente em determinar as médias aritmética e geométrica de um par de números positivos.

A média aritmética-geométrica [14, 15] é conhecida na matemática há mais de dois séculos mas, curiosamente, seu emprego na geração de aproximações analíticas, como as descritas aqui, não é comum. Na verdade, a média aritmética-geométrica foi descoberta por Lagrange [12], não se sabe ao certo quando, e publicada na literatura em 1785. Gauss a redescobriu independentemente em 1791, quando tinha apenas 14 anos de idade [13]. Os matemáticos Legendre, Landen e Ramanujan também tiveram participação importante nesse desenvolvimento.

A média aritmética-geométrica surgiu da busca por um método para o cálculo preciso do perímetro da elipse. O foco principal era a determinação precisa da órbita elíptica dos planetas. Atualmente, ela é uma importante ferramenta computacional de alta precisão. Suas aplicações incluem o cálculo de funções elementares, tais como logaritmo, exponencial e funções trigonométricas, o cálculo das integrais elípticas completas do primeiro e do segundo tipo, o cálculo das funções hipergeométricas e o problema histórico da determinação do número π com número arbitrário de casas [14-19].

Neste trabalho, nós empregamos a média aritmética-geométrica no cálculo do período do pêndulo simples e comparamos os resultados obtidos com os do método das séries de potências. As aproximações analíticas obtidas em [11] são novamente apresentadas. Um ponto interessante no uso da média aritmética-geométrica é que ela leva a um processo recursivo, no qual o pêndulo é seguidamente substituido por outro de igual período mas de menor amplitude. Com a amplitude diminuindo a cada iteração, o cálculo do período se torna cada vez mais preciso e converge rapidamente para o valor exato. Esse processo pode ser explorado, por exemplo, na abordagem da idéia de renormalização em cursos elementares.

2. O período exato do pêndulo simples

A fórmula exata do período do pêndulo simples pode ser obtida em poucos passos a partir da conservação da energia. Seja θ o deslocamento angular, medido no sentido anti-horário em relação à posição de equilíbrio, L o comprimento do pêndulo e g a aceleração da gravidade. Tomando o zero da energia potencial no ponto mais baixo da trajetória e a velocidade inicial como sendo nula, a energia total vale $E = m\,g\,L(1-\cos\,\theta_0)$, onde θ_0 representa o deslocamento angular inicial. A velocidade num instante qualquer é dada por $v = L\,d\theta/dt$. Então, resolvendo-se a equação da conservação da energia para $d\theta/dt$ e integrando t de 0 a $T/4$, onde T é o período de oscilação, obtém-se a expressão [10, 11, 20]

$$T = \frac{2}{\pi}\,T_0 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\phi}}\,, \tag{3}$$

onde $k = \text{sen}(\theta_0/2)$ e $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ é o período da aproximação harmônica. Nesta expressão, a integral

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\phi}}, \qquad |k|<1 \tag{4}$$

é chamada *integral elíptica completa do primeiro tipo*. Para pequenas amplitudes de oscilação (θ_0 pequeno), o parâmetro k se aproxima de zero e K tende ao valor $\pi/2$ [21, 22]. Nesse limite a Eq. (3) toma a forma da aproximação harmônica. Isto significa que o esquema de linearização (2) equivale a aproximar a curva $K(k)$ pela reta horizontal $\pi/2$. Como $K(k)$ é uma função monotonicamente crescente que diverge exponencialmente no limite $|k| = 1$ (ou seja, $|\theta_0| = \pi$), a distância entre o período exato T e a aproximação T_0 aumenta rapidamente com a amplitude, tornando T_0 imprecisa, mesmo para pequenas amplitudes.

