Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 41, nº 4, e20180350 (2019)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0350

Artigos Gerais

Geração de soluções exatas em Relatividade Geral através do Método de Kerr-Schild

Generating exact solutions in General Relativity through Kerr-Schild method

Eduardo V. S. Ribeiro[1], Bertha Cuadros-Melgar*[1], Flavia R. Cardoso[1]

[1]Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de Lorena, Estrada Municipal do Campinho, Lorena, SP, Brasil

Recebido em 18 de Dezembro, 2018. Revisado em 29 de Março, 2019. Aceito em 03 de Maio, 2019.

Neste trabalho, apresentamos o método de Kerr-Schild para obter novas soluções das equações de campo de Einstein a partir de uma solução de fundo conhecida. São mostradas algumas das propriedades e uma introdução histórica do método, além da apresentação de alguns exemplos de sua aplicação.
Palavras-chave: Kerr-Schild, Buracos Negros, Equações de Einstein

In this work we introduce Kerr-Schild method to obtain new solutions to Einstein field equations from a known background solution. We show some properties, a historical introduction of the method, and some examples of its application.
Keywords: Kerr-Schild, Black Holes, Einstein Equations

1. Introdução

O aparecimento da Teoria da Relatividade, em 1905, foi um dos grandes marcos da física no século XX; a partir dela, nosso entendimento sobre o universo foi drasticamente alterado, principalmente no que tange aos conceitos de espaço e tempo. Foi em meio a esses novos conceitos que Albert Einstein publicou, em 1915, seu artigo *Os Fundamentos da Teoria Geral da Relatividade* [1], onde introduziu uma nova forma de compreender a gravidade: ela seria, na verdade, consequência da curvatura causada no espaço-tempo pela presença de matéria/energia.

As equações que descrevem a forma como a matéria gera tal deformação, chamadas de equações de campo de Einstein (que veremos na próxima seção), consistem num complicado sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem não-lineares e acopladas, de forma que, encontrar soluções para esse sistema é uma tarefa extremamente complicada. Mesmo assim, já em 1916 surgiram duas soluções exatas dessas equações: A primeira delas foi achada em circunstâncias bastante dramáticas, quando seu autor, Karl Schwarzschild, um físico e astrônomo alemão, lutava junto ao exército alemão na Primeira Guerra Mundial. Essa solução descreve o campo gravitacional de uma distribuição esférica e homogênea de matéria, que hoje é usada tanto para descrever estrelas, como também o tipo mais simples de buraco negro. A segunda solução, que descreve o campo gravitacional de uma carga pontual, foi encontrada por Hans Reissner, um engenheiro aeronáutico alemão, cujo passatempo era a física matemática. Nos anos seguintes, Gunnar Nordström, um físico teórico finlandês precursor das teorias de gravitação com dimensões extras, acharia a mesma solução de maneira independente, motivo pelo qual a solução do buraco negro com carga passou a ser conhecida como a solução de Reissner-Nordström.

De qualquer maneira, dado o nível de complexidade das equações de Einstein, foram necessários quase cinquenta anos para que fosse encontrada uma solução que descrevesse o campo gravitacional de um objeto em rotação, depois da publicação, em 1916, da solução de Schwarzchild. Tal solução só foi publicada em 1963 [2], pelo matemático Roy Kerr, que a descobriu enquanto estudava propriedades de espaços-tempos algebricamente especiais; a partir desse método, em 1965, juntamente com o físico Alfred Schild, Kerr publica um artigo [3] onde faz uma sistematização do método, chamado de *Ansatz de Kerr-Schild*.

O método de Kerr-Schild consistia em usar como base a métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, somada de uma perturbação tensorial (gerada pelo produto tensorial de dois vetores nulos[1]) para formar uma nova métrica, também solução exata das equações de campo no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$). Posteriormente, em 1969 [4], os autores publicaram, junto de seu aluno George Debney, uma extensão do método onde encontraram soluções para as equações de Einstein-Maxwell. Em 1978, Basilis C. Xanthopoulos [5] generaliza o método para uma métrica arbitrária $g_{\mu\nu}$ no caso das equações de campo no vácuo. Cabe destacar que a grande

*Endereço de correspondência: bertha@usp.br.

[1]Um vetor nulo (ou tipo luz) V^μ é aquele que satisfaz $V^\mu V_\mu = 0$. Note que, como estamos considerando uma variedade pseudo-Riemanniana (ver nota de rodapé seguinte para a definição), as componentes não são necessariamente nulas.

vantagem do método de Kerr-Schild radica em que as equações de campo resultantes são lineares na perturbação tensorial, facilitando enormemente sua solução.

Neste artigo, apresentaremos a transformação tanto na sua forma original, publicada por Roy Kerr e Alfred Schild, em 1965 [3], como a generalização apresentada numa revisão de Abraham H. Taub [6] publicada em 1981, além de expor algumas propriedades conhecidas e exemplos de suas aplicações.

2. Conceitos Preliminares

Serão apresentados, a seguir, alguns conceitos necessários para o entendimento de algumas das propriedades do método.

2.1. Grandezas básicas em Relatividade Geral

Consideremos o intervalo entre dois eventos no espaço-tempo ou elemento de linha como sendo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,, \tag{1}$$

onde os índices gregos representam as coordenadas do espaço-tempo ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), dx^μ representa um deslocamento infinitesimal genérico da coordenada x^μ e $g_{\mu\nu}$ é a chamada métrica desse espaço-tempo, na qual está codificada toda a informação da geometria dele. A Eq.(1) é uma quantidade invariante, ou seja, todos os observadores em qualquer sistema de referência concordarão com uma medida desta. Além disso, a métrica introduz a noção de distância através do elemento de linha (1), que pode ser entendido como um análogo do teorema de Pitágoras num espaço pseudo-Riemanniano[2]. Matematicamente, a métrica é um tensor de ordem 2 definido em cada ponto de uma variedade como o produto de 2 vetores de base do espaço tangente nesse ponto, e é útil representá-la como uma matriz $d \times d$, sendo d a dimensionalidade do espaço-tempo. Nesse trabalho consideraremos espaços-tempos tanto em 3 como em 4 dimensões e a assinatura da métrica será (-++) e (-+++), respectivamente, *i.e.*, (-) para a coordenada temporal e (+) para as coordenadas espaciais. Essa escolha faz com que ds^2 possa ser positivo, negativo ou zero, definindo assim o intervalo como sendo tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz, respectivamente. Essa é a diferença básica com o teorema de Pitágoras onde ds^2 é sempre positivo.

Uma outra quantidade de grande utilidade é a chamada conexão afim, um objeto geométrico definido sobre uma variedade suave, que conecta espaços tangentes próximos. Uma classe especial são os chamados símbolos de Christoffel $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$, que fornecem uma representação concreta desse tipo de conexão na geometria pseudo-Riemanniana em termos das coordenadas da variedade. Na relatividade geral, os símbolos de Christoffel determinam a existência da força gravitacional (e a existência de curvatura numa variedade) e, pela relação a seguir, é a métrica que faz o papel do potencial gravitacional:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} \left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right) \,, \tag{2}$$

onde a vírgula representa uma derivada: $g_{\sigma\mu,\nu} \equiv \partial_\nu g_{\sigma\mu} \equiv \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$. Esta equação permite o cálculo dos símbolos de Christoffel de uma maneira simples a partir da métrica.

