

## Un modelo independiente de las coordenadas espaciales para ventilación mecánica de interiores

César Medina

Dr. en Física, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina  
E-mail: cesarmedina@arnet.com.ar

### Resumen

Se propone un modelo de ventilación mecánica, independiente de las coordenadas espaciales, consistente en inyección de aire puro y extracción de aire viciado (método doble). Mediante diferencias finitas, se calcula el porcentaje de oxígeno en función del tiempo para distintas condiciones de entrada y salida, incluyendo la simple inyección de aire puro (método simple) como un caso particular. Los resultados muestran que el área de las aberturas de salida es un parámetro crítico en la eficacia del método simple, y bajo ciertas condiciones, el nivel de oxígeno puede mantenerse en el tiempo y su cálculo es sencillo.

**Palabras-clave:** ventilación mecánica de interiores, métodos doble y simple, independiente de coordenadas espaciales.

### Abstract

*A mechanical ventilation model is proposed, independent of spatial coordinates, consisting of pure air injection and polluted air extraction (double method). Through finite differences, the oxygen percent vs. time is computed for different intake and exhaust conditions, including one with simple pure air injection as a particular case. Results show that exit opening area is a critical parameter in the effectiveness of the simple method, and under certain conditions, the oxygen level can be kept a long time, and it is easy to compute.*

**Keywords:** indoor mechanical ventilation, double and simple methods, independent of spatial coordinates.

## 1. Introducción

El uso de mecanismos ineficaces de ventilación es un problema que afecta seriamente la salud de las personas y su rendimiento en los lugares de trabajo (Solé & Pérez, 1991; Burge et al, 1993). Las exigencias legales al respecto difieren de un país a otro, según el destino y las características de los espacios ventilados, pero en muchos casos se considera suficiente un caudal de aire de 30 m<sup>3</sup> por persona y por hora, y un nivel de oxígeno en volumen superior al 18% (Decreto 351/79, Argentina; Decreto 92/02, Cataluña; Arrêté 24/03/82, Francia).

En la práctica, la inyección de aire exterior (en adelante, método simple) es la técnica más usada. Sólo cuando se supone presencia de contaminantes, suele combinarse la inyección de aire exterior con la extracción de aire viciado (en adelante, método doble).

A los fines de evaluar la eficiencia de ambos métodos, en términos del volumen de oxígeno para tiempos grandes, se planteará un modelo independiente de las coordenadas espaciales para el método doble que incluye al método simple como un caso particular.

## 2. Metodología

En un recinto ventilado por método doble, la variación de masa por unidad de tiempo de un dado gas debe ser la cantidad del mismo que entra, más la que se produce en el recinto, menos la que sale y menos la que se consume. Así, las ecuaciones de continuidad para el oxígeno y el resto de los gases pueden escribirse:

$$\frac{dO}{dt} = u_i s_i \rho_{ex} k_{ex} - \sum_j u_{sj} s_{sj} \rho_{in} k_{in} - c \quad (1)$$

$$\frac{dG}{dt} = u_i s_i \rho_{ex} (1 - k_{ex}) - \sum_j u_{sj} s_{sj} \rho_{in} (1 - k_{in}) + 1.1c \quad (2)$$

donde  $O$ ,  $G$ ,  $u_i$ ,  $u_{sj}$ ,  $s_i$ ,  $s_{sj}$ ,  $\rho_{ex}$ ,  $\rho_{in}$ ,  $k_{ex}$ ,  $k_{in}$ ,  $c$ , representan, respectivamente, la masa de oxígeno en el recinto, la de los otros gases, la velocidad del aire en el inyector, las velocidades de salida del aire viciado, la sección del inyector, las secciones de salida, la densidad del aire exterior, la del interior, la fracción molar del oxígeno en el exterior, la del interior, y el consumo de oxígeno por unidad de tiempo. Las sumas con subíndice  $j$ , en los segundos miembros, contemplan la posibilidad de que haya varias aberturas de salida, en las cuales la velocidad del aire puede ser distinta según la sección y la presencia o ausencia de un extractor. El último término del segundo miembro de la (2) da cuenta del hecho de que los seres humanos exhalan un volumen de dióxido de carbono equivalente al 80% del consumido en oxígeno (Mérida Morales et al, 2002), lo cual corresponde a una masa un 10% mayor.

