Comunicação Científica

Um engano matemático repetido por 100 anos

Elysio R. F. Ruggeri

Engenheiro Civil - EMOP
Furnas Centrais Elétricas S.A.
E-mail: ruggeri@furnas.com.br

Resumo

Desde a sua concepção e desenvolvimento, durante os últimos 20 a 30 anos do final do século XIX, a álgebra vetorial de Gibbs não foi bem compreendida, embora muitos a tenham considerado uma obra de arte a serviço da Física clássica. É desnecessário falar da sua utilidade. Nos últimos anos ela tem sido ampliada por uns, de diferentes modos e com diferentes propósitos, e ridicularizada por outros. Alguns físicos dizem que ela é um caso especial, embora não seja um caso particular da álgebra de Clifford que tem utilidade na Mecânica Quântica; engenheiros (como o autor) desenvolvem o Cálculo Poliádico mostrando a sua utilidade em problemas de engenharia (e, indiretamente, a sua utilidade na própria Física clássica). Nesse artigo mostro que certos argumentos não verídicos, usados para demonstrar uma "incoerência interna" da álgebra de Gibbs, vem sendo emitidos desde o início do século XX e aceitos na forma de espírito de manada, sem que seus autores saibam o que realmente se passa. Isto implica banir do Cálculo Vetorial os chamados vetores e escalares polares e axiais que, na prática, nunca foram de fato necessários. Intervém fortemente nas minhas demonstrações o conceito de sistemas de vetores recíprocos, definido por Hamilton, pouco desenvolvido por Gibbs e seus seguidores, e ligeiramente mencionado nos bons tratados de Cálculo Vetorial ao longo do século XX. Tais sistemas constituem a forma natural de se operar com bases e sistemas de referência não ortogonais. Os sistemas ortogonais são extremamente úteis em muitas situações mas nem sempre simplificam cálculos e nem sempre são oportunos.

Palavras chave: vetor, produto vetorial, álgebra de Gibbs, álgebra de Clliford.

Abstract

Since its conception and development during the last 20 or 30 years of the 19th century, Gibbs's vector system was not well understood, although people have considered it a masterpiece to formulate classical physics. It is unnecessary to emphasize its usefulness. In recent years this system has been broadened by some and ridiculed by a few others. Some physicists argue that it is a special case, though it is not a particular case of Clifford's algebra, which is useful in Quantum Mechanics. Engineers (like myself and other authors) develop the Polyadic Calculus showing its usefulness for treating engineering problems (and, indirectly, its usefulness in classical physics itself). In this paper I show that certain erroneous arguments, used to demonstrate an "internal incoherence" in Gibb's algebra, have been issued since the beginning of the 20th century and accepted in drove spirit fashion; yet, their authors lacked full understanding of the subject. This implies banishing from Vector Calculus the so-called polar and axial vectors and scalars which, in practice, were never necessary in actual fact. The concept of reciprocal vector systems intervenes strongly in my demonstrations. They have been defined by Hamilton, little developed by Gibbs and his followers, and slightly mentioned in the good works on Vector Analysis throughout the 20th century. Such systems constitute the natural form of operating with non-orthogonal bases and reference systems. The orthogonal systems are extremely useful in so many situations but not always do they simplify calculations nor are they opportune.

Keywords*: vector, vector product, Gibbs's algebra, Clliford's algebra.*

1. Pré-requisitos e notação

Vamos supor que o leitor esteja familiarizado com as idéias básicas e operações da álgebra clássica dos vetores (de Gibbs), que indicaremos por G. Os escalares desta álgebra serão representados por letras latinas maiúsculas ao natural, eventualmente indexadas à direita com índices (letras ou números) em nível superior ou inferior (U^i, U_j, V^2, ...); os vetores serão representados por letras latinas minúsculas em negrito, sem a clássica seta (**u**, **v**, ...), também eventualmente indexadas ($\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}^1$, ...).

2. Relembrando conceitos e operações

2.1 O vetor

Inicialmente vamos nos lembrar de que a entidade ***vetor*** foi concebida para ser usada na Física clássica e indiretamente na Engenharia (por Gibbs e seus seguidores [11]) no sentido de representar as grandezas vetoriais (como as forças, as velocidades etc.) que são inerentes a uma direção e a um sentido sobre essa direção. Essa entidade foi representada por uma flecha (um segmento de reta orientado) que, desenhada em uma determinada escala no espaço, tem um comprimento (o módulo do vetor, a intensidade da grandeza), uma direção e um sentido sobre esta direção (ambos característicos da grandeza que ela representa). Essa entidade é, pois, de natureza geométrica; a sua representação é real, tão concreta como um desenho. Com esses desenhos (feitos em uma escala conveniente) podemos representar as forças que atuam num corpo, as velocidades no escoamento de um líquido, as intensidades de um campo elétrico variável etc.