Os símbolos de Christoffel também definem a chamada derivada covariante de um vetor, representada por um ponto e vírgula, que é uma generalização da derivada usual para espaços curvos:

$$V^\mu{}_{;\lambda} := V^\mu{}_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\kappa \,, \tag{3}$$
$$V_{\mu;\lambda} := V_{\mu,\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} V_\kappa \,. \tag{4}$$

A generalização para tensores de ordem superior é simples: para cada índice contravariante $^\mu$ somamos um termo contendo o símbolo de Christoffel correspondente $\Gamma^\mu_{\bullet\bullet}$, e para cada índice covariante $_\mu$ subtraimos um termo contendo $\Gamma^\bullet_{\mu\bullet}$. A importância da derivada covariante se manifesta em dois fatos: ela converte tensores em outros tensores e ela se reduz à derivada ordinária na ausência de gravitação (variedade plana), ou seja, quando $\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = 0$.

Por fim, é necessário caracterizar a curvatura do espaço-tempo com um novo objeto: o tensor de curvatura ou tensor de Riemann, que pode ser escrito em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} := \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \,. \tag{5}$$

Esse tensor indica a mudança que ocorre nas componentes de um tensor quando ele é transportado em um caminho fechado; se essa mudança for nula, a variedade não possui curvatura. Uma das propriedades desse tensor, que tem a ver com os dois pares de índices dele, é que ele é simétrico na troca desses dois pares e antisimétrico na troca dos índices de cada par. A partir desse tensor é útil definir o tensor de Ricci e o escalar de Ricci por operações de contração:

$$R_{\alpha\beta} := R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha} \,, \tag{6}$$
$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \,. \tag{7}$$

2.2. Equações de Einstein

O tensor de Riemann (5) obedece uma equação de conservação importante chamada de identidades de Bianchi:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \,. \tag{8}$$

Contraindo duas vezes esta identidade, podemos definir um novo tensor, cuja derivada covariante é nula:

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right)_{;\beta} \equiv G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \,, \tag{9}$$

[2] Um espaço Riemanniano cumpre certos requisitos, dentre eles, que a métrica seja suave e sempre positiva definida. No caso da relatividade este último requisito não se cumpre, daí o prefixo pseudo.

onde $G^{\alpha\beta}$ é chamado de tensor de Einstein, a partir do qual podemos formular as equações de campo de Einstein [7].
Considerando um conteúdo material descrito pelo tensor de energia-momento $T^{\alpha\beta}$, o qual deve ser conservado, *i.e.*, ${T^{\alpha\beta}}_{;\beta} = 0$, podemos relacioná-lo à curvatura do espaço-tempo representada por algum tensor simétrico de ordem 2, que é precisamente o tensor de Einstein:

$$G^{\alpha\beta} = k\, T^{\alpha\beta}\,. \tag{10}$$

A constante de proporcionalidade pode ser determinada usando o limite newtoniano da teoria, obtendo $k = 8\pi G/c^4$, sendo G a constante de gravitação de Newton e c a velocidade da luz no vácuo. Usualmente em Relatividade Geral, costumamos usar unidades geometrizadas que consideram: $G = c = 1$, de tal maneira que a forma final das equações de Einstein está dada por:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = 8\pi T^{\alpha\beta}\,. \tag{11}$$

Também é possível obter as equações (11) a partir de uma formulação concisa e elegante da relatividade geral que usa o formalismo Lagrangiano para campos [8]. Essa demonstração será desenvolvida a seguir.

Tendo em vista que a métrica $g_{\mu\nu}$ é o campo que descreve a gravidade, iremos considerá-la como o grau de liberdade do sistema para o qual desejamos encontrar as equações de movimento e, uma vez que a Lagrangiana é uma função escalar, devemos procurar escalares obtidos a partir da métrica para construir a densidade Lagrangiana. As escolhas mais diretas e simples são $\sqrt{-g}$, $g = \mathrm{Det}\, g_{\mu\nu}$ e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, que, por ser formado a partir de derivadas da métrica, será o termo cinético; uma vez que esses escalares são construídos a partir de tensores, temos garantida a covariância da Lagrangiana. A partir desses escalares, podemos escrever a ação do campo gravitacional S_G [8],

$$S_G = \frac{1}{16\pi}\int \sqrt{-g}\; R\; d^4x; \tag{12}$$

que é denominada *ação de Einstein-Hilbert.*

Supondo a existência de uma ação S_M que descreva a dinâmica da matéria presente no espaço-tempo, podemos escrevê-la como,

$$S_M = \int \mathscr{L}(\phi)\sqrt{-g}\; d^4x, \tag{13}$$

onde ϕ representa os campos que descrevem o conteúdo material da teoria e, $\mathscr{L}(\phi)$ é a densidade lagrangiana correspondente. Partindo da variação da equação (13) com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, definimos o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ da seguinte maneira:

$$\delta S_M = \frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\; d^4x. \tag{14}$$

Assim, a ação total do sistema será dada por $S = S_G + S_M$.

Suponhamos uma variação $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$; como $g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} = {\delta^{\mu}}_{\nu}$, podemos escrever:

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}\delta g_{\kappa\lambda}; \tag{15}$$

também, tendo em vista que $\mathrm{Det}\, g_{\mu\nu} = e^{\mathrm{Tr}\,(\ln g_{\mu\nu})}$, temos:

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{16}$$

A variação do tensor de Ricci com respeito à métrica é:

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}. \tag{17}$$

Com o auxílio das identidades (15), (16) e (17), pode-se verificar que:

$$\delta S_G = -\frac{1}{16\pi}\int \sqrt{-g}\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right]\delta g_{\mu\nu}\; d^4x. \tag{18}$$

Combinando as equações (18) e (14), temos que o princípio de Hamilton, $\delta S = 0$, é satisfeito se e somente se,

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi T^{\mu\nu}, \tag{19}$$

que são as equações de campo de Einstein.

2.3. Campos Vetoriais de Killing

Uma simetria em um espaço-tempo caracterizado por uma variedade n-dimensional $\mathcal{M}$ pode ser entendida como um difeomorfismo [3] $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, onde $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são subconjuntos abertos de $\mathcal{M}$, que preserva alguma característica geométrica de $\mathcal{M}$ [9].

