

Estimativa da volatilidade de projetos de bens minerais

Gabriel A. C. Lima

Engenheiro de Minas, Pesquisador Doutor do CEPETRO/UNICAMP e LAGE/IG/UNICAMP
E-mail: gabriel@ige.unicamp.br

Saul B. Suslick

Professor Doutor do IG/UNICAMP e diretor do CEPETRO/UNICAMP
E-mail: suslick@cepetro.unicamp.br

Resumo

A volatilidade dos projetos de bens minerais depende do seu fluxo de caixa futuro e, por isso, deve ser estimada usando-se as suas características econômico-financeiras e operacionais intrínsecas, ao invés de séries históricas. Em muitos casos, por inexistência de informações sobre o futuro do projeto, assume-se que a sua volatilidade seja igual à dos preços dos bens minerais (preço do ouro, petróleo, etc). Mas essa abordagem pode fornecer resultados incorretos. Para contornar essas limitações, esse trabalho estima a volatilidade de projetos de mineração e petróleo com base nas projeções de seu fluxo de caixa, considerando-se que o preço do bem mineral seja uma variável incerta e se comporte, ao longo do tempo segundo dois processos estocásticos: 1) movimento geométrico Browniano e 2) movimento de reversão à média. Um dos principais resultados desse modelo é que a volatilidade do projeto é igual à do preço, somente no caso de projetos com baixos custos operacionais e/ou preços elevados.

Palavras-chave: projetos de mineração e petróleo, volatilidade, processos estocásticos, incertezas, opções reais.

Abstract

Projecting the volatility of a mineral asset depends on its future cash-flow, and as such, should be estimated using its intrinsic economical-financial and operational characteristics instead of its past history. Because of lack of information, in many cases, it is assumed that the project and commodity (oil, gold, as well as other commodity minerals) share the same volatility. Nevertheless, this approach may give misleading results. This paper proposes a framework to estimate the volatility of oil and gold considering that commodity price evolves over time following a Geometric Brownian Motion Model or Mean-Reversion Motion Model. Main results indicate that project volatility is equal to that of its commodity only in very special cases, i.e., low operational costs and high prices, which is currently unrealistic for most industries.

Keywords: *petroleum and mining projects, volatility, stochastic processes, uncertainty, option pricing.*

1. Introdução

Os investimentos em projetos de extração de recursos minerais e petróleo são elevados, não raro alcançando a cifra de bilhões de dólares. De acordo com o BNDES (2004), para o período de 2003-2007, os projetos de exploração e produção de petróleo, no Brasil, consumirão cerca de US\$ 14 bilhões; o projeto Salobo, que objetiva a produção de cobre, custará cerca de US\$ 1,9 bilhão. Na valoração e tomada de decisões, envolvendo recursos financeiros dessa magnitude, os investidores requerem um tratamento detalhado, não somente das expectativas de retorno, mas, também, da exposição ao risco financeiro decorrente das incertezas na dinâmica do preço dos bens minerais (commodities).

De acordo com Gentry e O'neil (1984), Stermole (1993) e Ross, Westerfield e Jaffe (1999), o modelo-padrão, tanto para valoração, como para tomada de decisões, é baseado em indicadores do fluxo de caixa do projeto como o VPL (valor presente líquido), TIR (taxa interna de retorno) e PRI (período de recuperação do investimento). No entanto, a partir da década de 80, Brennan e Schwartz (1985), MacDonald e Siegel (1986), Smith, Paddock e Siegel (1988), Dixit e Pindyck (1994), Davis (1996) argumentam que o critério do VPL não avalia corretamente as oportunidades de investir em projetos, por possuir as seguintes deficiências:

- 1) Não captura o valor das flexibilidades gerenciais e operacionais existentes nos projetos.
- 2) Não considera que a presença dessas flexibilidades modifica o nível de risco do projeto.
- 3) Ignora que o investimento é, ao menos em parte, irreversível.

Como uma solução alternativa, para complementar os resultados do VPL, Brennan e Schwartz (1985) e Dixit e Pindyck (1994) sugerem o uso da teoria das opções reais (TOR). Argumentam que essa abordagem pode gerar resultados mais realistas, por capturar o valor das flexibilidades gerenciais e operacionais

presentes no projeto. Essa teoria é derivada da teoria de valoração das opções financeiras¹, desenvolvida por Black e Scholes (1973), Merton (1990), a partir de seis parâmetros:

- 1) Valor corrente do projeto (V).
- 2) Valor presente do investimento (I).
- 3) Taxa de juros livre de risco (r).
- 4) Taxa de dividendos ao longo da vida do ativo (δ).
- 5) Maturidade para exercício da opção de investir (T).
- 6) Volatilidade futura do projeto (σ).

Entre esses seis parâmetros, a estimativa da volatilidade futura do valor do projeto é complexa. Ela não pode ser observada diretamente no mercado e, por isso, deve ser estimada, utilizando-se métodos analíticos, numéricos ou subjetivos. A sua estimativa deve ter máxima precisão, pois pequenos erros podem se propagar nos resultados do modelo.

No ambiente dos negócios, a volatilidade possibilita oportunidades de ganhos para produtores e/ou consumidores, mas, também, pode gerar grandes perdas. Por isso, segundo Pindyck (2002), produtores e consumidores, frequentemente, recorrem a instrumentos de hedge no mercado financeiro (contratos futuros, a termo e contratos de opções), para se protegerem da exposição aos riscos.

No caso de variáveis financeiras, geralmente, a volatilidade é estimada a partir de seus dados históricos (por exemplo, a volatilidade anual histórica do preço do petróleo é em torno de 20%). Mas, para projetos, esse método não pode ser empregado, porque não há séries históricas do seu fluxo de caixa dos projetos, uma vez que diferentes projetos de um mesmo bem mineral possuem características distintas². Como uma solução alternativa, Sick (1999) e Dixit e Pindyck (1994) assumem que a volatilidade do preço da commodity é igual à volatilidade do valor do projeto (por exemplo, se assume que a volatilidade de um projeto de petróleo seja também de 20%). No entanto, essa abordagem pode não

ser verdadeira, principalmente para projetos de extração de recursos exauríveis, nos quais, muitas vezes, o preço de equilíbrio é próximo ao custo operacional.