2.2 Operações com vetores e notações

Inicia-se a construção de uma álgebra com essas entidades definindo-se as operações de adição de vetores e a multiplicação de vetor por número real; ambas podem ser justificadas em um laboratório de física[1]. Para que ela se torne mais útil à finalidade visada, deve ser completada com a introdução de novas operações. Tais operações - as multiplicações escalar, vetorial e mista (esta, conseqüência das duas primeiras) - foram muito bem definidas utilizando-se apenas conceitos geométricos e a própria definição de vetor. Assim, o produto escalar de dois vetores **u** e **v**, denotado por **u.v**, é um escalar igual ao produto dos módulos dos vetores (|**u**| e |**v**|) pelo co-seno do ângulo que eles formam (desde que esses módulos sejam determinados com uma mesma escala); esse escalar representa quantas vezes |**v**| (um segmento de reta) deve ser tomado para se igualar ao segmento de reta (orientado) projeção ortogonal de **u** (positiva ou negativa, conforme o ângulo de **u** com **v** seja agudo ou obtuso, respectivamente) sobre o suporte de **v**. Com esse produto representamos, por exemplo, o trabalho realizado por uma força. Da mesma forma podemos caracterizar geometricamente o produto vetorial de dois vetores ordenados, **u** e **v**, denotado (por Gibbs) como **w'= u × v** . Por definição, **w'** é um vetor cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos vetores fatores pelo seno do ângulo que eles formam (logo, esse módulo é numericamente igual à área do paralelogramo construído sobre os vetores fatores, representados com uma mesma escala), cuja direção é a da normal ao plano desses vetores fatores e cujo sentido é tal que, imaginados os vetores **u**, **v** e **w'** dispostos coinicialmente, o triedro **u**, **v**, **w'** seja positivo, isto é, quando um observador com os pés em 0, com a cabeça apontando no sentido da seta de **w'** e voltado para o interior do triedro, vê o vetor **u** à sua direita e o outro, **v**, à sua esquerda. Com essa operação podemos muito bem caracterizar os momentos (de flexão e de torção) que atuam num ponto de um corpo quando este está submetido à ação de forças. Por conseqüência, o produto misto de três vetores ordenados **u**, **v** e **w**, denotado por **(uvw) = u × v . w** , é o produto escalar do produto vetorial dos dois primeiros (um vetor), pelo terceiro; esse produto é, portanto, um escalar (numericamente igual ao "volume algébrico" do paralelepípedo construído sobre os três vetores fatores, representados esses numa mesma escala).

2.3 Sistema de vetores recíprocos

Como conseqüência dessas operações surge o conceito de sistema de vetores recíprocos (na reta, no plano e no espaço), conceito pouco difundido mesmo nos cursos mais aprofundados da G, com os quais poder-se-iam evitar grandes enganos (como o que aqui apontaremos).

2.4 Vetores recíprocos na reta

Dado um vetor não nulo, **u**, no espaço (unidimensional) dos vetores paralelos a uma da reta, existe um e um só vetor desse espaço, **u***, de mesmo sentido que **u**, tal que **u.u*=1**. Tais vetores são ditos recíprocos na reta.

2.5 Vetores recíprocos no plano

Vamos orientar um plano que, conforme sabemos, tem duas faces (ou dois lados). As rotações num plano serão ditas *positivas* quando, observando-se esse plano de um dos semi-espaços que ele define, essa rotação acontece no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio (ou sentido trigonométrico). Assim, o ângulo de dois vetores ordenados **u** e **v** - isto é, o ângulo menor que πrd de que se deve girar **u** para fazer o seu suporte coincidir com o suporte de **v** - é positivo ou negativo se a rotação de u é positiva ou negativa, respectivamente. Se, de um certo semi-espaço de observação, o ângulo de dois vetores (ordenados) é positivo, do outro semi-espaço ele é negativo. Essa orientação não se aplica, evidentemente, à superfície de Möebius que só tem uma face.

[1] Essas operações são tão antigas quanto as embarcações; intuitivamente os antigos já as utilizavam para mover seus barcos.

Dados dois vetores ordenados e não paralelos, **u** e **v**, no espaço (bidimensional) dos vetores paralelos a um plano, podemos provar que existe nesse espaço um e apenas um par de vetores, **u*** e **v***, também não paralelos, tais que, **u.u* = 1= v.v*** e **u.v* = 0 = v.u***. Isto significa que **u*** é ortogonal a **v**, que **v*** é ortogonal a u e que os vetores dos pares homólogos (**u***, **u**) e (**v***, **v**) fazem entre si ângulos agudos de módulo igual ao complemento do ângulo definido por **u** e **v**. Os pares (**u**, **v**) e (**u***, **v***) são ditos recíprocos no plano, Se, por exemplo, o ângulo de **u** com **v** for positivo obtuso os ângulos dos pares homólogos (agudos) serão positivos; se aquele ângulo for negativo obtuso, o ângulo de **u** com **u*** será negativo e o de **v** com **v***, positivo etc. É fácil comprovar-se que

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})}{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}^* = \frac{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{u}}{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2}$$

2.6 Vetores recíprocos no espaço[2]

Dados três vetores ordenados não coplanares, **u**, **v** e **w** (logo, vetores do espaço tridimensional), podemos provar que existe nesse espaço um e apenas um terno ordenado de vetores não coplanares, **u***, **v*** e **w***, tais que,

u.u* = 1 = v.v* = w.w* e

$$\mathbf{u.v^* = 0 = u.w^* = v.u^* = v.w^* = w.u^* = w.v^*} \qquad (01)$$

Isto significa que **u*** é ortogonal ao plano definido pelo par (**v**,**w**), logo, paralelo ao vetor **v×w** e, devendo satisfazer a **u.u*=1** (logo, fazendo um ângulo agudo com **u**), dever ser **u*= v×w(uvw)**. Com permutação circular das letras podemos escrever as demais expressões, a saber:

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{(\mathbf{uvw})}, \quad \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{w}\times\mathbf{u}}{(\mathbf{uvw})} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{(\mathbf{uvw})} \qquad (02)$$

É fácil ver que, ao contrário da situação anterior, se fossem dados **u***, **v*** e **w***, seria,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}^*\times\mathbf{w}^*}{(\mathbf{u}^*\mathbf{v}^*\mathbf{w}^*)}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}^*\times\mathbf{u}^*}{(\mathbf{u}^*\mathbf{v}^*\mathbf{w}^*)} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}^*\times\mathbf{u}^*}{(\mathbf{u}^*\mathbf{v}^*\mathbf{w}^*)} \qquad (03)$$

É fácil verificar que as (02) e as (03) satisfazem os requisitos do teorema, bem como comprovar que:

$$\mathbf{(uvw) = (u^*v^*w^*) = 1} \qquad (04)$$

Os ternos (**u**, **v**, **w**) e (**u***, **v***, **w***) são ditos recíprocos no espaço; os pares (**u**, **u***), (**v**, **v***) e (**w**, **w***) e são ditos homólogos.

