

# Estudio teórico, numérico y experimental sobre la fuerza de arrastre en oscilaciones amortiguadas

Theoretical, numerical and experimental study about drag force in damped oscillations

César Medina\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, San Miguel de Tucumán, Argentina.

Recibida en 18 de Enero, 2024. Revisado en 08 de Mayo, 2024. Aceptado en 10 de Mayo, 2024.

Se discute el error conceptual de suponer que en oscilaciones amortiguadas la fuerza de arrastre es despreciable cuando, en realidad, es la componente prevalente en la mayoría de los casos prácticos. El problema se trata sobre bases teóricas, experimentales y numéricas. En el estudio experimental, se mide el decrecimiento de la amplitud en función del tiempo en cinco sistemas masa-resorte contruidos con cuerpos esféricos de distinto tamaño y densidad, y se plantea un nuevo método para la corrección del error de paralaje. En el análisis numérico, se desarrolla un modelo de amortiguamiento con un término semiempírico de ajuste variable. Los resultados muestran, en general, una muy buena concordancia entre los datos experimentales y el modelo numérico, demostrando que la fuerza de arrastre es la componente preponderante en el amortiguamiento de las oscilaciones, lo cual concuerda con predicciones teóricas basadas en el número de Reynolds. Se critica la falta de tratamiento de estas bases teóricas en los textos de uso habitual del ciclo básico universitario, y se previene sobre otro error conceptual, común en la práctica docente convencional, referido a procedimientos algebraicos y gráficos para controlar la validez de un modelo.

**Palabras clave:** Fuerza de arrastre, Oscilaciones amortiguadas, Cálculo numérico.

A conceptual error is discussed, which concerns the assumption that the drag force is insignificant in damped oscillations, when in point of fact, it is the prevalent component in most practical cases. The problem is posed on theoretical, experimental and numerical bases. On the experimental study, amplitude decrease vs. time is measured in five spring-mass systems, put together with spherical bodies of different sizes and densities, and a new method for correcting parallax error is proposed. On the numerical analysis, a damping model is developed with a semiempirical term of variable adjustment. Results present, in general, a very good agreement between experimental data and the numerical model, proving that drag force is the prevalent component in oscillation damping, which agrees with theoretical predictions based on Reynolds number. The lack of discussion of these theoretical bases among introductory physics texts is criticized, and another conceptual error, usually committed in teaching practice, is prevented, which concerns algebraic and graphic procedures for verifying models.

**Keywords:** Drag force, Damped oscillations, Numerical calculus.

## 1. Introducción

Uno de los contenidos de mayor valor formativo, en los cursos introductorios de física de nivel universitario, es el de oscilaciones mecánicas. En el enfoque didáctico actual de las carreras de ciencias exactas y tecnología, la enseñanza de este tema pone especial énfasis en los trabajos prácticos de laboratorio, que los estudiantes suelen realizar en grupos pequeños, empleando dispositivos sencillos tales como péndulos y sistemas masa-resorte. Este abordaje es eficaz para un aprendizaje significativo, y está en total acuerdo con las teorías didácticas constructivistas desarrolladas en las últimas décadas, las cuales cuentan con una amplia adhesión entre docentes, pedagogos, psicólogos y epistemólogos [1].

En efecto, los sistemas sencillos ofrecen a los estudiantes un enfoque fenomenológico y sensible donde pueden

visualizar con claridad sus características, distinguir sus variables relevantes y establecer asociaciones entre los símbolos matemáticos y sus correlatos físicos. Así, los formalismos matemáticos se revelan no sólo como una herramienta operatoria, sino también como un lenguaje científico natural y un instrumento de razonamiento y análisis, permitiendo estructurar una base sólida que facilitará abordar, en cursos posteriores, el estudio de sistemas oscilatorios más complejos o menos fenomenológicos, tales como las oscilaciones eléctricas en circuitos RLC (resistencia-inductor-capacitor), que también se estudian en el ciclo básico, y eventualmente otros muchos fenómenos del vasto espectro de las oscilaciones [2–4].

Dada la importancia formativa de estos contenidos, sería deseable que los libros de texto los desarrollaran en forma detallada, clara y precisa. Sin embargo, la mayoría de los textos de uso común, aun los de editoriales y autores reconocidos, tratan estos temas con poca claridad, ambigüedad y errores conceptuales [5].

\*Correo electrónico: [cfmedina@herrera.unt.edu.ar](mailto:cfmedina@herrera.unt.edu.ar)

En este trabajo se discutirá un error conceptual referido a la formulación de la fuerza de roce en oscilaciones amortiguadas. El mismo consiste en suponer que dicha fuerza está dada solamente por su componente de viscosidad, cuando en realidad, en una amplia mayoría de los casos prácticos, la componente de arrastre es mucho mayor.

En la siguiente sección se presenta el marco teórico de este estudio, analizando la importancia relativa de las dos componentes de la fuerza de roce (viscosidad y arrastre) en términos del número de Reynolds, y se plantean las ecuaciones de movimiento del sistema. En la sección 3, se detalla la metodología empleada en los experimentos y en el análisis numérico. En la sección 4, se exponen y discuten los resultados, y en la 5, se extraen las principales conclusiones.

## 2. Marco Teórico

### 2.1. La fuerza de roce

Cuando un cuerpo se mueve, en el seno de un fluido, sufre la acción de una fuerza de roce,  $F_r$ , que puede expresarse como la suma de dos términos: el de viscosidad,  $F_v$ , y el de arrastre,  $F_a$ :

$$F_r = F_v + F_a \quad (1)$$

El término de viscosidad representa la fricción propiamente dicha, está asociado a esfuerzos tangenciales a la superficie del móvil y es proporcional a la velocidad:

$$F_v = -bv \quad (2)$$

donde el signo negativo destaca la característica disipativa de la fuerza de roce, cuyo sentido es siempre opuesto al de la velocidad, y el factor  $b$  depende de la forma y tamaño del móvil y de la viscosidad del medio. En el caso de la esfera, la constante  $b$  está dada por la siguiente ecuación:

$$b = 6\pi\eta r \quad (3)$$

donde  $\eta$  representa el coeficiente de viscosidad del medio, y  $r$ , el radio de la esfera. Esta ecuación fue demostrada por Stokes en 1850 [6], forma parte de contenidos de mecánica de los fluidos que también se estudian en el ciclo básico, y es, por mucho, la expresión analítica más conocida y corroborada para la constante  $b$ . Por ello limitaremos este estudio al caso de cuerpos esféricos.

El término de arrastre,  $F_a$ , por su parte, representa la energía cinética transferida por el móvil al medio, está asociado a esfuerzos transversales a la superficie del móvil, y es proporcional al cuadrado de la velocidad [7]:

$$F_a = -\text{sgn}(v) \frac{1}{2} C_d \rho_f A v^2 \quad (4)$$

donde el factor  $\text{sgn}(v)$  representa el signo de la velocidad. Es necesario introducir este factor en el cálculo porque

el cuadrado de la velocidad será siempre positivo, pero la fuerza de arrastre debe tener siempre sentido opuesto al de la velocidad. El factor  $C_d$  representa el coeficiente de arrastre, que depende de la forma del móvil (de su perfil fluidodinámico), y en el caso de la esfera puede considerarse  $C_d = 0.4$  para un amplio rango del número de Reynolds [8], que se discutirá más adelante. Por su parte,  $\rho_f$  y  $A$  representan, respectivamente, la densidad del fluido y el área del móvil transversal a la dirección del movimiento. El factor  $1/2$  se introduce, convencionalmente, para destacar el hecho de que la fuerza de arrastre representa una transferencia de energía cinética [ $E_c = (1/2) mv^2$ ].

