

Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais

Leonardo Pinheiro

Aluno do Mestrado em Estruturas Metálicas
Depart. de Eng. Civil - Escola de Minas - UFOP
Ouro Preto, MG, Brasil

Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Professor Adjunto, Depart. de Eng. Civil
Escola de Minas - UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil
E-mail:ricardo@em.ufop.br

Resumo

O presente trabalho fornece um estudo da estabilidade de treliças espaciais através da utilização de uma formulação elástica não-linear, baseada no método dos elementos finitos, que leva em consideração os efeitos de segunda ordem e a mudança de geometria da estrutura. Especial atenção é dada ao cálculo da matriz de rigidez, onde tais efeitos são levados em consideração, e à obtenção do vetor de forças internas do elemento. A partir daí, foi realizada uma implementação computacional para que a análise do comportamento de treliças espaciais fosse possível. Ao final desse artigo, através da análise de problemas estruturais encontrados na literatura, pretende-se verificar a eficácia tanto da formulação empregada quanto da implementação computacional realizada.

Palavras-chave: Treliças espaciais; método dos elementos finitos; efeitos de segunda ordem; matriz de rigidez; vetor de forças internas.

Abstract

The present work supplies a stability study of the spatial trusses using a nonlinear elastic formulation, based in the finite elements method, where the second-order effects and the structural geometry changing are considered. Special attention is given to the stiffness matrix and the internal force vector calculations. From thus, it was made a computational implementation for the analysis of the spatial trusses behaviour. At the end of this paper, using structural examples found in the literature, the computational implementation efficacy and the formulation proposed are verified.

Keywords: Spatial trusses; finite elements method; second-order effects; stiffness matrix; internal force vector.

1. Introdução

Em análise não-linear, todos os procedimentos numéricos têm início a partir de princípios mecânicos básicos. Daí, as equações mecânicas fundamentais para um corpo sólido são obtidas e então dispostas sob uma metodologia de análise de elementos finitos não-linear. Duas diferentes classes de não-linearidade são normalmente identificadas: a geométrica, produzida por deformações finitas acompanhadas de modificações na rigidez de uma estrutura sob um certo carregamento aplicado, e a física, em que as propriedades do material utilizado dependem das deformações, as quais, no entanto, não são conhecidas antecipadamente. O presente artigo levará em consideração apenas a não-linearidade geométrica.

Em análises não-lineares do tipo passo-a-passo de corpos sólidos, onde o interesse está centrado na história de deformação de cada ponto do corpo durante o processo de carregamento, a formulação Lagrangeana é particularmente apropriada. Posto isso, o presente trabalho restringir-se-á fundamentalmente a formulações do tipo Lagrangeana, tendo-se em vista, ainda, que a maioria das formulações de elementos finitos com não-linearidade geométrica encontradas na literatura se baseia nesse tipo de referencial.

Com a abordagem Lagrangeana, a formulação de metodologias incrementais para análise não-linear começa com a divisão do caminho de carregamento de um corpo sólido em um certo número de configurações de equilíbrio. Três tipos de configurações para o corpo podem ser concebidos em termos de um sistema estacionário de coordenadas Cartesianas: a configuração inicial, a última configuração deformada t e a configuração deformada corrente $t + \Delta t$. Por hipótese, assume-se que todas as variáveis de estado, tais como tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com a história de carregamento, são conhecidas na configuração t . A partir daí, a questão principal passa a ser a formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração $t + \Delta t$, considerando que o carregamento externo atuando na configuração t tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de t para $t + \Delta t$ é tipicamente referido como um passo incremental.

Dependendo de qual configuração anterior é selecionada como referência, dois tipos de referenciais Lagrangeanos podem ser identificados: o referencial Lagrangeano atualizado, onde a última configuração t de equilíbrio é selecionada como o estado de referência, e o referencial Lagrangeano total, que utiliza a configuração inicial indeformada para o mesmo propósito.

Para a formulação atualizada, os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga. Já na formulação total, os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial indeformada.

Entre os principais trabalhos que tratam da análise não-linear de treliças espaciais, pode ser destacado o de Yang e Kuo (1994), que será utilizado como base para esse artigo. No entanto, outros trabalhos que investigaram técnicas de solução não-linear para análise de estruturas treliçadas planas e espaciais merecem destaque, tais como os de Papadrakakis (1981), Forde e Stiemeier (1987), Crisfield (1991; 1997), Shi (1994), Krenk e Hededal (1995), Krishnamoorthy et al. (1996), Oñate e Matias (1996) e Pinheiro (2003).

