

LINEARIZAÇÃO DOS COEFICIENTES DE REFLEXÃO DE ONDAS qP EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

Ellen N. S. Gomes¹, João S. Protázio¹, Jessé C. Costa¹ & Ivan A. Simões Filho²

Received September 15, 2000 / Accepted March 25, 2001

Os coeficientes de reflexão de onda qP em uma interface plana que separa dois meios anisotrópicos dependem dos parâmetros elásticos dos meios envolvidos de maneira não linear. Aproximações lineares para a refletividade de ondas qP pressupondo fraco contraste de impedância e fraca anisotropia levam a uma forma simples para se fazer à análise de AVO/AVD. Neste trabalho a solução das equações de Zoeppritz é rescrita explicitamente em função de matrizes de impedância e polarização. Além disso, utilizando-se esta abordagem, é apresentada uma metodologia geral mais simples para se obter as formas linearizadas. Estas formas linearizadas para os coeficientes de reflexão da onda qP e das ondas convertidas para uma onda qP incidente apresentam resultados muito próximos da formulação exata para ângulos de incidência menores que 30° considerando-se um contraste de impedância moderado e anisotropia em limites geologicamente aceitáveis.

Palavras-chave : Anisotropia; AVO/AVD.

LINEARIZED REFLECTION COEFFICIENTS FOR qP WAVES IN ANISOTROPIC MEDIA - *The reflection coefficients at a planar interface separating two anisotropic media have a nonlinear dependence on the elastic parameters and densities of both media. Linear approximations on the elastic parameters for the qP wave reflectivity are more convenient for AVO/AVD analysis. We present the solution of the Zoeppritz equations in terms of impedance and polarization matrices. Using this approach and assuming weak impedance contrast and weak anisotropy, a simple derivation of linearized approximations for qP the reflectivity is presented for general anisotropy. The linear approximations of reflection coefficients, qP and converted waves, for qP incidence are very close to the exact results for incidence angles up to 30 degrees considering moderate impedance contrast and anisotropy.*

Key words: Anisotropy; AVO/AVD.

¹Universidade Federal do Pará-UFPA

²Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

INTRODUÇÃO

As propriedades elásticas das rochas na subsuperfície podem ser estimadas através do estudo das amplitudes das ondas refletidas utilizando-se a análise da amplitude versus afastamento (AVO) e amplitude versus direção (AVD). Essas análises têm sido importantes no prognóstico de contrastes litológicos ou de conteúdo de fluidos das formações. Em meios com fraturamento pode-se, por exemplo, determinar a orientação de planos de fratura que em geral indicam a direção de maior permeabilidade que é essencial à caracterização de reservatórios de hidrocarbonetos.

Os primeiros trabalhos sobre o assunto levaram em consideração apenas meios acústicos ou elásticos isotrópicos (Ostrander, 1984). Novas técnicas de aquisição de dados em 3-C (três componentes) e o comportamento efetivamente anisotrópico de meios fraturados (Schoenberg & Douma, 1988) e finamente estratificados (Postma, 1955) em regime quase estático estimularam a incorporação de anisotropia na análise de AVO/AVD. Modelos interpretativos que admitem anisotropia apresentam expressões analíticas das amplitudes que dependem de forma não linear dos parâmetros elásticos do meio o que torna a análise destas expressões complexa. Devido a esta dificuldade, formas linearizadas para as amplitudes têm sido utilizadas.

Várias abordagens têm sido propostas para simplificar a expressão exata do coeficiente de reflexão de uma onda qP supondo uma onda qP incidente. Para meios fracamente anisotrópicos com alto grau de simetria e baixo contraste, os principais trabalhos foram de Thomsen (1986; 1993) e Banik (1987). Uma aproximação foi apresentada por Zillmer et al. (1997) considerando meios fracamente anisotrópicos e contrastes arbitrários. Entretanto, essa forma aproximada é ainda muito complexa. Vavrycuk & Psencik (1998) a particularizaram considerando pequenos contrastes entre as propriedades elásticas do meio obtendo uma fórmula mais simples tanto para o coeficiente de reflexão como para o coeficiente de transmissão de uma onda qP considerando uma onda qP incidente.

Neste artigo faz-se uma extensão do trabalho de Schoenberg & Protázio (1992), no qual uma

formulação matricial para o cálculo exato dos coeficientes de reflexão para meios anisotrópicos com pelo menos um plano de simetria foi apresentado. Estende-se esta formulação determinando-se os coeficientes de reflexão e transmissão exatos entre meios anisotrópicos arbitrários. Além disso, a partir desta formulação, em que as equações de Zoeppritz, são escritas de forma particionada, é obtida uma forma linearizada para os coeficientes de reflexão da onda qP e de suas convertidas considerando uma onda incidente qP. A grande vantagem deste método é a simplificação da obtenção das linearizações. Faz-se também uma avaliação destas aproximações a partir de dados sintéticos mostrando-se que as fórmulas linearizadas produzem resultados muito próximos daqueles obtidos com a formulação exata para incidências de até 30° que é a faixa usada na prospeção sísmica.

METODOLOGIA

Neste trabalho, as matrizes são representadas por letras maiúsculas e em negrito e os vetores são representados por letras minúsculas e em negrito, utiliza-se a notação indicial e a convenção da soma (Aki & Richards, 1980) em todo o texto e as exceções a estas regras serão indicadas explicitamente. Além disso, será utilizada a notação P, S e T para as ondas qP, qS₁ e qS₂ (Helbig, 1994).

Sejam dois meios anisotrópicos quaisquer separados por uma interface plana $x_3 = 0$ com a incidência ocorrendo no meio superior e a transmissão ocorrendo no meio subjacente. Como estamos considerando que as medidas serão feitas longe da fonte e para intervalos de tempo muito pequenos, uma boa aproximação para o espalhamento é considerar que as ondas incidentes, refletidas e transmitidas são ondas planas cujo campo de deslocamento é descrito por :

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}, t) = A_\alpha \mathbf{n}_\alpha \exp[i\omega(\mathbf{s}_\alpha \cdot \mathbf{x} - t)], \quad (1)$$

sendo \mathbf{u} o vetor de deslocamento, \mathbf{n}_α o vetor polarização, A_α a amplitude da onda, \mathbf{s}_α o vetor vagarosidade, ω é a frequência e \mathbf{x} é o vetor posição

espacial (Musgrave, 1970). O subscrito α refere-se às ondas P, S e T, assim classificadas de acordo com sua velocidade de propagação.

Utilizando a lei de Hooke generalizada e considerando que na interface o campo de deslocamento e a tração são contínuos, os coeficientes de reflexão e transmissão das ondas espalhadas são determinados pelo sistema matricial:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_i \mathbf{i} + \mathbf{N}_r \mathbf{r} = \mathbf{N}_t \mathbf{t} \\ \mathbf{Z}_i \mathbf{i} + \mathbf{Z}_r \mathbf{r} = \mathbf{Z}_t \mathbf{t} \end{cases}, \quad (2)$$

em que i corresponde à amplitude da onda incidente, r à amplitude da onda refletida e t à amplitude da onda transmitida. As matrizes \mathbf{N}_k e \mathbf{Z}_k correspondem às matrizes de polarização e impedância da onda incidente ($k=i$), refletida ($k=r$) e transmitida ($k=t$) respectivamente, as componentes destas matrizes são obtidas por $N_{m\alpha} = n_{m\alpha}$, $Z_{m\alpha} = c_{3mjl} s_{l\alpha} n_{j\alpha}$ e c_{3jkl} representa as componentes do tensor elástico do meio. Neste trabalho as componentes do tensor elástico serão representadas utilizando a notação reduzida (Helbig, 1994) em que $c_{m j k l}$ será substituído por C_{pq} .

Explicitamente os coeficientes \mathbf{r} e \mathbf{t} são dados por :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\equiv \mathbf{R} \mathbf{i} = (\mathbf{Z}_r - \mathbf{Z}_t \mathbf{N}_t^{-1} \mathbf{N}_r)^{-1} (\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_t \mathbf{N}_t^{-1} \mathbf{N}_i) \mathbf{i} \\ \mathbf{t} &\equiv \mathbf{T} \mathbf{i} = -(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_r \mathbf{N}_r^{-1} \mathbf{N}_t)^{-1} (\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_r \mathbf{N}_r^{-1} \mathbf{N}_i) \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (3)$$

As fórmulas (2) e (3) generalizam para meios anisotrópicos arbitrários os resultados obtidos por Schoenberg & Protázio (1992) para o caso de meios com pelo menos um plano horizontal de simetria especular.

