



Cálculos de momentos de inércia utilizando sensor de rotação e filmagens com aparelho celular

Obtaining moments of inertia using rotation sensor and filming with cellphone

Dagmar Faísas da Paixão¹, Luiza Ferreira Gonçalves¹, André Luíz Alves^{*1} 

¹Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, ES, Brasil.

Recebido em 11 de junho de 2024. Revisado em 19 de julho de 2024. Aceito em 21 de agosto de 2024.

Neste trabalho determinou-se o momento de inércia de uma haste retangular fina e um cilindro oco a partir de diferentes métodos. No primeiro método utilizou-se as dimensões dos objetos para inseri-los em equações teóricas e assim calcular os momentos de inércia. No segundo método utilizou-se as leis da dinâmica de rotação e translação, juntamente com conceitos de energia, para se obter equações que envolvem parâmetros físicos mensuráveis, permitindo de forma indireta o cálculo do momento de inércia. Neste caso foram realizados três experimentos distintos. No primeiro experimento utilizou-se um sensor de rotação e nos demais filmagens com aparelho celular. Todas as medidas indiretas resultaram em valores muito próximos e com diferenças percentuais $\approx 10\%$ relativa ao valor calculado a partir das dimensões dos objetos.

Palavras-chave: Momento de inércia, dinâmica de rotação, ensino de Física, instrumentação.

The moment of inertia of a thin rectangular rod and a hollow cylinder was determined using different methods. The first method used the dimensions of the objects to insert them into theoretical equations and thus calculate the moments of inertia. The second method used the laws of rotation and translation dynamics together with energy concepts to obtain equations involving measurable physical parameters, allowing the moment of inertia to be calculated indirectly. In this case, three different experiments were carried out. The first experiment used a rotation sensor and the others used filming with a mobile phone. All indirect measurements resulted in very close values and with percentage differences $\approx 10\%$ relative to the value calculated from the dimensions of the objects.

Keywords: Moment of inertia, rotation dynamics, physics teaching, instrumentation.

1. Introdução

A grandeza física que mede a facilidade ou a dificuldade de colocar um objeto para girar em torno de um eixo denomina-se momento de inércia I . Ele está associado com a distribuição de massa relativa ao eixo no qual o mesmo é posto para girar [1]. Esta grandeza está atrelada a diversos fenômenos físicos como a energia cinética do movimento de rotação, ao balanceamento de rodas em veículos, ao eixo de rotação da Terra, ao posicionamento direcional de satélites, ao giro de atletas e bailarinas, dentre outros.

É de suma importância que o aluno possa aperfeiçoar seu aprendizado relativo ao movimento de rotação utilizando-se de práticas experimentais. Com a experimentação no ensino de Física o estudante observa práticas que podem refletir situações do cotidiano. Portanto, a experimentação torna-se um coadjuvante no processo de aprendizado da Física. De acordo com Araújo e Abib [2]: a análise do papel das atividades experimentais desenvolvidas amplamente, nas últimas décadas, revela que há uma variedade significativa de possibilidades e tendências de uso dessa estratégia de ensino de Física,

de modo que essas atividades podem ser concebidas desde situações que focalizam a mera verificação de leis e teorias, até situações que privilegiam as condições para os alunos refletirem e reverem suas ideias a respeito dos fenômenos e conceitos abordados. Mion e Angotti [3] citam que: “o uso de sistemas físicos reais como recurso didático de caráter teórico-experimental, potencializa o diálogo em sala de aula, aproxima o estudante da realidade que o cerca e tem a função pedagógica de propiciar uma melhor compreensão de teorias físicas”.

Neste trabalho utilizam-se quatro propostas experimentais para a determinação do momento de inércia de corpos rígidos que giram em torno de um eixo que passa pelo Centro de Massa (CM) dos objetos. Os objetos são constituídos de tecnil em nylon, com densidade aproximadamente uniforme igual à $1,14 \text{ g/cm}^3$. Este material é encontrado em lojas de equipamentos e ferramentas. Na primeira proposta o momento de inércia de uma haste retangular fina e longa e de um cilindro oco são determinados a partir de equações teóricas e de medição de suas massas e dimensões. Nas demais propostas o momento de inércia do cilindro oco é determinado utilizando-se os seguintes métodos: (i) um sistema físico com um sensor de rotação, (ii) uma técnica que utiliza a máxima altura de um peso pendurado ao

*Endereço de correspondência: andre.alves@ufes.br

sistema quando solto, e a altura “mínima” ao atingir um ponto mais baixo e retornar ao repouso momentâneo, (iii) deixando o cilindro descer uma trajetória vertical, em um rolamento sem escorregamento. O primeiro método é considerado mais elaborado por utilizar um sensor e *software*. Este será comparado com as demais técnicas que fazem o uso de filmagem com aparelho celular.