3. A média artmética-geométrica

Dados dois números reais a e b, com $0 < b \leq a$, seja a relação de recursão [15]

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \tag{5a}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \tag{5b}$$

$$b_n = \sqrt{a_{n-1}\,b_{n-1}}. \tag{5c}$$

As sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ definidas por esta relação têm o mesmo limite e esse limite depende unicamente de $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Esse limite, denotado por $M(a,b)$, corresponde à *média aritmética-geométrica* de a e b

$$M(a,b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n\,. \tag{6}$$

Essa propriedade de convergência segue da desigualdade $b \leq a$, que leva a

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \tag{7}$$

e

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{(a_n-b_n)^2}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})^2}, \tag{8}$$

cujas provas são deixadas como exercício. A Eq. (7) implica que a_{n+1} e b_{n+1} se tornam mais próximos a cada iteração e com isso, de acordo com a Eq. (8), a distância entre a_n e b_n cai *quadraticamente* a cada iteração. Ou seja, as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergem quadraticamente para o mesmo limite. O fato da convergência ser quadrática implica, grosseiramente, que o número de casas decimais de concordância entre a_n e b_n dobra a cada iteração. Essa rápida convergência permite que a média aritmética-geométrica de a e b possa ser determinada com extrema precisão em poucas iterações. Em geral, o cálculo computacional é feito introduzindo-se a variável auxiliar

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \tag{9}$$

e iterando (5) até que se obtenha $c_n = 0$ com o grau de precisão que se queira.

A conexão entre a integral elíptica $K(k)$ e a média aritmética-geométrica pode ser demonstrada introduzindo-se [15]

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\mathrm{sen}^2\phi}}, \quad a, b > 0. \tag{10}$$

É fácil verificar que $K(k) = I(1, \sqrt{1-k^2})$ e que a integral (10) é facilmente resolvida se existir um número a' tal que a transformação $(a,b) \to (a',a')$ leva a $I(a,b) = I(a',a')$. Tal transformação, que resulta em $I = \pi/2a'$, de fato existe e corresponde à média aritmética-geométrica de a e b. De fato, substituindo $t = b\tan\theta$ na Eq. (10),

$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}. \tag{11}$$

Fazendo $u = (t - ab/t)/2$,

$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{a\,b}\right) = I(a_1,b_1). \tag{12}$$

Portanto, $I(a,b)$ é invariante sob a transformação $(a,b) \to (a_1,b_1)$. Repetidas aplicações dessa propriedade levam a

$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = I(a_2,b_2) = \cdots = I(a_n,b_n). \tag{13}$$

Tomando o limite $n \to \infty$ e usando o fato de I ser continua, obtemos

$$\begin{gathered} I(a,b) = \lim_{n\to\infty} I(a_n,b_n) = \\ I(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n) = \\ I(M(a,b), M(a,b)) = \frac{\pi}{2\,M(a,b)}. \end{gathered} \tag{14}$$

Deste resultado segue a solução da integral elíptica em termos da média aritmética-geométrica

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,M(1, \sqrt{1-k^2})}. \tag{15}$$

O período exato do pêndulo simples é então dado por

$$T = T_0\,\frac{1}{M(1, \cos\theta_0/2)}\,. \tag{16}$$

Devido à convergência quadrática da média aritmética-geométrica, essa fórmula permite o cálculo eficiente e preciso do período do pêndulo para valores arbitrários da amplitude inicial. Como a determinação de $M(1,\cos\theta_0/2)$ envolve apenas uma sequência de médias aritméticas e geométricas, essa fórmula pode ser facilmente implementada em uma calculadora ou planilha eletrônica, sendo a precisão do cálculo restrita apenas ao número de casas decimais disponíveis.