2.7 Inversão dos vetores

É importante notar que, em qualquer um dos espaços (uni, bi ou tridimensional), invertendo-se os sentidos dos vetores ordenados dados, o novo conjunto é de "paridade" (sinal) diferente do anterior. No espaço tridimensional, por exemplo, o observador com os pés em 0 e cabeça disposta no sentido de **-w** e voltado para o interior do triedro veria **-v** à sua direita (não mais **-u**). Mas esse segundo terno não tem nada a ver com o primeiro; apenas podemos dizer que têm sinais diferentes. Nesse caso, o produto misto dos vetores ordenados do segundo par tem sinal contrário ao do produto misto do primeiro. Mas o sistema recíproco desse segundo terno, construído a rigor conforme a definição dada, continuará existindo, não sendo difícil concluir que {**-u**, **-v**, **-w**} e {**-u***, **-v***, **-w***} são sistemas recíprocos e que, ainda, se verificam as fórmulas correspondentes a (01) e (04).

2.8 O modo euclidiano

Como se pode ver, os sistemas recíprocos de vetores (na reta, no plano ou no espaço), na álgebra simples de Gibbs, existem independentemente dos nossos desejos e de qualquer outra coisa; são meras concepções geométricas criadas para utilização na física clássica. Com essa álgebra, verifica-se, é possível adentrar os domínios da geometria elementar, fazer aplicações e até usar essa álgebra como ferramenta de pesquisa; podemos, mesmo, por caminho idêntico, desenvolver a análise vetorial. Darei a esse estilo de exposição o nome "*modo euclidiano*". Para as finalidades propostas, pouco importa se esse estilo apresenta "simetria", elegância, ou coisa que o valha. Não vejo, também, nenhum motivo especial para considerar como defeito o fato do produto vetorial de dois vetores não ser coplanar com esses vetores, mesmo porque, dentro das hipóteses admitidas, os problemas planos e lineares que inventamos são apenas "aproximações" da realidade tridimensional.

3. Introduzindo bases e coordenadas cartesianas

Doravante, principalmente para evitar delongas, vamos operar no espaço tridimensional; mas, quando cabível, todos os conceitos emitidos podem ser repassados aos espaços uni e bidimensionais.

Poderíamos, logo no início da construção da G, após a introdução das operações de adição e de multiplicação de vetor por número real e antes de definir os produtos com dois e três vetores, associar bases vetoriais aos eixos coordenados da veterana Geometria Analítica (naquelas alturas do estabelecimento do CV, já com os seus 250 anos); com isso, daríamos aos vetores uma "representação cartesiana" numa dada base. Não existe inconveniente na introdução desse "vírus" cartesiano, embora possa gerar algum perigo de confusões. Entretanto, a introdução desses conceitos (cartesianos) após a definição dos produtos e a criação dos sistemas de vetores recíprocos, além de salientar a natureza e a origem, estritamente geométricos, do vetor e das operações com vetores, permite

[2] O tema foi desenvolvido por Gibbs ([11], Chapter II, Art. 43) mas já teria sido considerado por Hamilton.

mostrar a sua utilidade também em Geometria Analítica. Nesta seqüência eu daria ao novo estilo de desenvolvimento da G o nome de "modo cartesiano". Na prática da Engenharia e da Física, entretanto, onde impera a necessidade das *medições* das grandezas, o modo cartesiano parece ser insubstituível.

Devo reconhecer que a G tem seus limites de aplicação, o que não é nenhum absurdo. Para torná-la mais possante, não só na Física como também na Geometria Euclidiana (Elementar, Analítica e Projetiva) devemos acrescentar-lhe novos conceitos (ainda dentro da mesma linha melódica, mas além dos escalares e vetores), como o de poliádicos, operações com poliádicos etc.; daí em diante eu daria a ambos os estilos de desenvolvimento os nomes de "modo euclidiano forte" e "modo cartesiano forte" apenas para salientar a presença de uma geometria multidimensional (o espaço de um poliádico de valência H, para H=0 (escalar), 1 (vetor), 2 (diádico), 3, ..., tem 3^H dimensões).

No modo cartesiano, a índole do Cálculo Vetorial sugere a indexação das letras (escalares e vetores). Os eixos de um sistema cartesiano de coordenadas, de origem O, são denotados por uma letra qualquer indexada, digamos X^1, X^2, X^3. A cada um desses eixos acoplamos um "vetor de base"; estes têm módulos finitos e são geralmente representados por $\{\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, o vetor $\mathbf{e}_j$ servindo para referir vetores paralelos ao eixo de índice j. É prudente (apenas por costume), mas não é absolutamente necessária, a adoção de "sistemas positivos" com os quais dizemos ter *orientado positivamente* o espaço, de acordo com a "regra do observador" (já exposta). A base vetorial é, então, conseqüentemente, dita positiva e, de uma vez por todas, *nada tem a ver com os ternos de vetores que poderão aparecer nos problemas (físicos ou geométricos) a serem estudados em relação a esse sistema.*