Na seção seguinte, obter-se-á a equação incremental de equilíbrio, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais, tendo-se como referência relações deformação-deslocamento não-lineares, de onde serão extraídas as matrizes de rigidez para o elemento de treliça. Na seção 3, dissertar-se-á sobre a metodologia de solução não-linear empregada utilizando-se de um contexto computacional. Já na seção 4, serão analisados exemplos de estruturas treliçadas espaciais encontradas na literatura. Por fim, na seção 5, serão apresentadas algumas conclusões acerca do comportamento elástico não-linear de treliças espaciais e das implementações computacionais realizadas.

2. Formulação não-linear do elemento de treliça

Utilizando uma formulação Lagrangeana atualizada, a equação de equilíbrio dos trabalhos virtuais pode ser escrita para o corpo elástico em estudo, numa forma incremental, da seguinte forma:

$$\int_{t_v} C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} d^t V + \int_{t_v} {}^t \tau_{ij} \delta \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} R - {}^t R, \quad (2.1)$$

onde C_{ijkl} denota os coeficientes constitutivos incrementais, ${}^t \tau_{ij}$ as tensões (iniciais) de Cauchy, ϵ_{ij} , o incremento de deformações de Green e η_{ij} , a componente não-linear do incremento de deformações de ϵ_{ij} . Todos esses valores estão referidos em relação à última configuração de equilíbrio t . Além disso, ${}^{t+\Delta t} R$ e ${}^t R$ denotam o trabalho virtual realizado pelas cargas externas atuando no corpo nas configurações $t+\Delta t$ e t , respectivamente.

Através da decomposição do incremento de deformações ϵ_{ij} numa componente linear e numa outra não-linear, isto é,

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij}, \quad (2.2)$$

obtem-se, da equação (2.1), uma equação incremental de equilíbrio para o corpo na configuração $t + \Delta t$ da seguinte forma:

$$\int_{t_v} C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta e_{ij} d^t V + \int_{t_v} C_{ijkl} \eta_{kl} \delta e_{ij} d^t V + \int_{t_v} C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \eta_{ij} d^t V + \int_{t_v} C_{ijkl} \eta_{kl} \delta \eta_{ij} d^t V + \int_{t_v} {}^t \tau_{ij} \delta \eta_{ij} d^t V + {}^t R = {}^{t+\Delta t} R, \quad (2.3)$$

onde o termo ${}^t R$ foi realocado para o lado esquerdo da equação (2.3) para significar que o mesmo representa parte do efeito das tensões iniciais.

Para um elemento de treliça, pode-se considerar apenas a componente axial dos tensores de tensões e deformações. Assim, denotam-se as tensões iniciais por $t_{\tau_{xx}}$, o incremento de deformação axial por ϵ_{xx} ($= \epsilon_{xx} + \eta_{xx}$) e o incremento de tensão axial por S_{xx} , o qual pode ser agora descrito pela expressão

$$S_{xx} = E \epsilon_{xx}, \quad (2.4)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. Logo, para o caso em estudo, a equação (2.3) transformar-se-á na expressão

$$\int_{t_v} E \epsilon_{xx} \delta \epsilon_{xx} d^t V + \int_{t_v} E \eta_{xx} \delta \epsilon_{xx} d^t V + \int_{t_v} E \epsilon_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V + \int_{t_v} E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V + \int_{t_v} {}^t \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V + {}^t R = {}^{t+\Delta t} R. \quad (2.5)$$

Para o elemento tridimensional de treliça mostrado na Figura 1, os deslocamentos (u, v, w) de uma seção transversal genérica x podem ser relacionados aos deslocamentos (u_a, v_a, w_a) e (u_b, v_b, w_b) das duas extremidades do elemento através de funções lineares de interpolação, ou seja,

$$u = u_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_b \left(\frac{x}{L}\right), \quad v = v_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + v_b \left(\frac{x}{L}\right), \quad w = w_a \left(1 - \frac{x}{L}\right) + w_b \left(\frac{x}{L}\right) \quad (2.6)$$

De acordo com as equações anteriores, as componentes linear e não-linear da deformação axial ϵ_{xx} , isto é, e_{xx} e η_{xx} , respectivamente, podem ser escritas da seguinte forma:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta u}{L}, \quad \eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \quad (2.7)$$

onde

$$\Delta u = u_b - u_a, \quad \Delta v = v_b - v_a \text{ e } \Delta w = w_b - w_a \quad (2.8)$$

Para o elemento espacial de treliça mostrado na Figura 1, o vetor de deslocamentos nodais consiste de três graus translacionais de liberdade em cada nó (ou extremidade), isto é,

$$\mathbf{d}^T = \{u_a \quad v_a \quad w_a \quad u_b \quad v_b \quad w_b\} \quad (2.9)$$