Esse artigo investiga as relações entre a volatilidade do preço e a de projetos de extração de petróleo e ouro, considerando-se que o preço da commodity é descrito por dois processos estocásticos distintos: movimento de reversão à média (MRM) e movimento geométrico Browniano (MGB). O trabalho foi dividido em três partes. A primeira apresenta a metodologia proposta para estimativa da volatilidade dos projetos. A segunda parte aplica essa metodologia, para estimar a volatilidade de um projeto de petróleo e de ouro, e a parte final do trabalho discute os impactos e as opções sobre os resultados obtidos na modelagem.

2. Modelos para estimativa da volatilidade de projetos

As variáveis financeiras (taxa de câmbio, títulos governamentais, etc.) ou commodities, que são transacionadas em bolsas mercantis (petróleo, ouro, cobre, etc), geralmente, possuem séries históricas longas. Nesse caso, Pindyck e Rubinfeld (1991), Campbell, Lo e MacKinlay (1997) estimam a volatilidade futura por meio da volatilidade histórica do ativo, a qual é definida por meio de:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n E[x_t^2] - (E[x])^2} \quad (1)$$

¹ Para mais detalhes sobre as opções financeiras, consultar Cox e Rubinstein (1985), Hull (1999) e Zvi, Kane e Marcus (2000).

² Por exemplo, dois projetos de lavra de cobre, geralmente, possuem estruturas de fluxos de caixa distintos, pois as características de cada minério são distintas. Esse fato decorre da dificuldade de se encontrarem duas minas exatamente iguais.

A Eq. (1) só pode ser usada quando o analista possui uma série histórica da variável financeira, o que não ocorre no caso de projetos de mineração e petróleo.

A análise de s pode fornecer informações sobre o comportamento do mercado. No curto prazo, o preço das commodities pode se comportar de forma não-estacionária, ou seja, apresentar crescimento ou decréscimo. No longo prazo, a interação entre as forças de oferta e demanda pode limitar o crescimento ou decréscimo da variável e , portanto, ela se torna estacionária. Assim, a dinâmica da média e da variância de uma variável estocástica X depende de sua tendência. Nas séries não-estacionárias, a média e a variância crescem com o horizonte de tempo, enquanto que, nas séries estacionárias, elas são finitas.

Em muitos casos, assume-se que a variância seja homocedástica, para reduzir a complexidade analítica das equações matemáticas. Tal hipótese foi usada no modelo de Black-Scholes-Merton, onde se assume que o preço dos ativos evolui de acordo com um movimento geométrico Browniano (MGB), na forma da seguinte equação diferencial estocástica (EDE):

$$dX = \alpha X + \sigma X dz, \quad (2)$$

em que α é a taxa de crescimento do ativo, σ é a sua volatilidade constante e dz é o incremento de Wiener. Por ser um processo não-estacionário, no longo prazo, o MGB pode gerar valores excessivamente altos ou baixos que sejam sem significado econômico. Por isso, a sua aplicação, na modelagem do preço de commodities e projetos por longos períodos (talvez até mais de 20 anos), pode ser questionável em favor do Movimento de Reversão à Média (MRM).

Em mercados sem restrições à entrada ou saída de firmas, o preço da mercadoria não aumenta ou diminui indefinidamente, mas tende a oscilar em torno de uma medida de tendência central de longo prazo (pode-se pensar no custo de marginal histórico). Para tais situações, o MRM pode fornecer resultados

com maior significado econômico. Sua EDE é:

$$dX = \eta (X_m - X) dt + \sigma X dz, \quad (3)$$

onde η é a velocidade de reversão à média e X_m é o valor médio de X no longo prazo, isto é, aquele para o qual X tende a se reverter. A equação (3) mostra que X se afasta e se aproxima de X_m com velocidade η . Logo, desde que $\eta > 0$, X não se afasta de X_m por um período de tempo infinito.

Esses dois modelos foram utilizados para modelar a dinâmica de ativos financeiros e commodities por Brennan e Schwartz (1985), Merton (1990), Dixit e Pindyck (1994), Trigeorgis (1996), Luem-berger (1998), Hull (1999), Lima e Suslick (2002), Lima (2004), Bordieri (2004) e Bordieri, Lima e Suslick (2005). Deve-se ressaltar que, no caso dos bens minerais, geralmente, há uma série histórica de preços que podem ser usados para fazer estimativas da sua volatilidade futura utilizando-se a Eq. (1). Por outro lado, em orçamento de capital, a volatilidade dos projetos depende dos fluxos de caixa que ocorrem ao longo de toda a vida operacional. Como não há séries históricas desses fluxos de caixa (pois eles ocorrerão no futuro), não é possível estimar s usando a equação (1). Alternativamente, uma vez que, em muitos casos, o valor do projeto (V) é diretamente proporcional ao preço da commodity (P), Dixit e Pindyck (1994) e Trigeorgis (1996) consideraram que a volatilidade do projeto (σ_v) seja igual à do preço do bem mineral (σ_p).

Nesse trabalho, a volatilidade dos projetos é derivada em função da volatilidade do preço e da estrutura de custo operacional. No anexo, demonstram-se as relações entre a volatilidade do projeto e a do preço, para o caso em que o preço evolui de acordo com um MGB ou MRM. São considerados dois projetos: um de extração de petróleo e outro de ouro. A produção de petróleo declina exponencialmente ao longo do tempo em função da perda de pressão do reservatório. A produção de ouro, por outro lado, é considerada constante até a exaustão econômica do depósito. O perfil de pro-

dução se constitui na principal causa da diferença entre as equações de estimativa da volatilidade dos projetos de extração dos dois recursos. Na Tabela 1, mostra-se o resumo dessas relações.