Suponha um campo vetorial $\xi^{\mu}(x^{\alpha})$. Podemos definir o seguinte deslocamento infinitesimal [10]:

$$\overline{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\mu})d\lambda = x^{a} + \delta x^{a}. \tag{20}$$

Para essa transformação, temos,

$$\delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\mu}\xi^{\mu}d\lambda, \tag{21}$$

$$\delta(dx^{\alpha}) = d(\delta x^{\alpha}) = {\xi^{\alpha}}_{,\mu}dx^{\mu}d\lambda, \tag{22}$$

de maneira que os elementos de linha nos pontos x^{α} e $\overline{x}^{\alpha}$ serão idênticos se:

$$\delta(ds^2) = \delta(g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}) = \tag{23}$$

$$= (g_{\alpha\beta,\mu}\xi^{\mu} + g_{\mu\beta}{\xi^{\mu}}_{,\alpha} + g_{\alpha\mu}{\xi^{\mu}}_{,\beta})dx^{\alpha}dx^{\beta}d\lambda = 0\,, \tag{24}$$

ou seja, haverá uma simetria se, e somente se,

$$g_{\alpha\beta,\mu}\xi^{\mu} + g_{\mu\beta}{\xi^{\mu}}_{,\alpha} + g_{\alpha\mu}{\xi^{\mu}}_{,\beta} = 0. \tag{25}$$

Escrevendo a Eq.(25) em termos de derivadas covariantes, temos:

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0. \tag{26}$$

O conjunto das soluções da Eq.(26), chamada de equação de Killing, forma um grupo, denominado de grupo de

[3] Um difeomorfismo é um mapa diferenciável e inversível entre duas variedades, cujo mapa inverso também é diferenciável.

isometria (ou grupo de movimentos). Os campos vetoriais ξ_α que satisfazem a equação de Killing são denominados vetores de Killing e, para uma determinada métrica $g_{\alpha\beta}$, são determinados pelos valores de ξ_α e $\xi_{\alpha;\beta}$ em um dado ponto $p \in \mathcal{M}$; esses fatores são obtidos a partir da equação de Killing e da seguinte propriedade (obtida a partir da definição do tensor de Riemann):

$$\xi_{\gamma;\alpha\beta} = -R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\delta}\xi_\delta. \tag{27}$$

Como consequência, um máximo de $\frac{1}{2}n(n+1)$ fatores definem todos os vetores de Killing de uma métrica, o que, por sua vez, implica que existe um máximo de $\frac{1}{2}n(n+1)$ vetores de Killing linearmente independentes, fato que também define a dimensão máxima do grupo de isometria (no caso de uma variedade com dimensão $n = 4$, como é usual em relatividade, isso implica que existem, no máximo, 10 vetores de Killing em um dado espaço-tempo).

A existência de um vetor de Killing implica na existência de uma isometria na variedade: os valores da métrica em um dado ponto $p \in \mathcal{M}$ mantém-se inalterados quando calculados em um outro ponto $q \in \mathcal{M}$ numa direção determinada por um vetor de Killing (ou combinação linear deles). A família de curvas que une os pontos que satisfazem a condição de isometria pode ser obtida integrando as seguintes equações:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \xi^\mu(x^\iota). \tag{28}$$

Outro ponto importante de se ressaltar é que a ação do grupo de isometrias, gerado pelos vetores de Killing, em $\mathcal{M}$, define um difeomorfismo do tipo mencionado no início da seção, que caracteriza uma simetria. Por fim, em um dado sistema de coordenadas, a existência de um vetor de Killing relativo a uma das coordenadas implica na independência da métrica em relação a essa coordenada no dado sistema [11].

Um exemplo ilustrativo consiste nos vetores de Killing da métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{-1,1,1,1\}$,

$$\xi_\alpha = a_\alpha + b_{\alpha\beta}x^\beta, \tag{29}$$

onde $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$ e $x^\beta = \{t,x,y,z\}$, que possui 10 constantes independentes (a_α e $b_{\alpha\beta}$), que levam a 10 vetores de Killing linearmente independentes.

A última propriedade a ser mencionada é a seguinte: se ξ_α é um vetor de Killing e γ é uma geodésica com vetor tangente u^α, o produto interno $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha u^\beta = \xi_\alpha u^\alpha$ é uma constante de movimento.

2.4. Classificação de Petrov

A classificação de Petrov consiste em uma classificação algébrica local de espaços-tempos através dos autovetores do tensor de Weyl [9, 11–13]. Sua introdução pode ser motivada por uma classificação semelhante do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Considere, por exemplo, dois tipos de campos eletromagnéticos: o campo de Coulomb e o campo de radiação, cujas componentes elétrica e magnética possuem o seguinte comportamento,

$$\text{Campo de Coulomb}: \; E \sim \frac{1}{r^2},\; \mathbf{B} = 0, \tag{30}$$

$$\text{Campo de radiação}: \; E \sim \frac{1}{r},\; \|\mathbf{E}\| = \|\mathbf{B}\|,\; \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0.$$

Mostraremos que ambos os casos correspondem à classificação do tensor $F_{\mu\nu}$ em categorias distintas.

Um tensor de segunda ordem é dito simples se pode ser escrito na forma:

$$A_{\mu\nu} = a_{[\mu}b_{\nu]} = \frac{1}{2}(a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu).$$

Em geral, o tensor eletromagnético não é simples, mas ele sempre pode ser decomposto em um par de tensores de segunda ordem simples, $F_{\mu\nu} = a_{[\mu}b_{\nu]} + c_{[\mu}d_{\nu]}$. Também é verdade que, se $F_{\mu\nu}$ é simples, então existem dois vetores ortogonais p e q (i.e., $p_\mu q^\mu = 0$), tais que $F_{\mu\nu} = p_{[\mu}q_{\nu]}$. Na decomposição mencionada, temos:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu)(p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu) = \frac{1}{2}(p_\mu p^\mu)(q_\nu q^\nu). \tag{31}$$

Consideremos os casos $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} < 0$ e $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$, que correspondem, respectivamente, aos campos do tipo Coulomb e de radiação.

• $\underline{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} < 0}$: Da equação (31), um dos vetores deve ser tipo tempo e, o outro, tipo espaço. No entanto, no plano definido por p e q, deve existir um par de vetores l_μ e n_μ, com,

$$F_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu, \tag{32}$$

tais que,

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = 0, \qquad l_\mu n^\mu = \alpha \neq 0, \tag{33}$$

tendo em vista que

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu)(l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu) = -2\alpha^2 < 0. \tag{34}$$

• $\underline{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0}$: Neste caso, um dos vetores deve ser nulo e o outro, tipo espaço (uma vez que, vetores tipo tempo e nulos ou dois vetores nulos independentes não são ortogonais). Assim, temos:

$$F_{\mu\nu} = l_\mu a_\nu - l_\nu a_\mu, \tag{35}$$

de maneira que,

$$l_\mu l^\mu = 0, \qquad a_\mu a^\mu > 0, \qquad l_\mu a^\mu = 0. \tag{36}$$

Agora, consideremos o problema de autovalor de $F_{\mu\nu}$ e classifiquemos as possíveis soluções:

$$F_{\mu\nu}k^\nu = \lambda k_\mu. \tag{37}$$

Para o caso em que $F_{\mu\nu}$ é tipo tempo, temos as soluções (o caso $\lambda = 0$ é duplamente degenerado):

$$\lambda = \pm l_\mu n^\mu \Rightarrow k_\mu = l_\mu \text{ ou } n_\mu, \tag{38}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow k^\nu l_\nu = k^\nu n_\nu = 0,\; k^\mu k_\mu > 0. \tag{39}$$

Já no caso em que $F_{\mu\nu}$ é nulo, há duas soluções ($\lambda = 0$) duplamente degeneradas:

$$\lambda = 0 \Rightarrow k^\nu l_\nu = k^\nu a_\nu = 0,\ k^\mu k_\mu > 0 \text{ ou } k_\mu = A l_\mu \\ (A = \text{constante}). \tag{40}$$