Se ha despreciado el flujo difusivo porque los coeficientes de difusión son pequeños ( $O(10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1})$ ) y la longitud de escala de gradiente de concentración (que se analizará más adelante) es grande.

La densidad total y la fracción molar del oxígeno en el interior, dadas por

$$\rho_{in} = \frac{O + G}{V} \quad (3)$$

$$k_{in} = \frac{O}{O + G} \quad (4)$$

se suponen uniformes en todo el recinto. Esto depende del tiempo característico de la mezcla de gases, que varía según la geometría del recinto y la mecánica del flujo (turbulencia, convección, etc.). Sin embargo, aunque las condiciones no sean muy favorables, la variación espacial de estas variables producirá períodos transitorios más largos, pero no afectará los resultados para intervalos grandes de tiempo, que son los que interesan.

En general, las velocidades de entrada y salida en (1) y (2) varían en el tiempo por efectos mecánicos, viscosos y térmicos. El cálculo de los efectos térmicos es complicado porque no sólo depende del flujo de energía debido al transporte de gas, sino también de otros factores como las fuentes interiores de calor (incluyendo las personas) o de refrigeración, la conductividad de los materiales, etc. Es conveniente medir la temperatura en función del tiempo en cada caso específico. En este estudio, supondremos que la temperatura interior es constante e igual a la exterior, lo cual se cumplirá fácilmente si la circulación es adecuada o existen climatizadores.

Así, la variación de la velocidad en cada abertura (entrada o salida), estará dada por la ecuación de Navier-Stokes (Landau & Lifshitz, 1991):

$$\rho_{ex,in} \left[ \frac{\partial u_{i,s}}{\partial t} + (u_{i,s} \cdot \nabla) u_{i,s} \right] = \phi - \nabla P + F_{\mu} \quad (5)$$

donde  $\phi$ ,  $P$  y  $F_{\mu}$  representan, respectivamente, la fuerza externa por unidad de volumen, la presión y la fuerza viscosa.

Cálculo de  $\phi$ : En las aberturas con turbina, la fuerza externa está dada por la suma de las contribuciones del inyector ( $i$ ) y el extractor ( $e$ ), y en aquéllas sin turbina -que en adelante llamaremos libres- por la diferencia entre ambas contribuciones. Las mismas se pueden calcular conociendo la velocidad,  $u_{0i,e}$ , que cada turbina imprime al aire en espacio abierto o en el instante inicial:

$$u_{0i,e} = d_{i,e} \cdot g_{i,e} \cdot n_{i,e} \quad (6)$$

donde  $d$ ,  $g$  y  $n$  representan, respectivamente, el espesor efectivo de la turbina (perfil del álabe), su frecuencia de giro y el número de paletas. Si el aire se mueve a la velocidad dada

por (6), su presión cinética,  $P_{i,e}$ , será

$$P_{i,e} = 1/2 \cdot \rho \cdot u_{0i,e}^2 \quad (7)$$

donde  $\rho$  es la densidad del aire a espacio abierto.

La fuerza efectiva de cada turbina,  $F_{i,e}$ , será

$$F_{i,e} = P_{i,e} \cdot s_{i,e} \quad (8)$$

De (7) y (8), se tiene que la fuerza por unidad de volumen de cada turbina será

$$\phi_{i,e} = \frac{1/2 \cdot \rho \cdot u_{0i,e}^2}{V} \cdot s_{i,e} \quad (9)$$

donde  $V$  denota el volumen del ambiente.