Correspondentemente, o vetor de forças internas nas configurações t e t + Δt consistirá de três forças em cada um dos extremos da barra, isto é,

$${}^t \mathbf{F}^T = \{ {}^t F_{xa} \quad {}^t F_{ya} \quad {}^t F_{za} \quad {}^t F_{xb} \quad {}^t F_{yb} \quad {}^t F_{zb} \}^T, \quad (2.10a)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^T = \{ {}^{t+\Delta t} F_{xa} \quad {}^{t+\Delta t} F_{ya} \quad {}^{t+\Delta t} F_{za} \quad {}^{t+\Delta t} F_{xb} \quad {}^{t+\Delta t} F_{yb} \quad {}^{t+\Delta t} F_{zb} \}^T. \quad (2.10b)$$

Para um elemento de treliça em equilíbrio na configuração t, todas as forças cisalhantes desaparecem, isto é,

${}^t F_{ya} = {}^t F_{za} = {}^t F_{yb} = {}^t F_{zb} = 0$, sendo que as forças axiais nas extremidades da barra são iguais em magnitude, mas opostas em sinal, levando a ${}^t F_{xb} = -{}^t F_{xa}$.

Para o caso tridimensional, cada um dos termos da equação (2.5) pode ser derivado da forma a seguir:

$$\int_{t_v} E e_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \int_{t_v} E \frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) d^t V = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}, \quad (2.11a)$$

$$\int_{t_v} E \eta_{xx} \delta e_{xx} d^t V = \int_{t_v} \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) d^t V = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{d} \quad (2.11b)$$

$$\int_{t_v} E e_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \int_{t_v} E \frac{\Delta u}{L} \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left(\frac{\Delta w}{L} \right) \right] d^t V = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{d} \quad (2.11c)$$

$$\int_{t_v} E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \int_{t_v} \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta u^2}{L^2} + \frac{\Delta v^2}{L^2} + \frac{\Delta w^2}{L^2} \right) \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left(\frac{\Delta w}{L} \right) \right] d^t V = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_3 \mathbf{d} \quad (2.11d)$$

$$\int_{t_v} {}^t \tau_{xx} \delta \eta_{xx} d^t V = \int_0^L {}^t F_x \left[\frac{\Delta u}{L} \delta \left(\frac{\Delta u}{L} \right) + \frac{\Delta v}{L} \delta \left(\frac{\Delta v}{L} \right) + \frac{\Delta w}{L} \delta \left(\frac{\Delta w}{L} \right) \right] dx = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_3 \mathbf{d} \quad (2.11e)$$

$${}^tR = \int_{t_s} t_1 \delta u_i d^tS = \delta d^T {}^tF \quad (2.11f)$$

onde as matrizes K_e , K_g , K_1 , K_2 e K_3 são conhecidas por ter dimensão de 6 x 6 para o elemento de treliça espacial. A matriz de rigidez elástica K_e tem a forma

$$K_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

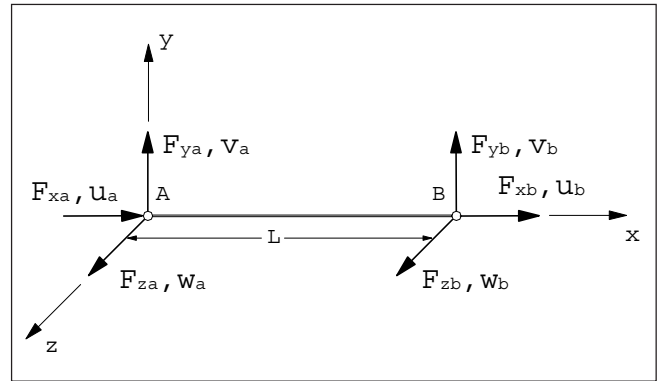


Figura 1 - Graus de liberdade para um elemento 3D de treliça.

enquanto que a matriz de rigidez geométrica K_g possui a forma

$$K_g = \frac{{}^tF_{xb}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Já as matrizes de ordem superior K_1 , K_2 e K_3 se apresentam da seguinte maneira:

$$K_1 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w & -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w & \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$K_2 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & 0 & -2\Delta u & 0 & 0 \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 0 & 2\Delta u & 0 & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$K_3 = \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} [h] & -[h] \\ -[h] & [h] \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

onde

$$[h] = \begin{bmatrix} 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u\Delta v & 2\Delta u\Delta w \\ 2\Delta u\Delta v & 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v\Delta w \\ 2\Delta u\Delta w & 2\Delta v\Delta w & 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

O uso de três matrizes distintas K_1 , K_2 e K_3 , em adição às matrizes K_e e K_g , torna possível analisar o alongamento e as características de corpo rígido de elementos de treliça. Fazendo-se uso das expressões (2.11a) a (2.11e) e admitindo-se a natureza

arbitrária dos deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{d}$, pode-se derivar, a partir de (2.4), a equação de rigidez incremental para o elemento espacial de treliça como sendo

$$(\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3)\mathbf{d} + {}^t\mathbf{F} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \quad (2.17)$$

onde o termo ${}^t\mathbf{F}$, no lado esquerdo da equação, representa, na metodologia de análise não-linear, as forças iniciais atuando no elemento na configuração de equilíbrio t ; o termo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$, no lado direito da mesma equação, representa as forças totais atuando no elemento na iteração corrente, enquanto que os termos restantes, no lado esquerdo, denotam as forças incrementais geradas pela resistência do elemento contra os incrementos de forças externas, isto é, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{F}$.