Os vetores recíprocos da base vetorial são, então, de acordo com as concepções geométricas emitidas,

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)},\quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)} \qquad (05)$$

e suas inversas,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{(\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)},\quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{(\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{(\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)} \qquad (05_1)$$

Aos vetores (05) corresponde um novo sistema de coordenadas que será dito *recíproco* do anterior, devendo ser construído com a mesma escala do anterior. As bases vetoriais $\{\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{e}^1$ $\mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ serão ditas doravante bases recíprocas; para elas são válidos todos os conceitos já emitidos sobre sistemas recíprocos, particularmente as fórmulas correspondentes a (01) e (04),

$$\mathbf{e}_1.\mathbf{e}^1 = \mathbf{1} = \mathbf{e}_2.\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_3.\mathbf{e}^3$$

$$\mathbf{e}_1.\mathbf{e}^2 = \mathbf{0} = \mathbf{e}_1.\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_2.\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_2.\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_3.\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_3.\mathbf{e}^2 \qquad (06)$$

e

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3) = \mathbf{1} \qquad (07)$$

Interessa observar que uma inversão de sentido nos eixos e nos vetores do sistema torna negativo o novo sistema; o que, evidentemente, significa apenas orientar negativamente o espaço. Orientar o espaço é uma mera questão de escolha; bases recíprocas positivas e negativas são equivalentes. O que deve ser evitado, para não se tirarem conclusões errôneas, é o desenvolvimento não avisado de cálculos envolvendo bases de diferentes "sinais" quando do estudo de um mesmo problema.

3.1 As representações dos vetores no contexto cartesiano

Isto posto, vamos considerar que, em relação à base qualquer, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, não ortonormada, que, digamos, orienta positivamente o espaço, um vetor qualquer, **v**, pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores dessa base, pois esses vetores geram os vetores do espaço. Denotando por V^j (j=1,2,3) o escalar dessa combinação relativo ao eixo X^j, ou ao vetor de base $\mathbf{e}_j$, podemos escrever $\mathbf{v} = V^1\mathbf{e}_1 + V^2\mathbf{e}_2 + V^3\mathbf{e}_3$ que, sinteticamente, representamos por

$$\mathbf{v} = V^j\mathbf{e}_j, \text{ (soma em j, para j = 1,2,3)} \qquad (08)$$

Se, por exemplo, multiplicarmos escalarmente ambos os membros de (08) por $\mathbf{e}^1$ obteremos, aplicando as relações (03), $V^1 = \mathbf{v}.\mathbf{e}^1$; genericamente:

$$V^1 = \mathbf{v}.\mathbf{e}^1, \text{ para i = 1,2,3} \qquad (09)$$

Por (09), conforme interpretação geométrica já feita do produto escalar, vemos que Vi representa quantas vezes $|\mathbf{e}^i|$ (o módulo de um vetor da base recíproca, que é um segmento de reta) deve ser tomado para se igualar ao segmento de reta (orientado) projeção ortogonal de **v** (positiva ou negativa, conforme o ângulo de **v** com $\mathbf{e}^i$ seja agudo ou obtuso, respectivamente) sobre o suporte de $\mathbf{e}^i$. Os escalares V^i são, pois, as *coordenadas* da extremidade de **v** em relação à base positiva $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, isto é, quando se tomam os módulos dos vetores dessa base como unidade de medida de distância nas respectivas direções; essas coordenadas são denominadas *contravariantes*. Esse conceito generaliza o conceito elementar de coordenada quando a base positiva é formada pelos clássicos unitários ortogonais que representaremos por $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$.

Considerando que o mesmo raciocínio pode ser aplicado em relação à base recíproca (que também orienta o espaço positivamente), podemos escrever, de uma forma geral,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}.\mathbf{e}_j)\mathbf{e}^j = (\mathbf{v}.\mathbf{e}^j)\mathbf{e}_j, \text{ (j=1,2,3)} \qquad (10)$$

As coordenadas $V_j = \mathbf{v}.\mathbf{e}_j$, que podem ser interpretadas geometricamente tal como as anteriores; são denominadas coordenadas *covariantes* de **v**. Quando a base a que se refere um vetor é ortonormada, como a representada pelo terno $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, as coordenadas contravariantes e covariantes de um vetor se confundem (porque os sistemas recíprocos se confundem), desaparecendo, pois, a diferença entre elas.

3.2 Os vetores não dependem de bases

A Figura 1 mostra de forma evidente e intuitiva que se um vetor tem certas coordenadas em relação ao sistema ortogonal de coordenadas com vetores de base (positiva) $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, em relação ao sistema de coordenadas oposto do primeiro, com vetores de base $\{-\hat{\mathbf{i}}, -\hat{\mathbf{j}}, -\hat{\mathbf{k}}\}$ (logo, uma base negativa), terá coordenadas com sinais contrários aos da primeira representação. Assim, se em relação à base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ é $\mathbf{v} = V^1\hat{\mathbf{i}} + V^2\hat{\mathbf{j}} + V^3\hat{\mathbf{k}}$, em relação à base $\{-\hat{\mathbf{i}}, -\hat{\mathbf{j}}, -\hat{\mathbf{k}}\}$ será, $\mathbf{v}' = (-V^1)(-\hat{\mathbf{i}}) + (-V^2)(-\hat{\mathbf{j}}) + (-V^3)(-\hat{\mathbf{k}})$, ou seja, $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v}$.