Cálculo de  $P$ : Para la presión, en la (5), se usará la ecuación del gas ideal:

$$P \cdot V = N \cdot R \cdot T \quad (10)$$

siendo  $N$ ,  $R$  y  $T$ , respectivamente, el número total de moles, la constante universal de los gases y la temperatura en °K. Cálculo de  $F_\mu$ : La fuerza viscosa está dada por

$$F_\mu = \mu_1 \nabla^2 u + \mu_2 \nabla(\nabla \cdot u) \quad (11)$$

donde, supondremos coeficientes iguales para ambos términos del segundo miembro, es decir,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , siendo este último el coeficiente de turbulencia totalmente desarrollada (Landau & Lifshitz, 1991):

$$\mu_l = \Delta u \cdot l \quad (12)$$

En sentido estricto, en la (12),  $\Delta u$  debe ser un promedio temporal de los valores aleatorios de la máxima fluctuación espacial de velocidad, siendo  $l$  la distancia entre los puntos que presentan dicha fluctuación. En nuestro sistema,  $\Delta u$  será la diferencia entre las velocidades de entrada y salida, y  $l$  la distancia entre las respectivas aberturas. Esta aproximación es aceptable porque cuando las secciones de las aberturas de entrada y salida son muy dispares, las velocidades fluctúan rápidamente y hay turbulencia de gran escala; en tanto que cuando estas secciones son comparables, la diferencia de velocidades entre las aberturas se estabiliza rápidamente en un valor

pequeño y las fuerzas viscosas son despreciables.

En la (11), la expresión  $\nabla \cdot u$  representa la divergencia de la velocidad, que se puede calcular de la ecuación de continuidad (Landau & Lifshitz, 1991), particularizada para el interior del recinto:

$$\frac{\partial \rho_{in}}{\partial t} + \rho_{in} \nabla \cdot u + u \cdot \nabla \rho_{in} = 0 \quad (13)$$

donde supondremos despreciable la variación espacial de  $\rho_{in}$ . Así, la divergencia de la velocidad será simplemente la diferencia entre los caudales de entrada ( $u_s s_s$ ) y salida ( $u_i s_i$ ), sobre el volumen del recinto:

$$\nabla \cdot u = \frac{u_i s_i - u_s s_s}{V} \quad (14)$$

La (14) se puede interpretar como la diferencia de las velocidades de entrada y salida, cada una dividida en una longitud de escala de divergencia ( $V/s_{is}$ ), que coincide con otras longitudes de escala que pronto se analizarán. La longitud de escala de gradiente, por su parte, será  $l$ . Así,

$$\nabla(\nabla \cdot u) = \frac{u_i s_i - u_s s_s}{lV} \quad (15)$$

Siguiendo el mismo razonamiento, se puede tomar en la (11), para el laplaciano de la velocidad,  $\nabla^2 u$ :

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{u_i - u_s}{l} \frac{s_i - s_s}{V} \quad (16)$$

Las otras longitudes de escala que necesitamos para prescindir de las coordenadas espaciales son la de gradiente de presión y la de la derivada advectiva de la (5). La de gradiente de presión,  $L_p$ , se define como (Rishbet & Garriot, 1969)

$$L_p = \left( \frac{d \ln P}{dx} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} \right)^{-1} \quad (17)$$

Para calcular este parámetro, consideremos el instante inicial en el inyector. En el intervalo  $dt$ , en que la turbina gira un enésimo de vuelta (siendo  $n$  el número de paletas), transporta al

interior un volumen  $dV = s_i \cdot d$ . Dado que la densidad y la presión, en dicho instante, son iguales adentro y afuera del recinto, se tiene, de la (10), que el incremento relativo de presión producido es

$$\frac{dP}{P} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{dN}{N} = \frac{dV}{V} = \frac{s_i \cdot d}{V} \quad (18)$$

y el gradiente de presión será

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{d} \quad (19)$$

de (17), (18) y (19), se concluye que

$$L_{pi} = \left( \frac{1}{P_1} \frac{P_2 - P_1}{d} \right)^{-1} = \frac{V}{s_i} \quad (20)$$

Una expresión análoga a la (20) se obtiene para las aberturas de salida.