3. Metodologia de solução não-linear

Metodologias eficientes de solu-

ção de sistemas não-lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos (pontos-limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação) que possam existir (Rocha, 2000).

A metodologia utilizada, no presente trabalho, se baseia primordialmente na solução da equação (2.17) de forma incremental-iterativa. Num contexto computacional, para um dado passo de carga, esse processo pode ser resumido em duas etapas:

1) A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento de carga, definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga — $\Delta\lambda^0$ —, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após

a seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{d}^0$. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{d}^0$ caracterizam a chamada *solução incremental predita*.

2) Na segunda etapa de solução, procura-se, através de uma dada estratégia de iteração, corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura o mais eficientemente possível. Se as iterações realizadas envolvem, não só os deslocamentos nodais \mathbf{d} , mas também o parâmetro de carga λ , então uma equação adicional de restrição é requerida. A forma dessa equação de restrição é o que distingue as várias estratégias de iteração (Crisfield, 1991). A Figura 2 traz, na forma de fluxograma, os procedimentos para solução não-linear propostos nessa seção.

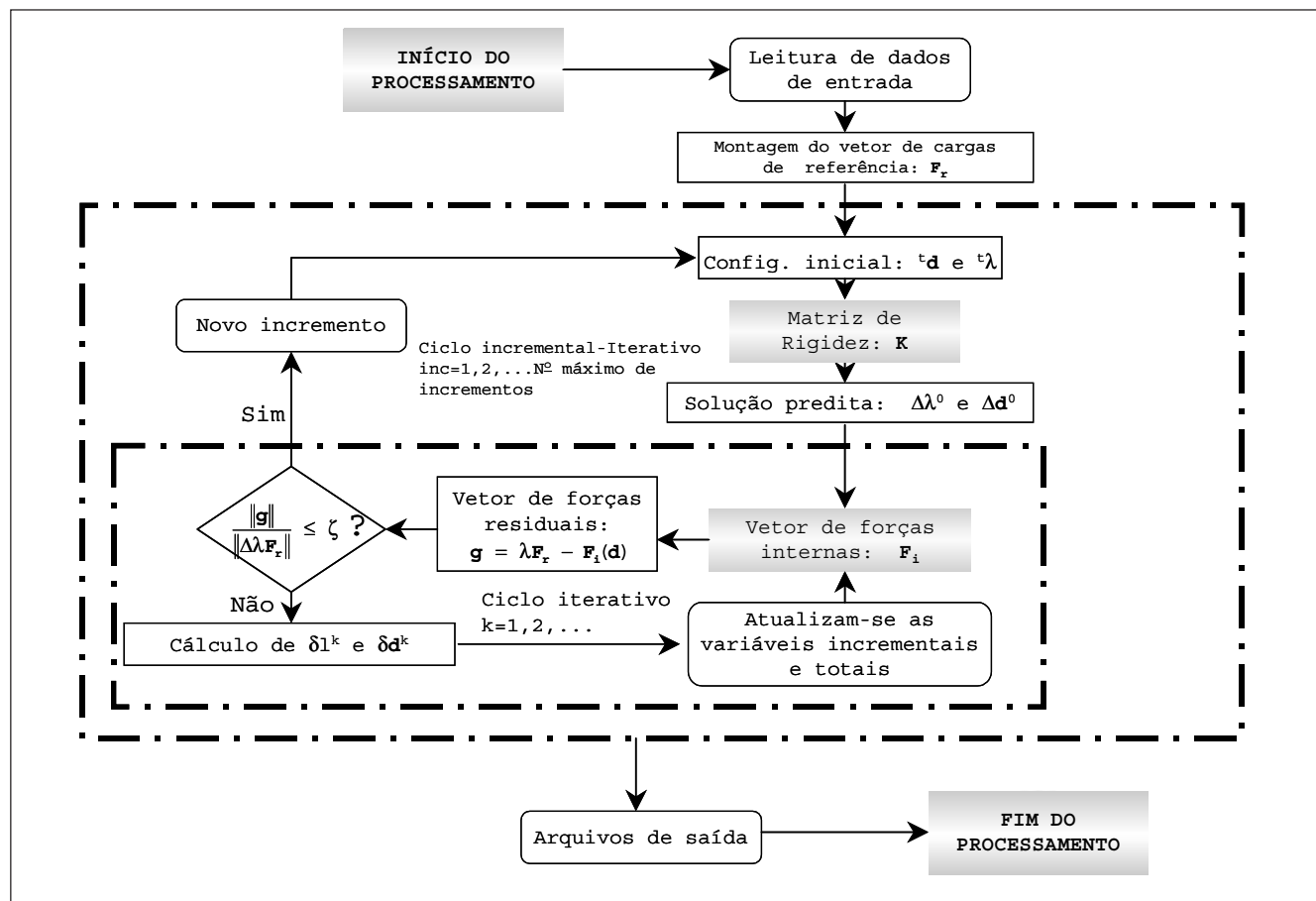


Figura 2 - Fluxograma da metodologia de solução não-linear (Rocha, 2000).

4. Exemplos

Através da análise de problemas estruturais encontrados na literatura, pretende-se, nessa seção, verificar a eficiência computacional da formulação apresentada na seção 2. Dois exemplos foram escolhidos para tal fim: um domo reticulado composto por 168 barras e uma treliça em forma de arco formada por 12 barras.