A pesar de que en la mayoría de los casos prácticos el término de arrastre,  $F_a$ , es mayor que el de viscosidad,  $F_v$ , en casi todos los textos de uso habitual en el ciclo básico universitario, se lo discute muy superficialmente, si acaso se lo menciona. La mayoría de los textos dice que, para velocidades pequeñas, la fuerza de roce puede considerarse proporcional a la primera potencia de la velocidad, es decir,  $F_r = F_v$ , sin ninguna aclaración sobre el término de arrastre y sin explicitar cuán pequeña debe ser la velocidad ni cómo se establece este orden de magnitud relativamente pequeño.

Muchos textos también dicen explícitamente, o dan a entender, que esta aproximación es válida en muchos casos prácticos; en tanto que otros simplemente se limitan a afirmaciones vagas tales como que es una aproximación “sencilla” o “de interés práctico”, sin hacer ninguna aclaración ni salvedad sobre el ámbito de aplicabilidad de la misma [9–15]. Esta falencia puede entenderse, hasta cierto punto, por el hecho de que no existe una solución analítica para la ecuación diferencial de movimiento que se obtiene al considerar los dos términos de la fuerza de roce; pero creemos que corresponde hacer, al menos, una salvedad sobre las limitaciones que implica despreciar la componente de arrastre, y explicar su importancia y significado.

### 2.2. El número de Reynolds

El número de Reynolds es un importante parámetro adimensional en la mecánica de los fluidos, y también recibe un tratamiento muy superficial en la mayoría de los textos de uso habitual del ciclo básico universitario. Su ecuación más convencional es:

$$Re = \frac{\rho_f v l}{\eta} \quad (5)$$

Donde  $l$  representa una longitud característica del sistema que se trate. En el caso de una esfera moviéndose en un fluido,  $l$  es simplemente el diámetro de la esfera.

En la mayoría de los textos introductorios de mecánica de los fluidos, se afirma que  $Re$  indica el límite entre el régimen laminar y el turbulento. Sin embargo, en los sistemas reales, no suele haber un límite franco sino distintos regímenes de transición hasta la turbulencia

generalizada, que en el caso de una esfera moviéndose en un fluido, corresponde a un valor de  $Re \sim 3,65 \cdot 10^5$  [16].

Además de indicar este valor crítico, el número de Reynolds da una medida de la proporción entre la fuerza de arrastre y la de viscosidad, y ésta es una propiedad que no suele explicarse en detalle en los textos introductorios ni en la práctica docente convencional del ciclo básico universitario.

Para el caso de una esfera, esta proporción queda:

$$\frac{F_a}{F_v} = \frac{\frac{1}{2}C_d\rho_f Av^2}{6\pi\eta rv} = \frac{\frac{1}{2}0,4\rho_f\pi\frac{d^2}{4}v^2}{6\pi\eta\frac{d^2}{4}v} \quad (6)$$

donde  $d$  representa el diámetro de la esfera. Simplificando,

$$\frac{F_a}{F_v} = \frac{0,4}{24} \frac{\rho_f vd}{\eta} = \frac{Re}{60} \quad (7)$$

Lo cual nos indica que para un valor  $Re = 60$ , muy inferior al del umbral de la turbulencia, la fuerza de arrastre ya es igual a la fuerza de viscosidad, y a partir de este valor, la fuerza de arrastre prevalecerá sobre la de viscosidad en la proporción dada por la Ec. (7).

Si consideramos, por ejemplo, una esfera de 3 cm de diámetro que se desplaza en el aire, cuyos valores de densidad y viscosidad, en condiciones ambientales típicas, son, respectivamente,  $\rho_{aire} = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  y  $\eta_{aire} = 1,8 \cdot 10^{-4}$  poises, se obtiene que  $F_a = F_v$  para una velocidad tan pequeña como  $v \sim 2,8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  (nótese que a esta velocidad promedio, un sistema masa-resorte que oscila con una amplitud de 10 cm tarda más de 14 segundos en realizar una oscilación). Cálculos sencillos como éste nos permiten advertir que, en una gran mayoría de casos prácticos de sistemas masa-resorte armados con pesas esféricas, el valor promedio de la velocidad supera ampliamente el correspondiente a  $Re = 60$ , y la fuerza de arrastre, lejos de ser despreciable, será claramente predominante durante las oscilaciones.

La expresión final de la fuerza de roce usada en este trabajo – deducida en el Apéndice A – es

$$F_r = -bv - \text{sgn}(v)\frac{1}{2}\left(0,4 + \frac{f_{aj}}{1 + \sqrt{Re}}\right)\rho_f Av^2 \quad (8)$$

donde  $f_{aj}$  representa un factor de ajuste variable que se discute en el mismo apéndice y en las secciones §4.1 y 5.

### 2.3. La ecuación de movimiento

A fin de obtener la ecuación de movimiento,  $x(t)$  (desplazamiento en función del tiempo), partimos de la ecuación de Newton:

$$F = m \cdot a \quad (9)$$

es decir,

$$-kx(t) - F_r = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (10)$$

En el primer miembro de la Ec. (10), el primer término representa la fuerza recuperadora del resorte que, como tal, tiende a restituir a la pesa a su posición de equilibrio y por ello tiene signo negativo (se opone al desplazamiento, el cual se mide respecto de la posición de equilibrio). La fuerza de roce, por su parte, también tiene signo negativo, como ya se dijo, por ser disipativa.

Una manera usual de reordenar la Ec. (10) es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{F_r}{m} \quad (11)$$

A partir de la Ec. (8), teniendo en cuenta que  $\text{masa} = \text{densidad} \cdot \text{volumen}$ , y el volumen de la esfera es  $V_{esfera} = (1/6) \cdot \pi \cdot d^3$ , el último término de la Ec. (11), para una esfera, queda:

$$\frac{F_r}{m} = \frac{6\pi\eta\frac{d}{2}}{\frac{1}{6}\pi d^3\rho_e}v + \text{sgn}(v)\frac{1}{2}\left(0,4 + \frac{f_{aj}}{1 + \sqrt{Re}}\right)\frac{\rho_f\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{1}{6}\pi d^3\rho_e}v^2 \quad (12)$$

Donde  $\rho_e$  representa la densidad de la esfera.

Luego de hacer las simplificaciones pertinentes, se obtiene:

$$\frac{F_r}{m} = 18\frac{\eta}{d^2\rho_e}v + \text{sgn}(v)0,75\left(0,4 + \frac{f_{aj}}{1 + \sqrt{Re}}\right)\frac{\rho_f}{d\rho_e}v^2 \quad (13)$$

Luego, el hecho de dividir en la masa nos revela que el efecto de frenado de la fuerza de viscosidad es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro y a la densidad de la esfera, en tanto que el efecto de la fuerza de arrastre es directamente proporcional al cociente entre la densidad del fluido y la de la esfera, e inversamente proporcional al diámetro de la esfera. Esto nos indica que, en términos relativos, los cuerpos grandes y densos serán menos frenados por la fuerza de roce que los cuerpos pequeños y de baja densidad. Esto es bastante intuitivo y concuerda con la experiencia: un proyectil de gran calibre, como una bala de cañón, pierde, por rozamiento, una fracción mucho menor de su energía cinética que la que pierde un balón lanzado por un rifle de aire comprimido, aunque ambos tengan la misma densidad. Asimismo, si una persona lanza con toda su fuerza una pequeña bocha de madera, y luego un globo del mismo tamaño, inflado con aire, comprobará que la bocha llega mucho más lejos.