O primeiro caso, que possui duas soluções, é chamado caso não degenerado, se refere ao campo de Coulomb. Nele, denotamos o tensor do campo como ${F_{\mu\nu}}^{[1,1]}$. Já o segundo caso, dotado de apenas uma solução, que se refere ao campo de radiação, é chamado de caso degenerado. Neste último, denotamos o tensor do campo como ${F_{\mu\nu}}^{[2]}$. Assim, o campo retardado de uma fonte isolada possui o seguinte comportamento assintótico:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{r}{F_{\mu\nu}}^{[2]} + \frac{1}{r^2}{F_{\mu\nu}}^{[1,1]} + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{41}$$

De maneira análoga ao caso construído acima para o tensor eletromagnético, é possível construir uma classificação algébrica do tensor de curvatura de Weyl. Na relatividade geral, o tensor de Weyl descreve a parte do campo gravitacional que se propaga no vácuo e é detectável fora de fontes, como ondas gravitacionais, por exemplo. O tensor de Weyl é definido (em 3+1 dimensões), em termos do tensor de Riemann (ou tensor de curvatura) $R_{\lambda\mu\nu\rho}$, da seguinte maneira:

$$C_{\mu\nu\kappa\lambda} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} + \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}R_{\nu\kappa} - g_{\mu\nu}R_{\nu\lambda} + g_{\nu\kappa}R_{\mu\nu} \\ - g_{\nu\lambda}R_{\mu\kappa}) + \frac{R}{6}(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} - g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda}), \tag{42}$$

possuindo as seguintes propriedades,

$$C^\mu{}_{\nu\mu\lambda} = 0, \tag{43}$$

$$C_{\mu\nu\kappa\lambda} = -C_{\nu\mu\kappa\lambda} = -C_{\mu\nu\lambda\kappa} = C_{\kappa\lambda\mu\nu}, \tag{44}$$

$$C_{\mu\nu\kappa\lambda} + C_{\mu\lambda\nu\kappa} + C_{\mu\kappa\lambda\nu} = 0. \tag{45}$$

As simetrias dadas por (44) motivam a definição de uma matriz 6×6 C_{AB}, que chamaremos de matriz de Weyl [9, 14], onde A e B são índices que representam os bivetores[4] formados pelos pares de índices antissimétricos do espaço-tempo $[\mu\nu]$ e $[\kappa\lambda]$, definidos na Tabela 1.

De acordo com (44), vê-se que $C_{AB} = C_{BA}$, fato que permite escrever C_{AB} com o auxílio das sub-matrizes 3×3 M, Q e N, onde M e Q são matrizes simétricas,

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} M & N \\ N^T & Q \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Tabela 1: Relação entre índices no espaço dos bivetores e índices no espaço-tempo.

A	1	2	3	4	5	6
$[\mu\nu]$	[01]	[02]	[03]	[23]	[31]	[12]

[4]Um bivetor consiste em um tensor de segunda ordem, $A_{\mu\nu}$, antissimétrico (i.e., $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$). O espaço de todos os bivetores em um dado ponto constitui um espaço vetorial 6-dimensional.

Utilizando a identidade (45) na notação de bivetores, verifica-se que Tr $N = 0$.

Para impor a condição (43) e estabelecer as respectivas restrições em M, Q e N, definiremos a métrica em termos de bivetores a partir do seguinte tensor:

$$G^{\mu\nu\kappa\lambda} = g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} - g^{\nu\kappa}g^{\mu\lambda}; \tag{47}$$

claramente, devido à simetria de $g^{\mu\nu}$, $G^{\mu\nu\kappa\lambda} = G^{\kappa\lambda\mu\nu}$, o que leva a identificá-lo como a métrica no espaço dos bivetores, G^{AB}. De forma similar, pode-se definir a métrica covariante, G_{AB}, através da expressão $G_{AB}G^{BC} = \delta^C_A$. Durante o processo de levantamento do índice para obter $C^A{}_B = G^{AD}C_{DB}$, as componentes das matrizes M, Q e N são modificadas de maneira imprevisível devido à arbitrariedade de $g_{\mu\nu}$; para contornar esse problema, é possível escolher um referencial lorentziano, onde a métrica se torna a métrica de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. É importante ressaltar que as coordenadas dadas por $\eta_{\mu\nu}$ são válidas apenas numa vizinhança do referencial mencionado; no entanto, pode ser mostrado que a construção de bivetores mantém a invariância de Lorentz, de forma que a classificação que será construída no decorrer da seção será invariante sob transformações de Lorentz.

No referencial lorentziano, a métrica do espaço dos bivetores assume a seguinte forma:

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{pmatrix} = G_{AB}, \tag{48}$$

onde I_3 é a matriz identidade 3×3. Consequentemente, têm-se que,

$$C^A{}_B = \begin{pmatrix} M & N \\ -N^T & -Q \end{pmatrix}; \tag{49}$$

realizando alguns cálculos, a condição (43) impõe as restrições $Q = -M$, Tr $M = 0$ e $N = N^T$, de tal forma que a matriz de Weyl, C_{AB}, assume a forma:

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \tag{50}$$

onde M e N são matrizes simétricas com traço nulo.

Para dar continuidade à classificação, consideraremos o problema de autovalor associado à matriz de Weyl:

$$C^A{}_B F^B = \lambda F^A, \tag{51}$$

onde o autovalor λ é um escalar e F^A é o autovetor 6-dimensional associado. Da mesma forma que se pode dividir o tensor eletromagnético, $F^{\mu\nu}$, em uma parte elétrica e outra magnética, o bivetor F^A será divido em duas partes tridimensionais, uma "elétrica"e uma "magnética",

$$F^A = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \tag{52}$$

embora $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ não sejam necessariamente reais, visto que, em geral, os autovetores F^A são complexos.

Utilizando a decomposição dada na Eq.(52), a Eq.(51) separa-se em dois pares de equações tridimensionais,

$$M\mathbf{E} + N\mathbf{B} = -\lambda\mathbf{E}, \tag{53}$$

$$-N\mathbf{E} + M\mathbf{B} = -\lambda\mathbf{B}. \tag{54}$$

Apesar de nenhuma dessas equações constituir separadamente um problema de autovalor, podemos transformá-las em um tomando uma combinação linear adequada; multiplicando a Eq.(53) por k, somando à Eq.(54) e tomando $-k = 1/k \Leftrightarrow k = \pm i$, o seguinte sistema é obtido,

$$(M + iN)(\mathbf{E} - i\mathbf{B}) = -\lambda(\mathbf{E} - i\mathbf{B}) \tag{55}$$

$$(M - iN)(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = -\lambda(\mathbf{E} + i\mathbf{B}). \tag{56}$$