4.1 Domo reticulado de 168 elementos

Nesse exemplo, conforme ilustrado na Figura 3, será analisado um domo reticulado composto por 168 elementos, submetido a uma carga concentrada no nó 1, localizado no topo da estrutura, e já examinado anteriormente por Papadrakakis (1981) e Forde e Stiemer (1987). Para essa estrutura, adotou-se $EA = 1$. Os demais dados concernentes à geometria da mesma encontram-se na mesma figura.

Para o estudo do comportamento desse domo foi utilizada uma formulação Lagrangeana atualizada, que demonstrou boa eficiência computacional para a obtenção das trajetórias de equilíbrio para os nós 1 e 2 avaliados. As Fi-

guras 4, 5 e 6 demonstram que os resultados obtidos possuem boa concordância com aqueles fornecidos pelos autores supracitados. Deve-se ressaltar que esses resultados foram alcançados utilizando-se como estratégia de solução não-linear o método do comprimento de arco (Rocha, 2000; Crisfield, 1991).

4.2 Treliça espacial formada por 12 barras

O exemplo analisado a seguir refere-se a uma treliça espacial formada por 12 barras e três nós livres, que possui uma trajetória de equilíbrio fortemente

não-linear, com múltiplos pontos-limites tanto de carga, quanto de deslocamento. Yang e Kuo (1994) possuem resultados parciais para a solução não-linear dessa estrutura. No entanto, Krenk e Hededal (1995) obtiveram o traçado completo dessa trajetória. É com base nos valores fornecidos por estes últimos pesquisadores que os obtidos pelas implementações computacionais realizadas nesse trabalho serão comparados.

A Figura 7 apresenta a geometria e as dimensões do sistema estrutural, bem como o carregamento atuante. Para todas as barras, adotou-se $EA = 1$.

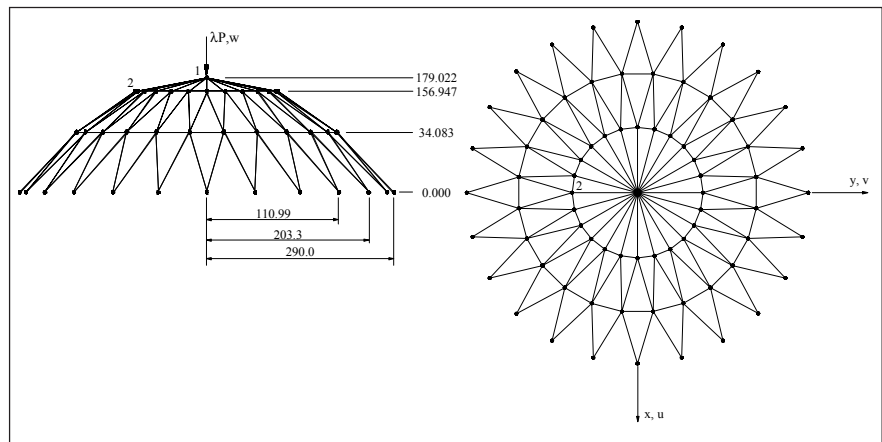


Figura 3 - Domo reticulado formado por 168 elementos.