Por su parte, el segundo término del primer miembro de la (5), la derivada advectiva de la velocidad, representa el intercambio de momento con el recinto. Para calcular su longitud de escala, consideremos nuevamente el instante inicial en el inyector. El momento que la turbina le transfiere al recinto es

$$m \cdot dv_i = (M + m) \cdot dv_a \cong M \cdot dv_a \quad (21)$$

donde  $dv_a$  es la variación de velocidad en el recinto, en tanto que  $m$  y  $M$  están dadas por

$$m = \rho \cdot dV = \rho \cdot s_i \cdot v_i \cdot dt \quad (22)$$

$$M = \rho \cdot V \quad (23)$$

De (21), (22) y (23), se tiene

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{s_i}{V} \cdot v_i \cdot dv_i \quad (24)$$

Comparando el segundo miembro de la (24) con la derivada advectiva de la (5), se observa que la longitud de escala es también

$$L_{vi} = \frac{V}{s_i} \quad (25)$$

Una expresión análoga a la (25) se obtiene para las aberturas de salida.

El sistema formado por (1)-(5) se ha resuelto, por diferencias finitas, para un

período de 17 horas y una habitación de 100 m<sup>3</sup>, con un consumo equivalente al de 100 personas en actividad moderada, suponiendo un peso promedio de 65 kg por persona, y un consumo de 5.25 ml.kg<sup>-1</sup>.min<sup>-1</sup> (Myers et al, 2001). Se ha supuesto que el aire puede salir por el extractor y por una abertura libre. Los casos más representativos se detallan en la Tabla 1.

### 3. Resultados

Las Figs. 1-5 muestran los resultados correspondientes a la tabla 1. Se representa, en función del tiempo, la velocidad del aire en el inyector (*ui*), en el extractor (*ue*), en la abertura libre (*ul*), y la cantidad de oxígeno disponible (*O*) como porcentaje en volumen a una presión de 1 atm.

- **Caso 1:** Éste es un caso de método doble con inyector y extractor iguales y equivalentes a una turbina de 20 cm de diámetro, 3 cm de espesor efectivo del álabe, cinco paletas y 1000 rpm. La velocidad del aire en el inyector y extractor se mantienen iguales durante todo el tiempo. El porcentaje de oxígeno en volumen desciende ligeramente en las primeras dos horas y luego se mantiene constante a un nivel superior al 20%. Los mismos resultados se obtienen haya o no aberturas libres de cualquier sección.
- **Caso 2:** Éste es un caso de método simple con un inyector igual al del caso anterior y una abertura libre de la misma sección. La velocidad del aire en el inyector decrece y en la abertura libre crece hasta que se igualan en poco más de una hora, y a partir de ese instante se mantienen constantes. A pesar de no haber extractor, el volumen final de oxígeno es casi el mismo que el del caso anterior.
- **Casos 3, 4 y 5:** Estos casos son de método simple con un caudal equivalente a 30 m<sup>3</sup> por hora y por persona, conforme a las exigencias legales ya mencionadas. La diferencia entre ellos es la sección de la abertura libre (v. Tabla 1). (En los casos 3 y 4,

Tabla 1 - Casos estudiados: velocidades y secciones de entrada y salida.