Este trabalho envolveu duas estudantes do Programa Institucional de Iniciação Científica (PIIC) da Universidade Federal do Espírito Santo e tem como objetivo agregar destreza em medições diversas como sensor de rotação, medições analógicas e análises gráficas. Objetiva-se também o aprimoramento de seus aprendizados relativos às leis de Newton e à energia mecânica. As estudantes passaram por uma breve revisão teórica que aborda as de leis de dinâmica e energia, tendo como enfoque os experimentos a serem realizados.

2. Abordagens Metodológicas e Teóricas

Nesta seção são apresentadas as práticas utilizadas para a determinação do momento de inércia I de dois corpos rígidos: uma haste fina e longa de dimensões “ a e b ” e um cilindro oco de raios interno e externo R_1 e R_2 , respectivamente, veja a Figura 1. Nessa figura a linha pontilhada amarela representa o eixo de rotação utilizado nos experimentos.

Foram realizadas medições diretas das dimensões dos corpos rígidos em estudo para a determinação dos momentos de inércia, via equações teóricas designadas por I_{corpo}^{teo} [4]. A Equações (1) se refere a haste fina de massa m_h e a Equação (2) se refere ao cilindro oco de massa m_c .

$$I_{haste}^{teo} = \frac{1}{2} m_h (a^2 + b^2). \quad (1)$$

$$I_{cil}^{teo} = \frac{1}{12} m_c (R_1^2 + R_2^2). \quad (2)$$

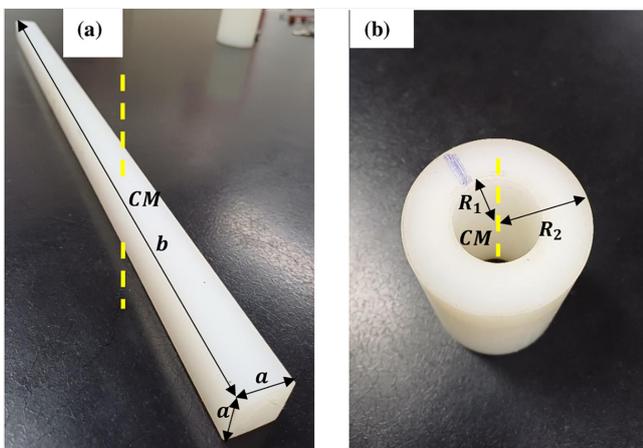


Figura 1: (a) Haste fina de largura a e comprimento b . (b) Cilindro oco de raio interno R_1 e externo R_2 . A linha amarela vertical representa o eixo passando pelo CM.

As incertezas em cada uma dessas medições foram calculadas pelo método de propagação de erros [5], conforme a Equação:

$$\Delta I^{teo} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} \quad (3)$$

no qual F designa qualquer uma das funções teóricas para o momento de inércia; x e Δx representam, respectivamente, os parâmetros dimensionais dos corpos rígidos e suas incertezas. As incertezas foram obtidas dos instrumentos de medição.

2.1. Método I – utilizando sensor de rotação e *software*

Na Figura 2(a) encontra-se um dos aparatos experimentais construídos para a determinação do momento de inércia dos corpos rígidos supracitados (nesta figura, a haste). A haste encontra-se sobre um sensor de rotação da marca PASCO *Scientific*, modelo PS-2120A [6], que por um conector *USB* específico se conecta ao *laptop*. O sensor possui um *software* com uma interface computacional (não visível). Nessa interface é possível optar por gráficos da velocidade angular ω em função do tempo t e da aceleração angular α em função de t . Neste trabalho utilizou-se a primeira opção.

Na montagem deste sistema uma linha fina, utilizada para costurar roupas, foi fixada no eixo de rotação do sensor. Este eixo tem a possibilidade do uso de dois raios diferentes r e R (veja o Apêndice A1). Na Figura 2(b) estão ilustradas as grandezas físicas que foram utilizadas para o desenvolvimento das equações que permitem determinar o momento de inércia experimental I dos corpos rígidos. Nessa figura também está apresentada a orientação do sistema de coordenadas (eixo y) e as forças

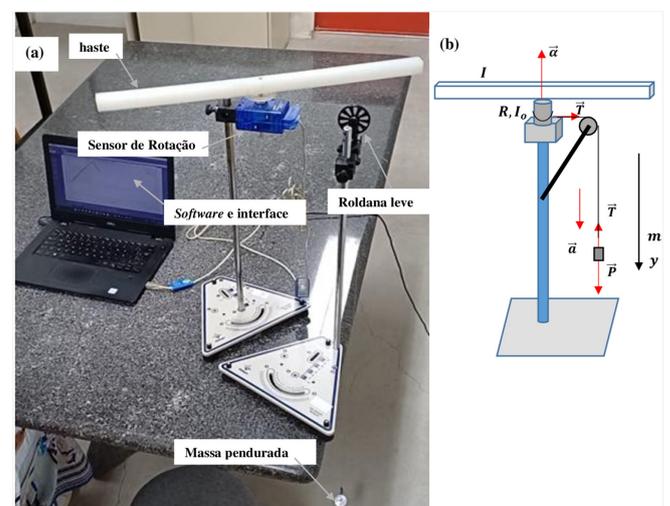


Figura 2: (a) Montagem experimental para a determinação do momento de inércia de corpos rígidos. (b) Ilustração do sistema utilizado com grandezas físicas correlacionadas.