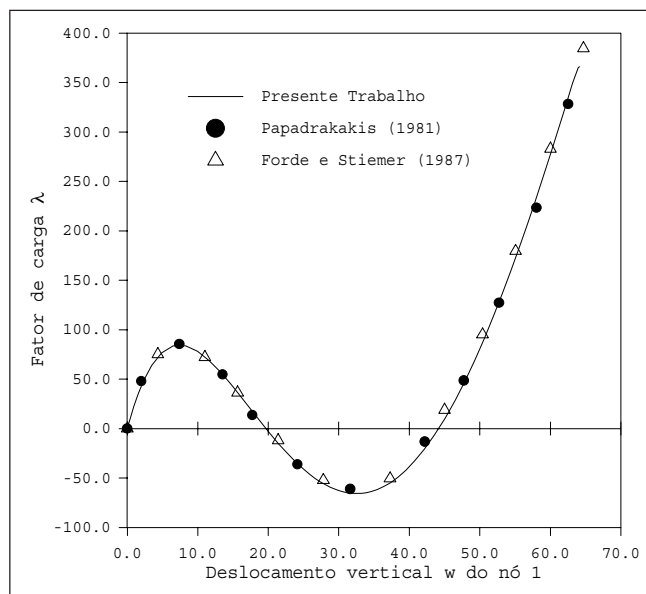


Figura 4 - Caminho de equilíbrio do domo de 168 elementos (nó 1).

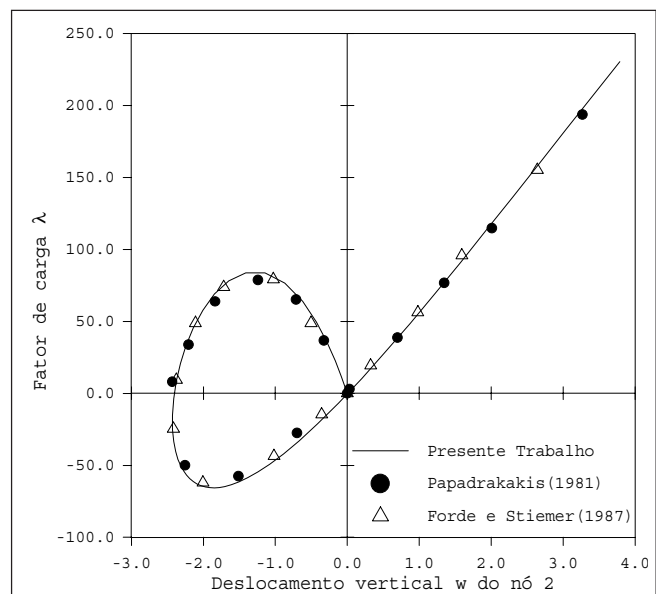


Figura 5 - Variação do deslocamento vertical do nó 2 com o fator de carga λ.

A estratégia de solução não-linear que demonstrou ter a melhor eficiência computacional para esse exemplo foi obtida utilizando-se como estratégia de incremento de carga o comprimento de arco e a estratégia de iteração baseada no resíduo ortogonal (Rocha, 2000), tendo sido adotado o método de Newton-Ra-

phson padrão. De acordo com a Figura 8, pode-se perceber que os resultados obtidos através de tal método tiveram boa concordância com os valores fornecidos por Krenk e Hededal (1995). As Figuras 9 e 10 também mostram a boa precisão dos valores encontrados para o n.º 2.

5. Conclusões

Com o objetivo de validar a implementação computacional baseada na formulação apresentada na seção 2 e de avaliar sua eficiência, foram analisados dois exemplos com resultados numéricos já consagrados pela literatura. A

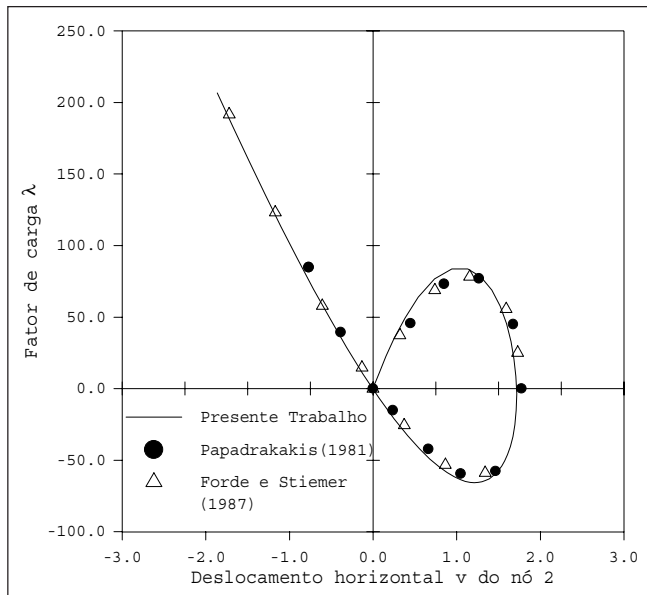


Figura 6 - Variação do deslocamento horizontal do nó 2 com o fator de carga λ .

