

Empleo del tratamiento matricial en el curso de óptica: Sistema de lentes

(Using the matrix method in optics: System of lenses)

J. Fuentes Betancourt, O. Hidalgo Alonso O. Calzadilla Amaya y A. Perez Perdomo¹

*Taller de Enseñanza de la Física Universitaria, Facultad de Física, Universidad de La Habana,
San Lázaro y L. Ciudad de La Habana, Cuba*

Recebido em 6/1/2004; Revisado em 4/3/2005; Aceito em 13/4/2005

En la enseñanza del curso de óptica, en la Licenciatura en Física, los estudiantes poseen conocimientos y habilidades operacionales de programas de cómputo, además de conocimientos de Álgebra Lineal, sobre la operación con matrices y determinantes. El método matricial, se emplea ampliamente en el análisis de fenómenos ópticos, aprovechando que muchos sistemas ópticos son susceptibles de ser descritos satisfactoriamente en la aproximación de modelos lineales. En el presente trabajo se describe el experimento didáctico realizado con la integración de conocimientos de Álgebra, Computación y óptica aplicados a la solución, por medio del método matricial, del diseño de un triplete de Cooke usado en cámaras fotográficas. Se obtiene un buen aprovechamiento por los estudiantes que logran profundizar en el tema lográndose la integración de los conocimientos propuesta inicialmente.

Palabras-clave: óptica matricial, sistema de lentes, matriz de transferencia, integración de conocimientos.

Undergraduate Physics majors have usually developed knowledge and operational abilities in Linear Algebra, particularly determinants and matrices, and in the use of software. The matrix method is used thoroughly in the analysis of optical phenomena, making good use of that fact so that many optical systems can be satisfactorily describe by linear models. A didactic experiment which integrates knowledge from Algebra, Computers and Optics to design of a Cooke's triplet used in photographic cameras base on the matrix method, is described in the present work. The students manage to integrate previous knowledge during the problem solving, as initially proposed.

Keywords: matrix optics, lenses systems, transfer matrix, knowledge integration.

1. Introducción

Los estudiantes de la carrera de Física en la Facultad de Física de la Universidad de La Habana, reciben a partir del segundo semestre del primer año, entre otros, un curso de Álgebra Lineal y dos de Computación, con la inclusión del concepto de laboratorio y una evaluación fundamentada en un proyecto de curso. El primero de los cursos de Computación está dedicado al Lenguaje C y el segundo al conocimiento y creación de habilidades prácticas en el empleo del programa Mathematica [1, Fuentes J. y Hernández M., Actas del Segundo Taller Iberoamericano de Enseñanza de la Física Universitaria, V II, pag. 572, (2000)]. Uno de los objetivos planteados en los cursos de Computación [2] es el “desarrollar la capacidad profesional al apropiarse de los conocimientos básicos de la programación con un super-lenguaje estructurado y lo más actual posible, conocimientos básicos del funcionamiento de los micro-procesadores, los sistemas operativos, Windows y apli-

caciones actuales para la solución de problemas físicos”. La experiencia ha demostrado que el aprendizaje de la computación, además de aportar el dominio de la técnica concreta, tiende a crear habilidades de utilidad general, como: la construcción de algoritmos y hábitos de trabajo que deben posibilitar la solución de problemas prácticos en otras disciplinas. Como se señala en [3], el tratamiento matricial era utilizado en libros de textos especializados. No obstante por regla general no se empleaba en la enseñanza de la física universitaria y fue en ese trabajo que se llama la atención sobre la posibilidad del empleo de la óptica matricial para resolver varios problemas presentes en los cursos universitarios. En la referencia [4] se utiliza el método de la matriz de transferencia para calcular los resultados experimentales del paso de la luz por un sistema de lentes. Las ventajas de la introducción de la óptica matricial en los programas de los cursos superiores de óptica se discute en [5]. El estudio del paso de la luz a través de diferentes sistemas de espejos y lentes se muestra con ejemplos resueltos en

¹E-mail: aperez@ff.oc.uh.cu.

[6], [7], [8].

En el Curso de Física General en la Facultad de Física de la Universidad de La Habana, el cuarto semestre se dedica al estudio de la óptica, en el cual, como concepción didáctica, se hace énfasis en el trabajo independiente de los estudiantes con el objetivo de lograr por parte de los mismos un enfoque integrador en los estudios de los fenómenos físicos. Hasta hace unos años en el tratamiento de los problemas ópticos se planteaban ejercicios a los estudiantes para la solución de los cuales no requerían de un conocimiento de las técnicas de computación ni de la operación con matrices. Actualmente en la asignatura de óptica se usan textos [6], [7] en los que se emplea el método matricial, en el análisis de los fenómenos ópticos, considerando que tanto aspectos teóricos como aplicaciones prácticas en los sistemas ópticos se describen satisfactoriamente en la aproximación de modelos lineales.