atuantes no sistema. Nesta primeira parte da experiência utilizou-se o raio maior R , no qual foi dado um número de voltas com a linha costura em torno do mesmo. Essa linha está sob a ação de uma tensão \vec{T} que provoca um torque no eixo do sensor. Ela passa por uma roldana leve (desprezou-se sua massa) no qual em sua outra extremidade, foi pendurada uma massa m , cujo vetor peso é designado por \vec{P} . Considera-se que a tensão no eixo do sensor, na roldana e na massa pendura seja a mesma. Demais grandezas utilizadas foram: aceleração angular $\vec{\alpha}$ e a linear \vec{a} .

O sistema apresenta um pequeno atrito no eixo do sensor de rotação. Este possui um momento de inércia I_o . Portanto, é necessário determinar a magnitude do torque produzido pela força de atrito τ_{fat} , neste eixo. Para tanto, foi pendurada no sistema uma pequena massa m' suficiente apenas para fazer o sensor girar com velocidade angular ω constante. Na Equação (4) [7], as grandezas: somatório dos torques $\sum \vec{\tau}$ e a aceleração $\vec{\alpha}$ (nula neste caso), possuem a mesma direção e sentido. Por simplicidade, trabalha-se com suas componentes ao longo do eixo y :

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = 0, \tag{4}$$

e, portanto, $\tau_T - \tau_{fat} = 0$. τ_T é a magnitude do torque devido a tensão no eixo do sensor. Levando-se em consideração os produtos vetoriais, a regra da mão direita, e que o vetor $\vec{R} = R\hat{r}$, no qual \hat{r} é um versor radial ortogonal a \vec{T} , tem-se para a dinâmica de rotação:

$$RT - \tau_{fat} = 0, \tag{5}$$

no qual, novamente, utilizou-se as componentes dos torques ao longo do eixo y . Na dinâmica de translação tem-se que a magnitude T deve ser igual ao peso pendurado $P' = m'g$. Com essas informações, tem-se da Equação (5):

$$\tau_{fat} = Rm'g. \tag{6}$$

Para determinar o momento I experimental dos corpos rígidos deve-se também levar em consideração o momento de inércia I_o , do sensor de rotação (o corpo rígido gira junto com o sensor de rotação). Aplicando a segunda lei de Newton para a dinâmica de rotação, tem-se para o sistema com a haste ou o cilindro:

$$\sum \vec{\tau} = (I + I_o)\vec{\alpha}, \tag{7}$$

utilizando as componentes dos vetores, tem-se que:

$$RT - \tau_{fat} = (I + I_o)\alpha. \tag{8}$$

Para a dinâmica de translação aplica-se a segunda lei de Newton na massa m pendurada:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \tag{9}$$

Como o eixo de rotação do sensor é fixo e admitindo que não há escorregamentos é válida a relação $a = \alpha R$,

no qual a representa a aceleração tangencial na periferia do eixo do sensor de rotação). Portanto, obtém-se da Equação (9):

$$P - T = m\alpha R. \tag{10}$$

Combinando as Equações (6), (8) e (10), obtém-se:

$$I = R \left[(m - m') \frac{g}{\alpha} - mR \right] - I_o, \tag{11}$$

no qual I_o pode ser obtido de forma análoga à Equação (11), sendo expressa como:

$$I_o = R \left[(m_o - m') \frac{g}{\alpha_o} - m_o R \right]. \tag{12}$$

Para a obtenção da Equação (12) utilizou-se apenas o sensor de rotação, sem nenhum objeto colocado por cima dele. Nesta Equação, m_o e α_o correspondem às respectivas massas penduradas no sensor e a aceleração angular obtida. As grandezas físicas medidas e calculadas serão apresentadas na Seção 3.