As expressões de elasticidade³ (E) mostram que $s_v = s_p$ somente se o projeto e o bem mineral possuem a mesma volatilidade, ou seja, se $E = 1$. Isto ocorre em dois casos especiais. No primeiro, V deve ser função linear de P , o que, geralmente, não é verdade, em função das não linearidades da tributação. No segundo, os preços devem ser altos e os custos operacionais baixos. Como essas duas condições raramente ocorrem, na prática da indústria mineral, logo, σ_v tende a ser maior que σ_p . As análises numéricas a seguir confirmam essas previsões.

3. Aplicação: volatilidade de projetos de produção de petróleo e de ouro

Nessa seção, faz-se a aplicação das equações resumidas na Tabela 1, para um projeto de lavra de petróleo e outro de lavra de ouro. As principais características técnicas, econômicas e financeiras dos dois projetos encontram-se resumidas na Tabela 2.

Os valores dos parâmetros h , a e s dos modelos estocásticos foram estimados a partir de dados históricos ou sugestões da literatura, como em Dixit e Pindyck (1994). Como o objetivo é mostrar o modelo para a estimativa da volatilidade dos projetos, muitos dos parâmetros de entrada do fluxo de caixa são semelhantes. Assume-se que a taxa de crescimento de preço, inflação e prêmio de risco são iguais para ambos os projetos, o que pode não ser verdade na prática. Por custo tributário total, entende-se como sendo a fatia de recursos financeiros do projeto que é apropriada pelo governo.

³A definição de elasticidade entre a volatilidade do projeto e a do preço se encontra no anexo.

Tabela 1 - Modelos de estimativa das volatilidades.

| Bem mineral | Modelos | Número da equação | Expressão analítica |
|-------------|---------|-------------------|---|
| Petróleo | MGB | 24 | $E = \frac{1}{V} (1-G) Q \frac{P}{(\mu + \gamma - \alpha)} (1 - e^{-(\mu + \gamma - \alpha)T})$ |
| | MRM | 25 | $E = \frac{1}{V} (1-G) Q \frac{P}{(\mu + \eta + \gamma)} (1 - e^{-(\mu + \eta + \gamma)T})$ |
| Mineração | MGB | 22 | $E = \frac{1}{V} (1-G) K \frac{P}{(\mu - \alpha)} (1 - e^{-(\mu - \alpha)T})$ |
| | MRM | 23 | $E = \frac{1}{V} (1-G) K \frac{P}{(\mu + \eta)} (1 - e^{-(\mu + \eta)T})$ |

Obs.: A demonstração das equações dos modelos estocásticos encontra-se no Anexo.

No modelo de estimativa da volatilidade dos projetos, a primeira fase consiste em construir os seus fluxos de caixa por meio da projeção de custo, preço, produção, etc. Na Tabela 3, encontram-se os principais indicadores desses fluxos de caixa, bem como a elasticidade da volatilidade desses projetos, utilizando-se as equações derivadas que estão no anexo e que se encontram sintetizadas na Tabela 1.

Para obter o valor presente do fluxo de caixa dos projetos de ouro e petróleo (V), foram utilizadas as equações (15), (17), (19) e (21). Nota-se que a magnitude dos valores associados ao projeto de produção da reserva de petróleo são muito superiores aos do projeto de ouro, pois, enquanto o investimento no projeto de ouro é de US\$ 200 milhões, aquele alocado no projeto de petróleo é mais do que US\$ 1 bilhão.

De acordo com os resultados da Tabela 3, se P segue MGB, os resultados do VPL dos projetos é mais alto. Por outro lado, se P segue um MRM, a volatilidade desses projetos é menor. Como explicar esses resultados? Ocorre que as equações de V consideram valores esperados de P, de acordo com os dois processos estocásticos. Assim, pela equa-

Tabela 2 - Parâmetros de entrada do projeto de petróleo usando o MGB e MRM.

| PARÂMETROS | COMMODITY | |
|--|-------------------|--------------------|
| | OURO | PETRÓLEO |
| Produção da reserva (Q) | 400.000 onças/ano | 50.000.000 bbl/ano |
| Taxa de declínio (γ) | - | 10,00% |
| Vida operacional (T) | 20 anos | 15 anos |
| Preço corrente (P) | US\$ 380 / onça | US\$ 20 / bbl |
| Custo de produção (C) | US\$ 250 / onça | US\$ 6 / bbl |
| Taxa de crescimento do preço (α) | 0,20% | 0,00% |
| Taxa de inflação de custo (i) | 1,00% | 1,00% |
| Custo de capital (μ) | 10,20% | 15,00% |
| Custo tributário total (G) | 40,00% | 50,00% |
| Volatilidade implícita do preço (σ) | 20,00% | 23,00% |
| Velocidade de reversão à média do preço (η) | 5,00% | 10,00% |
| Preço médio anual de longo prazo (P_m) | US\$ 350 / onça | US\$ 18 / bbl |
| Investimento (I) - US\$ | 200 milhões | 1,050 bilhão |

ção (1), se P segue um MGB, ele cresce à taxa α_p , indefinidamente. Se, por outro lado, P segue um MRM, pela equação (2), o seu valor esperado é P_m . Assim, o valor de V depende de P_0 , P_m e α_p e η . Para valores razoáveis de α_p e η , como nesses projetos, no caso em que P_m for superior a P_0 , o MRM tende a gerar maior V. Por outro lado, se P_m for menor que P_0 , o MGB tende a gerar maior V. Naturalmente, V depende, também, das variáveis operacionais, como C, Q, etc., as quais, aqui nessa análise simples, são consideradas como constantes.

