

# The influence of deck flexibility on the dynamic response of road bridges

## *A influência da flexibilidade do tabuleiro na resposta dinâmica de pontes rodoviárias curvas*

E. P. SCHMIDT <sup>a</sup>  
erikaschmidt37@gmail.com

C. E. N. MAZZILLI <sup>a</sup>  
cenmazzi@usp.br

### Abstract

A simplified methodology is proposed for the dynamic analysis of curved road bridges under the effect of a 3C class heavy vehicle. The dynamic models of both vehicle and bridge are considered to be uncoupled, being bound by the interaction forces. These forces come from the vehicle dynamic analysis, initially under rigid deck, subjected to a support excitation caused by the pavement geometric irregularities. Such forces are statically condensed in the vehicle centre of gravity and applied to a simplified structural model (unifilar) of a curved bridge with box girder section, considering the bridge superelevation. The influence of the rigid deck hypothesis on the dynamic response is assessed by an iterative procedure, in which the deck displacements are added to the pavement irregularities, to obtain an "equivalent irregularity" function. The new interaction forces are re-applied to the bridge model to determine new displacements, repeating the procedure until the results converge.

**Keywords:** dynamic analysis, curved road bridges, geometric irregularities.

### Resumo

Uma metodologia simplificada é proposta para a análise dinâmica de pontes curvas sob o efeito de um veículo pesado classe 3C. Os modelos dinâmicos do veículo e da ponte são considerados separadamente, sendo vinculados pelas forças de interação. Essas forças são provenientes da análise dinâmica do veículo, inicialmente sobre tabuleiro rígido, submetido a uma excitação de suporte causada pelas irregularidades geométricas do pavimento. Tais forças são condensadas no centro de gravidade do veículo e aplicadas em um modelo estrutural simplificado (unifilar) de uma ponte em seção celular, considerando-se a superelevação da ponte. A influência da hipótese de tabuleiro rígido na resposta dinâmica é avaliada utilizando-se um procedimento iterativo, no qual se somam os deslocamentos do tabuleiro à irregularidade do pavimento, para se obter uma função de "irregularidade equivalente". As novas forças de interação são reaplicadas no modelo da ponte para determinar novos deslocamentos, repetindo-se o processo até a convergência dos resultados.

**Palavras-chave:** análise dinâmica, pontes rodoviárias curvas, irregularidades geométricas.

<sup>a</sup> Polytechnic School, Department of Structural and Geotechnical Engineering, University of São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

## 1. Introdução

As pontes rodoviárias são elementos importantes da infraestrutura de um país, influenciando seu desenvolvimento socioeconômico associado ao transporte rodoviário, especialmente nos países com deficiência de outro tipo de transporte como, por exemplo, o ferroviário. (Santos [1])

Em decorrência do desenvolvimento do tráfego rodoviário no Brasil, houve um aumento no seu volume e no peso dos veículos. A combinação desses fatores com o desenvolvimento de estruturas cada vez mais esbeltas e as características de irregularidades das pistas, acarreta uma importante variação das amplitudes das tensões e ampliação do espectro de frequências das vibrações, constituindo um dos fatores principais para a deterioração e redução da vida útil dos pavimentos e das estruturas das pontes rodoviárias. (Santos [1])

Para Almeida [2], os surgimentos de sinais de deterioração precoce são resultados de critérios de projeto pouco adequados. De acordo com o autor, as ações mais severas transmitidas aos tabuleiros das pontes são ocasionadas pela ocorrência de irregularidades superficiais, correspondendo, em situações extremas relacionadas a pavimentos de qualidade inferior, a mais de quinze vezes as admitidas em projeto.

A ocorrência de fenômenos de vibrações em obras de arte, induzidos pelo tráfego de veículos, já fora observada durante a metade do século XIX, em decorrência do surgimento de veículos cada vez mais velozes e pesados. Os primeiros estudos sobre problemas dinâmicos datam de 1849 e trata-se de uma abordagem de Willis [3]: uma equação de movimento baseada em um modelo formado por uma massa, deslocando-se com velocidade constante sobre uma viga simplesmente apoiada, flexível e de massa desprezível foi deduzida. Stokes [4], no mesmo ano, obteve a solução exata dessa equação, ao empregar uma técnica de expansão em séries.