Em relação a bases quaisquer as coisas se passam do mesmo modo. As decomposições cartesianas (10) foram consideradas relativas a uma base positiva. Em relação à base negativa $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$, cuja recíproca é, como visto, $\{-\mathbf{e}^1, -\mathbf{e}^2, -\mathbf{e}^3\}$, escrevemos, também,

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}.(-\mathbf{e}_j)]\,(-\mathbf{e}^j) = [\mathbf{v}.(-\mathbf{e}^j)]\,(-\mathbf{e}_j)\ , (j=1,2,3) \qquad (10_1).$$

Então, nesse novo sistema, as novas coordenadas são opostas das primeiras; ademais, como os vetores de base também são opostos dos primeiros, as representações cartesianas (10) e (10_1) são idênticas. Nem podia ser diferente: o vetor **v** tem natureza independente das bases escolhidas no espaço e seus sinais. Vale observar:

1) - trabalhar com bases, todas de um mesmo sinal, não é o mesmo que trabalhar com bases de sinais contrários.

2) - a simples inversão dos sentidos de eixos e de vetores de base não muda o sentido dos vetores do espaço.

4. Os produtos vetorial e misto no contexto cartesiano

Vou provar, agora, que a expressão cartesiana do produto vetorial $\mathbf{w}' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, em termos das coordenadas cartesianas (contravariantes e covariantes) dos vetores, é o mesmo seja a base adotada a positiva $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ou a negativa $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$. Alem de **v**, dado por (10), consideremos também:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}.\mathbf{e}^i)\mathbf{e}_i = (\mathbf{u}.\mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}^i\ , \text{(soma para i =1,2,3)} \qquad (11)$$

Pelas representações indicadas nos dois primeiros membros de (10) e (11) tem-se, considerando a propriedade distributiva da multiplicação vetorial em relação à adição de vetores:

$$\mathbf{w}' = (\mathbf{u}.\mathbf{e}^i)\,(\mathbf{v}.\mathbf{e}^j)\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \text{ (somas em i e em j)} \qquad (12)$$

Efetuando-se as somas indicadas em (12), e usando as expressões (05), comprovamos que **w'** pode também ser escrito na forma (clássica) do seguinte pseudodeterminante:

$$\mathbf{w}' = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ \mathbf{u}.\mathbf{e}^1 & \mathbf{u}.\mathbf{e}^2 & \mathbf{u}.\mathbf{e}^3 \\ \mathbf{v}.\mathbf{e}^1 & \mathbf{v}.\mathbf{e}^2 & \mathbf{v}.\mathbf{e}^3 \end{vmatrix} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ U^1 & U^2 & U^3 \\ V^1 & V^2 & V^3 \end{vmatrix} \qquad (12_1)$$

Se usássemos o primeiro e o terceiro membros de (10) e (11) escreveríamos, ainda,

$$\mathbf{w}' = (\mathbf{u}.\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{v}.\mathbf{e}_j)\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j \text{ (somas em i e em j)} \qquad (13)$$

e, por justificativa idêntica à utilizada para a dedução de (12_1), usando agora as fórmulas (05_1),

$$\mathbf{w}' = (\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}.\mathbf{e}_1 & \mathbf{u}.\mathbf{e}_2 & \mathbf{u}.\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}.\mathbf{e}_1 & \mathbf{v}.\mathbf{e}_2 & \mathbf{v}.\mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \qquad (13_1)$$

Com base nas fórmulas (12), (12_1), (13) e (13_1) podemos demonstrar imediatamente que, para quaisquer vetores **u**, **v** e **w**,

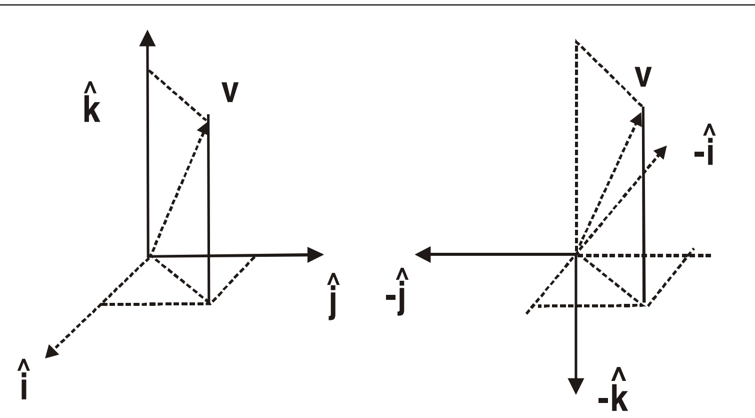
$$(\mathbf{uvw}) = (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)\,(\mathbf{u}.\mathbf{e}^i)\,(\mathbf{v}.\mathbf{e}^j)\,(\mathbf{w}.\mathbf{e}^k) \text{ (somas em i, em j e em k)} \qquad (14)$$

ou

$$(\mathbf{uvw}) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\begin{vmatrix} \mathbf{u}.\mathbf{e}^1 & \mathbf{u}.\mathbf{e}^2 & \mathbf{u}.\mathbf{e}^3 \\ \mathbf{v}.\mathbf{e}^1 & \mathbf{v}.\mathbf{e}^2 & \mathbf{v}.\mathbf{e}^3 \\ \mathbf{w}.\mathbf{e}^1 & \mathbf{w}.\mathbf{e}^2 & \mathbf{w}.\mathbf{e}^3 \end{vmatrix} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\begin{vmatrix} U^1 & U^2 & U^3 \\ V^1 & V^2 & V^3 \\ W^1 & W^2 & W^3 \end{vmatrix} \qquad (14_1)$$

e

$$(\mathbf{uvw}) = (\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k)\,(\mathbf{u}.\mathbf{e}_i)\,(\mathbf{v}.\mathbf{e}_j)\,(\mathbf{w}.\mathbf{e}_k) \text{ (somas em i, em j e em k)} \qquad (15),$$