Iterando $M(1,\cos\theta_0/2)$ analiticamente, obtemos da Eq. (16) uma sequência de aproximações para T que converge rapidamente para solução exata. Os quatro primeiros elementos dessa sequência são

$$T_1 = \frac{2T_0}{1+q}, \tag{17a}$$

$$T_2 = \frac{4T_0}{1+q+2q^{1/2}}, \tag{17b}$$

$$T_3 = \frac{8T_0}{1+q+2q^{1/2}+2^{3/2}q^{1/4}(1+q)^{1/2}}, \tag{17c}$$

$$T_4 = \frac{16T_0}{1+q+2q^{1/2}+2^{3/2}q^{1/4}(1+q)^{1/2}+2^{7/4}q^{1/8}(1+q)^{1/4}(1+q+2q^{1/2})^{1/2}}. \tag{17d}$$

onde $q = \cos\theta_0/2$. Cada iteração fornece uma aproximação mais precisa, porém mais complexa, que a anterior. No limite de oscilação de um pêndulo de haste rígida, $|\theta_0| = 180°$, obtemos $q = 0$, de forma que T/T_0 se reduz à sequência numérica $\{2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n, \cdots\}$, mostrando claramente que T diverge exponencialmente nesse limite. Em um trabalho recente [11], nós mostramos que T_3 difere em menos de 1% do período exato para amplitudes inferiores a 179,37° e é mais precisa que todas as outras aproximações na literatura. A aproximação T_4 amplia essa concordância para a amplitude máxima de 179,99°. Continuando a sequência, obtém-se aproximações cada vez mais precisas, porém pouco apropriadas para o tratamento analítico.

4. Comparação com o método de série de potências

O método da série de potências é uma das formas padrões de se avaliar a Eq. (3) com precisão. O resultado da expansão de T em torno de $k = 0$ é uma série convergente para $|k| < 1$, dada por [14]

$$T = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots \right]. \tag{18}$$

A ordem zero desta expansão corresponde a aproximação harmônica $T \approx T_0$. Os termos seguintes representam correções que melhoram gradativamente essa aproximação. A expansão em segunda ordem, que é obtida somando-se até o termo em k^2, seguida de $k \approx \theta_0/2$, leva à fórmula $T \approx T_0(1 + \theta_0^2/8)$, que foi descoberta por Bernoulli em 1749 [3]. A aproximação com correção de quarta ordem, que contém todos os termos até k^4, é mais precisa que a de segunda ordem, e assim por diante.

O erro na estimativa de T através da Eq. (16) ou da Eq. (18) depende da amplitude de oscilação. Quanto maior a amplitude, maior o número de iterações em (16) e de termos na Eq. (18) para se obter um resultado preciso. O problema é que um número grande de iterações/termos inviabiliza a aplicação do método no estudo analítico. Em outras palavras, a aplicabilidade das Eqs. (16) e (18) está fortemente condicionada à rapidez de convergência de cada método.

Para comparar essa aplicabilidade em cálculos de alta precisão, vamos usar como critério a unidade de precisão do computador, que é chamada de *machine epsilon*. Essa unidade, denotada por ϵ, é definida como sendo o menor número positivo x que somado a 1 no computador retorna um valor maior que 1, quando x e 1 são armazenados em registros do mesmo tipo. Ou seja,

$$1 + x > 1, \text{ se e somente se, } x \geq \epsilon. \tag{19}$$

A computação apresentada a seguir foi processada usando registros de ponto flutuante de 64 bits, para os quais o valor padrão de ϵ é 2^{-52} [23].

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos. Não mais do que 6 iterações são suficientes para se obter T pela média aritmética-geométrica (16) para amplitudes de até 179°. Por outro lado, a convergência do método das séries de potências é extremamente lenta, de forma que, mesmo para ângulos relativamente pequenos, um número grande de termos precisa ser considerado para garantir um resultado acurado. Esse desempenho pode ser melhorado ajustando-se a origem da expansão de acordo com o valor do ângulo inicial θ_0. Mas esse procedimento não é conveniente por causa das dificuldades matemáticas que surgem da introdução de um parâmetro livre, no caso a origem da expansão.

Tabela 1 - Número mínimo de termos/iterações para a convergência dos métodos da série de potências (SP) e da média aritmética-geométrica (MAG) para diferentes amplitudes θ_0. No caso da série de potências, o número de termos é tal que o termo seguinte da expansão representa uma correção inferior a $\epsilon = 2^{-52}$. Para a média aritmética-geométrica, o número mínimo de iterações é o menor n para o qual $c_n < \epsilon$. Os cálculos foram feitos tomando T_0 igual a 1.