Krylov (apud Melo [5]) considerou uma carga com massa desprezível em comparação com a viga, avaliando assim o problema equivalente a uma força constante deslocando-se sobre a estrutura.

Em 1934, Inglis [6] propôs soluções aproximadas, obtidas numericamente para o modelo, admitindo que a resposta dinâmica de uma viga biapoiada possui a forma de seu primeiro modo de vibração, reduzindo o problema a apenas um grau de liberdade generalizado.

Timoshenko [7] analisou o problema de uma carga impulsiva com velocidade constante numa ponte ferroviária. Levou em consideração a massa da viga, as características dinâmicas do veículo e os efeitos produzidos pelas rodas desbalanceadas de locomotivas.

Com o desenvolvimento das ferramentas computacionais após os anos de 1950 e, principalmente, com a utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF) a partir dos anos 70 do século XX, a análise de vibrações em pontes pôde ser feita de forma mais sofisticada. A interação veículo-estrutura é frequentemente abordada mediante modelos analíticos do veículo como oscilador massa-mola-amortecedor para formular as equações de movimento do sistema acoplado veículo-estrutura. Essa será também a abordagem utilizada nesse trabalho.

De fato, Huang e Veletsos [8] já simulavam o veículo como um corpo rígido (massa) suspenso por um sistema de mola e amortecedor (suspensão do veículo) em 1970. No Brasil, tal modelo também foi empregado por Bruch [9] para a análise do comportamento dinâmico de placas retangulares com carga móveis; por

Carneiro [10] para análise de vigas com diversas condições de apoio, usando matrizes de rigidez e amortecimento variáveis com a posição do veículo; e por Ferreira [11] para verificar os efeitos das cargas móveis nos tabuleiros de ponte rodoviárias.

Chang e Lee [12] empregaram um modelo simplificado de veículo com 2 graus de liberdade para avaliar o comportamento de pontes de vão único simplesmente apoiado e chegaram à conclusão de que os códigos normativos tendem a subestimar o coeficiente de impacto, especialmente para o caso de ponte com grandes vãos.

Novak [13] concluiu que as cargas dinâmicas não dependem somente do vão, como mostram as equações normativas de coeficiente de impacto, mas também dependem da rugosidade da superfície do pavimento e das características dinâmicas do veículo.

Tradicionalmente, tem-se modelado os carregamentos dinâmicos mediante carregamentos estáticos "equivalentes", nos quais são utilizados coeficientes de amplificação dinâmica. Porém, segundo Melo [5], a adoção de coeficientes de impacto aplicados sobre cargas estáticas, geralmente baseados em aspectos geométricos (comprimento do vão), revela-se insuficiente para atender aos critérios de fissuração excessiva, de vibrações e deformações excessivas ou, até mesmo, implicando a redução da margem de segurança da estrutura.

Melo [5], por meio de um modelo analítico-numérico, utilizou um sistema com 5 graus de liberdade para um veículo de carga de 3 eixos e avaliou os fatores de amplificação dinâmica em termos de deslocamentos, em pontes de pequenos vãos, devidos ao tráfego de veículos pesados.

No mesmo ano, Santos [1], desenvolveu uma ferramenta computacional para modelagem matemático-numérica tridimensional, considerando a interação dinâmica entre veículo, pavimento rugoso e estrutura.

Mais adiante, Moroz [14] desenvolveu um modelo de veículo de 9 graus de liberdade (GDL), introduzindo o movimento de "roll" (rotação em torno do eixo longitudinal) ao veículo de 8 GDL que já havia sido utilizado na modelagem de veículos da classe 3C. O autor fez uso da metodologia de condensação estática no centro de gravidade do veículo das forças de contato entre os pneus e o pavimento, para efeito da aplicação dos mesmos a um modelo estrutural simplificado da ponte.

Nos estudos da resposta dinâmica das estruturas é de extrema importância a consideração dos dados referentes ao tráfego real atuante nas malhas rodoviárias, assim como o estado de conservação dos pavimentos (Moroz [14]).