A los fines de resolver por métodos numéricos la Ec. (10), que es de segundo orden, conviene replantearla como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (14)$$

y

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{F_r}{m} \quad (15)$$

En diferencias finitas, este sistema queda:

$$\Delta x = v\Delta t \quad (16)$$

y

$$\Delta v = -\Delta t \left( \frac{k}{m} x(t) + 18 \frac{\eta}{d^2 \rho_e} v + \operatorname{sgn}(v) 0,75 \left( 0,4 + \frac{f_{aj}}{1 + \sqrt{Re}} \right) \frac{\rho_f}{d \rho_e} v^2 \right) \quad (17)$$

### 3. Metodología

#### 3.1. Metodología experimental

##### 3.1.1. Construcción de los sistemas masa-resorte

Se armaron cinco sistemas masa-resorte: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; con esferas huecas que se rellenaron con distintas sustancias (v. Fig. 1). En los casos *a*, *b* y *c* se usaron esferas de plástico rígido que se rellenaron parcialmente con una mezcla de yeso y arena, de tal modo que esta mezcla quedó adherida al casquete inferior de la esfera y distribuida uniformemente con respecto a su eje vertical (esta simetría es importante a los fines de obtener oscilaciones estables en un dado eje). En el caso *d*, se usó una esfera del mismo tamaño que en el caso *c*, pero rellena completamente con agua; y en el caso *e*, una esfera de plástico flexible inflada con aire (una pelota de PVC inflada a una presión de aproximadamente 0,2 bar).

Ante la posibilidad de que al lector le parezca cuestionable que en los últimos dos casos las esferas no sean cuerpos rígidos, cabe hacer las siguientes aclaraciones.

El cumplimiento de los supuestos del modelo de oscilaciones no requiere que el cuerpo sea rígido en un sentido estricto. Debe notarse que aun en sistemas masa-resorte contruidos con cuerpos rígidos, el centro de gravedad del sistema no se mantiene estrictamente fijo en ningún sistema de coordenadas, pues en los sucesivos estiramientos y contracciones del resorte, su distribución de masa cambia constantemente. Sin embargo, sí es importante que se cumplan las siguientes condiciones:

El centro de masa del sistema debe mantenerse siempre en el eje de oscilación (en nuestro estudio, un eje vertical) y por debajo del resorte, para que la



**Figura 1:** Esferas usadas en los sistemas masa-resorte. Las esferas *a*, *b*, y *c* se rellenaron con una mezcla de yeso y arena; la *d*, con agua, y la *e*, con aire comprimido.

contribución de la masa de éste sea calculable de un modo sencillo. Esto se cumple fácilmente si la pesa es mucho más pesada que el resorte y la distribución de masa de la misma es simétrica respecto del eje de oscilación.

Para ello, no debe haber alteraciones en la distribución de la masa, lo cual implica que, si el relleno es un fluido, es prácticamente imprescindible que éste llene todo el espacio interior del cuerpo (para evitar desplazamientos de una zona a otra) y que sea incompresible (para evitar concentraciones o rarefacciones).

En los casos *d* y *e*, se cumplen estas condiciones, pues los fluidos llenan todo el espacio interior de las esferas y pueden considerarse incompresibles, ya que las velocidades de oscilación son mucho menores que la velocidad del sonido en los fluidos en cuestión [17]. Más aún, estos rellenos fluidos también pueden considerarse “no circulantes” [16], es decir, en el sistema de referencia de las esferas, sus rellenos pueden considerarse en reposo. Desde luego, siempre existen desplazamientos microscópicos de fluido, pero sus efectos son despreciables respecto de la distribución de masa y el gasto de energía.

Por su parte, las superficies de las esferas, son de plástico rígido en todos los sistemas excepto en el *e*, donde si bien se trata de una pelota de PVC flexible, debido a que está inflada a presión, conserva la forma esférica en todo momento durante las oscilaciones.

Hechas estas aclaraciones sobre las esferas, resta mencionar que los resortes se eligieron en forma cualitativa, emparejándolos con las esferas, de tal modo que fueran relativamente livianos y oscilaran con períodos cercanos a 1 o 2 segundos, para tomar las mediciones con facilidad. El cumplimiento de la ley de Hooke se controló en todos los casos para estiramientos mayores a 15 cm, con el método usual: aplicando pesas previamente medidas y midiendo los estiramientos que producían. Sin embargo, para mayor precisión, las constantes *k* de los resortes se determinaron a partir de los períodos.<sup>1</sup>

##### 3.1.2. Configuración del experimento y mediciones de amplitudes y períodos

Cada sistema masa-resorte se suspendió de un soporte con una escala milimetrada y un espejo. La base del soporte se asentaba en tres puntos de apoyo regulables para nivelarlo en dirección vertical. En nuestros experimentos el control de verticalidad se realizó mediante plomada y regla, por considerar que este método es más preciso que un nivel de burbuja.

La configuración del sistema de medición se completa con una cámara grabadora de video, pues es imposible

<sup>1</sup> Las constantes de los resortes se calcularon dentro del modelo numérico, despejándolas de la ecuación de los períodos amortiguados, pues éstos se midieron con mucha precisión, como se describe en §3.1.2, y consideramos conveniente mantener absoluta coherencia entre los datos de entrada del programa y las magnitudes asociadas a los mismos. Así, se tomó  $k = 4\pi^2 m/T^2 + b^2/4m$  donde este último término era despreciable en todos los casos.

medir con precisión las amplitudes de las oscilaciones a simple vista, en tiempo real. En nuestros experimentos, los videos se grabaron a una tasa de 30 cuadros por segundo y a resoluciones medias o altas, según las necesidades de enfoque de cada caso. Para cada sistema se midieron intervalos de 100 períodos, que se dividieron en subintervalos de 20 períodos, a los fines de controlar el isocronismo del fenómeno. Con estos subintervalos se calcularon promedios y errores cuadráticos medios, obteniéndose valores de períodos con errores relativos  $\varepsilon_T \approx 0.002$ .

Las amplitudes iniciales se tomaron en forma discrecional, tratando de no superar los 15 cm, a los fines de limitar la velocidad máxima para que la preponderancia de la fuerza de arrastre no fuera excesiva. Esta aproximación cualitativa también se debió a que, a priori, las posiciones de equilibrio y de amplitud máxima no podían conocerse exactamente, pues deben medirse en el video. De hecho, por una parte, era necesario controlar, visualmente y a través de la cámara de video, que las oscilaciones se produjeran en línea vertical y, por otra parte, consideramos que convenía que la amplitud inicial no fuera el estiramiento producido por la mano del operador, sino un máximo posterior, porque cuando la mano del operador libera el sistema, siempre puede haber roce con sus dedos que afecten la primera oscilación.

