

# Redução do menisco no contato líquido-bastão cilíndrico

(Meniscum rise in the liquid-cylindrical rod contact)

G.F. Leal Ferreira<sup>1</sup>

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

Recebido em 13/12/2005; Aceito em 4/4/2006

Estuda-se a redução da ascensão (externa) de líquido em bastões cilíndricos gerado pela sua curvatura.

**Palavras-chave:** tensão superficial e curvatura, menisco externo.

We study the shorter meniscum rise in the contact liquid - cylindrical rod caused by its curvature.

**Keywords:** surface tension and curvature, external meniscum.

## 1. Introdução

A literatura de hoje em Física Geral e Experimental trata o caso da ascensão de líquido no interior de tubos capilares cilíndricos (as leis de Jurin) [1], e, na mais antiga, resolvia-se mesmo o problema da ascensão em paredes ou placas planas [2] (ver também [3]). Mas o caso da ascensão na parede externa de um tubo cilíndrico, ou como chamaremos aqui, da ascensão em bastão cilíndrico, não era mencionado, certamente pelas dificuldades da integração (ver seção 4), que só agora podem ser superadas. Mas este caso é interessante de ser estudado porque ele introduz no problema uma segunda curvatura ao menisco, imposta pela simetria do bastão, que se contrapõe àquela da película, indicando, qualitativamente, a diminuição da curvatura total e o enfraquecimento da ascensão. No que segue, pretendemos quantificar esta previsão.

## 2. Teoria, placa plana

Na Fig. 1, considere-se a parte da figura à esquerda da linha AA', representando esquematicamente a subida de líquido numa placa plana. O nível do líquido, longe de AA' está em L e o perfil do menisco é LPM. Em P, de ordenada z, a normal é NP e a tangente TPS subtende o ângulo  $\theta$  com o eixo horizontal LTA. A pressão exterior em P é a atmosférica  $p_0$  e no interior do líquido é  $p$ . Tem-se:

$$p_0 = p + \frac{\gamma}{R}, \quad (1)$$

em que  $\gamma$  é a tensão superficial e  $R$  o raio de curvatura em P. Mas no plano LA a pressão atmosférica também

é  $p_0$ , logo:

$$p = p_0 - \rho g z, \quad (2)$$

de maneira que das Eqs. (1) e (2) tem-se:

$$\rho g z = \frac{\gamma}{R}, \quad (3)$$

sendo por sua vez o raio de curvatura  $R$  igual a:

$$R = \frac{ds}{d\theta}, \quad (4)$$

sendo  $\theta$  o ângulo que a tangente TPS faz com o eixo horizontal (veja Fig. 1).

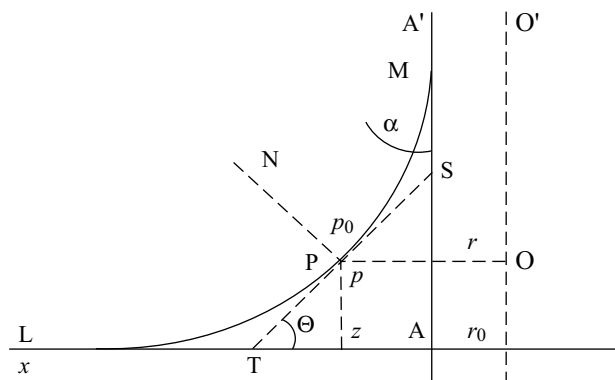


Figura 1 - À esquerda de AA', esquema do contato entre o líquido e a parede plana AA', as coordenadas sendo cartesianas; à esquerda de OO', esquema do contato do líquido com o bastão cilíndrico de raio  $r_0$ , coordenadas cilíndricas. Para os detalhes, ver texto nas seções 2 e 3.