2.2. Método II – utilizando as alturas no movimento vertical da massa pendurada

Na Figura 3(a) com o sistema montado, as estudantes realizaram medidas das alturas de uma massa pendurada por meio de uma régua, cuidadosamente posicionada na vertical. Para isto, utilizou-se pausas das filmagens com o aparelho celular. O sistema é semelhante ao da Figura 2(a). Apenas o cilindro oco foi utilizado nessa prática e na outra que será apresentada na próxima seção. Nesta prática, o sensor de movimento foi utilizado apenas para que o cilindro oco girasse em torno de seu CM. Por isso o *software* do mesmo não foi utilizado para o cálculo da aceleração α . Na Figura 3(b) está apresentada uma ilustração dos parâmetros a serem medidos. Utilizou-se o raio menor r do sensor para

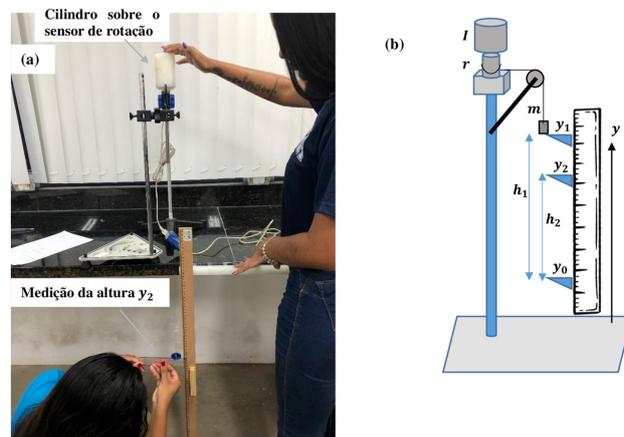


Figura 3: (a) Montagem experimental do sistema. (b) Ilustração do sistema e das variáveis a serem utilizadas no cálculo do momento de inércia do cilindro oco.

que se pudesse evitar “trancos/vibrações” no mesmo, no momento em que a massa m atinge sua altitude mínima y_o . Desprezou-se I_o (sensor) pois seu valor é relativamente menor do que I (dos objetos) (veja a seção 3).

Observando a ilustração na Figura 3(b), quando a massa m começa a descer, partindo da posição y_1 , a magnitude de ω aumenta e atinge seu valor máximo na posição y_o . A inércia rotacional do cilindro oco faz com que o mesmo permaneça girando. Isso ocasiona em uma inversão no sentido de movimento da massa pendurada, fazendo com que a mesma suba. Entretanto, o torque τ_{fat} da força de atrito oposta ao movimento, desacelera o cilindro. Com isso a massa pendurada irá subir até a posição y_2 . Neste instante uma das estudantes parou o movimento com as mãos e a outra pausou a filmagem. De acordo com a Figura 3(b), tem-se que: $y_1 - y_o = h_1$ e $y_2 - y_o = h_2$. A magnitude do torque resultante $\sum \vec{\tau}$ que atua no eixo do sensor devido a tensão na linha e ao atrito pode ser determinada como função de h_1 , h_2 , r , m , g e α . Nos próximos parágrafos há uma descrição detalhada desse método.

Para o cálculo de α , utilizou-se a Equação:

$$\theta_N = \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad (13)$$

no qual $\theta_N = 2\pi N$ é o comprimento do fio desenrolado no eixo do sensor após um número N de voltas no mesmo, na contagem de um intervalo de tempo t , durante a descida da massa m . Nesta experiência utilizou-se $N = 7$ voltas.

Para o movimento de translação da massa m pendurada e de acordo com o referencial adotado, a segunda lei de Newton fornece, para os componentes y dos somatórios das forças atuantes nela:

$$P - T = m\alpha r, \quad (14)$$

no qual utilizou-se a relação $a = \alpha r$ por considerar que não há escorregamento. Para o movimento de rotação no eixo do sensor, a Equação (4) com $\alpha \neq 0$, pode ser utilizada para a determinação da magnitude de I do cilindro oco. Tem-se para as componentes dos somatório dos torques $\sum \vec{\tau}$ ao longo do eixo y :

$$rT - \tau_{fat} = I\alpha, \quad (15)$$

nos quais $\tau_T = rT$ é o torque devido a tensão e τ_{fat} é o torque devido a força de atrito (os torques possuem sentidos opostos). Isolando T na Equação (14) e substituindo na Equação (15), obtém-se para τ_{fat} :

$$\tau_{fat} = r(mg - m\alpha r) - I\alpha. \quad (16)$$

Sobre as considerações de energia, tem-se que o trabalho realizado pela força de atrito W_{fat} no trajeto: $y_1 \rightarrow y_o \rightarrow y_2$, é dado por:

$$W_{fat} = mg(h_1 - h_2). \quad (17)$$

Nesta equação considera-se que as energias cinéticas nas posições y_1 e y_2 são ambas nulas. Adicionalmente, o trabalho realizado pelo torque devido ao atrito $W^{\tau_{fat}}$, é dado por:

$$W^{\tau_{fat}} = \tau_{fat} \cdot \Delta\theta, \quad (18)$$

no qual $\Delta\theta$ é o ângulo total deslocado, podendo ser obtido como:

$$\Delta\theta = \frac{h_1 + h_2}{r}. \quad (19)$$

Relacionando as Equações (16), (17) e (18) obtém-se, após algumas manipulações algébricas:

$$mgr \left[\frac{2h_2}{h_1 + h_2} - \frac{\alpha r}{g} \right] = I\alpha. \quad (20)$$

Sendo o membro esquerdo da Equação (20) a magnitude do torque resultante $\sum \vec{\tau}$, atuando no eixo do sensor.