Tomando o complexo conjugado da Eq.(56), definindo a matriz de Petrov como a seguinte matriz simétrica de traço nulo $P := M + iN$ e as notações $\mathbf{u} := \mathbf{E} - i\mathbf{B}$ e $\omega := -\lambda$, podemos reescrever as equações (55) e (56) na forma:

$$P\mathbf{u} = \omega\bar{\mathbf{u}}, \tag{57}$$

$$P\bar{\mathbf{u}} = \bar{\omega}\bar{\mathbf{u}}. \tag{58}$$

Como a matriz de Weyl é real, suas auto-soluções (λ, F^A) necessariamente virão em pares complexo conjugados, i.e., $(\bar{\lambda}, \bar{F}^A)$ também é uma auto-solução; dessa forma, pode-se entender as equações (57) e (58) como o postulado de que $(\omega, \mathbf{u})$ e $(\bar{\omega}, \bar{\mathbf{u}})$ devem satisfazer ao mesmo problema tridimensional de autovalor, $P\mathbf{u} = \omega\mathbf{u}$. Porém, devido à natureza complexa de P, seus autovalores, ω, por sua vez, não vêm necessariamente em pares complexo conjugados, o que significa que se ω é um autovalor mas $\bar{\omega}$ não, então (58) deve ser satisfeita trivialmente por $\mathbf{u} = 0$. Assim vemos que, no máximo, 6 possíveis auto-soluções (λ, F^A) dão origem a, no máximo, três auto-soluções $(\omega, \mathbf{u})$ não triviais de P com, no máximo, três auto-soluções triviais $(\bar{\omega}, 0)$.

O resultado recíproco de que as auto-soluções de P determinam as de $C^A{}_B$ também pode ser prontamente estabelecido: se $(\omega, \mathbf{u})$ é uma das três possíveis auto-soluções de P, então, a solução $(\bar{\omega}, \mathbf{v})$ é obtida de forma não trivial (i.e., $\mathbf{v} \neq 0$) somente se $\bar{\omega}$ é também autovalor de P. Das duas soluções correspondentes $(\omega, \mathbf{u})$ e $(\bar{\omega}, \mathbf{v})$, pode-se sempre construir uma auto-solução (λ, F^A) da matriz de Weyl, $C^A{}_B$, através de:

$$\lambda = -\omega, \quad F^A = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{u} + \bar{\mathbf{v}} \\ i[\mathbf{u} - \bar{\mathbf{v}}] \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Podem ser geradas, no máximo, três auto-soluções do tipo (λ, F^A) que, juntamente com seus complexos conjugados, $(\bar{\lambda}, \bar{F}^A)$, consistem em, no máximo, seis auto-soluções da matriz de Weyl, $C^A{}_B$. Nota-se então que as classificações das matrizes de Weyl, $C^A{}_B$, e de Petrov, P, são equivalentes; neste artigo, devido à maior simplicidade, será feita a classificação de P.

Tendo alcançado o problema de autovalor desejado, a classificação algébrica da matriz de Petrov (e, consequentemente, da matriz de Weyl) pode ser feita de acordo com a degenerescência de seus autovalores e autovetores, conforme a Tabela 2. Como exemplo, os autovalores de uma matriz de Petrov de classe 1 devem satisfazer à condição $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ e os de classe 2, a condição $2\omega_1 + \omega_2 = 0$; as condições referentes às outras classes possuem maior complexidade e não serão dadas, estando disponíveis em [14].

Por fim, o tensor de curvatura de uma distribuição de matéria isolada pode ser escrito conforme a seguinte expansão:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{r}\mathrm{N}_{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{r^2}\mathrm{III}_{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{r^3}\mathrm{D}_{\kappa\lambda\mu\nu} + \dots \tag{60}$$

Comparando com a equação (41), podemos notar que o tensor $\mathrm{N}_{\kappa\lambda\mu\nu}$ corresponde a uma solução radiativa das equações de campo.

3. O método

O *Ansatz* de Kerr-Schild consiste em aplicar a seguinte transformação[5]:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2H\ell_\mu\ell_\nu; \tag{61}$$

onde, H é uma função escalar e ℓ_μ é um vetor restringido pelas seguintes condições:

$$\ell_\mu\ell^\mu = 0, \tag{62}$$

$$\ell_{\mu;\nu}\ell^\nu = 0. \tag{63}$$

A grande característica do método está nas condições dadas pelas equações (62) e (63); o fato do vetor ℓ_μ ser nulo e geodésico torna as equações de campo lineares na função H, fato que torna as equações diferenciais muito mais tratáveis do ponto de vista matemático. Além

[5]Dependendo da fonte na literatura, é possível encontrar a transformação com sinal negativo, no entanto, tal fato não é crítico na aplicação do método.

Tabela 2: Classes algébricas de P e relação com as classes de Petrov (L.I. significa linearmente independente).

Classe	Mult. dos autovalores	Mult. dos autovetores	Classe de Petrov
1	3	3 autovetores L.I.	I
2	2 (um degenerado)	3 autovetores L.I.	D
3	2 (um degenerado)	2 autovetores L.I.	II
4	1 (degenerado)	3 autovetores L.I.	N
5	1 (degenerado)	2 autovetores L.I.	III
6	1 (degenerado)	1 autovetor L.I.	O

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0350

disso, apesar de em um primeiro momento o método ser perturbativo, a nova métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é de fato uma solução exata das equações de campo linearizadas.

A transformação foi originalmente proposta pelo físicos Andrzej Trautman e Ivor Robinson, em 1962 [15], baseada na ideia de que ondas gravitacionais, em analogia às ondas eletromagnéticas, pudessem transportar informação através do espaço e que, a nova métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ se comportasse assintoticamente como campos de radiação.

3.1. A transformação original

Originalmente, a transformação possui a seguinte forma [11]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2H\ell_\mu\ell_\nu, \tag{64}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, H é uma função escalar e ℓ_μ é um vetor nulo com respeito a $g_{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$, de maneira que:

$$g_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = \eta_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = 0, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - 2H\ell^\mu\ell^\nu. \tag{65}$$

Podemos verificar que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\ell^\beta\ell^\gamma = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\ell_\alpha\ell^\gamma = 0, \qquad \sqrt{-g} = 1. \tag{66}$$

A partir da Eq.(66), temos:

$$\ell_{\alpha;\beta}\ell^\beta = \ell_{\alpha,\beta}\ell^\beta, \qquad \ell_{\alpha;\beta}\ell^\beta = \ell_{\alpha,\beta}\ell^\beta, \tag{67}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\ell_\alpha = -(H\ell_\beta\ell_\gamma)_{;\alpha}\ell^\alpha, \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\ell^\beta = (H\ell^\alpha\ell_\gamma)_{;\beta}\ell^\beta; \tag{68}$$

onde, o ponto e vírgula representa a derivada covariante com relação às coordenadas no espaço-tempo descrito por $g_{\mu\nu}$, e a vírgula, a derivada em relação às coordenadas do espaço-tempo descrito por $\eta_{\mu\nu}$. Juntando a definição do tensor de Ricci em termos dos símbolos de Christoffel com as relações anteriores, temos:

$$R_{\alpha\beta}\ell^\alpha\ell^\beta = -2Hg^{\alpha\beta}(\ell_{\beta;\gamma}\ell^\gamma)(\ell_{\alpha;\sigma}\ell^\sigma) = 8\pi T_{\alpha\beta}\ell^\alpha\ell^\beta\,, \tag{69}$$

que nos mostra que, $\ell^\alpha{}_{;\beta}\ell^\beta = 0 \Leftrightarrow T_{\alpha\beta}\ell^\alpha\ell^\beta = 0$.