Por sua vez, pela Fig. 2,

$$dz = sen\theta ds, \quad (5)$$

<sup>1</sup>E-mail: guilherm@if.sc.usp.br.

relação que considerada com as Eqs. (3) e (4), gera a equação diferencial:

$$zdz = \frac{\gamma \text{sen}\theta d\theta}{\rho g}, \quad (6)$$

que pode ser integrada de  $\theta = 0$  e  $z = 0$  dando:

$$z^2 = \frac{2\gamma}{\rho g}(1 - \cos\theta). \quad (7)$$

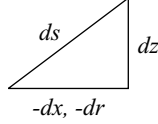


Figura 2 -  $ds$  é o elemento da curva representando o perfil do líquido,  $dz$  é o elemento de altura e  $-dx$  e  $-dr$  os elementos de deslocamento horizontal, no caso plano e cilíndrico, respectivamente.

A altura total de subida,  $h$ , será, em termos do ângulo de contato  $\alpha$  em  $AA'$ , complemento do ângulo  $\theta$ ,

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}(1 - \text{sen}\alpha)}. \quad (8)$$

Quando o líquido 'molha' a parede,  $\alpha = 0$  e então  $h = h_m$  igual a:

$$h_m = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}}. \quad (9)$$

Para fins futuros, vamos obter também a dependência entre  $\theta$  e  $x$ , este contado de  $AA'$ . De acordo com a Fig. 2,

$$dx = -\frac{dz}{\text{tg}\theta}, \quad (10)$$

o sinal negativo indicando que o aumento em  $z$  se dá com a diminuição de  $x$ . Com o auxílio das Eqs. (6) e (7) obtém-se a equação diferencial:

$$dx = -\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \left( \frac{1}{\text{sen}\frac{\theta}{2}} - 2\text{sen}\frac{\theta}{2} \right) \frac{d\theta}{2}, \quad (11)$$

cujas integral é:

$$x = -\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \left\{ \ln \text{tg}\frac{\theta}{4} + 2 \cos\frac{\theta}{2} - C \right\}, \quad (12)$$

em que a constante  $C$  será determinada aqui para o caso em que o líquido molha a placa ( $\theta = 90^\circ$  ou  $\alpha = 0$ ) em  $x = 0$ , obtendo-se:

$$C = \log \text{tg}\frac{\pi}{8} + \sqrt{2} = 0,53284. \quad (13)$$

### 3. Teoria, bastão cilíndrico

Consideremos a Fig. 1 na totalidade de seus elementos, isto é, incluindo aqueles à direita da linha  $AA'$ . Agora, o eixo vertical  $OO'$  é o eixo do bastão, o novo

eixo dos  $z$ . O raio do bastão é  $r_0$  e  $r$  é a coordenada cilíndrica radial do ponto P, introduzindo uma segunda curvatura à película de perfil LPA'. Devido a esta curvatura, aparece uma tensão 'centrípetas'  $\gamma/r$ , cuja componente na direção da normal (principal) é  $-\gamma \text{sen}\theta/r$ , ver Fig. 3. Note que na direção da normal NP, tudo se passa como o novo raio de curvatura, maior, fosse  $PO''$ , que vai de P ao eixo do bastão em  $O'$ . Assim, em vez da Eq. (3) temos agora:

$$\rho g z = \gamma \left( \frac{1}{R} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \right), \quad (14)$$

$R$  sendo ainda o raio de curvatura do perfil da película. Adotando as novas variáveis  $z'$  e  $r'$  tais que:

$$z = az' \text{ e } r = ar', \text{ com } a = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad (15)$$

a Eq. (14), tendo em conta as Eqs. (4) e (5), pode ser escrita adimensionalmente como:

$$z' = \frac{\text{sen}\theta d\theta}{dz'} - \frac{\text{sen}\theta}{r'}. \quad (16)$$

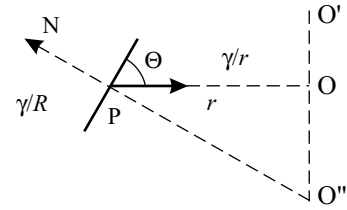


Figura 3 -  $PO''$  é o raio efetivo de curvatura, negativo, introduzido pelo bastão no ponto P.