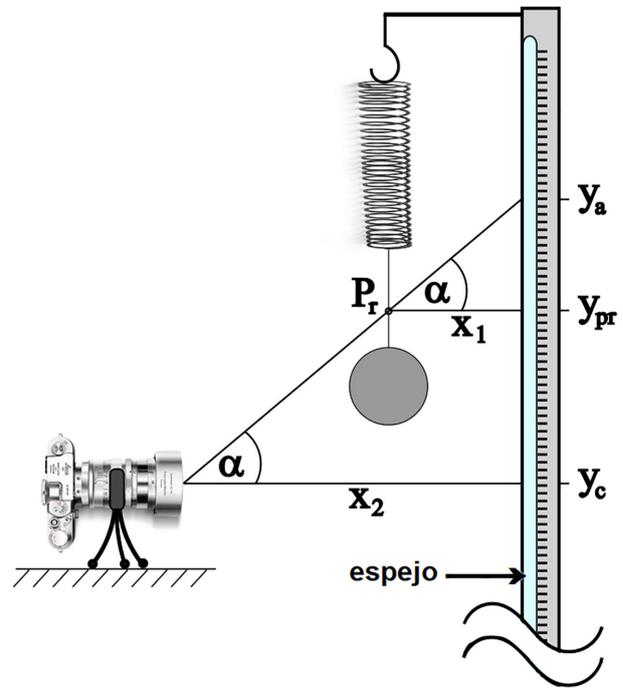
### 3.1.3. Corrección del error de paralaje

Cuando se implementa este tipo de experimentos como trabajo práctico para los estudiantes, es importante enfatizar que las amplitudes son *desplazamientos*, es decir, deben calcularse como diferencias entre dos posiciones (alturas): la altura de interés (generalmente, una cresta o máximo de oscilación) y la altura de equilibrio:

$$A_n = y_n - y_{eq} \tag{18}$$

Donde  $A_n$  representa la amplitud correspondiente al  $n$ -ésimo período,  $y_n$  la altura, en la escala milimetrada, correspondiente a esta amplitud, y  $y_{eq}$ , la altura de equilibrio. La medición de estas alturas estará afectada de un error de paralaje, para cuya corrección ofrecemos el siguiente método.

Lo primero que debe hacerse es fijar un punto de referencia respecto del cual se medirán todas las alturas. Generalmente este punto de referencia se fija arbitrariamente en un acople (un pequeño trozo de alambre delgado) dispuesto entre el resorte y la pesa suspendida de él, marcándolo con pintura o un trozo de cinta adhesiva, por ejemplo. No importa que el punto de referencia esté relativamente alejado del centro de gravedad del sistema, porque lo importante no son las alturas en sí mismas, sino la diferencia entre ellas, como indica la Ec. (18). Es importante que el punto de referencia esté en el eje de oscilación y es recomendable que esté en el acople, porque debe estar por debajo del resorte (para que su distancia al centro de gravedad no



**Figura 2:** Relación geométrica entre la posición de la cámara ( $y_c$ ) y las posiciones real ( $y_{pr}$ ) y aparente ( $y_a$ ) del punto de referencia.

varíe) y no conviene situarlo en la pesa, porque esto complicaría la corrección del error de paralaje.

La Fig. 2 representa la configuración del experimento en un instante cualquiera de la oscilación. El punto de referencia,  $P_r$ , está situado a una altura  $y_{pr}$  y a una distancia  $X_1$  con respecto al soporte; y la cámara de video, a una altura  $y_c$  y a una distancia  $X_2$  con respecto al soporte. En ese dado instante, si bien la altura real del punto de referencia es  $y_{pr}$ , la altura aparente, tal como se observa desde la cámara, es  $y_a$ , porque su línea de visión subtendiendo un ángulo  $\alpha$  respecto de la horizontal.

Se observan dos triángulos rectángulos semejantes, uno de cuyos ángulos es  $\alpha$ , y por tanto se cumple que

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{y_c - y_a}{X_2} = \frac{y_{pr} - y_a}{X_1} \tag{19}$$

donde los numeradores serán positivos si, como es lo usual, la escala graduada crece hacia abajo.

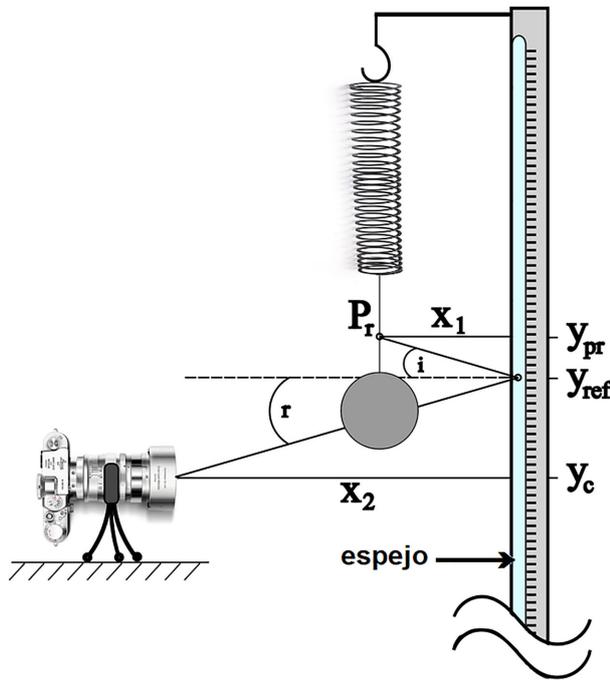
De la Ec. (19) se puede despejar  $y_c$  (altura de la cámara):

$$y_c = (y_{pr} - y_a) \frac{X_2}{X_1} + y_a \tag{20}$$

Consideremos ahora la Fig. 3 (no tiene la misma escala que la Fig. 2), en la cual se representa el reflejo del punto de referencia, a una altura  $y_{ref}$ , en el espejo del soporte.

Por la ley de la reflexión (óptica geométrica), se cumple que el ángulo de incidencia  $i$  es igual al ángulo de reflexión  $r$ . Luego, se tiene que

$$\text{tg}(i) = \text{tg}(r) = \frac{y_{ref} - y_{pr}}{X_1} = \frac{y_c - y_{ref}}{X_2} \tag{21}$$



**Figura 3:** Relación geométrica entre la posición de la cámara ( $y_c$ ) y las posiciones del punto de referencia ( $y_{pr}$ ) y de su reflejo ( $y_{ref}$ ).

de donde se puede despejar  $y_{pr}$ :

$$y_{pr} = y_{ref} \left( 1 + \frac{X_1}{X_2} \right) - y_c \frac{X_1}{X_2} \quad (22)$$

Reemplazando la Ec. (20) en la (22), se obtiene, luego de un poco de álgebra:

$$y_{pr} = \frac{y_{ref} \left( 1 + \frac{X_1}{X_2} \right) + y_a \left( 1 - \frac{X_1}{X_2} \right)}{2} \quad (23)$$

o bien,

$$y_{pr} = \frac{y_{ref} + y_a}{2} + \frac{y_{ref} - y_a}{2} \frac{X_1}{X_2} \quad (24)$$

Nótese que en todo el análisis geométrico desarrollado, la altura de equilibrio del sistema no interviene en absoluto. De hecho, ésta puede calcularse con la Ec. (24), como un caso particular. Por otra parte, la Ec. (24) no depende de la altura de la cámara,  $y_c$ , pero conviene ubicar la misma a un nivel intermedio en el rango de alturas que se desee medir, el cual, usualmente, es el rango de las amplitudes de las oscilaciones en un dado intervalo de tiempo. La elección de una altura intermedia para  $y_c$  contribuye a que los ángulos  $\alpha$ ,  $i$  y  $r$  sean pequeños, lo cual se traduce en valores próximos para  $y_a$  y  $y_r$ , permitiendo un enfoque nítido de estos valores en la regla milimetrada.