Caso	$u_{i0}$ (ms <sup>-1</sup> )	$u_{e0}$ (ms <sup>-1</sup> )	$U_{l0}$ (ms <sup>-1</sup> )	$s_i$ (m <sup>2</sup> )	$s_e$ (m <sup>2</sup> )	$s_l$ (m <sup>2</sup> )
1	2.5	2.5	0	3 . 10 <sup>-2</sup>	3 . 10 <sup>-2</sup>	Arbitraria
2	2.5	-	0	3 . 10 <sup>-2</sup>	-	3 . 10 <sup>-2</sup>
3	13.26	-	0	6 . 10 <sup>-2</sup>	-	6 . 10 <sup>-2</sup>
4	13.26	-	0	6 . 10 <sup>-2</sup>	-	1.5 . 10 <sup>-3</sup>
5	13.26	-	0	6 . 10 <sup>-2</sup>	-	2.4 . 10 <sup>-4</sup>

Donde  $u_{i0}$ ,  $u_{e0}$ ,  $u_{l0}$ ,  $s_i$ ,  $s_e$  y  $s_l$  representan, respectivamente, la velocidad inicial del aire en el inyector, en el extractor, en la abertura libre, la sección del inyector, la del extractor, y la de la abertura libre.

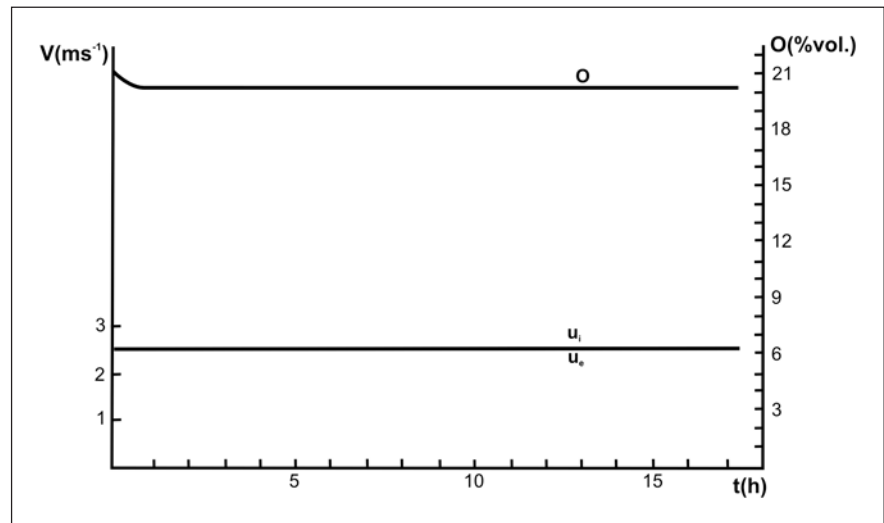


Fig. 1 - Velocidades en el inyector y en el extractor, y porcentaje en volumen de oxígeno para el caso 1.

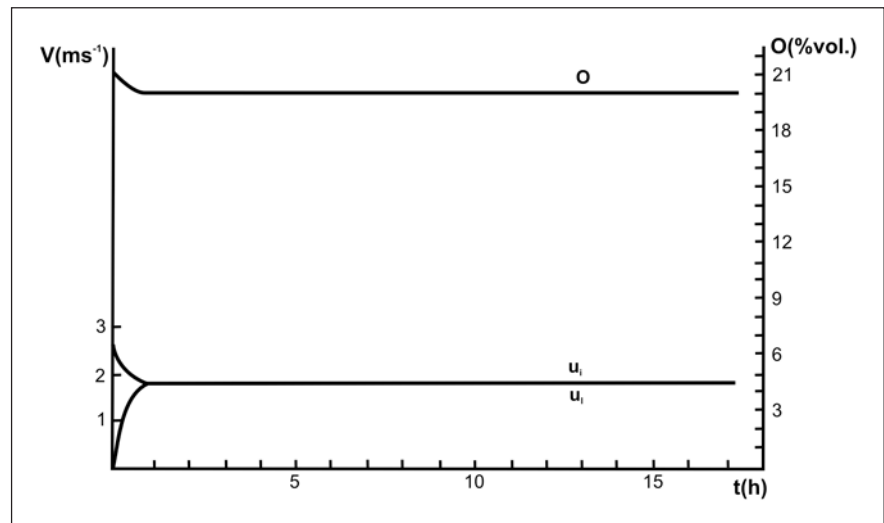


Fig. 2 - Velocidades en el inyector y en la abertura libre, y porcentaje en volumen de oxígeno para el caso 2.

para una mejor visualización, se ha tomado una escala mayor en las abscisas y por ello se representan sólo las primeras 8 horas).