En este contexto, los colectivos de las asignaturas de Computación y de Óptica, se plantearon una experiencia pedagógica, consistente en integrar los conocimientos y habilidades adquiridas por los estudiantes en los cursos precedentes de Computación y Álgebra Lineal, aplicados a la solución de ejercicios prácticos y la presentación de sus resultados en Seminario orientado a este fin. Al emplearse las posibilidades que brinda la computación se alcanzan objetivos mucho más amplios que los que se lograban anteriormente con el método tradicional.

2. Elementos teóricos

2.1. De didáctica

En el plano de la didáctica de la enseñanza cada vez se recogen más experiencias que indican lo conveniente de integrar conocimientos de diversas disciplinas aplicadas al tratamiento de problemas concretos.

En la introducción a su libro *Psicología Educativa* [9], Ausubel plantea: “Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un sólo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese en consecuencia”.

Para Ausubel el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende, condicionada en la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el que ya ha adquirido; aprender es sinónimo de comprender. Lo que se comprende se aprende y se recuerda mejor, al quedar integrado en la estructura del conocimiento.

Si en el proceso de asimilación de los conocimientos las ideas ya establecidas en la estructura cognitiva son reconocidas y relacionadas posibilitando una nue-

va valoración y la atribución de un nuevo significado, podemos con Ausubel llamarlo reconciliación integradora, proceso dinámico que caracteriza el aprendizaje significativo.

Corresponde a Nina F. Talizina [10], el haber insistido sobre el hecho que durante la formación del profesional, se requiere darle atención a que “la particularidad más importante del proceso de asimilación consiste en su actividad”... “los conocimientos pueden ser asimilados sólo cuando el alumno realiza algunas acciones con los mismos”.

Estas dos ideas están en la base de la experiencia pedagógica que nos planteamos. El proceso de enseñanza - aprendizaje de la Física en la actualidad no puede desprenderse del empleo de las actuales nuevas tecnologías (NTIC's). Específicamente pueden destacarse como aspectos relevantes que caracterizan a esta investigación el cambio sustancial de paradigma al proponerle al estudiante que integre los conocimientos que ha adquirido en estudios precedentes, de computación y álgebra lineal, para estudiar el nuevo tópico concerniente a los sistemas ópticos. Es decir, que construya los nuevos conocimientos sobre la base de los ya adquirido. A la vez se le está induciendo al aprendizaje de este nuevo tópico “haciendo” las simulaciones

Otro elemento a considerar es la motivación del estudiante, éste aprende lo que quiere, así que debemos darle motivos para querer aprender lo que le estamos proponiendo. En nuestra propuesta el empleo de los medios computacionales desempeña un papel importante en esta dirección pues nuestros estudiantes presentan un elevado nivel de motivación por los mismos.

2.2. De óptica matricial

En el tratamiento del comportamiento de los rayos de luz, en la aproximación paraxial, óptica de Gauss, al atravesar los elementos del sistema óptico experimentando refracciones o reflexiones sucesivas, en la interfaz entre medios de diferentes índices de refracción, y al trasladarse a través del medio que separa estas superficies se demuestra que éste es susceptible de ser estudiado en la representación de matrices cuadradas unitarias de segundo orden.

Las matrices² que caracterizan el problema que analizamos son:

La matriz de traslación que describe la traslación del rayo desde la izquierda a la derecha y es igual a:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde $t = (d/n)$, representa el espesor reducido del intervalo óptico (d) entre superficies refringentes o reflectantes, siendo n el índice de refracción del medio en el

²Diferentes autores al presentar las ecuaciones lineales lo hacen de manera diferente, lo que da lugar a que los elementos de las matrices tengan diferentes significados. Aquí estaremos empleando el criterio utilizado por Hetch. Llamaremos matriz de traslación a la matriz T y dejaremos el nombre de matriz de transferencia para la matriz del sistema.

cual se propaga el haz luminoso.

La matriz de refracción describe la refracción del rayo en la interfaz esférica de radio entre dos medios de diferentes índices de refracción n_1 y n_2 , siendo igual a:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{n_2-n_1}{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde $-\left(\frac{n_2-n_1}{r}\right)$ es llamado potencia o poder óptico de la superficie.