Para o caso da água em que  $\gamma \simeq 75$  dyn/cm,  $a \simeq 0,25$ . Devido à presença da variável  $r'$  na Eq. (16), temos agora de considerar uma segunda equação entre as variáveis  $z$  e  $r$ , ou  $z'$  e  $r'$ , que a Fig. 2 nos dá, em vez da Eq. (10), como:

$$dz' = -dr' \text{tg}\theta. \quad (17)$$

A seguir discutimos como proceder para integrar o sistema de equações diferenciais dadas pelas Eqs. (16) e (17). Notemos que para  $\theta \simeq 90^\circ$ , que ocorre junto ao cilindro quando o líquido molha o sólido,  $dz'/d\theta \simeq 1$ , pela Eq. (5) e a Eq. (16) permite antever um 'colapso' da ascensão para  $r' = 1$  ou  $r \simeq 0,25$  cm, isto é, bastões finos de vidro em água.

### 4. A integração

Notemos em primeiro lugar que, para grandes  $r'$ , a Eq. (16) (que se reduz àquela da parede plana) dá, aproximadamente, a Eq. (7), e especialmente para  $\theta$  pequenos,

$$z'^2 \simeq 2(1 - \cos\theta) \simeq \theta^2 \quad (18)$$

ou seja, que sendo  $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$ , então:

$$z' \simeq \theta. \quad (19)$$

Vamos adicionalmente escolher  $\theta$  como variável independente para a integração do sistema constituído pelas Eqs. (16) e (17). É fácil ver que este sistema pode ser escrito como:

$$\frac{dz'}{d\theta} = \frac{\text{sen}\theta}{z' + \frac{\text{sen}\theta}{r'}} \quad (20)$$

$$\frac{dr'}{d\theta} = \frac{-\cos\theta}{z' + \frac{\text{sen}\theta}{r'}} \quad (21)$$

sistema que foi integrado de forma aproximada, para cada raio do bastão,  $r_0'$ , da maneira seguinte. Em princípio, a integração deveria começar, das vizinhanças de  $z' \simeq \theta \rightarrow 0$ , e  $r' \rightarrow \infty$ . Dois inconvenientes logo aparecem: esta divergência em  $r'$ , e os denominadores do lado direito das Eqs. (20) que se anulam, obrigando a se recorrer a outro caminho. Notemos em primeiro lugar que para grandes  $r'$  as Eqs. (20) e (6) coincidem e que, portanto, a aproximação dada na Eq. (19) permanece válida. Decidimos então, 1) usar a condição  $z' \simeq \theta'$  para grandes  $r'$  e 2) estimar, para um valor grande de  $x'$ , vamos dizer  $x_i'$ , qual seria o valor de  $z'$  usando as Eqs. (12) e (13), no caso de parede plana. No caso do bastão de raio  $r_0'$ , o correspondente valor de  $z'$  deve ser menor, vamos dizer  $z_i'$ , que irá sendo então escolhido tentativamente; 3) o sistema de Eqs. (20) é integrado de  $r_i' = x_i' + r_0'$  e com o valor inicial escolhido de  $z_i'$ , mantendo-se o valor inicial de  $\theta$  igual a  $z_i'$ , de acordo com 1) acima; 4) a integração é então realizada com o MathCad Plus 6 até o valor final de  $\theta = 90^\circ$ . Observa-se então que, para valores superestimados de  $z_i'$ , o valor final de  $r'$  é maior que  $r_0'$  e que para valores subestimados ele é menor. Por aproximações sucessivas chega-se ao 'correto' valor inicial de  $z_i'$  que faz a integração terminar em  $r_0'$  para  $\theta = 90^\circ$  e o correspondente valor final de  $z'$ ,  $h'$ , é anotado, permitindo obter-se  $h'$  vs.  $r_0'$  ao se variar  $r_0'$ . Usou-se 2,04 para  $x_i'$ . Acreditamos que a aproximação atingida seja somente de uns poucos porcentos devido, principalmente, à variação rápida de  $z'$  nas proximidades do bastão, para tangenciá-lo. A Fig. 4 mostra  $h'$  em função de  $r_0'$ . A linha tracejada dá a altura,  $\sqrt{2}$ , para  $r_0' \rightarrow \infty$ , o mesmo da parede plana, correspondendo à  $h_m$ , Eq. (9).