Para encontrar os resultados da elasticidade dos projetos de petróleo e ouro, considerando-se que o preço da commodity segue tanto um MGB como MRM, foram usadas as equações (22), (23), (24) e (25). Encontrou-se que, nesses projetos, σ_v é menor se P seguir um MRM (veja Tabela 3). Para entender esse resultado, faz-se necessária uma análise das diferenças entre os processos estocásticos. Nota-se que σ_v depende da oscilação de V, que, por sua vez, depende das oscilações de P, ao longo do tempo. Como o MGB é um processo não-estacionário, seus valores tendem a ser mais voláteis. Por outro lado, pelo MRM, processo estacionário, o intervalo de tempo em que P se afasta de P_m depende de η . Assim, altos valores de η , implicam que P_0 se afasta de P_m por curto prazo e vice-versa. No caso extremo, se $\eta = 0$, E [P] será P_0 inicial; se $\eta \rightarrow \infty$, significa que E[P] tende a P_m . Por essas considerações, para esses parâmetros dos MGB e MRM, σ_v é menor se P seguir um MRM. Naturalmente, se alterarem os valores desses parâmetros de entradas, pode-se obter resultados diferentes.

Quando se analisam as diferenças entre o projeto de ouro e de o petróleo, observam-se discrepâncias marcantes em suas volatilidades. A Tabela 3 indica que os valores de σ_v , para o projeto mineração, são, aproximadamente, o dobro daqueles do projeto de petróleo, muito embora a volatilidade histórica de seus preços seja muito próxima. Logo, pode-se inferir que investir em projetos de lava de ouro seja mais arriscado que investir em projetos de produção de petróleo. Mas tal afirmativa nem sempre é

Tabela 3 - Indicadores do FCD e volatilidade dos projetos.

| COMMODITY | INDICADORES | MGB | MRM |
|-----------|-----------------------------|----------|----------|
| OURO | V (10 ⁶ US\$) | 239,97 | 212,95 |
| | I (10 ⁶ US\$) | 200,00 | 200,00 |
| | VPL (10 ⁶ US\$) | 39,97 | 12,95 |
| | VPL/I (%) | 19,99% | 6,48% |
| | VPL/ton | 5,00 | 1,62 |
| | E | 3,29 | 2,68 |
| | σ_v | 65,72% | 53,66% |
| PETRÓLEO | V (10 ⁶ US\$) | 1.345,04 | 1.291,85 |
| | I (10 ⁶ US\$) | 1.050,00 | 1.050,00 |
| | VPL (10 ⁶ US\$) | 295,04 | 241,85 |
| | VPL/bbl (US\$/bbl) | 0,76 | 0,62 |
| | VPL/I | 0,28 | 0,23 |
| | E | 1,45 | 1,10 |
| | σ_v | 33,40% | 25,30% |

V é o valor presente do fluxo de caixa dos projetos; I é o investimento; VPL é o valor presente líquido; VPL/I é o índice de eficiência do investimento; E é a elasticidade da volatilidade do projeto e σ_v é a volatilidade do projeto.

correta, pois os projetos possuem diferenças marcantes na estrutura de custo tributário, nível de produção e na relação C/P. Observa-se que as equações de estimativa da volatilidade do projeto (22) a (25) consideram V, o qual, depende de P, C e das demais variáveis do fluxo de caixa. O impacto de C ou P em E é muito significativo. Significa que, se a empresa tiver dois projetos de ouro, aquele de mais alto custo tende a ser mais volátil que aquele de baixo custo. No projeto de mineração de ouro, ressalta-se que $C = 0,66 P$, enquanto que no projeto de produção de petróleo $C = 0,30 P$. Isso significa que 66% da receita de cada onça de ouro são usados para pagar a sua produção, enquanto que, no petróleo, apenas 30% da receita pagam a produção de cada barril. Por isso, o projeto de mineração tende a ser mais volátil que o projeto de petróleo.

Ao analisar, especificamente, a relação entre volatilidade do projeto e volatilidade do preço, nota-se que σ_v é maior que σ_p (veja que σ_p do ouro é 20% ao ano e σ_p do petróleo é 23% ao ano).

Em outras palavras, esses projetos possuem $E > 1$, tanto se P seguir um MGB ou MRM, ou seja, significa, repita-se, que $\sigma_v > \sigma_p$. Portanto a solução tradicional de assumir que $\sigma_v = \sigma_p$, tende a subestimar a incerteza real de V. Nota-se, pelas equações (22) a (25), que E independe do custo tributário e do nível de produção do projeto, mas depende, fortemente, da estrutura dos custos (C/P). A Figura 1 mostra a sensibilidade de σ_v em relação à razão C/P, para os projetos de ouro e petróleo, considerando-se ambos os processos estocásticos para modelar o preço das commodities.

Se o $C = 0$, σ_v é igual à volatilidade dos preços, ou seja, 20%, no caso do ouro e 23%, no do petróleo. No entanto, se C/P crescer, σ_v aumenta, considerando-se qualquer um dos dois modelos estocásticos. À medida que C se aproxima de P, os valores de σ_v tendem a convergir para patamares elevadíssimos (nesse caso, o VPL pode se tornar negativo). Nos casos em que $C > P$, σ_v torna-se negativo, o que não possui significado econômico. O alto custo de produ-

ção do projeto de mineração justifica, ao menos em parte, a sua mais alta volatilidade, mesmo que a volatilidade do preço do ouro seja um pouco inferior à do petróleo.

A análise mostrada na Figura 1 pode ser realizada considerando-se isoladamente o preço da commodity ou a oscilação da margem de lucro dada por P/C. A vantagem dessa análise é obter os resultados em função de P, o qual é uma variável exógena ao modelo e sobre a qual a empresa não possui controle. Na Figura 2, encontra-se uma análise de sensibilidade de σ_v , em relação a P/C, para dois projetos, considerando-se os dois processos estocásticos, e espera-se que as conclusões sejam opostas às da Figura 1.