2.3. Método III – rolamento sem escorregamento numa trajetória vertical

Nesta prática, o cilindro oco foi enrolado em duas linhas, amarradas em suas laterais; um número igual de voltas foi dado, por cada linha, em torno do cilindro. O mesmo foi suspenso e deixado rolar na vertical por uma distância ≈ 40 cm, conforme visto na montagem experimental da Figura 4(a). Utilizou-se duas linhas para manter o rolamento estável ao longo do mesmo eixo. Admitiu-se um rolamento sem escorregamento das linhas. Apenas as forças da gravidade e a tensão na linha foram levadas em consideração, desprezando-se a resistência do ar para o cálculo de I . A marcação de um ponto P em um papel colado em uma das superfícies laterais do cilindro, representa o ponto no qual ele gira em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu CM durante seu movimento. Uma régua foi colocada na vertical para que através da filmagem com um aparelho celular, fosse

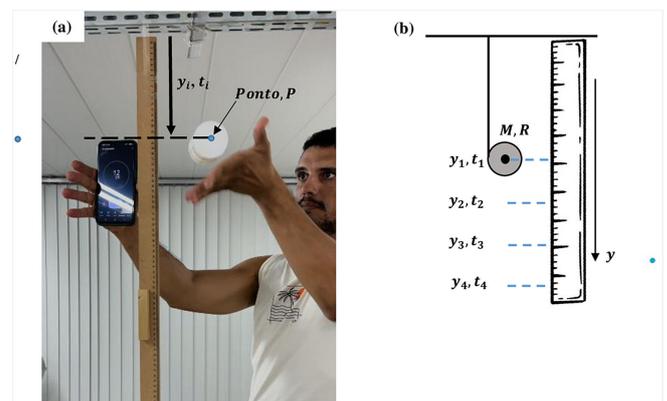


Figura 4: (a) Cilindro oco desce enquanto a posição y e o tempo t são marcados. (b) Ilustração do método utilizado e referencial adotado.

possível medir a posição vertical y em função do tempo t . Após a filmagem do experimento os dados foram coletados, realizando-se pausas no vídeo e analisando as imagens. Na Figura 4(b) está ilustrado o método utilizado para a marcação das posições y_i medidas nos instantes t_i .

As medidas foram realizadas em intervalos tempos consecutivos $\approx 0,05$ s. Com os dados tabelados, um gráfico y em função de t foi obtido. O *software Origin 8.0* foi utilizado para se ajustar uma parábola ao gráfico e com isso, obter a aceleração a do cilindro durante a descida. Utilizando as leis da dinâmica de translação e rotação e admitindo um rolamento sem escorregamento, demonstra-se facilmente que [7]:

$$I = MR_c^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right), \tag{21}$$

nos quais M e R_c são as respectivas massas e o raio maior do cilindro, no qual os fios foram enrolados.

3. Resultados e Discussões

3.1. Método I

Na interface do *software* do sensor de rotação (Figura 5) é possível observar para uma medição típica, o gráfico da velocidade angular $\omega(\text{rad/s})$ como função do tempo $t(\text{s})$. Nesta experiência a massa m pendurada foi solta de uma altura ≈ 60 cm. As formas triangulares referem-se a instantes em que ela atinge sua altitude mínima, relativa ao solo, voltando para cima. Neste instante o sistema sofre um “leve tranco/vibração” (quase imperceptível) e ocorre a inversão no sentido do movimento de m , portanto ω começa a decrescer. Quando o objeto atinge a altitude máxima, tem-se instantaneamente que $\omega = 0$. O sensor de rotação inverte seu sentido de giro, o que corresponde aos valores negativos de ω . Este padrão se repete até o sistema atingir o repouso, devido as forças de atrito no eixo do sensor e a resistência do ar nos objetos em movimento.

Para efeitos de cálculos da aceleração angular $\alpha(\text{rad/s}^2)$, considerando a linearidade do gráfico, foi

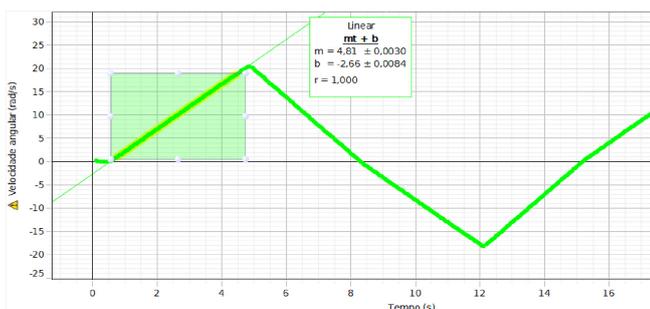


Figura 5: Gráfico da velocidade angular em função do tempo na interface do *software* do sensor de rotação. A reta na cor verde que passa pelo retângulo representa um ajuste linear para a obtenção da aceleração angular.