Rossigali [15] realizou um estudo estatístico de diversas variáveis dos veículos atualmente presentes nas rodovias do País, como a classificação dos veículos, distância entre eixos, cargas por eixo, entre outros. Considerando isso, foi possível a criação de uma base reduzida de dados de veículos na qual foram analisados os efeitos da passagem destes, em pontes representativas da malha viária brasileira. Por fim, o autor comparou tais efeitos aos correspondentes veículos-tipo das normas brasileiras existentes.

Mais recentemente, Rossigali [16] atualizou sua base de dados a partir da análise de cinco fontes de dados rodoviários. Esta base de dados foi utilizada para simular o tráfego em pontes típicas da malha viária brasileira, contribuindo para a modernização das normas de carga de veículos no Brasil.

Portanto, o emprego de modelos mais realistas faz-se necessário para um dimensionamento mais consistente das estruturas das pontes.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia simplificada para a análise dinâmica de pontes curvas sob o efeito de um veículo pesado classe 3C. Esta metodologia considera o desacoplamento dos modelos do veículo e da ponte, unidos apenas pelas forças de interação, sendo, ao mesmo tempo, simples e acessível a engenheiros estruturais, utilizando-se de um programa de elementos finitos disponível comercialmente.

Os modelos da ponte e do veículo são estudados com a utilização do software de modelagem estrutural e análise dinâmica ADINA – Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis [17], disponibilizado no Laboratório de Mecânica Computacional da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Para a análise dinâmica será utilizado o método de integração numérica de Newmark no domínio do tempo. A preferência pela análise no domínio do tempo, com relação à análise no domínio da frequência, está associada à sua maior generalidade, pois pode ser utilizada em situações em que não é legítima a aplicação da superposição de efeitos, como em estudos não lineares. Na metodologia, inicia-se com a análise modal do veículo de classe 3C, de acordo com Moroz [14], com os nove graus de liberdade, bem como a análise modal da ponte e calibração do amortecimento de Rayleigh. Na sequência, as irregularidades geométricas do pavimento (principais causas para a variação das forças de contato no tempo) são modeladas por meio de uma função de densidade espectral, proposta por Honda [18]. Com a consideração de tabuleiro rígido e rugosidade do pavimento, a resposta dinâmica sob a excitação de suporte é realizada, o que alimenta as forças de contato em todas as rodas. Em seguida, as forças de contato são condensadas estaticamente no centro de gravidade do veículo e aplicadas no modelo unifilar da ponte, considerando

a superelevação do tabuleiro e a excentricidade do eixo do veículo até o eixo da ponte. No modelo unifilar a estrutura é modelada como um sistema reticulado em que se representa apenas o eixo da seção celular e dos pilares com elementos de barra 3D.

Como a ponte é curva, uma força horizontal adicional é aplicada ao modelo: a força centrífuga. Como o veículo apresenta somente amortecedores verticais e a rigidez lateral dos pneus é desprezada, a força centrífuga pode ser somada às forças de interação provenientes da análise dinâmica do veículo. Todas essas forças produzem um carregamento móvel que se desloca ao longo da ponte com uma velocidade constante.

A análise dinâmica da ponte vem em seguida, submetida ao carregamento móvel, resultando em funções temporais de deslocamentos para cada nó do modelo. A seguir são extraídos os deslocamentos para cada nó no instante em que o centro de massa do veículo está sobre o mesmo e estes são somados à rugosidade do pavimento, gerando as novas “funções de irregularidade equivalentes”. Estas funções são aplicadas ao modelo do veículo, resultando em novas forças de contato e repetindo-se o processo até se obter convergência.

## 2. Modelagem

### 2.1 Modelo veicular

Como mencionado anteriormente, Rossigali [16] analisou a frequência de veículos em cinco bases de dados, a saber: DNIT (1999-2002), CENTRAN (2005), Ecovias (2008), AutoBan (2008) e AutoBan (2011). Na maioria das bases, exceto na da Ecovias