Por la misma razón, también es conveniente que  $X_2$  (distancia entre la cámara y el soporte) sea de un orden mayor que  $X_1$ . Esta condición, además, contribuye a que



**Figura 4:** Fotografía del sistema c) –  $y_a$ : Posición aparente del punto de referencia.  $y_{ref}$ : Posición del reflejo del punto de referencia.

el segundo término del segundo miembro de la Ec. (24) sea mucho menor que el primero. De hecho, en la mayoría de los casos prácticos, con una elección adecuada de  $y_c$ ,  $X_1$  y  $X_2$ , este término podrá despreciarse, lo cual puede ser recomendable en los trabajos prácticos de los estudiantes, pero se ha conservado en los cálculos numéricos de este estudio, para mayor precisión.

La Fig. 4 es una fotografía del sistema c), donde se indica la posición aparente del punto de referencia ( $y_a$ ) y la de su reflejo ( $y_{ref}$ ).

### 3.2. Metodología del cálculo numérico

Para resolver las Ecs. (16) y (17) se aplicó el método de Runge-Kutta de 5° orden [18], utilizando el programa Scilab (versión 2023). Se desarrolló un algoritmo con paso de tiempo variable regulado por control PID (proporcional, integrativo, derivativo), con una tolerancia relativa,  $\epsilon$ , en cada paso de tiempo de  $\epsilon = 10^{-5}$ , y tolerancias absolutas  $\Delta x = \epsilon \cdot x_{promedio}$  y  $\Delta v = \epsilon \cdot v_{promedio}$ , tomando los promedios sobre los valores absolutos de un cuarto de período inicial. El error relativo final acumulativo,  $\epsilon_{ac}$ , para ambas variables, a lo largo de 100 períodos se estimó en  $\epsilon_{ac} = (7 \pm 3) \cdot 10^{-3}$ . Los datos (parámetros, constantes y condiciones iniciales) para ejecutar el programa se tomaron de los experimentos realizados con los sistemas descritos en §3.1.1. Dichos datos son: el diámetro de la esfera, la amplitud inicial y el período de las oscilaciones, y la masa efectiva del sistema. Esta última es la suma de la masa de la esfera, más la del acople entre la esfera y el resorte, más la contribución del resorte, que equivale a un tercio de su propia masa [19].<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Al calcular la contribución del resorte, debe tenerse en cuenta que la amplitud con que oscilan las distintas espiras no es uniforme a lo largo del mismo y, por tanto, la contribución de cada una a la energía total también es distinta. Si la masa del resorte es mucho menor que la del cuerpo que cuelga de él – lo cual se cumplía en todos los casos – su contribución efectiva a la masa total equivale a

**Tabla 1:** Características y mediciones más relevantes de cada sistema. (Todas las unidades corresponden al sistema cgs: Longitud = [cm], Masa = [g], Período = [s], Densidad = [g/cm<sup>3</sup>], k = [dyn/cm], b = [g/s], Factor de Ajuste = [adimensional], N° de Reynolds = [adimensional]).

Sistema	a	b	c	d	e
Relleno	yeso y arena	yeso y arena	yeso y arena	agua	aire
Diámetro (esfera)	9,55	7,90	3,99	3,99	22,6
k (resorte)	3170	2876	1086	1110	577,4
m	155,70	164,81	41,29	35,27	49,31
k/m	20,36	17,45	26,30	31,47	11,71
Densidad efectiva	0,341	0,638	1,24	1,06	8,12 · 10 <sup>-3</sup>
Amplitud (t = 0)	15,0	7,0	8,9	10,7	11,0
Amplitud (t = 100T)	9,4	3,0	4,5	5,1	0,7
b	0,0162	0,0134	0,00677	0,00677	0,0383
Período	1,392	1,504	1,225	1,120	1,836
< Re > (T <sub>1</sub> )	2950	1054	831	1093	3882
< Re > (T <sub>100</sub> )	1849	452	420	521	247
Factor de Ajuste	6	0	1	0	0

Con estos datos se calcularon todos los demás parámetros del sistema de Ecs. (16) y (17).

La Tabla 1 detalla las características y mediciones más relevantes de cada sistema masa-resorte. Los números de Reynolds anotados en la décima y undécima fila corresponden, respectivamente, a los valores promedio de este parámetro en el primero y centésimo período. Estos valores indican que la componente de arrastre es la predominante en todos los casos estudiados [v. Ec. (7)], aun al cabo de 100 períodos, cuando la velocidad promedio de cada sistema es relativamente baja.

## 4. Resultados y Discusión

### 4.1. Decrecimiento de la amplitud en función del tiempo

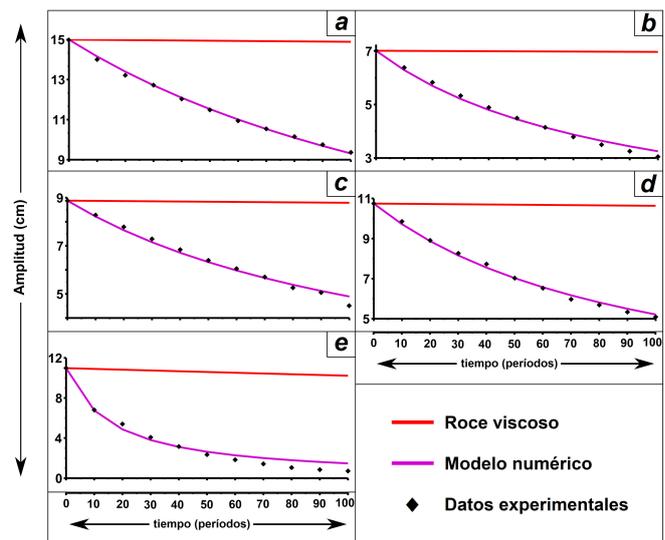
La Fig. 5 representa el decrecimiento de la amplitud de las oscilaciones en función del tiempo para cada uno de los sistemas construidos (a, b, c, d, e).

Las curvas rojas corresponden al modelo teórico convencional de oscilaciones amortiguadas, que sólo contempla la componente de viscosidad de la fuerza de roce (por brevedad, este modelo será referido, en adelante, como *roce viscoso*). En este modelo, la amplitud  $A_n$  para la oscilación de orden  $n$ , está dada por [5]

$$A_n = A_0 e^{-\frac{bT}{2m}n} \tag{25}$$

donde  $A_0$  representa la amplitud inicial, y  $T$ , el período de las oscilaciones ( $b$  y  $m$  ya fueron definidas y discutidas en la sección 2). Es decir que para trazar las curvas rojas, se calcularon las amplitudes  $A_n$  con la Ec. (25), reemplazando en ella los valores medidos, en cada experimento,

un tercio de su propia masa. Por su parte, en casi todos los casos, la masa del acople era prácticamente despreciable, pero se sumó para redondear las cifras significativas, a los fines de minimizar el error. Este cálculo de la masa efectiva es necesario porque todos sus términos contribuyen a la energía cinética y al comportamiento del sistema.