A partição do sistema de equações de Zoeppritz (2) através das matrizes de impedância e polarização permite se obter uma solução explícita para as matrizes de reflexão e transmissão o que não é possível com a abordagem usual (Vavrycuk & Psencik, 1998). As matrizes \mathbf{R} e \mathbf{T} contêm todas as informações sobre as amplitudes envolvidas no espalhamento.

As amplitudes das ondas incidente, refletida e transmitidas são representados pelos vetores $\mathbf{i} = i_\alpha$, $\mathbf{r} = r_\alpha$ e $\mathbf{t} = t_\alpha$, respectivamente. Os coeficientes de reflexão de uma onda incidente P, R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} são obtidos de (3) em que:

$$\mathbf{R} = [R_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} R_{PP} & R_{PS} & R_{PT} \\ R_{SP} & R_{ST} & R_{ST} \\ R_{TP} & R_{TS} & R_{TT} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Um dos possíveis problemas nesta formulação é que nas direções onde ocorre as singularidades não se pode determinar as matrizes de polarização (representadas por \mathbf{N}). Entretanto pode-se sempre escolher vetores de polarização linearmente independentes de tal forma que se possa determinar as matrizes de polarização inversíveis e desta forma o sistema (2) terá solução não trivial.

Na formulação exata dos coeficientes de reflexão os parâmetros elásticos dos meios aparecem de forma não linear o que torna a análise das propriedades destes meios a partir de AVO/AVD bastante complexa. Uma alternativa para simplificar a análise é linearizar estes coeficientes. Neste trabalho a linearização dos coeficientes R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} é feita em duas etapas. Primeiramente, tomam-se pequenas perturbações dos parâmetros elásticos C_{33} e C_{55} em torno de um meio de referência isotrópico homogêneo.

Assim, sendo $\rho^{(\gamma)}$ e $C_{mj}^{(\gamma)}$ a densidade e os parâmetros elásticos dos meios incidente ($\gamma=1$) e subjacente ($\gamma=2$), definem-se:

$$\alpha^{(\gamma)} = \sqrt{C_{33}^{(\gamma)} / \rho^{(\gamma)}}, \quad (5)$$

$$\beta^{(\gamma)} = \sqrt{C_{55}^{(\gamma)} / \rho^{(\gamma)}}, \quad (6)$$

como as velocidades do meio isotrópico superior (onde ocorre a incidência) e do meio subjacente (onde ocorre a transmissão). A densidade e as velocidades do meio isotrópico de referência são então dadas por:

$$\rho = \frac{(\rho^{(1)} + \rho^{(2)})}{2}, \quad \alpha = \frac{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)})}{2} \text{ e}$$

$$\beta = \frac{(\beta^{(1)} + \beta^{(2)})}{2}. \quad (7)$$

A seguir os outros parâmetros elásticos dos meios isotrópicos resultantes da primeira perturbação são também perturbados com C_{33} e C_{55} mantidos agora constantes.

Desta forma têm-se meios que respondem como meios fracamente anisotrópicos.

Perturbando o sistema linear (2), as fórmulas linearizadas dos coeficientes são então dadas pela resolução do sistema:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{Z}}_r - \tilde{\mathbf{Z}}_t \tilde{\mathbf{N}}_t^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_r) \delta \mathbf{R} &= 2 (\Delta \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}_t \tilde{\mathbf{N}}_t^{-1} \Delta \mathbf{N}) \\ (\tilde{\mathbf{Z}}_t - \tilde{\mathbf{Z}}_r \tilde{\mathbf{N}}_r^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_t) \delta \mathbf{T} &= -2 (\Delta \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}_r \tilde{\mathbf{N}}_r^{-1} \Delta \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (8)$$

As matrizes $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ e $\tilde{\mathbf{N}}_k$, correspondem às matrizes de impedância e de polarização associadas à reflexão ($k = r$) e transmissão ($k = t$) do meio isotrópico de referência. Os contrastes médios entre as matrizes de polarização e de impedância dos meios incidente e subjacente são dados pelas matrizes $\Delta \mathbf{N} = (\delta \mathbf{N}_t - \delta \mathbf{N}_i) / 2$ e $\Delta \mathbf{Z} = (\delta \mathbf{Z}_t - \delta \mathbf{Z}_i) / 2$, respectivamente. As matrizes de reflexão e transmissão perturbadas $\delta \mathbf{R}$ e $\delta \mathbf{T}$ são dadas por:

$$\delta \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \delta R_{PP} & \delta R_{PS} & \delta R_{PT} \\ \delta R_{SP} & \delta R_{ST} & \delta R_{ST} \\ \delta R_{TP} & \delta R_{TS} & \delta R_{TT} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\delta \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \delta T_{PP} & \delta T_{PS} & \delta T_{PT} \\ \delta T_{SP} & \delta T_{ST} & \delta T_{ST} \\ \delta T_{TP} & \delta T_{TS} & \delta T_{TT} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Na determinação da aproximação linear para os coeficientes de reflexão para incidência P, δR_{pp} ,

δR_{sp} e δR_{tp} , apenas a primeira coluna da matriz $\Delta \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}_t \tilde{\mathbf{N}}_t^{-1} \Delta \mathbf{N}$ é utilizada em consequência da regra de Cramer (Hoffman & Ray, 1971).

O coeficiente linearizado de uma onda P refletida considerando uma onda P incidente é então dado por:

$$\begin{aligned} \delta R_{pp} &= \delta R_{pp}^{(ISO)} + \left\{ \frac{\Delta(C_{13} + 2C_{55} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} \cos^2 \varphi + \right. \\ &+ \left[\frac{\Delta(C_{23} + 2C_{44} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} - 8 \frac{\Delta(C_{44} - C_{55})}{2\bar{C}_{33}} \right] \text{sen}^2 \varphi + \\ &+ 2 \left[\frac{\Delta(C_{36} + 2C_{45})}{\bar{C}_{33}} - 4 \frac{\Delta C_{45}}{\bar{C}_{33}} \right] \cos \varphi \text{sen} \varphi \left. \right\} \text{sen}^2 \theta + \\ &+ \left\{ \frac{\Delta(C_{11} - C_{33})}{2\bar{C}_{33}} \cos^4 \varphi + \frac{\Delta(C_{22} - C_{33})}{2\bar{C}_{33}} \text{sen}^4 \varphi + \right. \\ &+ \frac{\Delta(C_{12} + 2C_{66} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} \cos^2 \varphi \text{sen}^2 \varphi \\ &+ \left. 2 \frac{\Delta C_{16}}{\bar{C}_{33}} \cos^2 \varphi \text{sen} \varphi + 2 \frac{\Delta C_{26}}{\bar{C}_{33}} \cos \varphi \text{sen}^3 \varphi \right\} \text{sen}^2 \theta \text{tan}^2 \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

em que $\delta R_{pp}^{(ISO)}$ representa a perturbação isotrópica do coeficiente δR_{pp} .