**Tabela 1**

Propriedades mecânicas e parâmetros dinâmicos do veículo

Parâmetro	Valor	Unidade
Massa suspensa do veículo – $m_v$	20.60	t
Momento de inércia na direção x – $I_{xx}$	15.00	t.m <sup>2</sup>
Momento de inércia na direção v – $I_{vv}$	65.00	t.m <sup>2</sup>
Massa do pneu dianteiro (massa não suspensa) – $m_{pd}$	0.32 t	t
Massa do pneu traseiro (massa não suspensa) – $m_{pt}$	0.53 t	t
Rigidez do sistema de suspensão dianteiro – $k_{vd}$	432.00	kN/m
Rigidez do sistema de suspensão traseiro – $k_{vt}$	585.00	kN/m
Rigidez do pneu dianteiro – $k_{pd}$	840.00	kN/m
Rigidez do pneu traseiro – $k_{pt}$	1680	kN/m
Coefficiente de amortecimento do sistema de suspensão dianteiro – $c_{vd}$	3.00	kNs/m
Coefficiente de amortecimento do sistema de suspensão traseiro – $c_{vt}$	6.00	kNs/m
Coefficiente de amortecimento do pneu dianteiro – $c_{pd}$	1.00	kNs/m
Coefficiente de amortecimento do pneu traseiro – $c_{pt}$	1.00	kNs/m
Distância $d_1$	4.00	m
Distância $d_2$	0.80	m
Distância $d_3$	2.00	m
Distância $d_4$	1.10	m

(2008), o veículo da classe 3C foi o que apresentou a maior frequência, sendo igual a 36,62% na base do DNIT (1999-2002), 28,35% na base do CENTRAN (2005), 21,86% na base da Autoban (2008) e 19,45% na base da Autoban (2011).

Assim, pode-se concluir que o veículo da classe 3C é o mais comum entre os veículos pesados. Este veículo será utilizado neste trabalho.

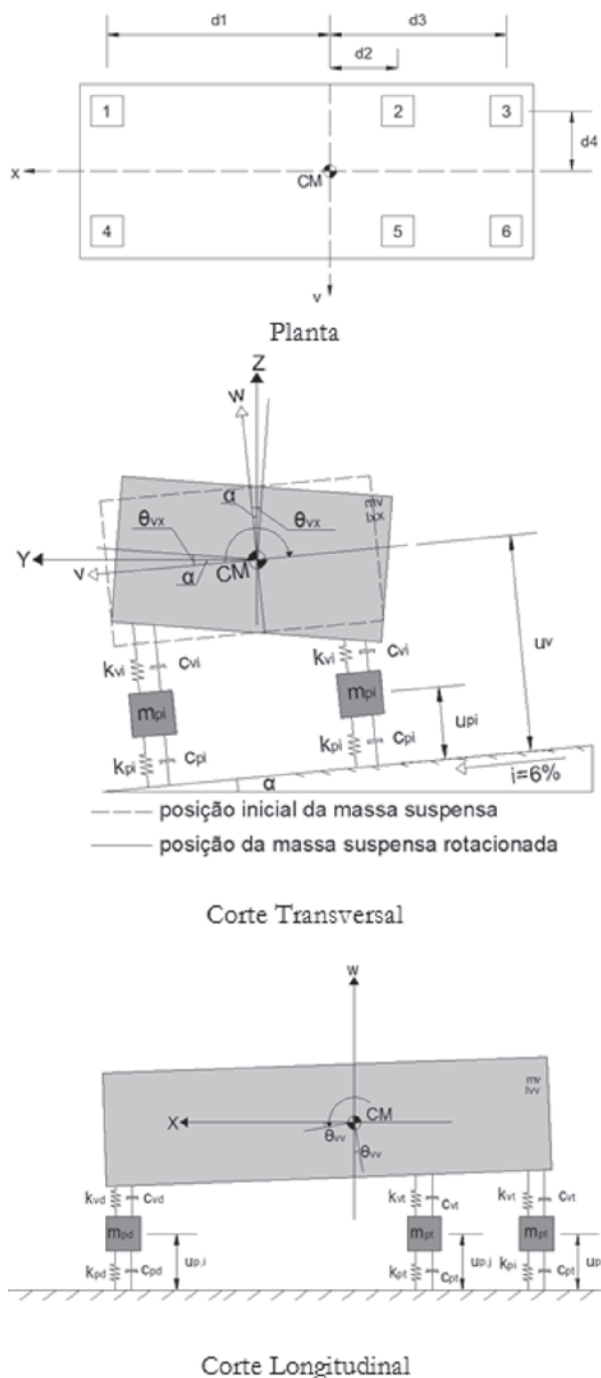


Figura 1  
Modelo do veículo

Como discutido anteriormente, este trabalho considerou o veículo com nove graus-de-liberdade proposto por Moroz [14], sendo eles: deslocamento vertical (“bounce”) das massas suspensas e não suspensas, e rotações ao redor do eixo longitudinal (“roll”) e eixo transversal (“pitch”). Os parâmetros utilizados são os mesmos adotados por Santos [1] e Moroz [14], e são apresentados na Tabela 1. A Figura 1 ilustra o modelo do veículo utilizado.