**Figura 5:** Decrecimiento de la amplitud en función del tiempo. Los paneles a, b, c, d y e corresponden, respectivamente, a los sistemas designados con estas mismas letras (v. Fig. 1).

de  $A_0$ ,  $T$  y  $m$ . El factor de amortiguamiento  $b$ , por su parte, se calculó con el coeficiente  $\eta$  del aire y el radio de la esfera correspondiente a cada caso [v. Ec. (3)].

Como puede observarse en todos los casos, el decrecimiento de las amplitudes mostrado por los resultados experimentales (rombos negros) y el predicho por el cálculo numérico (curvas violetas) son mucho mayores que el predicho por el modelo de roce viscoso (curvas rojas). De hecho, en general, las amplitudes predichas por el roce viscoso apenas se apartan del modelo de oscilaciones libres. Esto se justifica porque el coeficiente  $b$  es directamente proporcional al coeficiente de viscosidad  $\eta$ , que es muy pequeño para el aire. En términos relativos, el mayor decrecimiento de amplitud para el modelo de roce viscoso se observa en el caso e, como cabe esperar, debido a que la esfera inflada con aire tiene una densidad muy baja, lo cual aumenta considerablemente

ambas componentes de la fuerza de roce por unidad de masa [v. Ec. (13)].

En general, se verifica un muy buen acuerdo entre los resultados experimentales y el modelo numérico, que contempla tanto el roce viscoso como el de arrastre. Sin embargo, hay dos excepciones notorias: el último punto del caso  $c$  y el ajuste global del caso  $e$ . Este último se tratará en detalle al final de esta sección.

En cuanto al caso  $c$ , su último punto es un punto aislado, es decir, no sigue la tendencia de los demás puntos del conjunto (en la jerga técnica, esta clase de puntos suelen referirse como *outliers* o *atípicos*). Se podría haber obtenido un mejor ajuste para este punto graduando el factor de ajuste  $f_{aj}$ , pero a costa de menguar el ajuste de los demás. Esta opción no nos pareció razonable: no tiene mucho sentido forzar un algoritmo para adaptarse a un punto atípico porque éstos, en general, suelen estar afectados de errores sistemáticos. Esta posibilidad es bastante probable al tratarse de puntos obtenidos al final de intervalos largos de tiempo. Este tipo de errores sistemáticos se discute en detalle al final de esta sección.

Para lograr un buen ajuste en cada caso, se debió graduar el factor  $f_{aj}$ : En el caso  $a$ , se tomó  $f_{aj} = 6$ , que es el valor recomendado por White [8]. En el caso  $c$ , se tomó  $f_{aj} = 1$ , que también es un valor usado en la literatura [20], y en todos los demás casos, se usó  $f_{aj} = 0$ , que corresponde al modelo teórico sin término semiempírico [Ec. (1)]. Es difícil conjeturar cuáles son las principales razones físicas que conducen a la necesidad de esta graduación, dado que los valores de los parámetros y de las condiciones iniciales de cada caso son bastante diversas (v. Tabla 1). Aun así, cabe mencionar que, en nuestros experimentos, se comprobó cierta dependencia del factor de ajuste con errores sistemáticos en la posición de equilibrio del sistema y, consecuentemente, con la amplitud inicial, lo cual concuerda con resultados de otros autores [21].

Más allá de esto, la mera existencia de una gran cantidad de términos de ajuste, con diferentes grados de concordancia y confiabilidad, indica que se trata de un problema complejo y poco esclarecido [16]. En definitiva, debe tenerse presente que un término de ajuste empírico, como su nombre lo indica, es un recurso matemático ad hoc: se elabora simplemente buscando concordancia entre el cálculo numérico y los datos experimentales, y el grado de esta concordancia justifica su uso.

A pesar de las diferencias referidas entre los distintos casos ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ), es interesante notar que en los cuatro primeros, el comportamiento cualitativo es muy similar y la amplitud decrece a aproximadamente la mitad de la amplitud inicial, a lo largo de 100 períodos. En el último caso ( $e$ ), sin embargo, el decrecimiento relativo es mucho mayor, y esto nuevamente puede justificarse por la baja densidad de la esfera [v. Ec. (13)].

En este caso ( $e$ ), el ajuste numérico no es tan preciso como en los casos anteriores, en particular, en los valores

finales del intervalo. Esto puede deberse a varias razones:

- En el caso  $e$ , el número de Reynolds promedio varía en un rango mucho mayor que en los casos anteriores (v. Tabla 1) y, en consecuencia,  $C_d$  también tiene una variación mayor, en particular para  $Re < 10^3$  (velocidades promedio bajas, como las de los últimos puntos del intervalo medido) [16].
- El valor del período en este caso es un 40% mayor que el promedio de los casos anteriores, lo cual aumenta el error sistemático acumulativo del algoritmo de cálculo, y el efecto que tienen, en este algoritmo, los errores sistemáticos que pueden estar presentes en el sistema masa-resorte [21].
- Puede haber errores sistemáticos provenientes de defectos constantes del sistema masa-resorte o de perturbaciones esporádicas en el desarrollo del fenómeno. En ambos casos, suele haber efectos acumulativos que se hacen más notorios en intervalos grandes de tiempo, en particular cuando el sistema tiene poca energía y su comportamiento es más susceptible a perturbaciones pequeñas y al ruido de fondo. (Esto explica, también, puntos atípicos como el último del caso  $c$ ).

## 4.2. Advertencia sobre un error conceptual común

Uno de los contenidos más importantes estudiados en los laboratorios del ciclo básico universitario es el de técnicas de graficación. En este nivel curricular, los alumnos estudian ajustes lineales entre dos variables, en particular, el método de cuadrados mínimos, y suelen aplicar estas técnicas para controlar la validez y aplicabilidad de un dado modelo.

En el caso de oscilaciones amortiguadas, algunos docentes plantean la tarea de hacer un cambio de variables en la Ec. (25), tomando logaritmos, y luego graficar las nuevas variables. De acuerdo a este planteo, si se obtiene una distribución alineada de los puntos, esto indica que el modelo convencional de roce viscoso es válido, y puede calcularse el coeficiente de amortiguamiento  $b$  a partir de la gráfica. Esta interpretación constituye un grave error conceptual que, lamentablemente, se arraiga en el hecho de que los puntos sí suelen alinearse dentro de sus incertezas de medición, en particular si tales incertezas son relativamente grandes.