utilizado apenas a primeira parte do mesmo, na região destacada pelo retângulo. O próprio *software* fornece o valor de α (inclinação da reta) com sua incerteza. Em todos os cálculos utilizou-se $g \approx (9,79 \pm 0,01) \text{m/s}^2$. Para efeitos de cálculos, todas as experiências aqui realizadas foram repedidas, para a obtenção do desvio padrão em I e I_o , no qual o associa-se à incerteza na medição. Os valores de m_o , m' e R utilizados para a obtenção de I_o (Equação (12)) foram, respectivamente, $(0,300 \pm 0,001) \text{g}$, $(0,988 \pm 0,001) \text{g}$ e $(1,457 \pm 0,005) \text{cm}$. Nas quatro medições realizadas os valores de α_o estiveram compreendidos na faixa de $(29,27 - 33,30) \text{rad/s}^2$. Dessa forma, tem-se que $I_o = (2,9 \pm 0,2) 10^{-6} \text{kg.m}^2$.

Com o valor de I_o calculado, pendurou-se uma massa $m = (5,96 \pm 0,01) \text{g}$ e colocou-se o cilindro oco sobre o sensor de rotação. Posteriormente mais duas distintas massas, compreendidas na faixa de $(7,95 - 10,96) \text{g}$, foram penduradas para a obtenção de um valor médio e um desvio padrão para o momento de inércia do cilindro I_{cil} . Para cada massa a medição foi repetida 4 vezes. Os valores de α medidos estiveram compreendidos na faixa de $(4,77$ a $4,90) \text{rad/s}^2$. Observou-se como esperado que a massa pendurada não influencia no cálculo do momento de inércia dos objetos: na Equação (11) a grandeza $(m - m')$ aumenta proporcionalmente a $1/\alpha$ de tal forma que I se mantém constante. Após as medições e cálculos obteve-se $I_{cil} = (1,61 \pm 0,02) 10^{-4} \text{kg.m}^2$. Cálculos semelhantes foram feitos para a haste retangular. Como a massa pendurada não influencia no cálculo de I , apenas a massa de $(22,892 \pm 0,001) \text{g}$ foi pendurada e a medida repetida quatro vezes. Após as medições obteve-se $I_{haste} = (7,70 \pm 0,03) 10^{-3} \text{kg.m}^2$, para o momento de inércia da haste.

Para os valores teóricos calculados diretamente das Equações (1) e (2) tem-se para as dimensões da haste: $a = (21,60 \pm 0,05) \text{mm}$ (medido com um paquímetro) e $b = (53,10 \pm 0,05) \text{cm}$ (medido com uma régua) (veja também a Figura 1). Para o cilindro oco, ambas as medidas foram realizadas com o paquímetro, obtendo-se os diâmetros interno (do furo) e externo. A divisão dessas grandezas por 2 resultam em $R_1 = (14,83 \pm 0,05) \text{mm}$ e $R_2 = (30,98 \pm 0,05) \text{mm}$. Utilizando esses parâmetros obtém-se para o cálculo do momento de inércia da haste I_{haste}^{teo} e do cilindro oco I_{cil}^{teo} , os respectivos valores de: $(6,71 \pm 0,04) 10^{-3} \text{kg.m}^2$ e $(1,53 \pm 0,01) 10^{-4} \text{kg.m}^2$. As incertezas nos valores anteriormente obtidos foram calculadas pela Equação (3). Os valores experimentais superam, em pequenas quantidades os valores calculados teoricamente. As diferenças relativas, σ_{rel} , definida como:

$$\sigma_{rel} = \frac{|I^{exp} - I^{teo}|}{I^{teo}}, \tag{22}$$

valem para I_{haste} e I_{cil} , 14,7% e 5,2%, respectivamente. Essas diferenças relativas devem-se a outras grandezas, não levadas em consideração no problema, como a resistência do ar, vibrações e possíveis deslizamentos da linha na roldana.

3.2. Método II

No método II, utilizado apenas para o cálculo de I_{cil} , foi medido primeiramente o raio menor r do sensor de rotação. Utilizou-se $N = 7$ voltas, resultando em um comprimento de fio enrolado de $2\pi r(7) = (18,9 \pm 0,5) \text{ cm}$, o que equivale a $r = (4,30 \pm 0,01) \text{ mm}$. Para o cálculo da aceleração angular α durante a queda de m , foram contadas também $N = 7$ voltas. O experimento foi filmado e foram realizadas quatro medições para o intervalo de tempo Δt , com pequenas diferenças entre eles. Estes estiveram compreendidos na faixa de $(6,9 - 7,3) \text{ s}$. Para cada intervalo de tempo utilizou-se a Equação (13) para o cálculo da aceleração angular. Desta forma, os valores de α calculados estiveram compreendidos na faixa de $(1,51 - 1,83) \text{ rad/s}^2$.