No caso de projetos marginais, C é alto em relação a P. Para estes, pequenas oscilações no preço, como ocorre, frequentemente, com o preço à vista do petróleo, no mercado internacional, podem ocasionar grandes flutuações no valor do projeto, principalmente se tais oscilações de preço coincidirem com o pico de produção. Isto é válido tanto para os projetos de petróleo quanto para as minas de ouro. Se C se aproxima de zero, pelas equações (22) a (25), E se aproxima de 1 e, assim, $\sigma_v = \sigma_p$. No entanto, um projeto sem custo operacional é algo irreal. Logo, a volatilidade dos projetos é sempre maior que a volatilidade dos preços. No entanto, para aqueles projetos de longa vida e baixo custo operacional, de fato, σ_p se aproxima de σ_v e, conseqüentemente, pode não se cometer grandes erros ao assumir que $\sigma_p = \sigma_v$.

Voltando ao exemplo do projeto de petróleo, assumiu-se que $P_m = \text{US\$ } 18/\text{bbl}$ e que $\eta = 10\%$. Por seguir um processo estacionário, mesmo que P seja diferente de P_m , no futuro, ele deve retornar para a sua média, dentro de um intervalo de tempo que depende de η . Como esse intervalo de tempo, para reversão, é razoavelmente pequeno, o MRM recomenda menores valores de σ_v que o MGB para qualquer valor inicial de P. Naturalmente, se $P_0 \gg P_m$ (por exemplo, $P_0 = \text{US\$ } 36/\text{bbl}$), os fluxos de

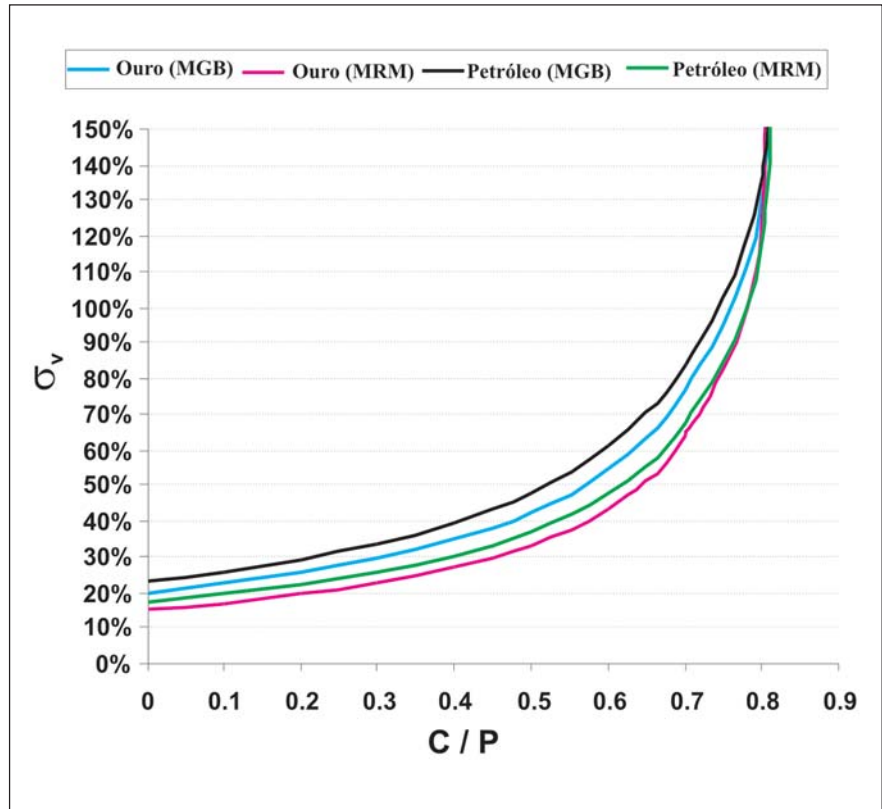


Figura 1 - Sensibilidade de σ_v , em relação a C, para os projetos.

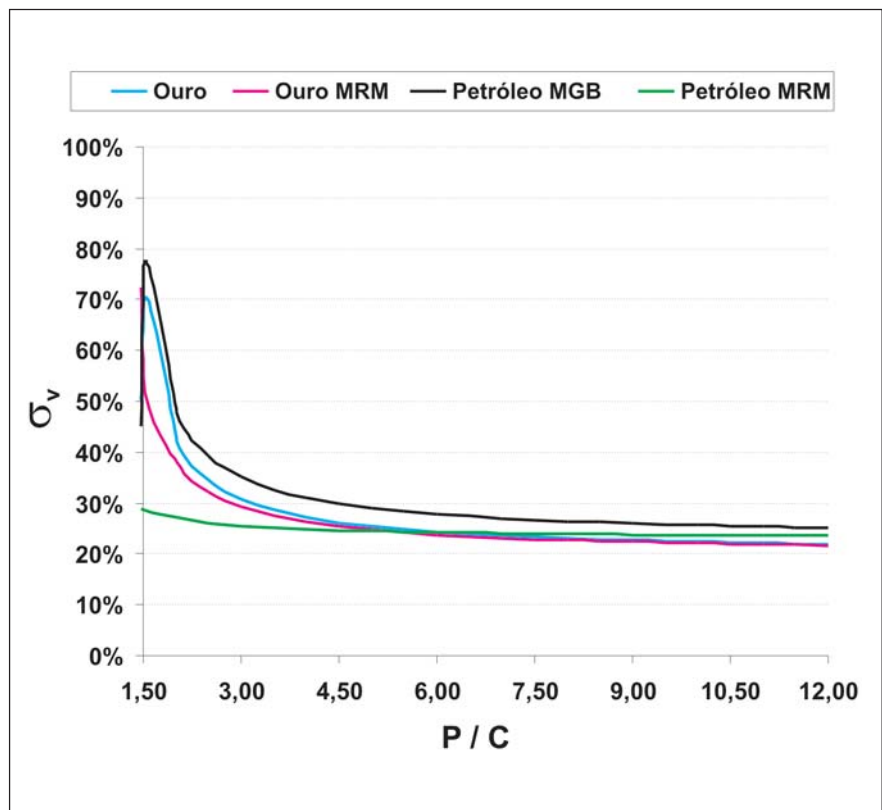


Figura 2 - Sensibilidade de σ_v , em relação a P, para o projeto de petróleo.