O coeficiente linearizado da onda S refletida considerando uma onda P incidente é dado por:

$$\begin{aligned} \delta R_{sp} &= \delta R_{sp}^{(ISO)} + 4(\kappa \text{sen}^2 \theta - K(\theta \cos \theta)) \\ &+ \left\{ \frac{\Delta(C_{44} - C_{55})}{2\bar{C}_{33}} \text{sen}^2 \varphi + \frac{\Delta C_{45}}{\bar{C}_{33}} \text{sen} \varphi \cos \varphi \right\} \frac{\text{sen} \theta}{\kappa K(\theta)} \\ &+ 2 \left\{ \frac{\Delta(C_{11} - C_{33})}{2\bar{C}_{33}} \cos^4 \varphi + \frac{\Delta(C_{22} - C_{33})}{2\bar{C}_{33}} \text{sen}^4 \varphi + \right. \\ &+ \frac{\Delta(C_{12} + 2C_{66} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} \text{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &+ \left. 2 \frac{\Delta C_{16}}{\bar{C}_{33}} \text{sen} \varphi \cos^3 \varphi + 2 \frac{\Delta C_{26}}{\bar{C}_{33}} \text{sen}^3 \varphi \cos \varphi \right\} \frac{\text{sen}^3 \theta}{\eta(\theta)} \\ &+ \left\{ \frac{\Delta(C_{13} + 2C_{55} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} \cos^2 \varphi + \right. \\ &+ \left. \frac{\Delta(C_{23} + 2C_{44} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} \text{sen}^2 \varphi \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \frac{\Delta(C_{36} + 2C_{45})}{\bar{C}_{33}} \text{sen } \varphi \cos \varphi \left. \frac{\text{sen } \theta \cos 2\theta}{\eta(\theta)} \right. \\
 & + \left. \left\{ \frac{\Delta(C_{25} + 2C_{46})}{\bar{C}_{33}} \text{sen}^2 \varphi \cos \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\Delta(C_{14} + 2C_{56})}{\bar{C}_{33}} \text{sen } \varphi \cos^3 \varphi \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\Delta C_{15}}{\bar{C}_{33}} \cos^3 \varphi + \frac{\Delta C_{24}}{\bar{C}_{33}} \text{sen}^3 \varphi \right\} \frac{\text{sen } \theta (2\kappa \omega(\theta) - 1)}{\kappa K(\theta) \eta(\theta)} \quad (12) \\
 & + \left. \left\{ \frac{\Delta C_{14}}{\bar{C}_{33}} \text{sen } \varphi + \frac{\Delta C_{23}}{\bar{C}_{33}} \cos \varphi \right\} \frac{\cos \theta [\cos \theta - 2K(\theta) \omega(\theta)]}{\kappa K(\theta) \eta(\theta)} \right.
 \end{aligned}$$

em que $\delta R_{SP}^{(ISO)}$ representa a perturbação isotrópica do coeficiente δR_{SP} .

O coeficiente linearizado de uma onda T considerando uma onda P incidente é dado por:

$$\begin{aligned}
 \delta R_{TP} = & \frac{1}{\kappa K(\theta)} \left\{ \left[\frac{\Delta(C_{24} - 2C_{56})}{\bar{C}_{33}} \cos \varphi \text{sen}^2 \varphi - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\Delta(C_{15} - 2C_{46})}{\bar{C}_{33}} \cos^2 \varphi \text{sen} \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\Delta C_{14}}{\bar{C}_{33}} \cos^3 \varphi - \frac{\Delta C_{25}}{\bar{C}_{33}} \text{sen}^3 \varphi \right] \text{sen}^2 \theta + \right. \\
 & + \left. \left[\frac{\Delta(C_{44} - C_{35})}{2\bar{C}_{33}} \text{sen} 2\varphi + \frac{\Delta C_{45}}{\bar{C}_{33}} \cos 2\varphi \right] \text{sen} 2\theta + \right. \\
 & \left. \left[\frac{\Delta C_{34}}{\bar{C}_{33}} \cos \varphi - \frac{\Delta C_{35}}{\bar{C}_{33}} \text{sen} \varphi \right] \cos^2 \theta \right\} - \\
 & \frac{[\kappa \cos \theta - K(\theta)]}{K(\theta) [1 - \kappa^2]} \left\{ \left[\frac{\Delta(C_{22} - C_{33})}{2\bar{C}_{33}} \text{sen}^2 \varphi - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\Delta(C_{11} - C_{33})}{2\bar{C}_{33}} \cos^2 \varphi \right] \text{sen} 2\varphi + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \frac{\Delta(C_{12} + 2C_{66} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} \text{sen} 2\varphi \cos 2\varphi + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta C_{16}}{\bar{C}_{33}} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3\text{sen}^2 \varphi) + \right. \\
 & \left. \frac{\Delta C_{26}}{\bar{C}_{33}} \text{sen}^2 \varphi (3\cos^2 \varphi - \text{sen}^2 \varphi) \right] \text{sen}^3 \theta \\
 & + \left[\frac{\Delta(C_{14} + 2C_{56})}{\bar{C}_{33}} \cos \varphi (\cos^2 \varphi - 2\text{sen}^2 \varphi) + \right. \\
 & \left. \frac{\Delta(C_{25} + 2C_{46})}{\bar{C}_{33}} \text{sen} \varphi (2\cos^2 \varphi - \text{sen}^2 \varphi) + \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta C_{24}}{\bar{C}_{33}} \text{sen} \varphi - \frac{\Delta C_{15}}{\bar{C}_{33}} \cos \varphi \right) \text{sen} 2\varphi \right] \cos \theta \text{sen}^2 \theta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta(C_{23} + 2C_{44} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} - \frac{\Delta(C_{13} + 2C_{55} - C_{33})}{\bar{C}_{33}} \right) \text{sen} 2\varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\Delta(C_{36} + 2C_{45})}{\bar{C}_{33}} \cos 2\varphi \right] \cos 2\theta \text{sen} \theta + \right. \\
 & \left. \left[\frac{\Delta C_{34}}{\bar{C}_{33}} \cos \varphi - \frac{\Delta C_{35}}{\bar{C}_{33}} \text{sen} \varphi \right] \cos^3 \theta \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

em que: φ é o ângulo que determina o azimute, θ é o ângulo de incidência, $\kappa = \frac{\beta}{\alpha}$ é a razão entre as velocidades da onda longitudinal e cisalhantes do meio isotrópico de referência, $K(\theta) = \sqrt{1 - \kappa^2 \text{sen}^2 \theta}$ é o co-seno do ângulo de reflexão da onda convertida S, $\omega(\theta) = \kappa \text{sen}^2 \theta + K(\theta) \cos \theta$ e $\eta(\theta) = K(\theta) + \kappa \cos \theta$.

As perturbações isotrópicas são dadas por:

$$\delta R_{PP}^{(ISO)} = \frac{\Delta Z}{Z} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \tan^2 \theta - 4\kappa^2 \frac{\Delta G}{G} \text{sen}^2 \theta, \quad (14)$$

e

$$\begin{aligned}
 \delta R_{SP}^{(ISO)} = & \frac{\text{sen } \theta}{K(\theta)} \left[\frac{\Delta \alpha}{\alpha} - \frac{\Delta Z}{Z} + \right. \\
 & \left. 2\kappa (\kappa \text{sen}^2 \theta - K(\theta) \cos \theta) \frac{\Delta G}{G} \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

em que: $Z = \rho \alpha$ é a impedância acústica do meio isotrópico de referência, $G = \rho \beta^2$ é o módulo de cisalhamento do meio de referência.

A perturbação isotrópica para a onda refletida T é nula uma vez que não há conversão de onda P para onda T no caso isotrópico. Para maiores detalhes sobre as fórmulas linearizadas ver apêndice A.

TESTES

Nesta seção avaliamos as aproximações em um conjunto de modelos geologicamente plausíveis. A abordagem proposta apresenta limitações quando aplicados a problemas reais por causa das hipóteses simplificadas. Será feita uma análise de sensibilidade

à violação das hipóteses de baixo contraste e fraca anisotropia. Os resultados obtidos foram satisfatórios.

As formas linearizadas dos coeficientes de reflexão R_{pp} , R_{sp} e R_{tp} foram avaliadas da seguinte forma. Primeiro, os coeficientes obtidos através das equações de Zoeppritz e as aproximações lineares foram representados em estereogramas. A seguir é mostrado o estereograma do erro. Para o caso dos coeficientes R_{pp} e R_{sp} determinou-se o erro percentual relativo em geral, em alguns casos optou-se por determinar o erro absoluto de R_{sp} e para o coeficiente R_{tp} determinou-se erro absoluto. A determinação do erro absoluto ao invés do erro relativo deve-se ao fato de que no caso da onda T, nos planos de simetria não há conversão de onda P em T, o que torna a fórmula do erro relativo para este último coeficiente inválida e para alguns casos da onda S o coeficiente de R_{sp} assume grandes valores quando comparados com os outros valores assumidos por este coeficiente invalidando o erro relativo nestes casos. Nos estereogramas, os coeficientes foram calculados para ângulos de incidência de até 40° , a partir da normal à interface plana que separa os meios e para uma variação azimutal de 360° .