O veículo será modelado considerando os eixos locais  $v$  e  $w$ , ou seja, os deslocamentos do veículo ( $u_v$ ) e dos pneus ( $u_{p,i}$ ) são perpendiculares à superfície do tabuleiro. Portanto, posteriormente, os esforços de interação do veículo deverão ser decompostos de acordo com a superelevação para, somente então, os esforços de interação serem aplicados no modelo unifilar da ponte.

Dado que a ponte é curva, uma força horizontal adicional é aplicada ao modelo: a força centrífuga. Como o veículo apresenta somente amortecedores verticais e a rigidez lateral dos pneus é desprezada, a força centrífuga pode ser somada às forças de interação provenientes da análise dinâmica do veículo. Todas essas forças produzem um carregamento móvel que se desloca ao longo da ponte com uma velocidade constante.

Uma vez que a força centrífuga ( $F_c$ ) é aplicada no centro de massa da massa suspensa, é necessário conhecer a altura do centro de massa até o pavimento, para a obtenção do momento de transporte associado. Esta altura foi encontrada em Ejzenberg [19], que considera uma distância de 2,16m para caminhões pesados carregados. Essa distância foi adotada neste trabalho.

## 2.2 Modelo estrutural

Para o estudo a ser realizado nos capítulos posteriores, será analisada uma ponte do ramo 900 do complexo Anhanguera. A ponte tem quatro vãos curvos em planta (100m, 125m, 125m, 100m) e dois retos de 40m, como mostra a figura 2. O raio de curvatura em planta é constante e igual a 234,5m.

A estrutura é de concreto, com seção unicelular de altura variável nos trechos curvos, sendo mais alta na região dos apoios. Após os trechos curvos há uma junta no pilar P4, que os separa dos dois vãos retos. Estes possuem seção com altura constante até o encontro E2. No modelo foram consideradas as propriedades de todas as seções, de acordo com a variação de altura mostrada. A figura 3 mostra as propriedades e dimensões das seções do apoio (a) e do meio do vão (b) do trecho curvo. Para os trechos retos a seção é a mesma da figura 3 (b).

A superelevação da ponte varia de 2% a 6%, como mostrada na figura 4. Para fins de estudo, trabalhou-se apenas com superele-