A figura ilustra, intuitiva e claramente, que são escalares opostos as coordenadas de um vetor relativas a bases vetoriais opostas.

ou

$$(\mathbf{uvw}) = (\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)\begin{vmatrix} \mathbf{u}.\mathbf{e}_1 & \mathbf{u}.\mathbf{e}_2 & \mathbf{u}.\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}.\mathbf{e}_1 & \mathbf{v}.\mathbf{e}_2 & \mathbf{v}.\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{w}.\mathbf{e}_1 & \mathbf{w}.\mathbf{e}_2 & \mathbf{w}.\mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} \quad (15_1).$$

Pelas fórmulas (12), (12_1), ou (13) e (13_1), e (14), (14_1) ou (15) e (15_1), vemos que a inversão nos vetores da base {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$} deixa invariáveis os produtos vetorial e misto, pois o produto misto externo (dos vetores de base) e os determinantes trocam de sinal simultaneamente (os determinantes trocam de sinal porque cada uma de suas linhas troca de sinal). Então,

O fato do produto misto dos vetores de base trocar de sinal na reversão não implica que produtos vetoriais e mistos quaisquer devam necessariamente trocar de sinal; essas entidades são os verdadeiros vetores e escalares, pois independem de bases.

Para o caso particular de base ortonormada, os determinantes (12_1) e (13_1) seriam idênticos, e teríamos:

$$\mathbf{w}' = (\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}})\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{u}.\hat{\mathbf{i}} & \mathbf{u}.\hat{\mathbf{j}} & \mathbf{u}.\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v}.\hat{\mathbf{i}} & \mathbf{v}.\hat{\mathbf{j}} & \mathbf{v}.\hat{\mathbf{k}} \end{vmatrix} = (\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}})\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ U^1 & U^2 & U^3 \\ V^1 & V^2 & V^3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

expressões em que se dispensam inclusive a indicação do produto misto $(\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}})$ posto que, se a base é direta, $(\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}}) = 1$. As fórmulas particulares correspondentes a (14), (141), podem ser deduzidas imediatamente; essas se confundem com as particulares relativas a (15) e (15_1), sendo:

$$(\mathbf{wvu}) = (\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}})\begin{vmatrix} \mathbf{u}.\hat{\mathbf{i}} & \mathbf{u}.\hat{\mathbf{j}} & \mathbf{u}.\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v}.\hat{\mathbf{i}} & \mathbf{v}.\hat{\mathbf{j}} & \mathbf{v}.\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{w}.\hat{\mathbf{i}} & \mathbf{w}.\hat{\mathbf{j}} & \mathbf{w}.\hat{\mathbf{k}} \end{vmatrix} = (\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}})\begin{vmatrix} U^1 & U^2 & U^3 \\ V^1 & V^2 & V^3 \\ W^1 & W^2 & W^3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

As mesmas considerações anteriores devem ser feitas quando o espaço é referido a uma base ortonormada negativa. Assim,

O grande engano que vínhamos cometendo durante os últimos 100 anos - dizendo que os produtos vetorial e misto trocam de sinal quando calculados com representações cartesianas dos vetores fatores relativas a bases opostas (de sinais contrários) - está em considerar as inoportunas bases ortonormadas e os correspondentes produtos nas formas particulares (16) e (17), ***simplesmente desconhecendo-se a existência do fator*** $(\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}})$ *que, quando a base é negativa, vale -1.*

5. Reflexões

É bem provável que o desconhecimento dos conceitos atrás expostos - bases recíprocas e expressões cartesianas de produtos - tenha incitado Vaz [10] a afirmar que a G "apresenta incoerências internas", ou que "o erro presente no sistema de Gibbs ...", ou que a adoção do sistema vetorial de Gibbs "foi uma grande infelicidade para a Física, sobretudo com o advento da Mecânica Quântica", e outras grosserias mais, expressas nos termos insensatos "a álgebra vetorial de Gibbs nada mais é que um apanhado de conceitos disfarçado sobre o manto de uma notação falaciosa". É preciso, com cautela e cortesia, fazer com que os alunos entendam que essa álgebra pode ser substituída por uma outra - que parece ser aplicável em toda a Física [3] - concebida por Clifford, contemporâneo de Gibbs, por volta de 1876. Eu não saberia dizer nesse instante qual o preço que os "clientes" pagariam por isso, pois, para tal, seria necessário, sobretudo, estudar os trabalhos de D. Hestenes que, recentemente (há cerca de 30 anos), parece ter resgatado os trabalhos de Clifford e mostrado a utilidade de sua álgebra dissertando sobre temas espetaculares [4].

Entendo que os conceitos expostos mostram que a álgebra de Gibbs apresenta coerência e até muita estética, embora, eventualmente, nem todos concordem com isso. Na Cristalografia, onde o sistema natural de referência é formado com os eixos cristalográficos do cristal, as bases não ortonormadas, ou melhor, os sistemas recíprocos de vetores, são usados amiúde, com vantagens, e os sentidos dos eixos não têm um sentido pré-fixado. A Engenharia tem dado testemunho dessa coerência, por exemplo, quando calcula, com o produto vetorial, os momentos solicitantes de flexão e de torção para efeito de dimensionamento das partes de uma estrutura - seja esta de uma edificação, de uma aeronave, de uma embarcação etc. - independentemente de sistemas de coordenadas (todos de mesmo sinal). Será que existe alguma "incoerência" na Geometria Diferencial usada na prática da Engenharia onde os conceitos vetoriais (os produtos vetorial e misto, em particular) são usados de forma intensa? Não interessa às engenharias em geral saber se o produto vetorial de dois vetores é útil ou não na MQ apenas porque este é um problema da MQ. Entretanto, não obstante a indiscutível praticidade do Cálculo Vetorial (CV), especialmente em Mecânica Clássica (Racional), Hestenes sugere bases matemáticas unificadas para o desenvolvimento dessa mesma Mecânica [5] e da MQ! Isso pode ter a sua relevância para os físicos, mas terá igualmente para os engenheiros? Tenho certeza que os engenheiros apenas aceitarão um cálculo mais simples que o de Gibbs.