O modelo I caracteriza-se pela fraca anisotropia e baixos contrastes entre os parâmetros elásticos dos meios envolvidos e corresponde ao modelo A-C apresentado em Vavrycuk & Psencik (1998). O meio incidente é isotrópico com densidade $\rho_1 = 2,65 \text{ g/cm}^3$ e as velocidades das ondas P e S são dadas por $\alpha_1 = 4,00 \text{ km/s}$, $\beta_1 = 2,31 \text{ km/s}$, respectivamente. O meio subjacente é um TIH (meio transversalmente isotrópico com eixo de simetria horizontal (ver Musgrave, 1970) e corresponde ao meio efetivo associado a um sistema de inclusões elipsoidais paralelas em uma formação isotrópica, segundo Hudson (1982). O meio isotrópico de referência tem densidade $\rho_{ref} = 2,60 \text{ g/cm}^3$ e as velocidades das ondas P e S são dadas por $\alpha_{ref} = 4,00 \text{ km/s}$ e $\beta_{ref} = 2,31 \text{ km/s}$, respectivamente. A razão de aspecto dos elipsóides é de 10^{-4} e a densidade de fraturamento de 0,05. Este meio é caracterizado pelo tensor elástico:

$$C_{\omega\phi} = \begin{bmatrix} 31,10 & 10,37 & 10,37 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & 40,43 & 12,69 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & 40,43 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & & 13,86 & 0,00 & 0,00 \\ & & & & 12,38 & 0,00 \\ & & & & & 12,38 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Neste modelo verifica-se que as fórmulas linearizadas dos coeficientes de reflexão R_{pp} , R_{sp} e R_{tp} apresentam-se muito próximas da formulação exata para ângulos de incidência de até 30° , uma vez que os erros relativos dos coeficientes linearizados R_{pp} e R_{sp} são inferiores à 6% e 10% respectivamente enquanto que a forma linearizada R_{tp} apresenta erro absoluto da ordem de 0,001. Isto já era esperado uma vez que este modelo obedece aos pressupostos considerados na derivação destas linearizações.

O modelo II caracteriza-se pela forte anisotropia e fraco contraste dos parâmetros elásticos. O meio incidente é isotrópico com densidade de $\rho_1 = 2,20 \text{ g/cm}^3$ e as velocidades das ondas P e S dadas por $\alpha_1 = 4,23 \text{ km/s}$, $\beta_1 = 2,73 \text{ km/s}$ respectivamente. O meio subjacente é um TIH que corresponde às propriedades de um folhelho com forte anisotropia (Thomsen, 1986), e que foi girado de 30° em relação ao eixo x e 60° em relação ao eixo z e tem como tensor elástico:

$$C_{\omega\phi} = \begin{bmatrix} 66,66 & 39,42 & 19,62 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & 39,96 & 39,49 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & 66,66 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ & & & 10,94 & 0,00 & 0,00 \\ & & & & 23,52 & 0,00 \\ & & & & & 10,94 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A formulação exata de R_{pp} é dada pela figura 1. A formulação linearizada (Fig. 2) apresenta-se muito próxima da formulação exata para incidências de até 30° , já que o erro relativo para essas incidências é inferior a 7% (Fig. 3). Verifica-se que o coeficiente R_{pp} exato e linearizado não atestam o mergulho. Isto mostra que em modelos com mergulho este coeficiente não possui informações sobre o mesmo. Esse tipo de informação é obtido através das ondas convertidas. Na figura 4 tem-se a formulação exata do coeficiente R_{sp} e verifica-se que a formulação linearizada (Fig. 5) apresenta-se muito próxima da

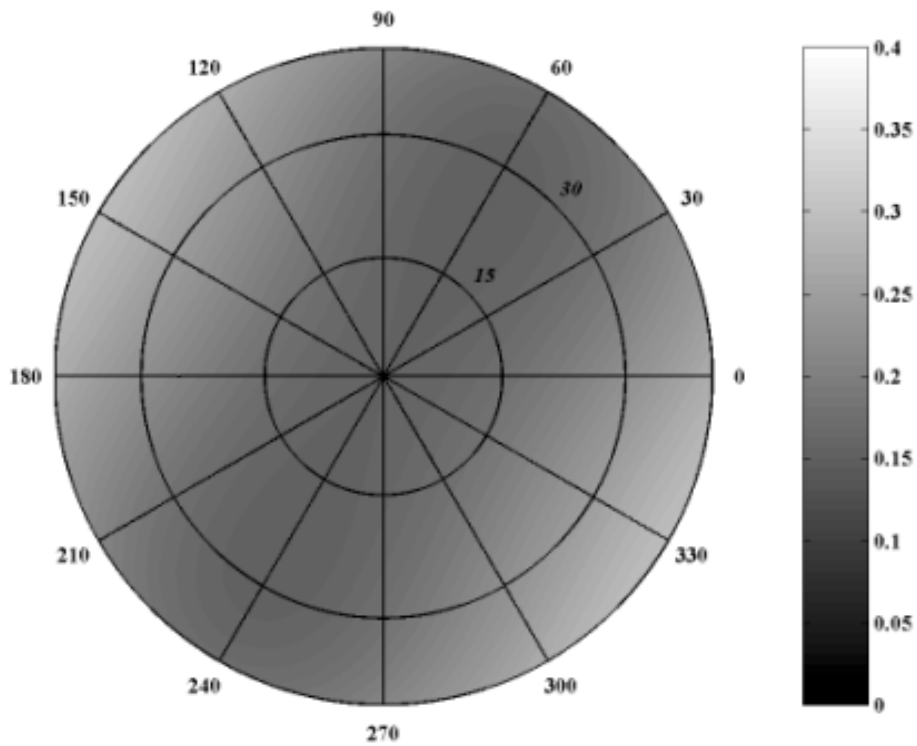


Figura 1 – Stereograma com o coeficiente de reflexão R_{pp} exato. O azimute varia de 0° até 360° e está representado no contorno da figura. A incidência varia de 0° até 40° a partir da normal à interface que separa os planos, representada na figura pelos números internos ao diagrama. A escala de cinza mostra o valor absoluto do coeficiente. Verifica-se pela figura que este coeficiente tem simetria ortorrômbica o que mostra que o coeficiente é insensível ao mergulho.

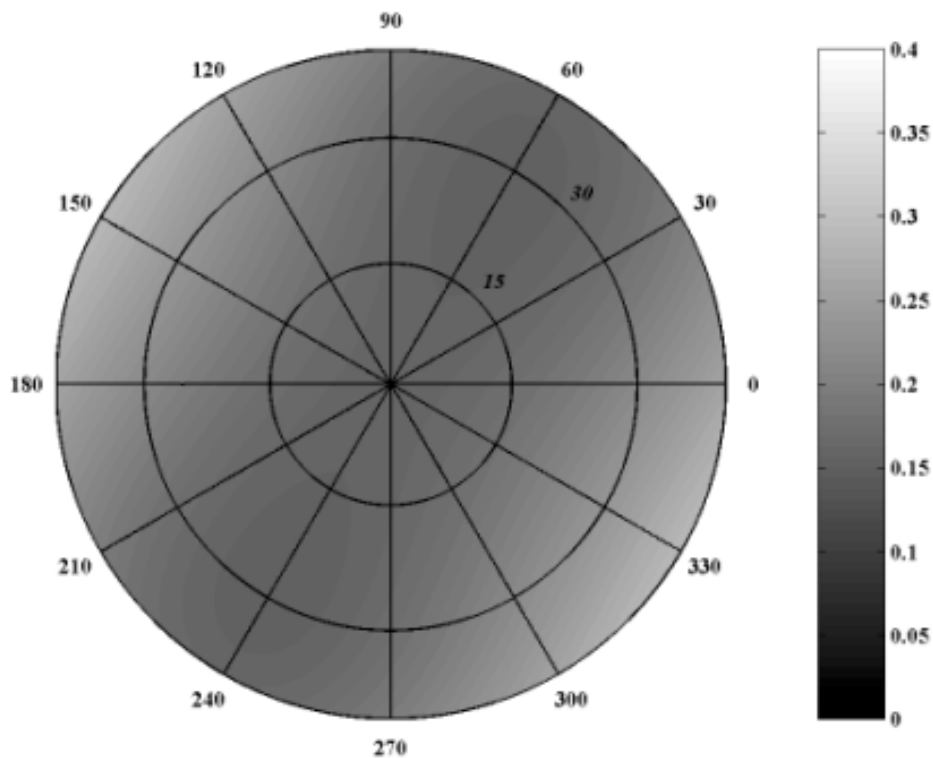


Figura 2 - Aproximação linear do coeficiente de reflexão R_{pp} . Como na formulação exata, a forma linearizada é insensível ao mergulho.