Também é possível verificar que o tensor de Ricci obedece à seguinte equação de autovalor [11]

$$R_{\alpha\beta}\ell^\beta = \left[2\ell_{[\gamma;\sigma]}\ell^{\gamma\sigma}H + (\ell^\gamma H_{,\sigma}\ell^\sigma)_{;\gamma}\right]\ell_\alpha; \tag{70}$$

que, por intermédio das equações de campo, implica que o vetor ℓ^α é um autovetor do tensor de energia-momento.

Assim, podemos verificar que [16]:

$$\ell_\gamma\ell^\nu C^\gamma{}_{\mu\nu\alpha} = A\ell_\mu\ell_\alpha, \tag{71}$$

onde, A é um escalar dado em termos de ℓ_μ, H e $\eta_{\mu\nu}$; logo, temos que o vetor ℓ_μ é um autovetor do tensor de Weyl, fato que implica que um espaço-tempo de Kerr-Schild é algebricamente especial.

Sob as condições que apresentamos, as equações de campo assumem a seguinte forma linear [16]:

$$8\pi T^\nu{}_\lambda = \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}(\eta^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha}g^{\mu\beta} + \eta^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})_{,\alpha\beta}\,. \tag{72}$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades dos subcasos possíveis para métricas de Kerr-Schild. Cabe observar que as deduções dessas propriedades possuem um certo grau de complexidade e não serão apresentadas; o leitor interessado é remetido às referências originais, indicadas no decorrer da seção.

Para construir a classificação, será utilizada uma base ortonormal específica[6]; essa base é construída a partir de dois vetores reais, l_μ e n_μ, e um par de vetores complexo conjugados, m_μ e $\bar{m}_\mu$ (uma forma de construir m_μ é a partir de dois vetores reais unitários, a_μ e b_μ, tipo espaço, definindo $m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_\mu - ib_\mu]$), que satisfaçam as seguintes propriedades: $l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu\bar{m}^\mu = 0$, $l_\mu n^\mu = -m_\mu\bar{m}^\mu = -1$ e $l_\mu m^\mu = l_\mu\bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu\bar{m}^\mu = 0$. Também será utilizado o coeficiente $\rho = -m^\alpha\bar{m}^\beta l_{\alpha;\beta}$.

3.1.1. Campos de Vácuo

• *Caso $\rho \neq 0$*: Para o caso em que ρ é não-nulo, temos as seguintes propriedades para uma solução de Kerr-Schild das equações de Einstein no vácuo:

(I) A solução é algebricamente especial, de forma que o vetor nulo ℓ_μ é autovetor do tensor de Weyl e, consequentemente, livre de torção e geodésico.

(II) Ela será de tipo II ou D na classificação de Petrov. Soluções do tipo III ou N não podem ocorrer.

(III) É admitido pelo menos um grupo uniparamétrico de isometrias, com vetor de Killing,

$$\xi = (c, p, \bar{q}, q), \tag{73}$$

dado no sistema de coordenadas $(u, v, \zeta, \bar{\zeta})$, construído a partir da base original $\{l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu\}$, com c e p constantes reais e, q e $\bar{q}$ constantes complexas.

• *Caso $\rho = 0$*: Se ρ é nulo, a métrica não será expansível e não possuirá torção[7], além de necessariamente ser de tipo N na classificação de Petrov.

[6] Em relatividade geral, a abordagem de escolher uma base específica no espaço-tempo ao invés de uma base coordenada, representada pela métrica, dá origem ao que é conhecido como formalismo das tétrades. A escolha específica de uma base composta por dois vetores reais e um par de vetores complexo conjugados é conhecida como formalismo de Newman-Penrose [11].

[7] Expansão se refere à taxa com que o volume de uma pequena nuvem, inicialmente esférica, de partículas de teste aumenta com respeito ao tempo próprio da partícula no centro da nuvem. Torção representa a tendência de um corpo esférico se distorcer em uma forma elipsoidal.

3.1.2. Campos de Einstein-Maxwell

• *Caso* $\rho \neq 0$: Neste caso em que há expansão não nula, as soluções de Kerr-Schild para as equações de Einstein-Maxwell possuem as seguintes propriedades [4]:

(I) A nova métrica é algebricamente especial e o vetor nulo, ℓ_μ, é autovetor do tensor de Weyl e do tensor eletromagnético, sendo livre de torção.

(II) Possui pelo menos um grupo uniparamétrico de isometrias, com vetor de Killing:

$$\xi = (c, p, \bar{q}, q), \tag{74}$$

(III) As soluções de Kerr-Newman e Reissner-Nordström se encaixam nesta categoria.

• *Caso* $\rho = 0$: Métricas de Kerr-Schild com vetor nulo não expansível e geodésico serão, ou de tipo N, ou de tipo O, na classificação de Petrov [17].

3.1.3. Campos de Radiação Pura

Neste caso, são considerados tensores de energia-momento com a forma $T_{\mu\nu} = \Phi^2 \ell_\mu \ell_\nu$, sendo Φ uma função arbitrária. Em todo caso, o espaço-tempo será algebricamente especial, com a diferença de que [11]:

• *Caso* $\rho \neq 0$: Para ρ não-nulo, a métrica será, na classificação de Petrov, tipo II ou tipo N.

• *Caso* $\rho = 0$: Para ρ nulo, a métrica será tipo N.

3.2. A transformação generalizada

Na transformação generalizada, o *Ansatz* toma a seguinte forma:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2H\ell_\mu \ell_\nu, \tag{75}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é uma métrica arbitrária que seja solução das equações de campo. A transformação dada pela equação (75) deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - 2H\ell^\mu \ell^\nu, \qquad \sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g}. \tag{76}$$

Se definirmos,

$$D^\alpha_{\beta\gamma} = \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} =$$

$$\begin{aligned} &= 2H\ell^\alpha \ell^\sigma (H\ell_\beta \ell_\gamma)_{;\sigma} + g^{\alpha\sigma}[(H\ell_\sigma \ell_\beta)_{;\gamma} \\ &+ (H\ell_\sigma \ell_\gamma)_{;\beta} - (H\ell_\beta \ell_\gamma)_{;\sigma}], \end{aligned} \tag{77}$$

obtemos a seguinte expressão para o tensor de Ricci:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + D^\omega_{\alpha\beta;\omega} - D^\omega_{\sigma\beta} D^\sigma_{\alpha\omega}, \tag{78}$$

onde as derivadas covariantes, denotadas pelo ponto e vírgula, são tomadas em relação à métrica $g_{\mu\nu}$. Também é possível relacionar as bases de ambas as métricas [18].

Sejam V e $\tilde{V}$ os espaços definidos por $g_{\mu\nu}$ e $\tilde{g}_{\mu\nu}$, respectivamente, temos as seguintes propriedades [11, 18]:

(I) Se V e $\tilde{V}$ são soluções de vácuo, então ℓ é geodésico com respeito a ambos.

(II) Se ℓ é um vetor geodésico, então, as componentes mistas do tensor de Ricci,

$$\begin{aligned} \tilde{R}^\alpha{}_\beta &= R^\alpha{}_\beta - 2H\ell^\alpha \ell^\iota R_{\beta\iota} + g^{\alpha\iota} g^{\mu\nu}[(H\ell_\nu \ell_\beta)_{;\iota} \\ &+ (H\ell_\nu \ell_\iota)_{;\beta} - (H\ell_\beta \ell_\iota)_{;\nu}]_{;\mu}, \end{aligned} \tag{79}$$

são lineares em H.