### 5. Resultados

Mostramos na Fig. 4, a dependência encontrada entre  $h'$  e  $r_0'$ . O valor da altura para o caso da placa, igual a  $\sqrt{2}$ , está indicado. Na Fig. 5, mostra-se o perfil calculado para o caso de  $r_0' = 0,75$  e, para comparação, aquele da placa plana. Note-se que embora o ângulo de contato imposto para os dois casos seja nulo, não é isso o que a figura parece indicar.

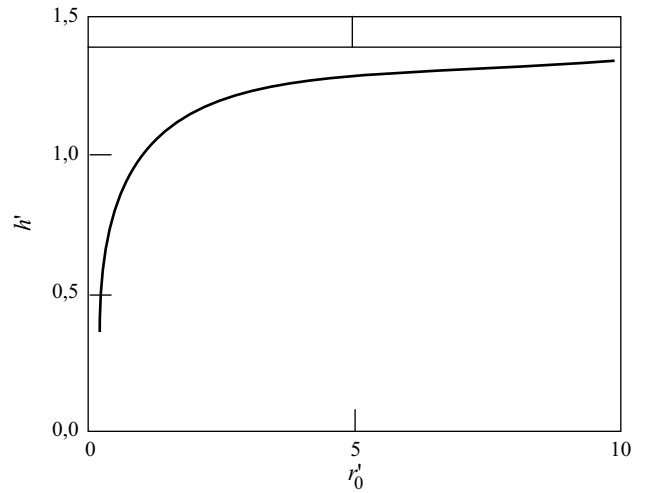


Figura 4 - Altura de subida  $h'$  em função do raio do bastão,  $r_0'$ , ambos normalizados (ver Eq. (15)). A reta acima da curva representa a altura,  $(\sqrt{2})$ , no caso da parede plana.

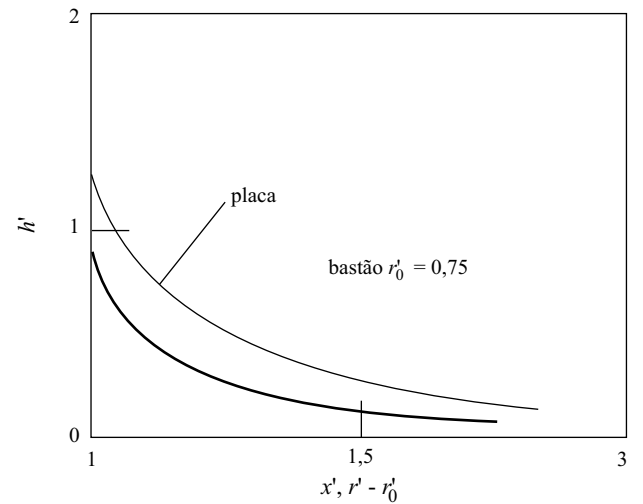


Figura 5 - Perfis do menisco para a parede plana e para o bastão, abaixo, de raio  $r_0' = 0,75$ .

### Referências

- [1] F.W. Sears e M.W. Zemanski, *Física: Calor, Ondas, Óptica* (Livro Técnico e Científico, Rio de Janeiro, 1977).
- [2] G. Bruhat, *Mecânica* (Difusão Européia do Livro, São Paulo, 1963), v. 2, cap. XX.
- [3] F.H. Newman and V.H.L. Searle, *The General Properties of Matter* (Edward Arnold & Co., London, 1951), cap. 6.