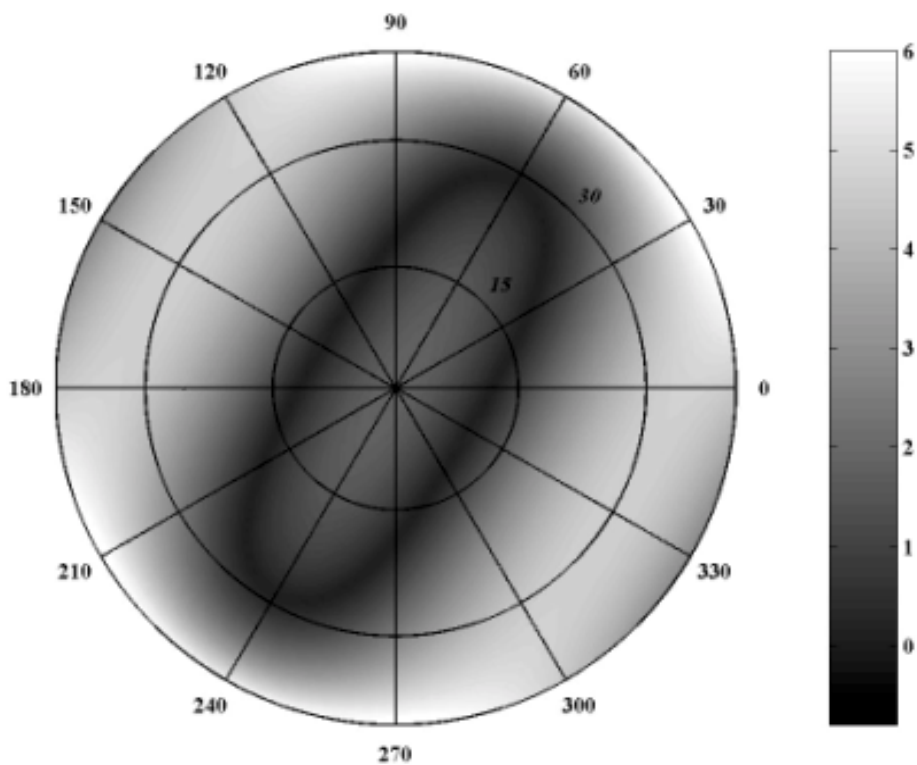


Figura 3 – Erro percentual relativo da aproximação linear de R_{pp} . De acordo com o erro verifica-se bom ajuste da forma linearizada para incidências de até 30° .

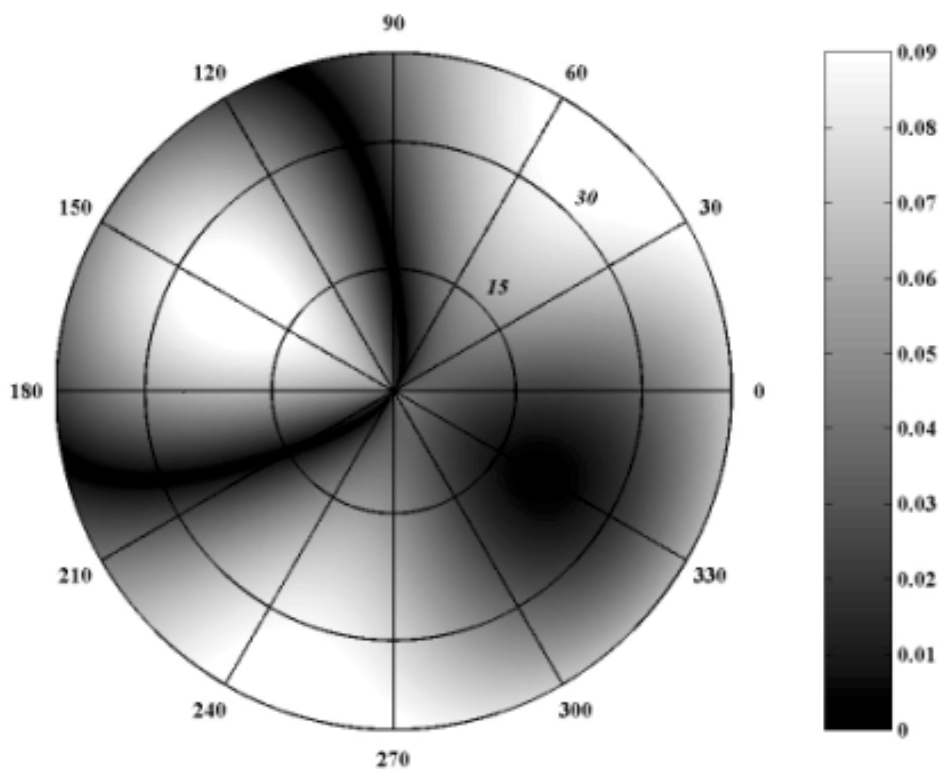


Figura 4 - Coeficiente de reflexão RR_{SP} exato. Este coeficiente mostra-se sensível ao mergulho.

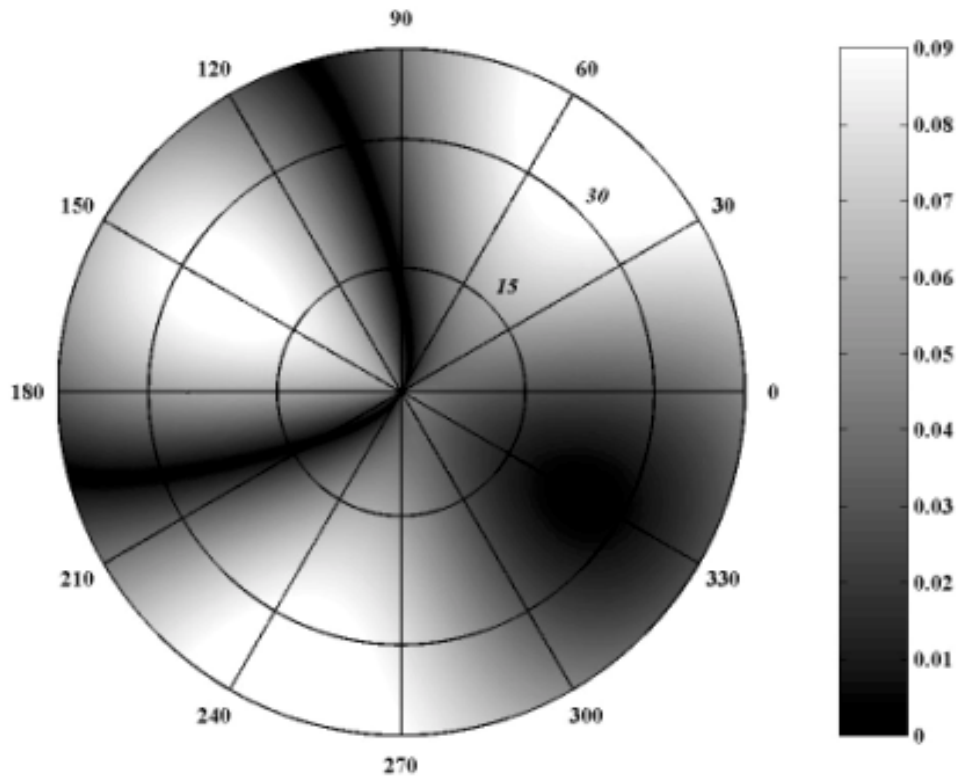


Figura 5 – Aproximação linear do coeficiente de reflexão R_{SP} . Formulação mostra-se sensível ao mergulho mostrando a consistência da linearização.