Com uma massa $m = (7,36 \pm 0,1) \text{ g}$ pendurada, deixou-se a mesma descer de quatro posições y_1 distintas, sendo então medidas as variáveis h_1 e h_2 correspondentes. Estas medidas estiveram compreendidas nas faixas de $(36,2 - 51,0) \text{ cm}$ e $(20,5 - 29,2) \text{ cm}$, respectivamente. Para cada conjunto de medidas utilizou-se a Equação (20) (membro direito) para os cálculos das magnitudes do torque $\sum \vec{\tau}$. Estes estiveram compreendidos na faixa $(2,29 - 2,32)10^{-4} \text{ N.m}$, apresentando pequenas diferenças entre eles. Novamente, para cada conjunto de medições a Equação $\sum \vec{\tau} = I_{cil}\vec{\alpha}$ foi utilizada para o cálculo de I_{cil} . Os valores obtidos estiveram compreendidos na faixa de $(1,22 - 1,50)10^{-4} \text{ kg.m}^2$. O desvio padrão das medições foi utilizado para o cálculo da incerteza. O valor médio com incerteza calculado foi de $(1,3 \pm 0,1)10^{-4} \text{ kg.m}^2$. Este valor é próximo do valor teórico, I_{cil}^{teo} , e ao valor obtido utilizando o método I. A diferença relativa, calculada pela Equação (22) vale $\approx 13\%$.

3.3. Método III

Na Tabela 1 estão apresentados os valores de posições y_i e instantes t_i do ponto P , relativas às posições medidas na régua. Vale lembrar que estas medidas foram coletadas durante a descida do cilindro oco (veja a Figura 4) pela filmagem com um aparelho celular. Na Tabela 1 cada instante de tempo t_i foi subtraído da posição inicial t_o . Posteriormente t_o foi definido como zero. Isso foi feito para se obter os intervalos sucessivos no tempo a partir do instante t_o . Ao todo foi possível coletar 10 pontos, antes que a marcação (ponto P) se destoasse do vídeo, devido a capacidade de registrar imagens do aparelho celular utilizado.

A partir dos dados da Tabela 1, foi possível construir um gráfico de y em função de t , utilizando um programa computacional, neste caso o *Origin* 8.0 [8] (Veja a Figura 6). Uma função polinomial do tipo:

$$y(t) = Ct^2 + Bt + A, \quad (23)$$

foi utilizada para um ajuste aos pontos experimentais. O termo de interesse C para o cálculo de I_{cil} , representa

Tabela 1: Dados coletados durante a queda do cilindro oco.

$y_i(m)$	$t_i(s)$	$t_i - t_o(s)$
0,135	11,97	0
0,160	12,07	0,10
0,225	12,14	0,17
0,250	12,17	0,20
0,320	12,22	0,25
0,375	12,24	0,27
0,410	12,27	0,30
0,475	12,29	0,32
0,515	12,32	0,35
0,550	12,34	0,42

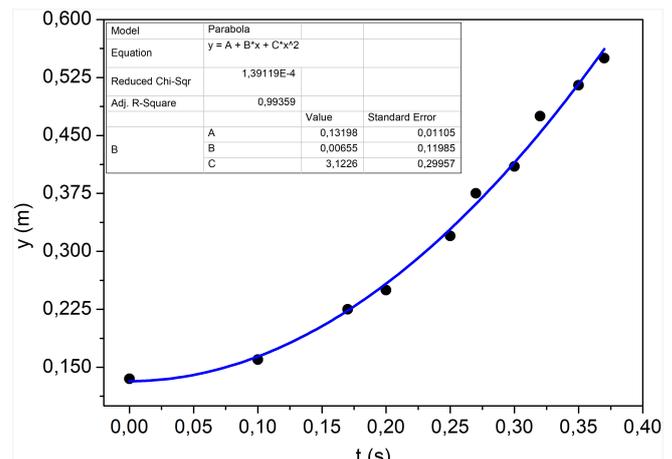


Figura 6: Posição, y , em função do tempo para o movimento no qual o cilindro oco desce sob a atuação de duas linhas nele enroladas.

$a_{CM}/2$; o termo B a velocidade inicial v_{y0} e o termo A corresponde a posição inicial y_0 . A função obtida desse ajuste retornou para o termo $C = (3,1 \pm 0,3) \text{ m/s}^2$ e o termo $B \approx 0$ pois a incerteza ultrapassou o valor de B , e o termo $A = (0,13 \pm 0,01) \text{ m}$. Com o valor obtido do termo A , tem-se que $a_{CM} = (6,2 \pm 0,4) \text{ m/s}^2$. Por fim, utilizando a Equação (22) para o momento de inércia do cilindro oco e realizando os cálculos de incerteza, tem-se que $I_{cil} = (1,4 \pm 0,4)10^{-4} \text{ kg.m}^2$. A diferença relativa calculada foi de 8,5%. Embora o método seja o mais simples quando comparado aos métodos I e II, o maior valor da incerteza calculada torna essa medição menos precisa embora muito satisfatória.