Pode acontecer, eventualmente, para certas necessidades da Física moderna, na Mecânica Quântica em particular, que a álgebra de Gibbs deixe algo a desejar. Se isso é verídico, espero que não seja apenas por causa dos argumentos infundados apresentados por Vaz. Descobri que uma reconhecida autoridade, há quase 100 anos passados [6] - o respeitado e sempre admirado geômetra F. Klein - depois de definir o "produto externo", diz que esse vetor e os vetores fatores devem ser "dispuestos del mismo modo que los ejes x, y, z ..., pero no debe olvidarse em ningún caso, que esta definicion depende esencialmente de la disposicion de los ejes y de la unidad elegida"[3]; o que me desaponta intensamente! O comporta-

[3]KLEIN, o. c., volume II (Geometria), Capítulo I, seção IV, p. 70.

mento dos sucessores, durante todo esse período, foi algo impróprio dos matemáticos, pois a busca da verdade é incompatível com o espírito de manada.

Para os matemáticos a álgebra de Gibbs pode ser, eventualmente, restrita e defeituosa; pode até ter aparecido alguma outra teoria mais bem apanhada para substituí-la. É muito comum o aproveitamento, para a vida real, das criações de alguns matemáticos geniais, embora o filósofo diga que é profana toda a matemática assim aproveitável... como, talvez, os trabalhos de Hamilton (Quatérnios) e Grassmann (Teoria da Extensão). Desses dois trabalhos parece que Gibbs retirou as idéias fundamentais para constituir o seu sistema vetorial [2], que se adaptaria muito bem à Física da sua época (quando a Mecânica Quântica ainda não havia nascido). Entretanto, ele declarou que não estava "concious that Grassmann exerted any particular influence on my Vector Analysis ..." porque ele já vinha há muito tempo trabalhando no sistema antes de adquirir familiaridade (provavelmente a partir de 1877[4]) com os trabalhos de Grassmann (notar que ele não mencionou Hamilton). Parece que o trabalho de Clifford [1] - que Vaz quer entender "mais geral" que o de Gibbs, embora não o tenha como um caso particular porque as suas concepções têm outras origens - foi uma adaptação inteligente do trabalho de Grassmann.

Não cabe mais discutir a natureza vetorial de um produto vetorial, nem tão pouco a natureza escalar do produto misto; isso ficou patente já por volta de 1880. Na concepção do Cálculo Tensorial (CT - mais jovem que o CV), os vetores são tensores particulares, os chamados *tensores cartesianos* (aquelas entidades que se comportam de um modo específico com uma transformação linear de variáveis). No Cálculo Poliádico (CP) [8], os tensores cartesianos (diádicos, triádicos...) aparecem de uma forma tão natural quanto a forma com que o vetor aparece no CV (de saída eles já são invariantes). Devo mencionar que, no CP, onde o *diádico unidade* é denotado por $\mathbf{I}$, a operação $\mathbf{u}\times$ sobre um vetor $\mathbf{v}$ é equivalente à operação (sobre esse mesmo vetor) de multiplicação pontuada (ou escalar) de um *diádico anti-simétrico* $\mathrm{I}\times\mathbf{u} = \mathbf{u}\times\mathrm{I}$ (cujo vetor é -2$\mathbf{u}$), valendo, pois, a seguinte expressão: $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times\mathbf{I}.\mathbf{v}$.

O engano mencionado dos nossos antepassados - que apenas agora vim a descobrir - implica em banir da centenária álgebra vetorial de Gibbs os conceitos de *vetor polar* e *vetor axial* os quais, de fato, até hoje, na prática do CV, nunca se mostraram necessários.

Tudo o que foi dito e comprovado aqui não significa, em absoluto, que as aspirações de Hestenes (de uma nova matemática para a Física) não possam ser alcançadas. Isso não deve significar também, por outro lado, que se deva impor aos estudantes de engenharia, por exemplo, - talvez os maiores clientes dos físicos e dos matemáticos - o estudo de teorias mais gerais, geralmente abstratas (como a Álgebra Linear), porque são belas, simétricas, fechadas para essa ou aquela operação e coisas tais. A história mostra que seguiremos sempre o caminho "mais barato" para a solução dos nossos problemas. O CV, enquanto solucionar os problemas técnicos da boa engenharia e da física da qual a engenharia necessita, será eternamente utilizado. Não será a álgebra de Clifford - com seus conceitos abstratos espetaculares - que irá substituir o CV porque, embora este possa ter mil defeitos de ordem estética, aquela pode estar muito alem das necessidades da Engenharia. É bem possível que na feirinha da esquina não seja necessário mais que conhecimentos de números racionais para fechar negócios. De que valeria um conhecimento de números transcendentes em assuntos daquela natureza? É importante que os físicos e matemáticos entendam isso e que não culpem o velho físico J. W. Gibbs por sua "travessura".