En el caso 3, la abertura libre tiene el mismo tamaño que el inyector y el comportamiento cualitativo de las velocidades es similar al del caso 2. El nivel de oxígeno se mantiene prácticamente constante e igual al valor inicial durante todo el tiempo.

En el caso 4, la abertura libre es 40 veces menor que el inyector. Las curvas de velocidades se cruzan en los primeros minutos y luego, en menos de 15 minutos, ambas han alcanzado sus valores estacionarios. El nivel de oxígeno disminuye asintóticamente durante 7 horas y luego alcanza un valor estacionario cercano al 17% (menor que el mínimo saludable).

En el caso 5, la abertura de salida es 250 veces menor que el inyector. En la primera media hora, debido al aumento de presión, el nivel de oxígeno sobrepasa su valor de espacio abierto, pero luego decrece rápidamente hasta menos del 1% en 17 horas, sin llegar a régimen estacionario. Las curvas de velocidad, en los primeros minutos, tienen pendientes más abruptas que en el caso anterior, y alcanzan sus valores estacionarios más rápidamente. La velocidad final de entrada es muy pequeña (no puede apreciarse en la escala de la gráfica).

Para aberturas libres cada vez menores, se obtienen curvas similares a las de la Fig. 5, sólo que el nivel de oxígeno disminuye más rápidamente. Para  $s_s \leq 6 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ , los resultados son prácticamente los mismos que los de un recinto sin aberturas libres, el oxígeno se agota en poco más de 9 horas.

## 4. Discusión

Para el método doble (Fig.1), es indiferente que el recinto tenga o no aberturas libres de cualquier sección; en tanto que para el método simple, la sección de la abertura libre es crucial. Si

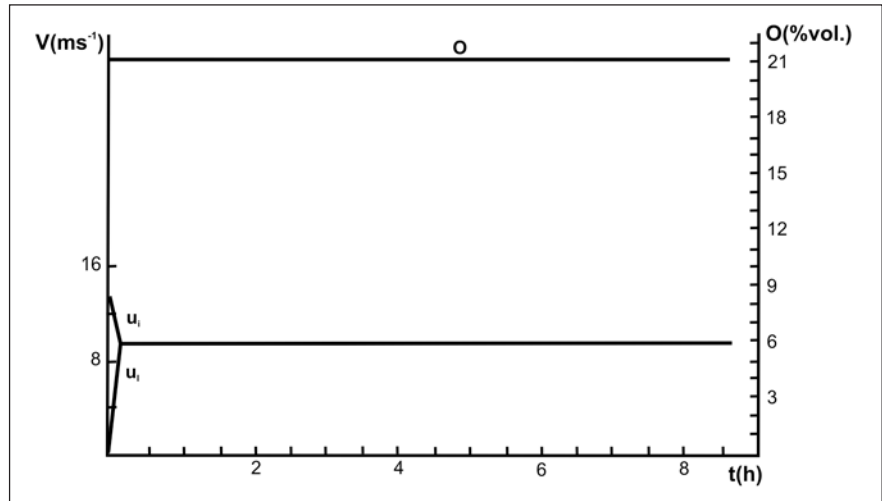


Fig. 3 - Velocidades en el inyector y en la abertura libre, y porcentaje en volumen de oxígeno para el caso 3.