(III) Se ℓ é autovetor de ambos os tensores de Weyl (de V e $\tilde{V}$), então ele é geodésico. E, se ℓ é geodésico e V é algebricamente especial, com ℓ sendo um autovetor repetido do tensor de Weyl correspondente, então, $\tilde{V}$ tem as mesmas propriedades.

(IV) Se uma base $\{l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu\}$ é transportada paralelamente ao longo de ℓ (que, por sua vez, pode ser um dos vetores da base) em V, o mesmo é válido para $\tilde{V}$.

Algumas outras propriedades para casos específicos são apresentadas em [11]; além delas, uma generalização do resultado apresentado por Gürses e Gürsey em [16] para o caso de uma métrica abitrária é apresentado por Gergely em [19].

4. Exemplos

A seguir, apresentaremos a obtenção da solução de Reissner-Nordström partindo da métrica de Minkowski como uma aplicação da transformação original e, como exemplo da transformação generalizada, a obtenção da solução de Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) carregada a partir da solução BTZ sem carga.

4.1. Solução de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström descreve um buraco negro com massa e carga elétrica. Ela foi descoberta por Hans Reissner em 1916 e Gunnar Nordström em 1918, de forma independente, resolvendo as equações de Einstein-Maxwell, que descrevem o campo gravitacional de um corpo carregado, esfericamente simétrico. A fonte do tensor de energia-momento, neste caso, corresponde a um campo elétrico com essa simetria, como veremos a seguir.

Usando a métrica de Minkowski na forma $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$, onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta d\varphi^2$, obtemos o seguinte vetor nulo a partir das equações (62) e (63):

$$\ell_\mu = (-E, E, 0, 0), \tag{80}$$

onde E é uma constante; é trivial a verificação das condições dadas.

Aplicando o método, a nova métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ ficará com a seguinte forma:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + 2H(r)E^2 & -2H(r)E^2 & 0 & 0 \\ -2H(r)E^2 & 1 + 2H(r)E^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Calculando as componentes não nulas do tensor de Einstein, temos:

$$
\begin{aligned}
G^t{}_t &= -\frac{2E^2}{r^2}\left(rH'(r)+H(r)\right),\\
G^r{}_r &= -\frac{2E^2}{r^2}\left(rH'(r)+H(r)\right),\\
G^\theta{}_\theta &= -\frac{E^2}{r}\left(rH''(r)+2H'(r)\right),\\
G^\varphi{}_\varphi &= -\frac{E^2}{r}\left(rH''(r)+2H'(r)\right). \qquad (81)
\end{aligned}
$$

Utilizando o tensor de energia-momento das equações de Einstein-Maxwell, dado por:

$$
T^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi}\left(F^{\mu\alpha}F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right), \qquad (82)
$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético que, no caso em questão, consiste no campo elétrico de uma carga pontual Q:

$$
F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Q}{r^2} & 0 & 0 \\ -\frac{Q}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
$$

obtemos as seguintes componentes:

$$
T^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix} -\frac{Q^2}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2}{2r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2}{2r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q^2}{2r^4} \end{pmatrix}.
$$

Usando as equações de campo para encontrar a função H, temos, por exemplo, analisando a componente temporal:

$$
-\frac{2E^2}{r^2}\left(rH'(r)+H(r)\right) = -\frac{Q^2}{2r^4}, \qquad (83)
$$

de onde obtemos $H(r) = -\frac{1}{4}\frac{Q^2}{E^2r^2} + \frac{C}{r}$ (sendo C uma constante), e que satisfaz da mesma maneira as outras componentes. Substituindo na métrica, temos:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \left(-1 - \frac{1}{2}\frac{EQ^2}{r^2} + \frac{2CE^2}{r}\right)dt^2 + \\
&\quad \left(1 - \frac{1}{2}\frac{EQ^2}{r^2} + \frac{2CE^2}{r}\right)dr^2 \\
&+ r^2 d\Omega^2 - 4E^2\left(-\frac{1}{4}\frac{Q^2}{Er^2} + \frac{C}{r}\right)dtdr. \qquad (84)
\end{aligned}
$$

Aplicando a transformação $dt = d\hat{t} + u(r)dr$, com

$$
u(r) = -\frac{Cr - Q^2}{Cr - Q^2 - r^2},
$$

e fazendo $M = E^2C$, $Q'^2 = Q^2/2$, temos:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)d\hat{t}^2 \\
&+ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \qquad (85)
\end{aligned}
$$

que é a solução de Reissner-Nördstrom [20, 21].

4.2. Solução BTZ carregada

A solução BTZ descreve um buraco negro com massa e momento angular em um espaço-tempo tridimensional com constante cosmológica negativa, o chamado espaço Anti de Sitter (AdS). Foi descoberta por Máximo Bañados, Claudio Teitelboim e Jorge Zanelli em 1992 [22]. Uma das peculiaridades dessa solução é que ela não possui uma singularidade de curvatura na origem, como usualmente acontece com todo buraco negro em Relatividade Geral. De outro lado, embora o nosso universo não tenha três dimensões, o estudo da gravidade tridimensional é importante devido à sua simplicidade, sendo um laboratório útil para a análise de questões importantes em gravitação. Apesar do campo gravitacional nao ter graus de liberdade que se propaguem, a estrutura assintótica do espaço-tempo em (2+1) dimensões é extraordinariamente mais rica que aquela em (3+1) dimensões. É por esse motivo que os buracos negros tridimensionais tem desempenhado um papel importante na conjectura AdS/CFT [8] e nos cenários de cosmologia de branas [9].

A métrica BTZ possui a seguinte forma:

$$
ds^2 = -N^2dt^2 + N^{-2}dr^2 + r^2(N^\varphi dt + d\varphi)^2, \qquad (86)
$$

onde a função lapso e o desvio angular são, respectivamente,

$$
N^2(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \qquad (87)
$$

$$
N^\varphi(r) = -\frac{J}{2r^2}, \qquad (88)
$$

com $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. A função $N(r)$ se anula para dois valores de r, dados por:

$$
r_\pm = l\left\{\frac{M}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2}\right]\right\}^{1/2},
$$

onde r_+ é o horizonte de eventos do buraco negro.

Usando essa métrica em (62) e (63), obtemos o seguinte vetor nulo:

$$
\ell_\mu = \left(-E, \frac{\sqrt{E^2r^2 - L^2f(r)}}{rf(r)}, L\right). \qquad (89)
$$

Para obter a solução com carga, anularemos a componente angular; assim, a equação (89) se torna

$$
L = 0 \Rightarrow \ell_\mu = \left(-E, \frac{E}{f(r)}, 0\right). \qquad (90)
$$

[8]A conjectura AdS/CFT (AdS por Anti de Sitter e CFT pelas siglas em inglês de Teoria de Campos Conforme) é uma forma generalizada do chamado princípio holográfico, onde a ideia central é que toda a informação de certo volume está codificada na borda dele.