La matriz de reflexión describe la reflexión del rayo luminoso desde una superficie reflectora de radio.

$$L = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2n}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Cuando se propaga un rayo a través del sistema óptico, en la aproximación paraxial, si éste está compuesto por N superficies refringentes, separadas por $(N - 1)$ interfaces, la secuencia de las matrices correspondientes a cada proceso elemental, da lugar a la matriz de transferencia que es el producto de todas las matrices correspondientes. Al movernos desde la izquierda hacia la derecha le daremos a cada matriz un número de orden, o sea, escribiremos M_1, M_2, \dots, M_N , cuidando que el número asignado a cada matriz coincida con el número del plano de apoyo, situado a la izquierda de este elemento. Aplicando esta operación a cada superficie refractora tendremos

$$K_N = M_{N-1}K_{N-1} = M_{N-1}(M_{N-2}K_{N-2}) = \dots = (M_{N-1}M_{N-2}M_{N-3}\dots M_3M_2M_1)K_1, \quad (4)$$

donde K_N caracteriza los parámetros del rayo que atraviesa el plano de apoyo $N - \text{esimo}$.

$$M = M_{N-1}M_{N-2}M_{N-3}\dots M_3M_2M_1 \quad (5)$$

M es la matriz de transferencia del sistema y es igual al producto de todas las matrices correspondientes a

cada uno de los elementos ópticos, efectuado en orden inverso al seguido por el rayo en su trayectoria a través del sistema. Esta matriz de transferencia del sistema podemos representarla como:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Los parámetros fundamentales que describen el sistema; los puntos y planos cardinales se calculan a partir de los elementos (A, B, C y D) de la matriz de transferencia [6],[7],[8].

3. Aplicación del método matricial al cálculo de la reflectancia espectral de celdas solares

El objetivo es la parte fundamental de una cámara. En general este está formado por una lente o un conjunto de lentes convergentes y divergentes, que pueden ser fijas o móviles. La función de estas es la de formar la imagen del objeto sobre la película fotográfica. Este sistema óptico está caracterizado por puntos y planos cardinales específicos de acuerdo a lo que se desee, para lo cual se hace coincidir el plano focal con el plano donde se encuentra la película fotográfica.

En las cámaras fotográficas convencionales se emplea en calidad de objetivo el llamado triplete de Cooke, formado por tres lentes gruesas en sucesión: lente convergente, lente divergente y lente convergente.

3.1. Problema propuesto a los estudiantes

Los estudiantes deben calcular, por el método matricial, empleando el programa Mathematica, los puntos y planos cardinales de un sistema óptico con las características mostradas en la Tabla 1 [7].

Tabla 1 - Datos del sistema objetivo del problema del seminario.

	Radios de curvatura (mm)	Espesor de la lente (mm)	Separación	Índice de refracción
Primera lente	19,4 -128,3	4,29		1,6110
Segunda lente	-57,8 18,9	0,93	1,63	1,5744
Tercera lente	311,3 -66,4	3,03	12,90	1,6110

4. Resultados obtenidos

Para el sistema propuesto de tres lentes, tendremos que para cada lente la matriz de transferencia es:

$$M_i = R_{i+1}T_{i+1}R_i. \quad (7)$$

Como son tres lentes separadas tendremos que la matriz de transferencia del sistema será igual al producto de la matriz de cada lente y de las matrices de traslación para el espacio entre lentes, o sea:

$$M = M_5T_5M_3T_3M_1. \quad (8)$$

Sustituyendo los valores de M_i tendremos:

$$M = R_6 T_6 R_5 T_5 R_4 T_4 R_3 T_3 R_2 T_2 R_1, \quad (9)$$

donde $R_i T_i$ son las matrices de refracción y traslación definidas en las ecuaciones 2 y 3.

Con el programa elaborado los estudiantes calcularon la posición de los puntos y planos cardinales del triplete de Cooke. Para los datos del sistema de lentes de la 1 se obtiene para la matriz de transferencia del sistema:

$$M = \begin{bmatrix} 0,93233 & -0,0108425 \\ 22,2198 & 0,812518 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que nuestro sistema se encuentra en el aire las dos distancias focales [6], [8] son iguales e iguales a $-1/B$, donde B es elemento (1,2) de la matriz M .

De aquí que el valor de la distancia focal del sistema resulta igual a: $f_2 = 92.23$ mm, mientras que la distancia de la última lente del objetivo al foco es de $d_2 = 74.94$ mm.