caixa auferidos a altos valores de P , antes de retornar à P_m , permitem que V aumente e, portanto, se torne menos sensível às oscilações. Como consequência, ao seguir o MRM, σ_v se torna pouco sensível a P . No caso do MGB, σ_v depende fortemente dos ganhos de capital do projeto. Se P_0 é pequeno, o VPL pode ser negativo e, assim, σ_v ser grande (inclusive se aproximar do infinito). No entanto, à medida que P cresce, σ_v cresce, inicialmente, mais rapidamente, mas, quando P se torna muito grande, σ_v se aproxima de σ_p , como ilustra a Figura 2.

Esses resultados geram grandes implicações para a indústria de recursos minerais e petróleo, principalmente aquelas formadas por empresas que extraem e comercializam bens minerais de preços voláteis como o óleo e o ouro. As análises de sensibilidade mostram que $\sigma_v = \sigma_p$ somente em casos muito especiais e irreais em que se verificam:

- a) baixíssimo custo operacional e/ou
- b) alto preço da *commodity*.

No atual estágio de conhecimento dos depósitos minerais e reservas de petróleo, tais características já não ocorrem.

No mercado financeiro, a volatilidade dos ativos (*commodities*, títulos financeiros, etc.) depende das interações entre oferta e demanda. Já a volatilidade de projetos depende, tanto da trajetória do preço das *commodities* (determinada pelo mercado financeiro), como da estrutura de custo do projeto, das qualidades das reservas minerais, dos aspectos gerenciais, etc.

4. Conclusões

A primeira pergunta seria: qual dos dois modelos seria o mais apropriado para a modelagem de preço das *commodities* e para a estimativa da volatilidade dos projetos. Pode-se dizer que a volatilidade da *commodity* depende muito do período em que a análise é realizada. Assim, no longo prazo, num mercado competitivo sem barreiras à entrada ou saída, o preço pode seguir um modelo de

reversão à média (MRM) e, consequentemente, gerar volatilidades mais baixas. Por outro lado, no curto prazo, se o preço seguir um Movimento Geométrico Browniano (MGB), ele tende a crescer exponencialmente ao longo do tempo e gerar maiores volatilidades, sendo, assim, mais compatível com a hipótese de exaustão dos recursos minerais.

A estimativa da volatilidade dos projetos tem sido um problema, tanto para valoração, como para gerenciamento de projetos de aproveitamento de recursos minerais. A metodologia proposta, para a estimativa da volatilidade dos projetos, considera, não somente a volatilidade histórica do preço da *commodity*, mas, também, as características do fluxo de caixa do projeto e, principalmente, a estrutura de custos dos projetos.

A análise numérica mostrou que a média das elasticidades (E) é maior que um para ambas trajetórias, tanto no caso em que preço seguir um MGB, ou um MRM. Os resultados encontram-se resumidos na Tabela 4.

Os valores das elasticidades dos projetos para ambos os modelos mostram que os erros podem ser significativos para valoração e tomada de decisões. Tais discrepâncias devem ser consideradas nas ferramentas de gestão de risco dos projetos (*hedge*, opções, contratos futuros etc.) e no processo envolvendo parcerias para diversificar os riscos da corporação e as estratégias de busca por sinergia.

Como as empresas da indústria mineral buscam estratégias para reduzir os seus riscos financeiros, seja por meio de instrumentos financeiros, seja por meio de formação de parcerias (*joint-venture*),

entre outras, para o sucesso de tais estratégias, a correta estimativa da volatilidade dos ativos é de fundamental importância. Assim, por exemplo, no caso do hedge assumindo a volatilidade do valor corrente do projeto igual ao preço, pode-se chegar a uma estratégia ineficiente, pois foi visto que isso somente ocorre em casos de baixos custos de produção ou elevados preços, cenários pouco prováveis de acontecerem simultaneamente no contexto atual da indústria mineral.

5. Referências bibliográficas

- Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES). www.bndes.gov.br. Página acessada em Março de 2004.
- BLACK, F., SCHOLLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, p. 637-659, 1973.
- BORDIERI, C. A. *Um método quantitativo para estimativa da volatilidade de projetos de produção de petróleo*. FEM e IG/UNICAMP: Programa de Ciências e Engenharia de Petróleo, 2005. 110p. (Dissertação de Mestrado).
- BORDIERI, C. A., LIMA, G. A. C., SUSLICK, S. B. A quantitative method for estimation of volatility of oil production projects. In: *Hydrocarbons Economics and Evaluation Symposium*. Dallas: SPE, 2005.
- BRENNAN, M. J., SCHWARTZ, E. S. Evaluating natural resource investment. *Journal of Business*, v. 58, n. 2, p.135-157, 1985.
- CAMPBELL, J., Y., Lo, ANDREW, W., MACKINLAY, A. C. *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press, 1997.
- COX, JOHN, J., MARK, RUBINSTEIN. *Options markets*. Englewood Cliffs, New

Tabela 4 - Resumo das elasticidades dos projetos de petróleo e ouro.

| Bem Mineral | Movimento Geométrico Browniano (MGB) | Movimento de Reversão à Média (MRM) |
|--------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| Elasticidade do petróleo | 1, 45 | 1, 10 |
| Elasticidade do ouro | 3, 29 | 2, 68 |