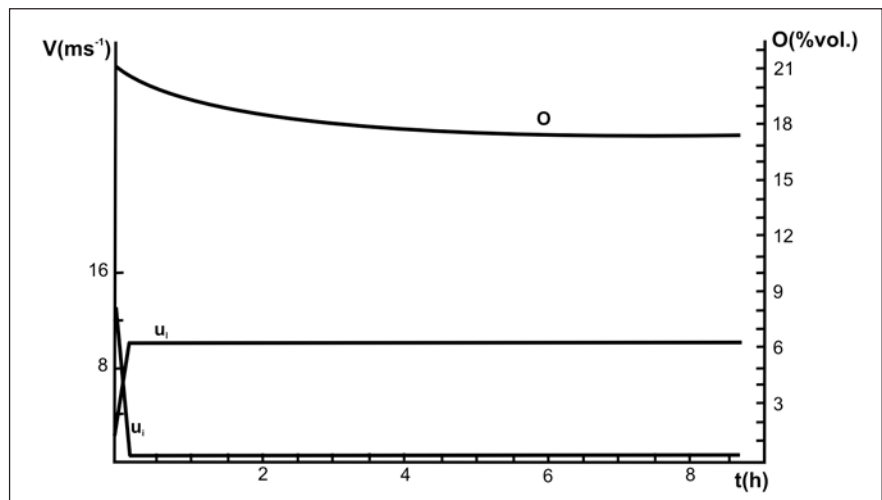


Fig. 4 - Velocidades en el inyector y en la abertura libre, y porcentaje en volumen de oxígeno para el caso 4.

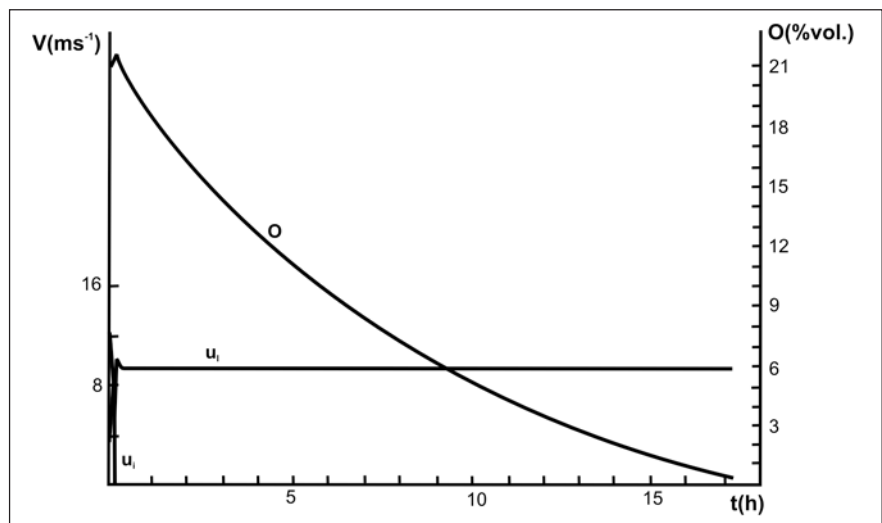


Fig. 5 - Velocidades en el inyector y en la abertura libre, y porcentaje en volumen de oxígeno para el caso 5.



ésta es comparable a la del inyector o mayor, el volumen final de oxígeno es aceptable aun cuando el caudal de entrada sea moderado (Fig. 2). Pero a medida que el tamaño de la abertura decrece, la eficacia del método simple disminuye (Figs. 4 y 5), debido al aumento de la presión y de los efectos viscosos.

Si las aberturas de entrada y salida son comparables, y se miden las velocidades finales estacionarias, el problema se simplifica ostensiblemente. Basta reemplazar las ec. (3) y (4) en la (1) y resolver ésta analíticamente. Su solución, en términos del porcentaje en volumen final de oxígeno, y teniendo en cuenta que en condiciones estacionarias los caudales de entrada y salida son iguales, es

$$\%O(vol) = 21 \left( 1 - \frac{c_v}{v_{i,s} s_{i,s}} \right) \quad (26)$$

donde  $c_v$  representa el consumo en volumen de oxígeno. Nótese que el porcentaje en volumen final de oxígeno no depende del volumen del recinto.