Una vez realizado el cálculo, los estudiantes deben, empleando las posibilidades que le ofrece el Programa Mathematica, considerar como variará la distancia focal del sistema, buscando su disminución, al variar los radios de las lentes, la separación entre ellas y los índices de refracción de las mismas. Ellos deben obtener los gráficos y llegar a conclusiones acerca de como esta variación influye en la distancia focal.

Para resolver esta segunda parte de la tarea se les recomendó el siguiente esquema: aumentar el índice de refracción en las lentes convergentes y disminuirlo en igual cantidad en las lentes divergentes. El proceso contrario, o sea aumentar el índice de refracción de la lente divergente y disminuir los de las lentes convergentes como se analiza en la discusión del ejercicio que no da variaciones sustanciales de la distancia focal, como en el primer caso.

En la Fig. 1 se presenta los resultados de la dependencia de la distancia focal en función de la variación del índice de refracción, al aumentar éste en las lentes convergentes y disminuirlo en esa misma cantidad en las lentes divergentes.

Otra posibilidad que se analiza, es la variación de las distancias entre las lentes. Aquí se pueden considerar varios casos como incrementar la separación de las lentes, o por el contrario acercarlas; acercar a la primera lente la segunda y alejarla de la tercera y el caso contrario, o sea, alejar la segunda lente de la primera y acercarla a la tercera. Es este último caso el que brinda la posibilidad de disminuir la distancia focal como puede comprobarse en la Fig. 2, donde se grafica la dependencia de la distancia focal en función de la variación de la distancia entre las lentes.

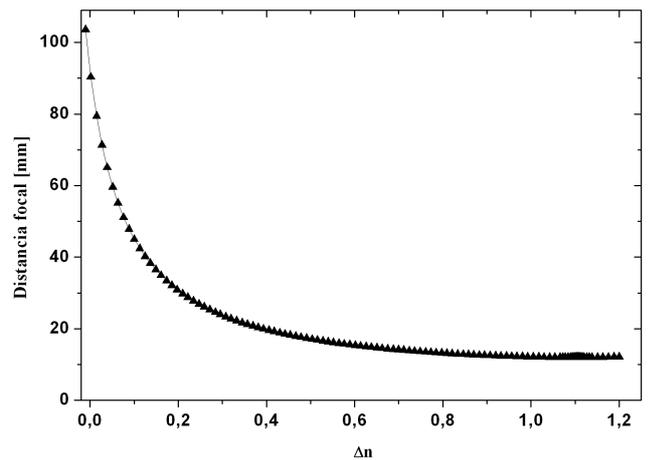


Figura 1 - Dependencia de la distancia focal del aumento en Δn del Índice de refracción en las lentes convergentes.

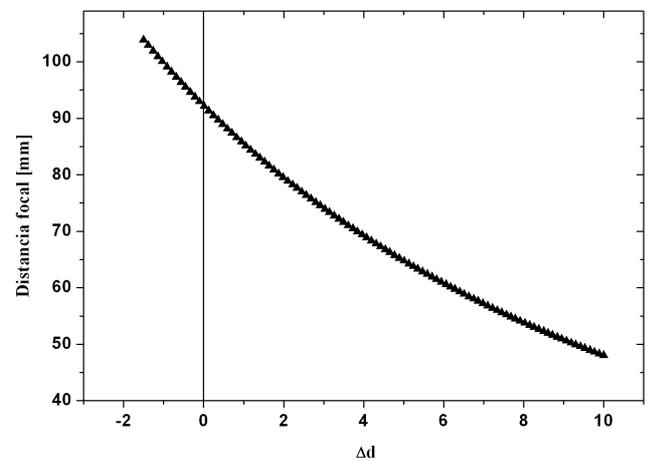


Figura 2 - Dependencia de la distancia focal con distancia Δd entre las lentes.

Otro parámetro que puede ser variado es el radio de curvatura de las lentes. En este caso se muestra que solo obtenemos resultados con el aumento del radio de curvatura de las caras por donde entra la luz de las tres lentes, mientras que la disminución de los mismos no conduce a una disminución de la distancia focal. El caso de disminución de los radios de curvatura se presenta en la Fig. 3, donde se grafica la dependencia de la distancia focal de las variaciones de los radios de curvatura de las lentes. En el mismo es posible comprobar que el aumento de los radios aumenta la distancia focal.

Con los resultados obtenidos se orienta a los estudiantes proceder a realizar de nuevo el cálculo de la distancia focal y la distancia de la última lente al foco con lentes convergentes de vidrio flint extra denso EDF3, en el triplete con $n = 1,7200$ [6] obteniéndose, $f_2 = 55.45$ mm y $d_2 = 49.24$ mm, donde d_2 es la distancia de la última lente del objetivo al foco.