- Jersey: Prentice-Hall, 1985. 498 p.
- DAVIS, GAHAN A. Estimating volatility and convenience yield when valuing real options to invest or to abandon. *Quarterly Review of Finance*, v. 38, p. 715-754, 1986.
- DIXIT, AVINASH. K., PINDYCK, ROBERT. S. *Investment under uncertainty*. New Jersey: New Jersey University Press, 1994. 476 p.
- GENTRY, D.W., O'NEIL, T. J. Mine investment analysis. New York: Society of Mining Engineers, *AIME*, 1984. 502p.
- HULL, JOHN. *Options, futures and other derivative securities*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1999. 698 p.
- LIMA, GABRIEL A. C. *Uma proposta de uso da teoria da preferência e das opções reais em projetos de exploração e produção de petróleo*. IG/UNICAMP, 2004. 226 p. (Tese de doutorado).
- LIMA, G. A., SUSLICK, S. B. Impacts of environmental constraints on the optimal decision-making process applied to Brazilian petroleum industry. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 41, n. 9, 2002.
- LUENBERGUER, DAVID G. *Investment science*. Oxford: Oxford Press, 1998. 494 p.
- MCDONALD, R., SIEGEL, D. The value of waiting to invest. *Quarterly Journal of Economics*. November, 101. p.707-728, 1986.
- ZVI, BODIE, KANE, ALEX e MARCUS, ALAN J. *Fundamentos de investimentos*. Bookman Companhia Editora. 2000. 628 p.
- MERTON, R. C. *Continuous time finance*. Blackwell Publishers Inc., 1990. 732p.
- PINDYCK, ROBERT S. *The long run evolution of energy prices*. Massachusetts Institute of Technology (MIT). Working paper, Q 30, Q 40. 2001, 2002. 35p.
- PINDYCK, ROBERT S., RUBINFELD, DANIEL L. *Econometric models and Economic Forecasting*. McGraw-Hill, 1991.
- ROSS, S. A., WESTERFIELD, R. W., JAFFE, F. J. *Administração financeira*. São Paulo: Atlas, 1999.
- SICK, GORDON. *Analysing volatility of a petroleum property*. Working Paper. Real Options Group e University of Calgary, 1999.
- PADDOCK, J. L., SIEGEL, D. R., SMITH, J. L. Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 103, n. 3, p.479-508, 1988.
- STERMOLE, F. J., STERMOLE, J.M. *Economic evaluation and investment decision methods*. 8th ed. Golden, Colorado: Investment Evaluations Corporation, 1993. 479p.
- TRIGEORGIS, LENOS. *Real options - Managerial flexibility and strategy in resources allocation*. Third edition. Cambridge: The MIT Press, 1996. 427p.

ANEXO

Seja $V(P, t)$ o valor do projeto, onde o preço P evolui de acordo com os seguintes processos estocásticos tem-se:

$$\text{MGB: } dP = \alpha_p P dt + \sigma_p P dz \quad (4)$$

$$\text{MRM: } dP = \eta (P_m - P) dt + \sigma_p P dz \quad (5)$$

em que α_p , σ_p , η_p e P_m se referem à taxa de crescimento instantânea, volatilidade instantâneas, velocidade de reversão à média e valor médio de longo prazo do preço, respectivamente.

Naturalmente, V depende de outras variáveis tais como o C (custo operacional), Q (produção), r (taxa de juro), etc., mas estas são consideradas constantes ou determinísticas. Com esta simplificação, assume-se que V segue um processo estocástico semelhante ao de P como fizeram Dixit e Pindyck (1994), Brennan e Schwartz (1985) e MacDonald e Siegel (1986):

$$\text{MGB: } dV = \mu_v V dt + \sigma_v V dz \quad (6)$$

$$\text{MRM: } dV = \eta_v (V_m - V) dt + \sigma_v V dz, \quad (7)$$

Onde α_v , σ_v , η_v e V_m se referem à taxa de crescimento instantânea, volatilidade instantâneas, velocidade de reversão à média e valor médio de longo prazo do projeto, respectivamente.

Ao longo de um intervalo dt , a oscilação no valor de V é obtida pelo Lema de Ito. Se P segue um MGB, tem-se:

$$dV = \frac{1}{V} (\frac{1}{2}\sigma_p^2 P^2 V''_{pp} + \alpha_p P V'_p + V'_t) V dt + \frac{1}{V} \sigma_p P V'_p V dz \quad (8)$$

Analogamente, se P evolui de acordo com um MRM, tem-se:

$$dV = \frac{1}{V} (\frac{1}{2}\sigma_p^2 P^2 V''_{pp} + \eta(P_m - P) V'_p + V'_t) V dt + \frac{1}{V} \sigma_p P V'_p V dz \quad (9)$$

As equações (8) e (9) mostram que a oscilação em V é descrita por processos estocásticos, semelhantes ao que descrevem a oscilação em P , mas diferente nos parâmetros taxa de crescimento e volatilidade.

Na equação (8), se P é descrito por um MGB, a taxa de crescimento em V está relacionada com a taxa de crescimento de P por meio de:

$$\alpha_v = \frac{1}{V} (\frac{1}{2}\sigma_p^2 P^2 V''_{pp} + \alpha_p P V'_p + V'_t) \quad (10)$$

Na equação (9), a relação entre as taxas de crescimento entre V e P se P seguir um MRM deve ser:

$$\alpha_v = \frac{1}{V} (\frac{1}{2}\sigma_p^2 P^2 V''_{pp} + \eta(P_m - P) V'_p + V'_t) \quad (11)$$

As Eq. (10) e (11) mostram que $\alpha_v = \alpha_p$, somente nos casos em que V for uma função linear de P , o que certamente

não ocorre nos projetos de extração de recursos minerais, em parte por causa da incidência tributária.