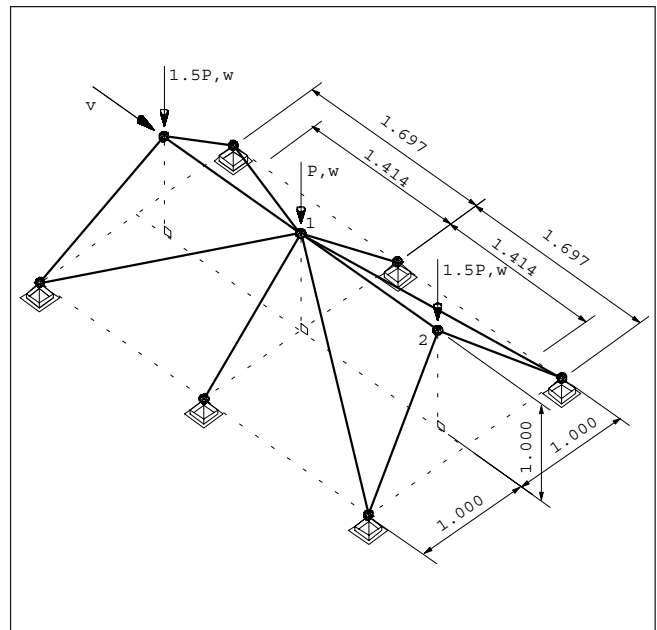


Figura 7 - Treliça espacial formada por 12 barras.

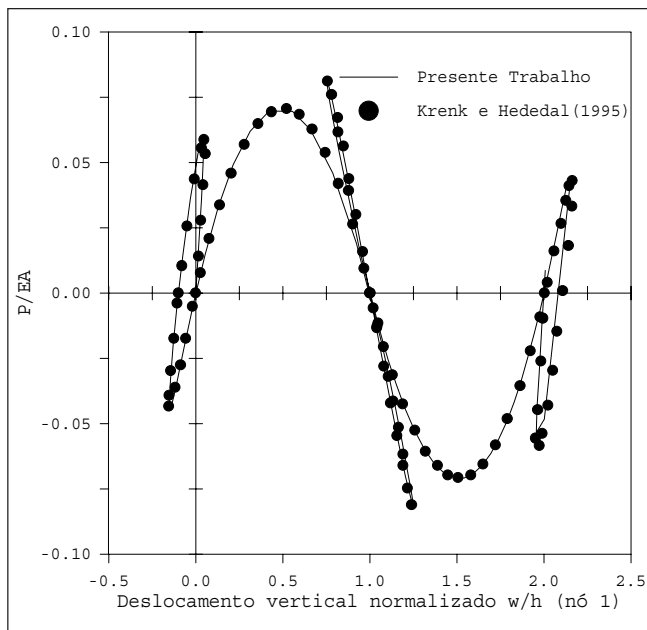


Figura 8 - Trajetória de equilíbrio para a treliça espacial de 12 barras (nó 1).

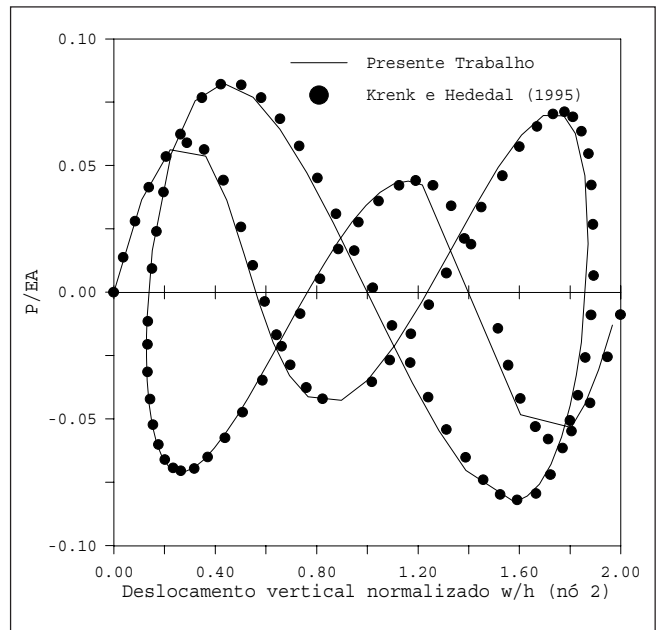


Figura 9 - Variação do deslocamento vertical do nó 2 com a carga normalizada.