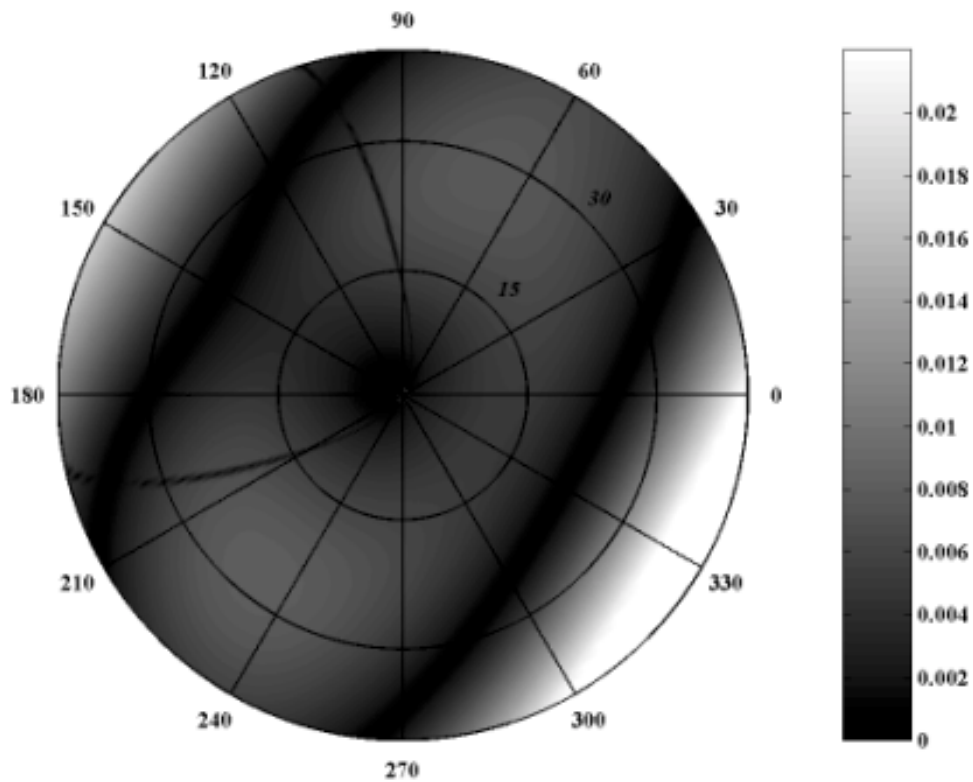


Figura 6 – Erro absoluto da aproximação linear R_{SP} . A escala foi mudada em relação as figuras 4 e 5 para melhor visualização do erro. Tem-se um bom ajuste (erro inferior a 0,005) da forma linearizada com relação à formulação exata para incidências de até 15° .

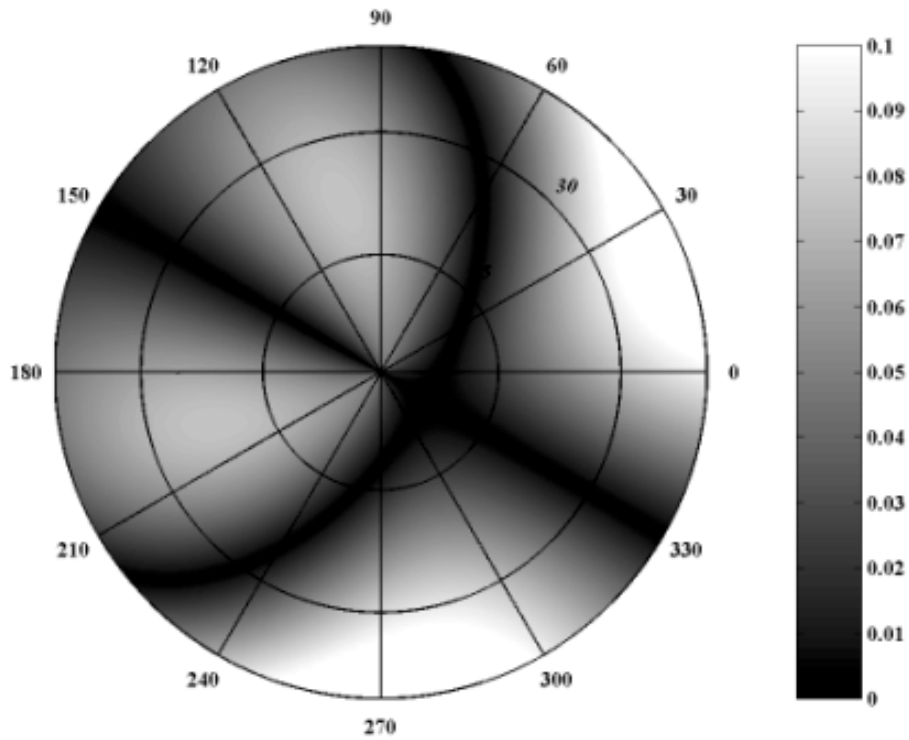


Figura 7 – Coeficiente de reflexão R_{TP} exato. Não há conversão de onda T no único plano de simetria do meio com mergulho.

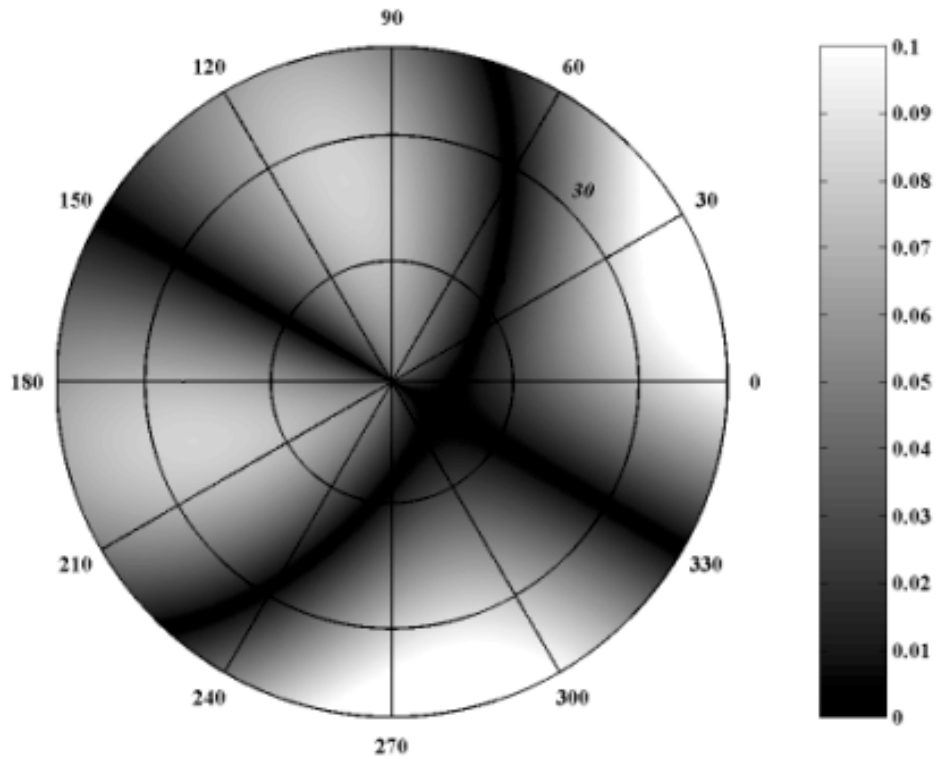


Figura 8 – Aproximação linear do coeficiente R_{TP} . A forma linearizada mostra que não há conversão de onda P em onda T no único plano de simetria o que mostra a consistência da formulação linear.