Em relação à volatilidade, foco desse artigo, as equações (8) e (9) mostram que V evolui segundo um processo estocástico igual ao de P , somente se:

$$\sigma_V = \frac{1}{V} P V'_P \sigma_P \quad (12)$$

A partir da equação (12), define-se o coeficiente de elasticidade da volatilidade em relação ao preço por meio de:

$$E = \frac{1}{V} P V'_P \quad (13)$$

A equação (12) mostra que, se P evoluir de acordo com o MGB ou MRM, a relação entre σ_V e σ_P é a mesma. Mas, veja que nas equações (8) e (9) o processo estocástico que modela as oscilações em V são diferentes, se P for modelado por um MGB ou MRM e, conseqüentemente, os coeficientes de elasticidade serão diferentes.

No caso clássico, ao se assumir que $\sigma_V = \sigma_P$, significa que é verdadeira a premissa de que $E = 1$. No entanto, nem sempre isto acontece. Para investigar E em investimentos reais, considere um projeto de ouro e outro de petróleo. A produção da mina (K) é constante, enquanto que a da jazida de petróleo (Q) declina exponencialmente ao longo do tempo. O custo operacional (C) cresce segundo a inflação i e o custo de capital é μ , para ambos os processos, respectivamente, e o custo tributário total é G .

Se o preço evolui de acordo com um MGB, o valor esperado do fluxo de caixa de um projeto de mineração (F), num instante t ($0 \leq t \leq T$), é dado por meio de:

$$E[F] = K(1-G)(P_0 e^{\alpha t} - C_0 e^{it}) \quad (14)$$

Para uma reserva de minério com produção anual igual a K e vida de T anos, o valor presente de seu fluxo de caixa é:

$$E[V] = \int_0^T K(1-G)(P_0 e^{\alpha t} - C_0 e^{it}) e^{-\mu t} dt$$

$$V = K(1-G) \left[\left(\frac{P}{(\mu - \alpha)} \right) \left(1 - \frac{1}{e^{(\mu - \alpha)T}} \right) - \left(\frac{C}{(\mu - i)} \right) \left(1 - \frac{1}{e^{(\mu - i)T}} \right) \right] \quad (15)$$

onde μ é a taxa de desconto ajustada ao risco e que $i, \alpha < \mu$ para que o valor do projeto tenha significado econômico.

Similarmente, se P segue um MRM, o valor esperado do fluxo de caixa do projeto, num instante t , é:

$$E[F] = K(1-G) [P_m + (P - P_m) e^{-\eta t} - C_0 e^{it}] \quad (16)$$

O valor esperado do projeto é:

$$V = K(1-G) \left[\frac{P_m}{\mu} (1 - e^{-\mu T}) + \frac{(P - P_m)}{(\mu + \eta)} (1 - e^{-(\mu + \eta)T}) - \frac{C}{(\mu - i)} (1 - e^{-(\mu - i)T}) \right] \quad (17)$$

Para o caso de petróleo, a mudança ocorre apenas no perfil de produção anual, que passa a ser declinante ao longo do tempo. Assim, se P segue um MGB, o valor esperado do fluxo de caixa de um projeto de petróleo (F), num instante t , é:

$$E[F] = Q e^{-\gamma t} (1-G) (P_0 e^{\alpha t} - C_0 e^{it}) \quad (18)$$

Para uma reserva com T anos, o valor presente do fluxo de caixa pode ser estimado por meio de:

$$E[V] = \int_0^T K(1-G) (Q_0 e^{-\gamma t}) (P_0 e^{\alpha t} - C_0 e^{it}) e^{-\mu t} dt$$

$$V = Q(1-G) \left[\left(\frac{P}{(\mu + \gamma - \alpha)} \right) \left(1 - \frac{1}{e^{(\mu + \gamma - \alpha)T}} \right) - \left(\frac{C}{(\mu + \gamma - i)} \right) \left(1 - \frac{1}{e^{(\mu + \gamma - i)T}} \right) \right] \quad (19)$$

Para o caso em que o preço segue um MRM, o valor esperado do fluxo de caixa de um projeto de mineração, num instante t , é:

$$E[F] = Q e^{\gamma t} (1-G) [P_m + (P_m - P) e^{-\eta t} - C_0 e^{-i t}] \quad (20)$$

O valor presente do fluxo de caixa operacional é:

$$V = Q(1-G) \left[\left(\frac{P_m}{(\gamma + \mu)} \right) (1 - e^{-(\mu + \gamma)T}) + \left(\frac{(P - P_m)}{(\mu + \eta + \gamma)} \right) (1 - e^{-(\mu + \eta + \gamma)T}) - \left(\frac{C}{(\mu + \gamma - i)} \right) (1 - e^{-(\mu + \gamma - i)T}) \right] \quad (21)$$

A partir das equações (15), (17), (19) e (21), juntamente com a equação (13), pode-se estimar a elasticidade da volatilidade dos projetos de mineração e petróleo, em relação ao preço da commodity.

A elasticidade de projetos de mineração é:

$$\text{MGB: } E = \frac{1}{V} (1-G) K \frac{P}{(\mu - \alpha)} (1 - e^{-(\mu - \alpha)T}) \quad (22)$$

$$\text{MRM: } E = \frac{1}{V} (1-G) K \frac{P}{(\mu + \eta)} (1 - e^{-(\mu + \eta)T}) \quad (23)$$

Já, para os projetos de petróleo, tem-se:

$$\text{MGB: } E = \frac{1}{V} (1-G) Q \frac{P}{(\mu + \gamma - \alpha)} (1 - e^{-(\mu + \gamma - \alpha)T}) \quad (24)$$

$$\text{MRM: } E = \frac{1}{V} \frac{P}{(\mu + \eta + \gamma)} (1 - e^{-(\mu + \eta + \gamma)T}) \quad (25)$$

Utilizando-se as equações (22), (23), (24) e (25), pode-se ver que a volatilidade dos projetos é sempre maior ou igual à dos preços e depende fortemente da estrutura de custo do projeto.

Artigo recebido em 03/08/2005 e aprovado em 05/11/2005.

REM - Revista Escola de Minas
70 anos divulgando CIÊNCIA.

www.rem.com.br