La (26) permite diseñar el sistema en forma muy sencilla, pero debe aplicarse con cuidado cuando las secciones de las aberturas son muy dispares. Si por ejemplo, la abertura de salida es 10 veces menor que la de entrada, la (26) sobrestima el nivel de oxígeno en 2.5%.

Debe advertirse también que, en general, el oxígeno llega el régimen estacionario después de que lo han hecho las velocidades.

Cuando la abertura libre es pequeña, dicho nivel estacionario puede demorarse mucho (Fig. 4), o no alcanzarse nunca (Fig. 5).

## 5. Conclusiones

El cálculo de longitudes de escala permite independizarse de las coordenadas espaciales, facilitando mucho el problema. Dichas longitudes de escala serán, normalmente, bastante grandes ( $O(V/s)$ ).

La exigencia legal de un caudal de entrada de 30 m<sup>3</sup> por persona y por hora es suficiente para cualquier caso práctico, sólo será insuficiente en recintos con aberturas libres muy reducidas. Sin embargo, se puede lograr una ventilación

adecuada con caudales mucho menores, si el área de las aberturas libres es adecuada.

La eficiencia del método simple cuando los caudales y aberturas libres son adecuadas, parece indicar que el método doble no se justifica, excepto, desde luego, en caso de que haya contaminantes.

Para secciones de entrada y salida comparables, el diseño y la evaluación de un sistema de ventilación es simple si se conoce el caudal de régimen estacionario (ec. (26)). Esto es particularmente útil en el método doble con turbinas iguales (Fig. 1), pues el caudal es independiente del tiempo y puede conocerse a priori.

## 6. Referencias

- Arrêté 24/03/82, modalidad de aplicación del artículo R.111.9 del "Code de la Construction et de l'Habitation", Francia.
- BURGE, S., ROBERTSON, A., HEDGE, A. The development of a questionnaire suitable for the surveillance of office buildings to assess the building symptom index a measure of the sick building syndrome. In: PROCEEDINGS OF INDOOR AIR'93, 1993, 1, p.731-736.
- CURRIE, I., *Fundamental Mechanics of Fluids*. Nueva York: Ed. McGraw-Hill, 1974.
- DECRETO 351/79, anexo I, reglamentación de la ley 19.587, República Argentina.
- DECRETO 92/2002, Diario Oficial de la Generalidad de Cataluña, Nº 3597, 18/03/2002.
- LANDAU, L., LIFSHITZ, E., *Mecánica de fluidos*. Barcelona: Ed. Reverté, 1991. 623p.
- MÉRIDA MORALES, A., NAVARRETE SÁNCHEZ, I., RUIZ BAILÉN, M., GUTIÉRREZ MUÑOZ, J. Función pulmonar y su evaluación In: CEBRIÁN, J. Gil et al. (ed.), *Principios de urgencias, emergencias y cuidados críticos*, cap. 2.1, versión electrónica, <http://tratado.uninet.edu/indice.html>, Ed. Samiuc, 2002.
- MYERS, J., BADER, D., MADHAVAN, R., FROELICHER, V. Validation of a specific activity questionnaire to estimate exercise tolerance in patients referred for exercise testing. *American Heart Journal*, n. 142, v. 6, p. 1041-1046, 2001.
- SOLÉ, M., PÉREZ, J. El síndrome del edificio enfermo: cuestionario para su detección, Barcelona, INSHT, 1991. (NTP-290).
- RISHBETH, H., GARRIOT, O. *Introduction to Ionospheric Physics*. Nueva York y Londres: Academic Press, 1969. 331p.

Artigo recebido em 04/12/2005 e aprovado em 06/07/2006.

REM - Revista Escola de Minas  
70 anos divulgando CIÊNCIA.