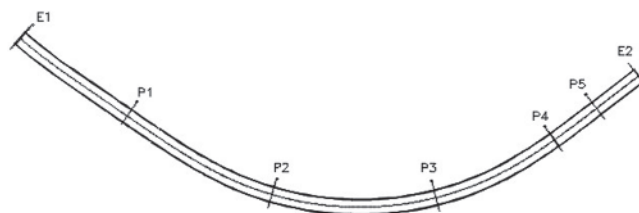
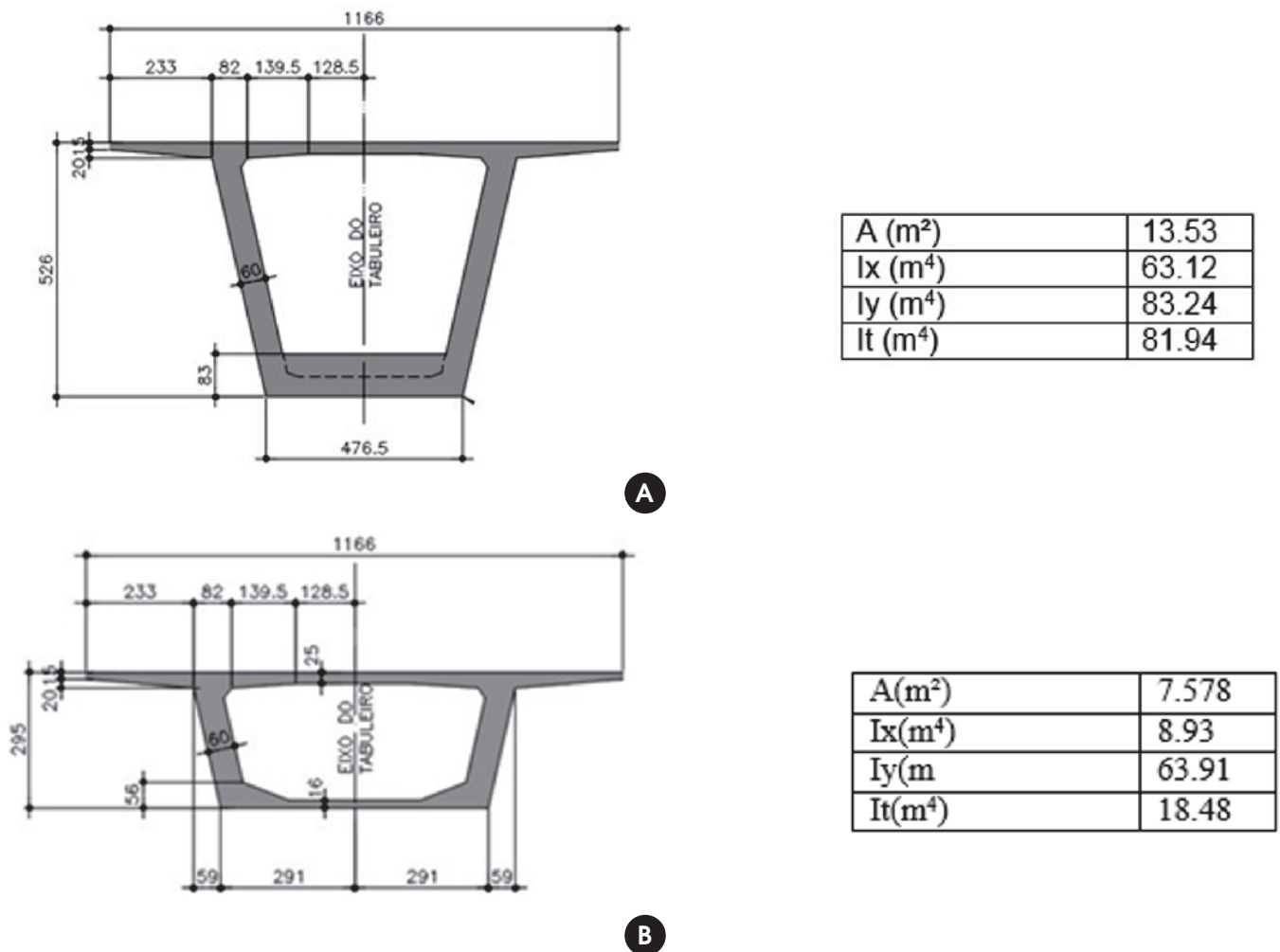


Figura 2  
Planta da ponte (desenho cedido pela EGT Engenharia)



**Figura 3** Dimensões e propriedades das seções: (a) no apoio (b) no meio do vão (desenho cedido pela EGT Engenharia)

vação máxima de 6%. Nos pilares P2 e P3 a superestrutura possui uma excentricidade de 90 cm em relação ao pilar. No Pilar P4 essa excentricidade aumenta para 92.5cm.

Considerou-se um modelo linear para o concreto, com resistência à compressão equivalente a 50 MPa para superestrutura, 40 MPa para mesoestrutura e 25 MPa para infraestrutura.

A modelagem da estrutura analisada foi realizada no software ADINA – *Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis* [17].

A superestrutura, os pilares e as estacas foram modelados com elementos de barra 3D, com propriedades equivalentes ao das respectivas seções. Os blocos foram modelados com elementos de casca tipo *shell*, com espessura equivalente à altura dos blocos, uma vez que possuem menos custo computacional do que elementos sólidos e representam bem a rigidez dos blocos. Para efeito de avaliação dos deslocamentos da superestrutura, considerou-se suficiente a modelagem das estacas até uma profundidade de 2m a partir do fundo do bloco.