Gibbs teve tanto sucesso com a sua álgebra que, passados mais de 100 anos de sua criação, ela ainda persiste matematicamente firme, livre de "incoerências", simples, prática e sem as abstrações exageradas normalmente repelidas pela Engenharia. Outras concepções deste físico genial - já considerado a cabeça mais inteligente gerada nos Estados Unidos - certamente serão ainda, no futuro, melhor entendidas pelos mortais comuns.

Precisamente após a morte de Gibbs (1903) iniciava-se na Física uma revolução de idéias e concepções. Ele mesmo iniciou essa revolução com a Mecânica Estatística. A lei de Planck da MQ, por exemplo, é de 1901 e por essa época o jovem Einstein já se debatia com as idéias de Planck. Parece que o CT já estava bem estruturado, embora não fosse do domínio dos físicos em geral. A Geometria de Riemann já estava formulada há cerca de 40 ou 50 anos aguardando que Einstein (e Grossman), juntando-a com o CT, produzisse uma Relatividade Geral em 1916 para completar a sua Relatividade Especial de 1905. A partir de 1901 também se desenvolveu a MQ, entrando em cena, Bohr e outros ilustres. Gibbs foi tão grande e o seu sistema vetorial tão eficiente que pode ter inibido por décadas o pensamento dos físicos matemáticos no tocante à procura da ferramenta matemática adequada para a MQ. Enquanto tudo isso acontecia, o CV, por simples e prático que era, firmou-se espetacularmente entre os físicos e, notadamente, entre os engenheiros. Toneladas de papéis foram certamente consumidas em sua divulgação (nos últimos 100 anos) e provavelmente outras toneladas de neurônio foram economizadas pelos cérebros dos seus usuários. Todos os métodos e cálculos dentro da prática da boa engenharia, apoiados no CV, redundaram em realizações felizes, econômicas e claras.

Um problema relevante, entretanto, massacrava a ainda massacra pensadores da alta física: a teoria unificada dos campos. A MQ e a Relatividade Geral (RG) ainda não se beijam. Matemáticas diferentes para expressar uma e outra seriam, eventualmente, uma das causas da separação? Qual a relação entre a álgebra de Clifford e o CT usado na RG? Parece que Hestenes obteve a resposta há 40 anos. Entre nós, estudos, discussão e divulgação desses assuntos parece estarem bem difundidos por um grupo de Matemática Aplicada da Unicamp envolvendo os nomes de Waldir A. Rodrigues Jr., Jayme Vaz Jr., Stefano De Leo, Q. A. G. de Souza, P. Lounesto e outros.

---

[4] CROWE, o. c., p. 154.

O CP, em particular, vem sendo estudado e desenvolvido desde data distante não só por mim (desde quando eu ainda era aluno de engenharia), mas também por Moreira [10] e por Sielawa [11]. O CP teve a sua origem com o próprio Gibbs que criou o diádico quando da formulação da sua "Vector Analysis". Gibbs foi conceitualmente apedrejado pelos quaternionistas (Tait atirou-lhe as pedras mais pesadas!) não só pelo sistema vetorial em desenvolvimento - um "hermaphrodite monster"[5], em visível oposição ao sistema quaternionista - como pela criação dos diádicos, pelos novos operadores (Newtoniano, Mawueliano, Potencial ...), nomenclaturas, notações etc.. Saibam todos os leitores dessa Revista educativa que, na Física clássica e na Engenharia, a utilidade do CP é bem maior que a apresentada pelo CT. Entretanto, na Relatividade Especial, ou na Geral, o CP não tem utilidade; nestas searas, das altas velocidades e dos campos gravitacionais intensos, não se verifica a geometria euclidiana.

Em resumo:

Tal como não devemos responsabilizar a estatura intelectual de Aristóteles pelo atraso de quase dois mil anos no desenvolvimento das ciências exatas (apenas retomado no início do renascimento), não devemos também culpar Gibbs pelo atraso na matemática da MQ. Estaturas intelectuais são substituíveis, como o demonstrou Galileo... e, quem sabe, mais modestamente, ... Clifford e Hestenes. O mínimo que devemos fazer é ovacionar esses nomes..., com um cântico entoado pela alma.

6. Referências Bibliográficas

01. CLIFFORD, W. K. Amer. J. Math. **1**, p. 350-358, 1878.
02. CROWE, M. J. ***A History of Vector Analysis*** (The Evolution of the Idea of a Vectorial System), Dover Publications, 1985.
03. HESTENES, D. Am. J. Phys. 70, (2002).
04. HESTENES, D. Acta Applicandae Mathematicae, 23, p. 25-63 (1991); Acta Applicandae Mathematicae, 23, p. 65-93, 1991.
05. HESTENES, D. ***New Foundations for Classical Mechanics***, Kluwer, Dordrecht/ Boston, 2ª edição, 1999.
06. KLEIN, F. ***Matematica Elemental desde um punto de vista superior***, Biblioteca Matemática, Nuevas Gráficas, Madrid, sem data; o prólogo é de 1908.
07. MOREIRA, L. C. de A. REM - Revista Escola de Minas, XXV, n. 2 e 3, 1966.
08. RUGGERI, E. R. F. ***Fundamentals of Polyadic Calculus***, em preparação.
09. SIELAWA, J. T. ***Métodos Matemáticos da Mecânica do Contínuo***, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1977.
10. VAZ Jr., J. Ver. Bras. Ens. Fis., 19, n. 2, 1997.
11. WILSON, E. B. ***Vector Analysis*** (Founded upon the lectures of J. W. Gibbs), Yale Bicentenial Publications, Yale University Press, 1901.

Artigo recebido em 17/05/2003 e aprovado em 15/09/2003.

[5] CROWE, o. c., Chapter SIX, p. 185.