4. Considerações Finais

Neste trabalho foram apresentadas metodologias experimentais que podem ser realizadas em cursos de física experimental na área de mecânica básica. Foram realizados experimentos e cálculos para a determinação do momento de inércia de uma haste retangular longa e um cilindro oco. Adicionalmente, utilizou-se cálculos envolvendo a energia nesses sistemas para a obtenção dos momentos de inércia. As estudantes puderam

Tabela 2: Resultados obtidos para os cálculos de momento de inércia.

Objetos	Momentos de Inércia de cada métodos ($kg.m^2$)		
	I	II	III
Haste retangular longa	$(7,70 \pm 0,03)10^{-3}$	–	–
Cilindro oco	$(1,61 \pm 0,02)10^{-4}$	$(1,3 \pm 0,1)10^{-4}$	$(1,4 \pm 0,4)10^{-4}$
Teóricos: $I_{haste} = (6,71 \pm 0,04)10^{-3} kg.m^2$ e $I_{cil} = (1,53 \pm 0,01)10^{-4} kg.m^2$			

comparar os resultados, através de medições realizadas indiretamente através de parâmetros físicos de sistemas montados, com resultados teóricos calculados de forma direta. Para uma melhor conclusão, os resultados obtidos para uma comparação dos métodos utilizados estão apresentados na Tabela 2.

Observa-se de uma forma geral os valores obtidos experimentalmente são compatíveis com os valores teóricos. Alguns fatores como a resistência do ar e possíveis deslizamentos e vibrações, são fatores que podem influenciar nas pequenas diferenças observadas nos métodos I e II. O método I foi o que forneceu a melhor aproximação com o valor teórico e melhor precisão, possivelmente devido ao sensor de rotação utilizado na determinação da aceleração angular. O método II por envolver medições nas alturas, nos quais foram obtidas com uma pequena régua na horizontal comparada com a régua na vertical, para se obter as alturas y , fez com que a incerteza das medições aumentasse.

O método III foi o mais simples de ser realizado, levando em consideração tanto a equação teórica evolvida quanto o método experimental. Entretanto, houve uma certa dificuldade na medição das alturas tendo em vista que o cilindro oco desce muito rapidamente. Isto fez aumentar muito a imprecisão das medidas nas posições fazendo aumentar a incerteza do momento de inércia, quando comparado aos outros métodos. Enfim, com as práticas aqui realizadas as estudantes adquiriram habilidades e destrezas experimentais que podem ser utilizadas futuramente em suas carreiras contribuindo com suas formações acadêmicas.

Agradecimentos

Agradecemos o Programa Institucional de Iniciação científica da UFES – PIIC e a Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo – FAPES, pelo apoio financeiro e bolsas concedidas.

A1. Apêndice I – O Sensor de Rotação

Na Figura A1 é possível observar o sensor de rotação utilizado. Nas polias de raio menor $r = 0,43$ cm e maior $R = 1,46$ cm, foram enrolados uma linha fina, para a realização dos experimentos.

**Figura A1:** Sensor de rotação [6].

Referências

- [1] V.A. Silva e F.A.O. Cruz, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **37**, 944 (2020).
- [2] M.S.T. Araújo e M.L.S. Abib, Revista Brasileira de Ensino de Física **25**, 176 (2003).
- [3] R.A. Mion e J.A.P. Angotti, em: *Anais do IX Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Física* (Minas Gerais, 2004).
- [4] H.D. Young e R.A. Freedman, *Física I – Mecânica* (Pearson – Addison Wesley, São Paulo, 2016), 14 ed, v. 3.
- [5] *Física Experimental I Mecânica Teoria: Roteiro e Folha de Dados*, disponível em: https://cienciasnaturais.saomateus.ufes.br/sites/cienciasnaturais.saomateus.ufes.br/files/field/anexo/fisica_experimental_i_licenciatura_fisica_2018_1.pdf, acessado em: 29/04/2024.
- [6] PASCO, *PASPORT Rotary Motion Sensor*, disponível em: <https://www.pasco.com/products/sensors/pasport/ps-2120>, acessado em: 20/04/2024.
- [7] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física – Mecânica* (LTC – Grupo GEN, Rio de Janeiro, 2012), 9 ed, v. 1.
- [8] *Origin 8: Getting Started*, disponível em: https://www.originlab.com/pdfs/Origin_8.1_Getting_Started_Booklet.pdf, acessado em: 26/08/2020.