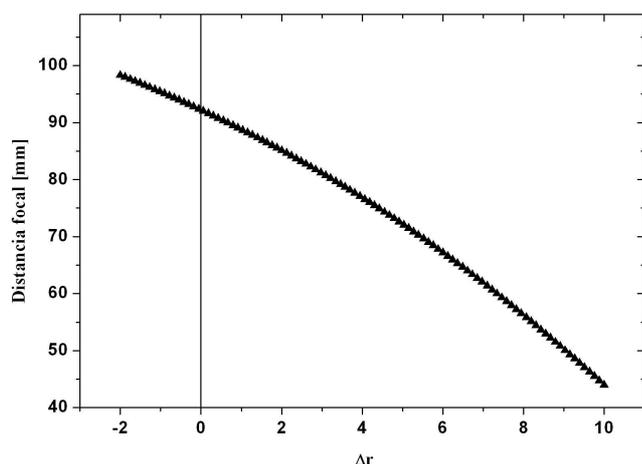


Figura 3 - Dependencia de la distancia focal con el del radio de las caras por donde entra la luz de las tres lentes.

Como podemos apreciar al sustituir las lentes convergentes por otras de iguales radios de curvatura con índice de refracción mayor se alcanza una disminución apreciable, de 92.23 mm a 55.45 mm, de la distancia focal.

Los estudiantes demostraron habilidades para elaborar los programas de cálculo y estudiar las diferentes variantes que le fueron propuestas en el seminario y llegar a conclusiones a partir de los gráficos de la dependencia de la distancia focal con el parámetro que se varía.

En la discusión de los resultados con los estudiantes se constató que se incrementó en los mismos el interés por involucrarse en el trabajo para el dominio del material docente. Se logró, la activación del aprendizaje, esto es, la movilización de las capacidades intelectuales, ética y volitiva de los estudiantes en la solución del problema propuesto por el profesor.

5. Conclusiones

Se constató en la práctica como la activación de los conocimientos previos de los estudiantes, especialmente los de computación, que les permite elaborar sus programas, y presentarlos en el seminario proponiendo variantes ideadas por ellos, permite incrementar su interés en el estudio de nuevos contenidos. Esto redundará en una mayor eficiencia del proceso docente educativo y sirve como motivación para los estudiantes en el estudio de

los conocimientos básicos en esta asignatura de óptica.

Se logró discutir el método matricial y las posibilidades y ventajas que brinda con relación a la práctica tradicional. La experiencia pedagógica que se presenta permitió alcanzar objetivos de mucho mayor alcance: el estudiante además de calcular la distancia focal del objetivo como se hace en la solución tradicional del problema, puede, aprovechando las posibilidades que ofrece el programa Mathematica, observar como influyen la variación de los diferentes parámetros sobre la distancia focal y encontrar el valor más próximo al deseado en el estudio del problema físico concreto.

El resultado obtenido permite afirmar que en la actividad el estudiante ha consolidado los conocimientos sobre la óptica Geométrica, a través del principio “de aprender haciendo”.

El resultado positivo de esta experiencia recomienda realizar otra similar dedicada al estudio del comportamiento de la reflectancia de la luz en láminas delgadas multicapas.

Referencias

- [1] J. Fuentes y M. Hernández, *Actas del Segundo Taller Iberoamericano de Enseñanza de la Física Universitaria*, V II, 572 (2000).
- [2] *Programa de la Asignatura de Computación* (Facultad de Física, Universidad de la Habana)
- [3] K. Halbach, *Am. J. Phys.* **32**, 90 (1964).
- [4] W.S. Quon, *Physics Teacher* **34**, 378 (1996).
- [5] D. Larabee, *Physics Teacher* **40**, 139 (2002).
- [6] E. Hecht, *Óptica* (Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, 2000), tercera edición.
- [7] L. Pedrotti Frank, S.J. Leno and S. Pedrotti, *Introduction to Optics* (Prentice-Hall International Inc., New York, 1993).
- [8] A. Pérez Perdomo y O. Calzadilla Amaya, *Óptica Matricial* (Ediciones Universidad de la Habana, La Habana, 1996).
- [9] D. Ausubel, J. Novak y H. Hanesian, *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo* (Editorial Trillas, México, 1983), segunda edición.
- [10] N.F. Talizina, *La Formación de la Actividad Cognoscitiva de los Escolares* (Editorial Ángeles Editores, México, 1992).