θ_0	SP	MAG	θ_0	SP	MAG
10°	8	3	100°	59	4
20°	11	3	110°	78	4
30°	13	3	120°	107	4
40°	16	3	130°	153	5
50°	20	4	140°	238	5
60°	24	4	150°	418	5
70°	30	4	160°	919	5
80°	37	4	170°	3.508	5
90°	46	4	179°	292.970	6

Um cálculo mais refinado, com a amplitude variando em passos de 0,01°, mostra que a aproximação T_1 na Eq. (17) computa T com precisão de *machine epsilon* no intervalo $|\theta_0| \leq$ 0,04°. Esse resultado pouco expressivo requer a soma de 4 termos na expansão (18). Para a aproximação T_2, a amplitude máxima é de 4,57°, o que equivale à expansão em série com 7 termos. Embora essa amplitude máxima seja pequena, o resultado é muito superior ao que se obtém com qualquer outra aproximação publicada na literatura. A aproximação seguinte, T_3, tem amplitude máxima de 45,39° e se compara à expansão em série com 18 termos. A amplitude máxima de T_4 é de 126,17° e corresponde à expansão com 132 termos. As aproximações T_5 e T_6, que continuam a sequência (17) e que não foram listadas, possuem domínios bem mais extensos mas requerem um pacote de computação algébrica para serem manipuladas. Suas amplitudes máximas são de 173,99° e 179,93°, respectivamente. São necessários 9.360 termos na expansão em série para reproduzir o resultado de T_5 e 46.226.874 termos para o resultado de T_6.

4.1. Renormalizando a amplitude do pêndulo

Pode-se verificar que os elementos da sequência (17) estão relacionados pela equação

$$T_{n+1}(q, T_0) = T_n(q', T_0'), \tag{20}$$

onde

$$q' = 2\frac{\sqrt{q}}{1+q}, \tag{21a}$$

$$T_0' = 2\, T_0 \frac{1}{1+q}. \tag{21b}$$

Isto quer dizer, por exemplo, que, para uma dada amplitude θ_0, T_3 e T_4 fornecem o mesmo resultado se T_3 for calculado da Eq. (17c) substituindo q por $q' = 2\sqrt{q}/(1+q)$ e T_0 por $T_0' = 2T_0/(1+q)$. Isto ocorre porque q' corresponde a uma amplitude efetiva θ_0' que é menor que θ_0 e T_0' a um comprimento efetivo L' maior que L. Essa correspondência é tal que compensa a menor precisão de T_3 em relação T_4. Para demonstrar esse ponto, observe da Eq. (21) que

$$q' > q, \tag{22a}$$
$$T_0' > T_0. \tag{22b}$$

Sejam a amplitude θ_0' e o comprimento L' tais que

$$q' = \cos\theta_0'/2, \tag{23a}$$
$$T_0' = 2\pi\sqrt{L'/g}. \tag{23b}$$

Então, segue da Eq. (22) que

$$\theta_0' < \theta_0, \tag{24a}$$
$$L' > L. \tag{24b}$$

Ou seja, a transformação $(q, T_0) \to (q', T_0')$ na Eq. (20) diminui a amplitude e aumenta o comprimento de forma a preservar o período do pêndulo. Sucessivas aplicações dessa propriedade permitem que o resultado da fórmula T_n seja obtido de T_1 processando-se $n-1$ transformações do tipo $(q, T_0) \to (q', T_0')$. Esse esquema alternativo para o cálculo de T não representa ganho no aspecto computacional. Contudo, ele pode ser interpretado como um exemplo simples de *técnica de renormalização*. Neste caso, a amplitude e o comprimento do pêndulo são transformados de forma que o período possa ser descrito por uma expressão simples com precisão.