[9]Estes cenários, inspirados em teoria de cordas, postulam que o nosso universo é uma membrana (brana) imersa num espaço-tempo com mais dimensões onde somente a gravidade tem acesso.

A nova métrica será dada por $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2H(r)\ell_\mu\ell_\nu$, e terá as seguintes componentes:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) + 2H(r)E^2 & -2H(r)\frac{E^2}{f(r)} & 0 \\ -2H(r)\frac{E^2}{f(r)} & \frac{1}{f(r)} + 2H(r)\frac{E^2}{f^2(r)} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

As componentes das equações de campo correspondentes são:

$$\begin{aligned} G^t{}_t &= \frac{1}{\ell^2} - \frac{E^2}{r}H'(r) \Rightarrow T^t{}_t \propto -\frac{E^2}{r}H'(r)\,, \\ G^r{}_r &= \frac{1}{\ell^2} - \frac{E^2}{r}H'(r) \Rightarrow T^r{}_r \propto -\frac{E^2}{r}H'(r)\,, \\ G^\varphi{}_\varphi &= \frac{1}{\ell^2} - E^2H''(r) \Rightarrow T^\varphi{}_\varphi \propto -E^2H''(r)\,. \end{aligned} \tag{91}$$

O termo $1/\ell^2$ no tensor de Einstein vem do fato da solução se comportar assintoticamente como um espaço-tempo AdS, o que leva as equações de campo a terem uma constante cosmológica; portanto, o tensor de energia-momento deve ser igual ao tensor de Einstein menos o termo relacionado à constante cosmológica.

No caso estudado, o tensor eletromagnético será aquele de uma carga pontual em (2+1) dimensões:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Q}{r} & 0 \\ -\frac{Q}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, teremos o seguinte tensor de energia-momento:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix} -\frac{Q^2}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2}{2r^2} \end{pmatrix}$$

Desse modo, as equações de campo com constante cosmológica negativa, dadas por:

$$G^\mu{}_\nu - \frac{1}{\ell^2} = 8\pi T^\mu{}_\nu, \tag{92}$$

produzem $H(r) = \frac{Q^2}{2E^2}\ln(r/r_0)$, sendo r_0 uma constante introduzida já na solução original de forma a evitar a divergência da métrica para $r \to \infty$. Dessa maneira, a métrica assumirá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left[f(r) - Q^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]dt^2 \\ &+ \left[\frac{1}{f(r)} + \frac{Q^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{f(r)^2}\right]dr^2 \\ &+ r^2d\varphi^2 - \frac{2Q^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{f(r)}drdt. \end{aligned} \tag{93}$$

Aplicando a transformação de coordenadas $dt = d\hat{t} + u(r)dr$, onde,

$$u(r) = \frac{-Q^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\left[f(r)\left(f(r) - Q^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right]},$$

o termo cruzado $dr\ dt$ se anula, tal que a métrica se torna:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left[f(r) - Q^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]d\hat{t}^2 \\ &+ \frac{dr^2}{f(r) - Q^2\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} + r^2d\varphi^2, \end{aligned} \tag{94}$$

que é a forma usual da solução BTZ com carga, conforme foi publicada originalmente em [23].

5. Conclusão

O objetivo deste trabalho foi oferecer uma revisão simples e concisa do método de Kerr-Schild, bem como as diversas propriedades que motivam a sua aplicação no contexto da Relatividade Geral.

De fato, sua versatilidade motivou estudos com o objetivo de encontrar generalizações para um número maior de dimensões, bem como modificações na forma do *Ansatz* [24, 25] (como, por exemplo, a adição de um vetor tipo-espaço); ademais, o método tem sido aplicado com sucesso na cosmologia de branas [26]. Além disso, é possível entender o método como a deformação na métrica causada por uma transformação do espaço-tempo; tal deformação, por sua vez, gera um grupo contínuo de transformações que uma dada métrica pode admitir, os chamados grupos de Kerr-Schild [27,28], cujo estudo pode levar a um melhor entendimento da natureza matemática do método, bem como à construção de um grupo de objetos invariantes sob tais transformações e das simetrias de uma métrica.

Agradecimentos

Os autores agradecem as discussões esclarecedoras com N. Zamorano e J. Zapata. E. R. agradece o apoio financeiro do Programa Unificado de Bolsas da USP.

Referências

[1] A. Einstein, Annalen der Physik **354**, 769 (1916).
[2] R.P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).
[3] R.P. Kerr e A. Schild, in: *Proc. Sym. in Applied Math XVII*, editado por R. Finn (American Math. Soc., Providence, 1965), p. 199.
[4] G.C. Debney, R.P. Kerr e A. Schild, J. Math. Phys. **10**, 1842 (1969).
[5] G.C. Xanthopoulos, J. Math. Phys. **19**, 1607 (1978).
[6] A.H. Taub, Ann. of Physics **134**, 326 (1981).
[7] B. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009), p. 184.
[8] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity* (Wiley, Londres, 1972), p. 357.
[9] G.S. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity* (World Scientific Publishing Co. Pte., Singapore, 2004), p. 285.

[10] H. Stephani, *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity* (Cambridge University Press, Londres, 2004), p. 278.

[11] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers e E. Herlt, *Exact Solutions to Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Londres, 2003), p. 485.

[12] L. Ryder, *Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, Londres, 2009), p. 328.

[13] J. Plebanski e A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology* (Cambridge University Press, Londres, 2006), p. 58.

[14] T.M. Kalotas e C.J. Eliezer, American Journal of Physics **51**, 24 (1983).

[15] I. Robinson e A. Trautman, Proc. Roy. Soc. Lond. **A 265**, 463 (1962).

[16] M. Gürses e F. Gürsey, J. Math. Phys. **16**, 2385 (1975).

[17] G.C. Debney, J. Math. Phys. **15**, 992 (1974).

[18] A.H. Bilge e M. Gürses, in *Group theoretical methods in physics. Proceedings of the XI international colloquium*, editado por M. Serdaroğlu e E. İnönü (Springer-Verlag, Berlim, 1983), p. 252.

[19] L.Á. Gergely, Class. Quantum Grav. **19**, 2515 (2002).

[20] H. Reissner, Annalen der Physik **50**, 106 (1916).

[21] G. Nordström, Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk. **26**, 1201 (1918).

[22] M. Bañados, C. Teitelboim e J. Zanelli, Phys. Rev. D **69**, 1849 (1992).

[23] C. Martínez, C. Teitelboim e J. Zanelli, Phys. Rev. D **61**, 104013 (2000).

[24] T. Málek, *General Relativity in Higher Dimensions*. Tese de Doutorado, Charles University in Prague, Prague (2012).

[25] B. Ett, *Exact Solutions in Gravity: A journey through spacetime with the Kerr-Schild ansatz*. Tese de Doutorado, University of Massachusetts, Boston (2015).

[26] B. Cuadros-Melgar, S. Aguilar e N. Zamorano, Phys. Rev. D **81**, 126010 (2010).

[27] B. Coll, S.R. Hildebrandt e J.M.M. Senovilla, Gen. Rel. Grav. **33**, 649 (2001).

[28] S.R. Hildebrandt, Gen. Rel. Grav. **34**, 159 (2002).