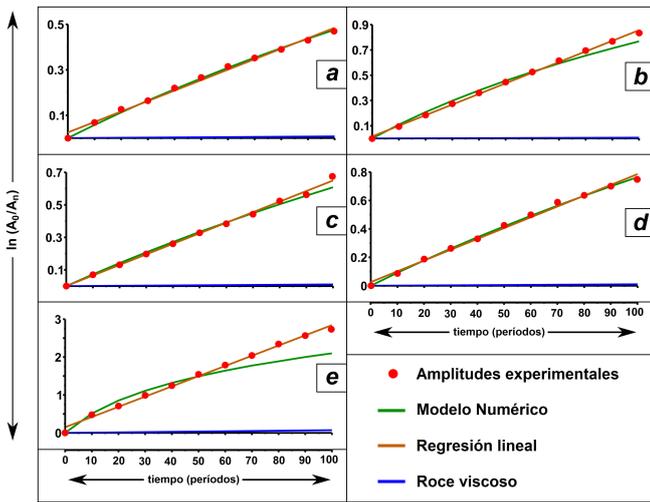
Analicemos en detalle esta errónea propuesta didáctica. Existen dos formas típicas de “linealizar” la Ec. (25), a saber:

$$\ln(A_n) = \ln(A_0) - \frac{bT}{2m}n \quad (26)$$

O bien, reordenando,

$$\ln\left(\frac{A_0}{A_n}\right) = \frac{bT}{2m}n \quad (27)$$

Por brevedad y sencillez, analizaremos esta última, que corresponde a una recta de pendiente  $bT/2m$  que pasa



**Figura 6:**  $\ln(A_0/A_n)$  vs  $n$  – Puntos rojos: Amplitudes experimentales. Curvas verdes: Amplitudes calculadas con el modelo numérico. Rectas marrones: regresiones lineales de los puntos rojos. Rectas azules: Amplitudes calculadas con el modelo de roce viscoso. Los paneles *a*, *b*, *c*, *d* y *e* corresponden, respectivamente, a los sistemas designados con estas mismas letras (v. Fig. 1).

por el origen (nótese que para  $n = 0$ , el argumento del logaritmo es 1). Las ordenadas de esta recta están dadas por el primer miembro de la Ec. (27) [ $y = \ln(A_0/A_n)$ ], y las abscisas por la variable discreta  $n$  (cantidad de oscilaciones).

En la Fig. 6, se ha graficado  $\ln(A_0/A_n)$  en función de  $n$ , para los cinco casos de nuestro estudio. Los círculos rojos corresponden al cálculo del logaritmo con las amplitudes medidas experimentalmente (en adelante, llamaremos a este procedimiento *linealización experimental*). Las curvas verdes (en adelante referidas como *linealización numérica*) corresponden al cálculo del logaritmo con las amplitudes calculadas a partir del modelo numérico. Las rectas marrones corresponden a la recta de regresión lineal de los puntos representados por los círculos rojos; y las rectas azules, en adelante referidas como *linealización del roce viscoso*, corresponden al cálculo del logaritmo con las amplitudes calculadas a partir de la Ec. (25), tal como se indicó en §4.1, es decir, usando los datos experimentales de  $A_0$ ,  $T$  y  $m$ , y calculando el factor de amortiguamiento  $b$  con el coeficiente  $\eta$  del aire y el radio de la esfera en cuestión [v. Ec. (3)].

**4.2.1. Análisis descriptivo de los resultados de la Fig. 6**

En todos los paneles, los círculos rojos se ven bastante alineados. De hecho, en todos los casos, el coeficiente de correlación lineal de Pearson da un valor muy cercano a la unidad, tal como se indica en la primera fila de la Tabla 2.

**Tabla 2:** Resultados numéricos más relevantes de las linealizaciones experimental y de roce viscoso.

Sistema	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
Coef. correlación de Pearson	0,9968	0,9992	0,9984	0,9967	0,9973
A (ordenada al origen)	0,025	0,016	0,000	0,03	0,15
$\Delta A$ (error de la ord. al origen)	0,007	0,006	0,007	0,01	0,04
pend. exper./pend. roce viscoso	68,41	141,2	62,32	76,77	40,66

Esto indica, a grandes rasgos, que entre  $\ln(A_0/A_n)$  y  $n$  existe una relación muy próxima a la linealidad, es decir, que los puntos rojos se agrupan en una proximidad estrecha con respecto a la recta de mejor ajuste (regresión lineal) [22]. (En el apéndice B se ofrece una interpretación más técnica y rigurosa del coeficiente de Pearson, basada en un trabajo de Rodgers y Nicewander (1988) [23]).

Por su parte, las curvas de linealización numérica (en color verde), muestran, en general, una curvatura<sup>3</sup> muy leve [24], excepto en el caso *e*) que, como ya se discutió, es el caso en que el modelo numérico no ajusta tan bien como en los demás. Todas las curvas verdes parten del origen, que representa al punto calculado con la amplitud inicial en todos los experimentos. Esto evidencia una buena condición de ajuste, porque en todos los casos, en  $t = 0$ , en la Ec. (27) se cumple que  $\ln(A_0/A_0) = \ln(1) = 0$ , por lo cual puede asegurarse que las curvas pasan por el origen. Es decir, independientemente de la incerteza en la medición de  $A_0$ , su valor es el mismo en el numerador y en el denominador del argumento del logaritmo, y por tanto, a los fines de estas gráficas, el origen puede considerarse un punto cuya incerteza es despreciable [25].

En cuanto a las rectas de regresión lineal (en color marrón), sólo se puede considerar que pasa por el origen la del caso *c*, siguiendo el criterio de considerar que una magnitud puede considerarse despreciable cuando su intervalo de incerteza contiene al valor cero. Es decir, llamando  $A$  a la ordenada al origen, se verifica que, en el caso *c*, el intervalo  $(A \pm \Delta A)$  contiene el valor cero (origen), como puede apreciarse en las filas segunda y tercera de la Tabla 2, donde se ha redondeado las cifras significativas al orden del error (estrictamente,  $A$  del caso *c* es  $A_c = 0,0003$ . Así, si se compara el ajuste, a los puntos rojos, de las rectas de regresión (marrones) y de las curvas numéricas (verdes), se puede concluir que en el caso *a*), la curva numérica ajusta mejor que

<sup>3</sup> La curvatura es una propiedad geométrica que puede calcularse con precisión, para un punto cualquiera de una curva, mediante operaciones del álgebra vectorial. Se puede interpretar como la velocidad con que la curva se aparta de una recta.

la recta de regresión, pues la curva pasa por el origen, donde está centrado el primer punto, y pasa más cerca del centro de los círculos, en general. En los casos *b*) y *c*), las rectas de regresión ajustan un poco mejor que las curvas numéricas, sobre todo en los puntos más alejados del origen, pero debe tenerse en cuenta que el último punto del caso *c* es un punto atípico, como ya se discutió. En el caso *d*) el ajuste es similar en la recta y en la curva; y en el caso *e*), desde luego, la recta ajusta mucho mejor.

Por su parte, las rectas azules (linealización del roce viscoso) apenas se diferencian del eje de las abscisas, están muy lejanas de los puntos y su pendiente es mucho menor que la de las rectas de regresión (ver última fila de la Tabla 2).

#### 4.2.2. Discusión de los resultados de la Fig. 6

Si bien los puntos rojos se presentan muy alineados, con altos valores del coeficiente de Pearson y un buen ajuste de las rectas de regresión, también las curvas verdes, correspondientes al modelo numérico, se ajustan muy bien a los puntos rojos, y es probable que con modelos de ajuste aún más precisos se pudieran obtener diversas familias de curvas de pequeña curvatura que ajustaran igualmente bien, o mejor, a los datos experimentales.

No se debe perder de vista que la linealidad de la transformación logarítmica está asociada a un comportamiento exponencial del decrecimiento de las amplitudes; y éste, a su vez, es una consecuencia matemática de que, en el modelo de roce viscoso, la fuerza de roce sea proporcional a la velocidad en la ecuación diferencial de movimiento. Pero dado que sabemos que la fuerza de roce tiene una componente preponderante que es proporcional al cuadrado de la velocidad, no hay razón física ni matemática para suponer que el amortiguamiento sea exponencial, ni tampoco, en consecuencia, que una transformación logarítmica sea lineal, aun cuando la linealidad sea una buena aproximación.