5. Conclusão

Discutimos o método da média aritmética-geométrica na determinação do período do pêndulo simples e o comparamos com o popular método da série de potências. Os resultados foram amplamente favoráveis à média aritmética-geométrica. O método da série de potências converge lentamente, de forma que, mesmo no caso de pequenas amplitudes, é necessário um número grande de termos para se estimar o período com precisão. Por outro lado, devido à sua rápida convergência, a média aritmética-geométrica fornece aproximações analíticas simples e extremamente precisas para amplitudes arbitrárias. Mostramos também que o algoritmo da média aritmética-geométrica pode ser interpretado com um exemplo simples de técnica de renormalização. Essa propriedade se deve, exclusivamente, à relação entre a média aritmética-geométrica e a integral elíptica e, portanto, pode ser explorada em problemas de outras naturezas, como, por exemplo, no eletromagnetismo clássico [24]. O cálculo da média aritmética-geométrica é recursivo e envolve apenas operações matemáticas elementares, de forma que pode ser facilmente implementado em planilhas eletrônicas e explorado como ferramenta tecnológica no ensino de física [25, 26, 27].

Referências

[1] D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, *Fundamentos de Física* (Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2001), 6ª ed.

[2] C. Huygens, *Horologium Oscillatorium sive De Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometric* (Paris, 1673), traduzido para o inglês por R.J. Blackwell como *The Pendulum Clock, or Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks.* (Iowa State Univ. Press, Ames, 1986).

[3] D.S. Mathur, *Elements of Properties of Matter*, (S. Chand and Company, New Delhi, 1962).

[4] W.P. Ganley, American Journal of Physics **53**, 73 (1985).

[5] L.H. Cadwell and E.R. Boyko, American Journal of Physics **59**, 979 (1991).

[6] M.I. Molina, The Physics Teacher **35**, 489 (1997).

[7] R.B. Kidd and S.L. Fogg, The Physics Teacher **40**, 81 (2002).

[8] G.E. Hite, The Physics Teacher **43**, 290 (2005).

[9] A. Beléndez, T. Hernández, A. Beléndez, and C. Neipp, European Journal of Physics, **27**, 539 (2006).

[10] F.M.S. Lima and P. Arun, American Journal of Physics **74**, 892 (2006).

[11] C.G. Carvalhaes and P. Suppes, American Journal of Physics **76**, 1150 (2008).

[12] G. Almkvist and B. Berndt, The American Mathematical Monthly **95**, 585 (1988).

[13] K.F. Gauss, Werke **3**, 361 (1799) (K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig-Berlin, 1866).

[14] M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover Publications, Mineola, 1974).

[15] E.W. Weisstein, *Arithmetic-Geometric Mean*, available in `http://mathworld.wolfram.com/Arithmetic-GeometricMean.html`

[16] E. Salamin, Mathematics of Computation **30**, 565 (1976).

[17] J.M. Borwein and P.B. Borwein, SIAM Review **26**, 351 (1984).

[18] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity, CMS Monographs and Advanced books in Mathematics* (John Wiley, Hoboken, 1987).

[19] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions* (Cambridge University Press, New York, 1999).

[20] A. Beléndez, C. Pascual, D.I. Méndez, T. Beléndez and C. Neipp, Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 645 (2007).

[21] P. Amore, M. Cervantes Valdovinos, G. Ornelas and S. Zamudio Barajas, Revista Mexicana de Física E **53**, 106 (2007).

[22] F.M.S. Lima, European Journal of Physics **29**, 1091 (2008).

[23] Intitute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., *IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic (An American National Standard)* (IEEE, New York, 1985).

[24] R.H. Good, European Journal of Physics **22**, 119 (2001).

[25] B.A. Cooke, Physics Education **32**, 80 (1997).

[26] J.E. Baker and S.J. Sugden, Spreadsheets in Education **1**, 18 (2003).

[27] M. Fowler, Science & Education **13**, 791 (2004).