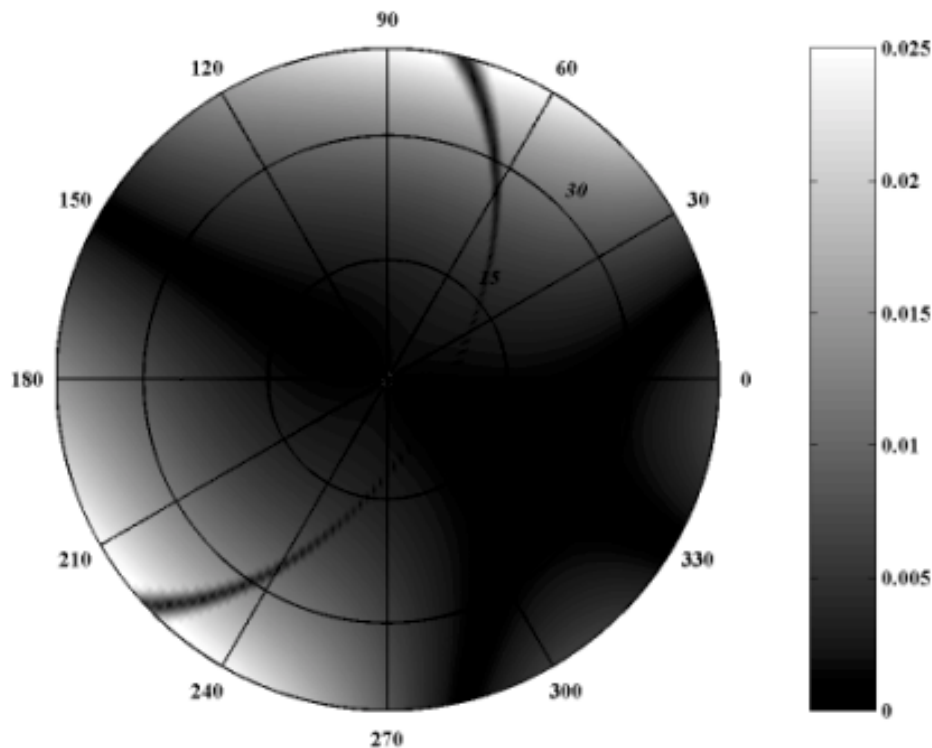


Figura 9 – Erro absoluto da aproximação linear R_{TP} . A escala foi mudada em relação as figuras 7 e 8 para melhor visualização do erro. Os erros nas regiões com incidência de até 30° são inferiores a 0,02. O ângulo de incidência está variando de 0° até 40° a partir da normal à interface que separa os planos, representada na figura pelos arcos internos ao diagrama.

exata com erros absolutos em torno a 0,005 para incidências de até 15° (Fig. 6). Para o caso do coeficiente R_{TP} verifica-se pela formulação exata (Fig. 7) que não há conversão de onda T no plano de simetria e em regiões próximas a esse plano. A formulação linearizada apresenta bons resultados para incidências de até 30° (Fig. 8). O erro absoluto para essas incidências é menor que 0,02 (Fig. 9). Conclui-se que pelo menos para este modelo a forte anisotropia não compromete as aproximações.

O modelo III caracteriza-se por forte contraste e fraca anisotropia. O meio incidente é isotrópico com densidade de $\rho_1 = 2,0 \text{ g/cm}^3$ e velocidades das ondas P e S são de $\alpha_1 = 2,5 \text{ km/s}$ e $\beta_1 = 1,20 \text{ km/s}$, respectivamente. O meio subjacente tem densidade de $\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$ e o tensor elástico é dado por (16). O erro relativo da forma linearizada de R_{PP} só é aceitável para incidências subnormais (incidências menores que 15°) e nestas incidências o erro é menor que 3%. Para incidências maiores o erro é superior a 10%. Na forma linearizadas R_{SP} verifica-se que para incidências maiores que as

subnormais o erro relativo é superior a 15% e para a forma linearizada e R_{TP} para incidências de até 15° o erro absoluto é menor que 0,02. Conclui-se que para este modelo as formas linearizadas só são razoáveis para incidências subnormais.

O modelo IV caracteriza-se por apresentar forte contraste e forte anisotropia. O meio incidente é um isotrópico cuja densidade é $\rho_1 = 1,80 \text{ g/cm}^3$ e as velocidades das ondas P e S são $\alpha_1 = 2,00 \text{ km/s}$ e $\beta_1 = 1,20 \text{ km/s}$ respectivamente. O meio subjacente é um TIH com densidade $\rho = 2,59 \text{ g/cm}^3$ e o tensor elástico é dado por (17). Da mesma forma que o modelo anterior às aproximações linearizadas só apresentam bom ajuste para incidências subnormais.

Foram feitos testes considerando o meio incidente anisotrópico. Quando o meio de incidência tem simetria azimutal os resultados não diferiram dos modelos que foram apresentados, isto é, para modelos que obedecem aos pressupostos de fraco contraste e fraca anisotropia os resultados das linearizações ajustam-se de forma satisfatória à formulação exata apresentando erros aceitáveis em

relação ao nível de ruído associado à atual tecnologia de estimativa destes coeficientes. Quando o meio de incidência não apresenta simetria azimutal as aproximações não são satisfatórias pois o pressuposto da direção de polarização das ondas S e T em SV e SH respectivamente, não é válido. Para anisotropia e contrastes moderados as linearizações ainda apresentam-se satisfatórias para incidências de até 30° , considerando forte contraste e forte anisotropia as aproximações são aceitáveis apenas para incidência subnormal.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As aproximações lineares para R_{PP} , R_{SP} e R_{TP} apresentam um bom desempenho quando os modelos obedecem aos pressupostos utilizados nas linearização, ou seja, baixos contrastes e fraca anisotropia. Mesmo para modelos que violam uma destas condições as aproximações ainda são válidas desde que as incidências sejam próximas da normal à interface. Nos testes realizados verificou-se que:

Na violação dos pressupostos utilizados na obtenção das linearizações as aproximações apresentam melhor desempenho quando a hipótese de fraca anisotropia é violada do que quando a hipótese de fraco contraste é violada.

O coeficiente R_{PP} mostrou-se insensível ao mergulho das fraturas.

Em todos os exemplos excluiu-se as regiões muito próximas a ângulos críticos onde o comportamento da refletividade é altamente não linear como já havia sido observado em modelos isotrópicos por Castagna (1992).

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia para a determinação da fórmula exata dos coeficientes de reflexão e transmissão para meios anisotrópicos arbitrários através das matrizes de impedância e polarização. A partir desta formulação obteve-se uma aproximação para os coeficientes de reflexão de uma onda P incidente considerando-se contraste fraco entre as propriedades físicas do meio e fraca anisotropia.

A metodologia apresentada para a determinação da fórmula exata dos coeficientes de reflexão e transmissão possui vantagens computacionais uma vez que todas as características do espalhamento podem ser obtidas de operações com matrizes de terceira ordem. A representação dos coeficientes de espalhamento utilizando de matrizes de polarização e impedância tem vantagens analíticas pois a partir desta formulação pôde-se determinar explicitamente as matrizes de reflexão e transmissão.

Nas linearizações do coeficiente R_{PP} verificou-se que algumas informações sobre os meios não podem ser recuperadas, enquanto que, as linearizações dos coeficientes R_{SP} e R_{TP} possuem informações sobre todos os parâmetros elásticos do meio. Assim as formas linearizadas são importantes na caracterização de ambigüidades para o problema de inversão destes coeficientes de reflexão. Além disso, estas linearizações possuem a vantagem de permitir uma análise mais simples de como os parâmetros ou combinação de parâmetros que caracterizam os meios influenciam nestes coeficientes.

A metodologia proposta pode ser aplicada mesmo em casos de contraste moderado de impedância e anisotropia dentro dos limites esperados em rochas sedimentares. Verificou-se ainda que o maior contraste entre os meios deteriora mais as aproximações que a presença de maior anisotropia.

As aproximações apresentadas neste trabalho, foram obtidas a partir dos pressupostos de fraco contraste entre as propriedades elásticas dos meios e anisotropia fraca. Entretanto os limites de validade destas fórmulas não podem ser caracterizados a partir de sua dedução. Uma análise que estabeleça esses limites é necessária para se determinar a sua utilização na interpretação de AVO/AVD.

A partir destas fórmulas linearizadas pode-se estimar as propriedades de meios na subsuperfície como por exemplo à orientação do plano de fratura e assim caracterizar a direção de maior permeabilidade.

APÊNDICE A

A linearização dos coeficientes de reflexão de uma onda incidente P foi feita no plano de azimute

zero ($\varphi = 0$) e posteriormente estendidas para azimutes arbitrários através de rotação em torno do eixo vertical x_3 . Para tornar mais claro as fórmulas apresentadas nesta seção optamos por indicar o tipo de onda na forma de sobrescrito.

Considerando a equação (8) é necessário determinar a matriz $(\tilde{\mathbf{Z}}_r - \tilde{\mathbf{Z}}_t \tilde{\mathbf{N}}_t^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_r)$ no meio isotrópico de referência e a primeira coluna da matriz de perturbação $(\Delta \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}_t \tilde{\mathbf{N}}_t^{-1} \Delta \mathbf{N})$. A avaliação desta última expressão requer a determinação das perturbações da polarização da onda P incidente, $\delta \mathbf{n}^P$, e da perturbação da terceira componente da vagarosidade da onda P incidente, δs_3^P , em cada um dos meios.