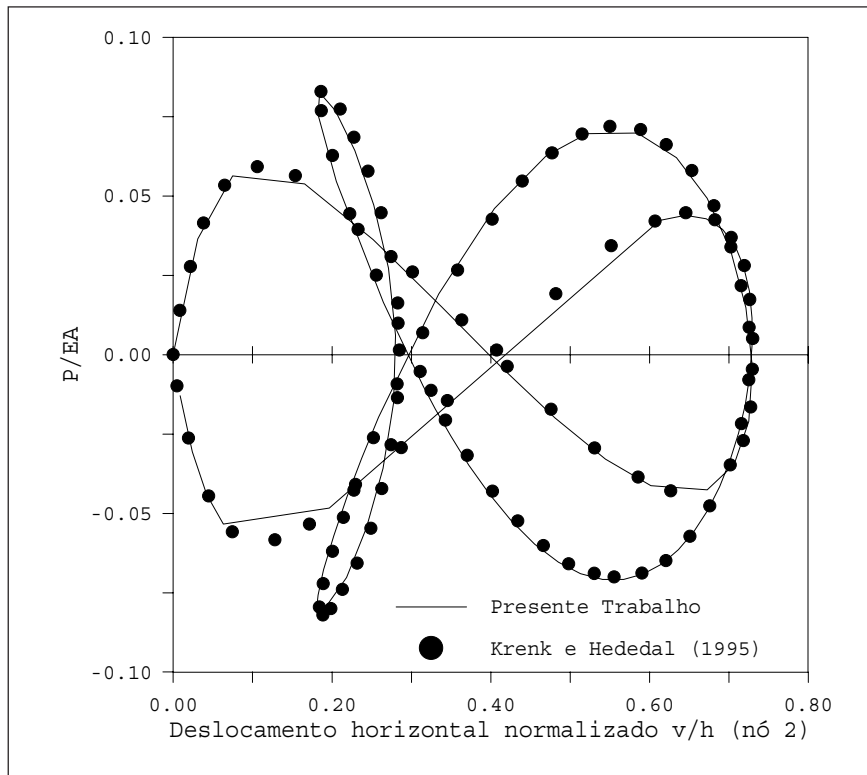


Figura 10 - Variação do deslocamento horizontal do nó 2 com a carga normalizada.

partir desses exemplos, pode-se observar que a formulação não-linear de análise de treliças espaciais fornecida por Yang e Kuo (1994) foi computacionalmente implementada com sucesso, o que pode ser notado pela concordância dos valores alcançados com aqueles fornecidos por outros autores. Diante dos resultados obtidos pelos exemplos da seção anterior, outras conclusões e comentários se fazem necessários, entre os quais, se sobressaem as seguintes considerações:

1) A estratégia de solução não-linear adquire maior importância à medida que a trajetória de equilíbrio torna-se mais fortemente não-linear. A Figura 4 ilustra esse fato, onde os valores da curva carga-deslocamento fornecida pela literatura só foram encontrados através da utilização da estratégia de incremento da carga baseada no comprimento de arco aliada à estratégia de iteração a resí-

duo ortogonal (Krenk & Hededal, 1995; Rocha, 2000).

2) O tipo de referencial escolhido também exerce grande influência no traçado do caminho de equilíbrio de uma estrutura. Na Figura 4, os melhores resultados foram alcançados calculando-se a matriz de rigidez de forma incremental, utilizando-se o conceito de referencial Lagrangeano atualizado, enquanto que as forças internas foram calculadas de forma não-incremental, utilizando-se o conceito de referencial Lagrangeano total. Esse procedimento produziu melhores resultados que o uso de apenas um dos referenciais isoladamente.

Agradecimentos

O primeiro autor é grato pelo apoio financeiro recebido da USIMINAS.

Referências bibliográficas

- CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, v. 1. Chichester: John Wiley & Sons, 1991. 345p.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, v. 2. Chichester: John Wiley & Sons, 1997. 494p.
- FORDE, B. W. R., STIEMER, S. F. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers and Structures*, v. 27, n. 5, p. 625-630, 1987.
- KRENK, S., HEDEDAL, O. A Dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 123, p. 95-107, 1995.
- KRISHNAMOORTHY, C. S. et al. Post-buckling analysis of structures by three-parameter constrained solution techniques. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 22, p. 109-142, 1996.
- OÑATE, E., MATIAS, W. T. A Critical displacement approach for predicting structural instability. *Computers Methods in Applied Mechanics Engineering*, v. 134, p. 135-161, 1996.
- PAPADRAKAKIS, M. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. *Computers and Structures*, v. 14, n. 5-6, p. 393-402, 1981.
- PINHEIRO, L. *Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos*. Ouro Preto: Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Deciv/Escola de Minas/UFOP, 2003. (Dissertação de Mestrado).
- ROCHA, G. *Estratégias numéricas para análise de elementos estruturais esbeltos metálicos*. Ouro Preto: Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de Minas/UFOP, 2000. (Dissertação de Mestrado).
- SHI, J. Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method. *Computers and Structures*, v. 58, n. 1, p. 203-230, 1994.
- YANG, Y. B., KUO, S. R. *Theory & analysis of nonlinear framed structures*. Singapore: Prentice Hall, 1994. 579 p.

Artigo recebido em 21/02/2003 e aprovado em 11/06/2004.