Por otra parte, el único modelo teórico que deduce un comportamiento exponencial, es decir, el modelo de amortiguamiento viscoso, da valores de amortiguamiento muy alejados de los resultados experimentales.

Al final de la siguiente sección, se resumen las conclusiones de este análisis.

## 5. Conclusiones

- Los resultados de este estudio de movimiento armónico amortiguado indican que la componente predominante de la fuerza de roce es la de arrastre, y no la de viscosidad, como indican o sugieren la mayoría de los textos de mecánica destinados al ciclo básico universitario. Esta conclusión está avalada tanto por los cálculos del número de Reynolds, que indica una proporción entre ambas componentes, cuanto por el hecho de que el decrecimiento de la amplitud de las oscilaciones es mucho mayor que el predicho por el modelo de roce viscoso.

En este trabajo sólo se estudiaron sistemas masa-resorte construidos con cuerpos esféricos, debido a que no abundan los modelos teóricos sobre roce viscoso para otras geometrías, pero cabe suponer que con cuerpos de formas menos aerodinámicas que la esfera, la prevalencia de la fuerza de roce sería, al menos, comparable o mayor aún que la observada en estos casos. Del mismo modo, se deduce que en otros sistemas oscilatorios y en otros medios distintos del aire, se observará la misma prevalencia de la componente de arrastre, siempre que los valores del número de Reynolds sean suficientemente altos, lo cual es altamente probable en la mayoría de los casos típicos.

- Los modelos de ajuste semiempíricos o empíricos son útiles para obtener una mejor concordancia entre los modelos numéricos y los resultados experimentales, pero no parece claro, a priori, cuál de ellos es el más apropiado ni cómo ajustarlo a un dado experimento. En este trabajo, la graduación del factor de ajuste  $f_{aj}$  definido en la Ec. (8) (v. Apéndice A) se realizó por prueba y error. Una vez ajustado apropiadamente en cada caso, se observa, en general, una muy buena concordancia entre los resultados experimentales y los cálculos numéricos.

- De la discusión de la Fig. 6 puede concluirse que:

- a) Los datos experimentales presentan un comportamiento que puede aproximarse muy bien como exponencial, pero esto no significa que indefectiblemente sea exponencial; también caben otras aproximaciones que se ajustan muy bien a los datos, y en algunas particularidades, aun mejor.
- b) Si se tienen en cuenta las dos componentes de la fuerza de roce, no hay ningún modelo ni base teórica que avale un comportamiento exponencial (ni de ningún otro tipo), porque la ecuación de movimiento no tiene solución analítica. Pero dado que la ecuación diferencial de movimiento incluye un término proporcional al cuadrado de la velocidad, la posibilidad de un comportamiento exponencial es, cuanto menos, dudosa.
- c) El único modelo teórico que predice un comportamiento exponencial es el modelo de roce viscoso, que no tiene en cuenta la fuerza de arrastre, la cual es preponderante en la mayoría de los casos prácticos. Y lo que es más importante, los valores que predice este modelo están muy apartados de los datos experimentales, lo cual es razón suficiente para concluir que el parámetro  $b$  de amortiguamiento viscoso no puede calcularse a partir de los datos experimentales por una transformación logarítmica. De hecho, si  $b$  se calculara, erróneamente, de esta manera, se cometería un error relativo que está dado por el cociente entre la pendiente de la linealización experimental y la de roce viscoso, indicado en la cuarta fila de la Tabla 2.

Por tanto, cabe recomendar, a docentes y estudiantes, una actitud crítica y reflexiva cuando se manipulan

datos con técnicas gráficas, algebraicas o estadísticas, en particular, al momento de interpretar los resultados. Una simple tendencia no necesariamente está asociada a un comportamiento específico, ni debe interpretarse como la convalidación de un modelo, en particular cuando se observan considerables discrepancias cuantitativas con dicho modelo. El ajuste algebraico de modelos aproximados puede ser válido y útil, pero debe tenerse presente que fuera de un contexto heurístico, su aplicabilidad es muy limitada.

## Agradecimientos

Este trabajo se realizó en el marco de un proyecto de investigación subsidiado por la Secretaría de Ciencia, Arte e Innovación Tecnológica de la Universidad Nacional de Tucumán (Argentina).

## Material suplementar

El siguiente material suplementario está disponible en línea:

Apéndice A: Deducción de la Ecuación de la Fuerza de Roce.

Apéndice B: Una Interpretación Matemáticamente Rigurosa del Coeficiente de Correlación de Pearson.

## Referencias

- [1] D.O. Granja, Sophia: colección de Filosofía de la Educación **19**, 93 (2015).
- [2] O.J. Suárez, Revista Academia y Virtualidad **9**, 24 (2016).
- [3] O.J. Suárez y A.H. Márquez, Revista EDUCyT, 29 (2012).
- [4] S.E.T. Torres y H. Alarcon, Latin American Journal Physics Education, **6 Suppl1**, 285 (2012).
- [5] C. Medina y S. Velazco, Rev. Bras. Ens. Fis. **41**, e20180194 (2019).
- [6] G. Stokes, Transactions of the Cambridge Philosophical Society **IX**, 8 (1850).
- [7] F. White, *Fluid Mechanics* (McGraw-Hill, Nueva York, 2011), 7 ed.
- [8] F. White, *Viscous Fluid Flow* (McGraw-Hil Inc., Nueva York, 1991), 2 ed.
- [9] H. Young y R. Freedman, *Física Universitaria/Sears-Zemansky* (Pearson Educación, México, 2009), 12 ed.
- [10] R. Serway y J. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería* (Cengage Learning, Santa Fe, Mexico, 2008), 7 ed.
- [11] D. Kleppner y R. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* (McGraw-Hill, Boston, 1973).
- [12] M. Alonso y E. Finn, *Física* (Fondo Educativo interamericano, Mexico, 1971).
- [13] L. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica* (MIR, Moscú, 1993).
- [14] S. Frish y A. Timoreva, *Curso de Física General* (MIR, Moscú, 1977).
- [15] J. Walker, *Fundamentos de Física/Halliday-Resnick* (John Wiley & Sons Inc., Río de Janeiro, 2008), 8 ed.
- [16] R. Clift, J.R. Grace y M.E. Weber, *Bubbles, Drops and Particles* (Academic Press, Londres, 1978).
- [17] R. Fox, A. McDonald y P. Pritchard, *Introduction to Fluid Mechanics* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 2004), 6 ed.
- [18] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling y B. Flannery, *Numerical Recipes*, (Cambridge University Press, Nueva York, 2007), 3 ed.
- [19] A. French, *Vibrations and Waves* (W.W. Norton & Co. Inc., Nueva York, 1971).
- [20] S. Calderón, S.L. González y S. Gil, Revista de Enseñanza de la Física **20**, 55 (2007).
- [21] R. Hauko y R. Repnik, American Journal of Physics **87**, 910 (2019).
- [22] C. Tong, en: *Joint Statistical Meetings* (Miami, 2011).
- [23] J. Rodgers y W. Nicewander, The American Statistician **42**, 59 (1988).
- [24] L. Santaló, *Vectores y Tensores con sus aplicaciones* (Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1985).
- [25] D. Baird, *Experimentación: Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos* (Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1991), 2 ed.