Determinação da matriz $(\tilde{\mathbf{Z}}_r - \tilde{\mathbf{Z}}_t \tilde{\mathbf{N}}_t^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_r)$

As velocidades e a densidade do meio isotrópico de referência são dadas por (7) e $\tilde{\mathbf{N}}_{m\alpha} = \tilde{n}_{m\alpha}$, $\tilde{\mathbf{Z}}_{m\alpha} = \tilde{c}_{3mj} \tilde{s}_{j\alpha} \tilde{n}_{j\alpha}$ são as matrizes de polarização e impedância para o meio isotrópico de referência.

A matriz de polarização associada a transmissão no meio de referência isotrópico foi escolhida na forma:

$$\tilde{\mathbf{N}}_t = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & K(\theta) \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\kappa \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (18)$$

em que escolhemos para polarização da onda T no meio de referência a direção perpendicular ao plano sagital (Helbig, 1994), onda SH, e a polarização da onda S é perpendicular a direção de incidência da onda P no plano sagital, onda SV. Esta escolha é arbitrária e pode não ser a mais conveniente quando o meio de incidência é anisotrópico e não apresenta simetria azimutal. Como o meio de referência é isotrópico e portanto possui plano de simetria especular, a matriz de polarização das ondas refletidas neste meio é obtida através da reflexão de (18) em relação a interface.

Com estas escolhas obtêm-se:

$$(\tilde{\mathbf{Z}}_r - \tilde{\mathbf{Z}}_t \tilde{\mathbf{N}}_t^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_r)^{-1} = \frac{1}{2\rho\kappa K(\theta) \cos \theta} \begin{bmatrix} -\kappa K(\theta) \sin \theta & 0 & \kappa K(\theta) \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & 0 \\ -K(\theta) \cos \theta & 0 & \kappa \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad (19)$$

Determinação perturbações $\delta \mathbf{n}^P$ e δs_3^P .

As perturbações da direção de polarização $\delta \mathbf{n}^P$ e da componente vertical da vagarosidade da onda P incidente δs_3^P em cada meio são obtidas a partir da equação de Christoffel,

$$\Gamma_{kl} n_l^P = \rho n_k^P. \quad (20)$$

A perturbação de primeira ordem da matriz de Christoffel é dada por:

$$\Gamma_{kl} \delta n_l^P + \delta \Gamma_{kl} n_l^P = \rho \delta n_k^P + \delta \rho n_k^P, \quad (21)$$

em que $\delta \Gamma_{kl}$ é a matriz de Christoffel perturbada e $\delta \rho$ é a perturbação da densidade.

A perturbação δs_3^P é obtida efetuando o produto interno de (21) com o vetor de polarização n_k^P o que resulta na relação:

$$n_k^P \delta \Gamma_{kj} n_j^P = \delta \rho. \quad (22)$$

A perturbação $\delta \Gamma_{kl}$ é dada pela expressão:

$$\delta \Gamma_{kl} = \delta c_{kmjl} s_m s_j + c_{kmjl} \delta s_m s_j + c_{kmjl} s_m \delta s_j, \quad (23)$$

em que δc_{kmjl} são as perturbações do meio em relação ao meio de referência. Utilizando (22) e (23) podemos obter imediatamente δs_3^P .

O cálculo de $\delta \mathbf{n}^P$ é obtido através do sistema formado pelo produto interno de (21) com os vetores de polarização n_k^S e n_k^T respectivamente e da condição de normalização \mathbf{n}^P , conforme mostrado abaixo:

$$\begin{cases} n_k^S (\Gamma_{kl} - \rho \delta_{kl}) \delta n_l^P = n_k^S \delta \Gamma_{kl} n_l^P + n_k^S \delta \rho n_l^P \\ n_k^T (\Gamma_{kl} - \rho \delta_{kl}) \delta n_l^P = n_k^T \delta \Gamma_{kl} n_l^P + n_k^T \delta \rho n_l^P \\ n_k^P \delta n_k^P = 0 \end{cases} \quad (24)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker. Da solução do sistema linear acima tem-se a perturbação da polarização para uma onda incidente P.

A seguir, conhecidos δs_3^P e δn^P a primeira coluna da matriz de impedância perturbada é avaliada em cada meio através da expressão:

$$\begin{aligned} \delta Z_{kP} = & \frac{\delta C_{3kj1}}{\alpha} n_1^P n_j^P + (\lambda + \mu) \delta s_3^P n_3^P \delta_{k3} + \\ & + \frac{\lambda}{\alpha} (n_j^P \delta n_j^P + n_3^P \delta n_3^P) \delta_{k3} \\ & + \frac{\mu}{\alpha} (n_j^P \delta n_j^P + n_3^P \delta n_3^P) + \mu \delta s_3^P n_k^P \end{aligned} \quad (25)$$

em que: λ e μ são os parâmetros de Lamé.

Finalmente os coeficientes linearizados δR_{PP} , δR_{SP} e δR_{TP} são então obtidos da primeira equação do sistema (8).

No caso de um azimute arbitrário ϕ em relação ao eixo x_1 , os parâmetros elásticos são obtidos a partir da rotação em torno do eixo vertical x_3 (Helbig, 1994). E os coeficientes de reflexão linearizados considerando uma onda P incidente para o caso geral são então dados pelas equações (11), (12) e (13). Nestas expressões as perturbações nos parâmetros elásticos foram separadas em duas componentes

$$\delta c_{kmlj} = \delta c_{kmlj}^{iso} + \delta c_{kmlj}^{anis}$$

em que δc_{kmlj}^{iso} é um tensor isotrópico e δc_{kmlj}^{anis} define a parte anisotrópica da perturbação nos parâmetros elásticos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio do programa FINEP/CNPq/Pronex em Engenharia de reservatórios pela infra-estrutura computacional e ao professor Ivan Psensick pela revisão do manuscrito e discussão deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Aki, K. & Richards, P.G., 1980.** Quantitative Seismology: Theory and methods, volume 1. W. H. Freeman and Co., San Francisco
- Banik, N. C., 1987.** An effective anisotropy parameter in transversely isotropic media. *Geophysics*, **52**: 1654-1664.
- Castagna, J., 1992.** AVO Analysis- Tutorial and Review. In Castagna, J.P. & Backus, M. M. (Eds). Offset-dependent reflectivity-Theory and practice AVO analysis: Soc. Expl. Geophys. 3-35.
- Helbig, K., 1994.** Foundations of Anisotropy for Exploration Seismics. Handbook of Geophysical Exploration, vol 22, Ed. Pergamon
- Hoffman, K. & Ray, K., 1971.** Álgebra Linear. Polígono (ed.).
- Hudson, J. A., 1982.** Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **64**: 133-150.
- Musgrave, M. J. P., 1970.** Crystal Acoustics. Holden-Day Inc. San Francisco.
- Ostrander, W. J., 1984.** Plane-wave reflection coefficients for gas sand at non normal angles of incidence. *Geophysics*, **49**: 1637-1648.
- Postma, G. W., 1955.** Wave propagation in stratified medium. *Geophysics*, **20(4)**: 780-806.
- Schoenberg, M. & Douma, J., 1988.** Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. *Geophysics*, **56**: 1331-1348.
- Schoenberg, M. & Protázio, J.S., 1992.** Zoeppritz Rationalized and Generalized to Anisotropy. *Journal of Seismic Exploration*, **1**: 125-144.
- Thomsen, 1986.** Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, **51**: 1954-1966
- Thomsen, 1993.** Weak elastic anisotropic reflection. In Castagna, J. P. & Backus, M. M. (Eds.) Offset-dependent reflectivity-Theory and practice AVO analysis: Soc. Exp. Geophys. 103-111.
- Vavrycuk, V. & Psencik, I., 1998.** PP-Wave reflection coefficients in weakly anisotropic elastic media. *Geophysics*, **63 (6)**: 2129-2141.
- Zillmer, M., Gajewsky, D. & Kashtan, B. M., 1997.** Reflection coefficients for weak anisotropic media. *Geophys. J. Internat*, **129**: 389-398.