Os aparelhos de apoio foram modelados utilizando-se barras rígi-

das, com os graus de liberdade correspondentes em sua extremidade. Para conectar os aparelhos de apoio à superestrutura e aos pilares foram utilizados *rigid links*. Como a superelevação é dada pela inclinação da seção caixão, os sistemas locais das barras 3D que modelam a superestrutura foram girados, para simular a superelevação da ponte. A Figura 7 ilustra o modelo unifilar da ponte.

### 2.3 Perfil de irregularidade do pavimento

Um perfil de irregularidades aleatórias pode ser descrito matematicamente mediante funções de densidade espectral, obtidas experimentalmente. O espectro de rugosidade do pavimento adotado neste trabalho foi calibrado por Honda [18], sendo expresso pela eq. 1.

$$S(\omega_k) = \bar{\alpha} \cdot (\omega_k)^{-\beta} \quad (1)$$

onde,  $\bar{\alpha}$  depende do estado de conservação do pavimento, podendo ser classificado em 5 categorias, segundo a *International*

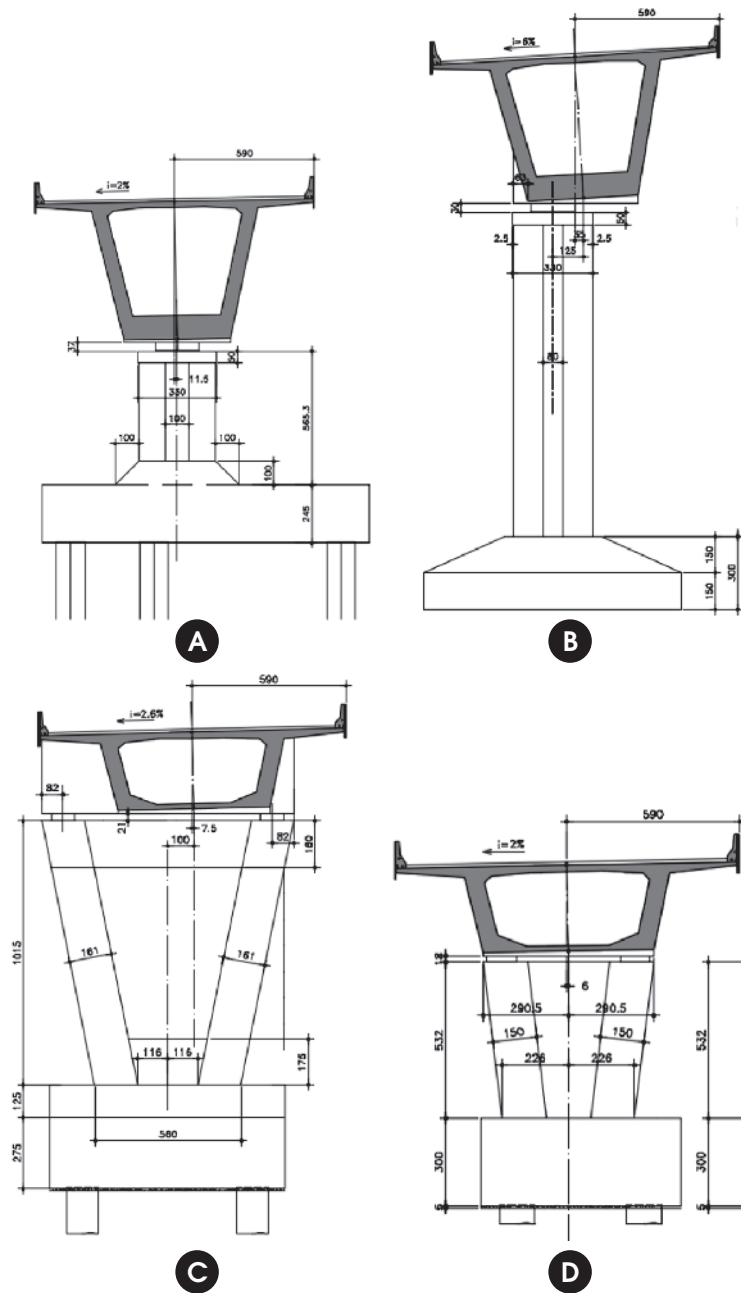


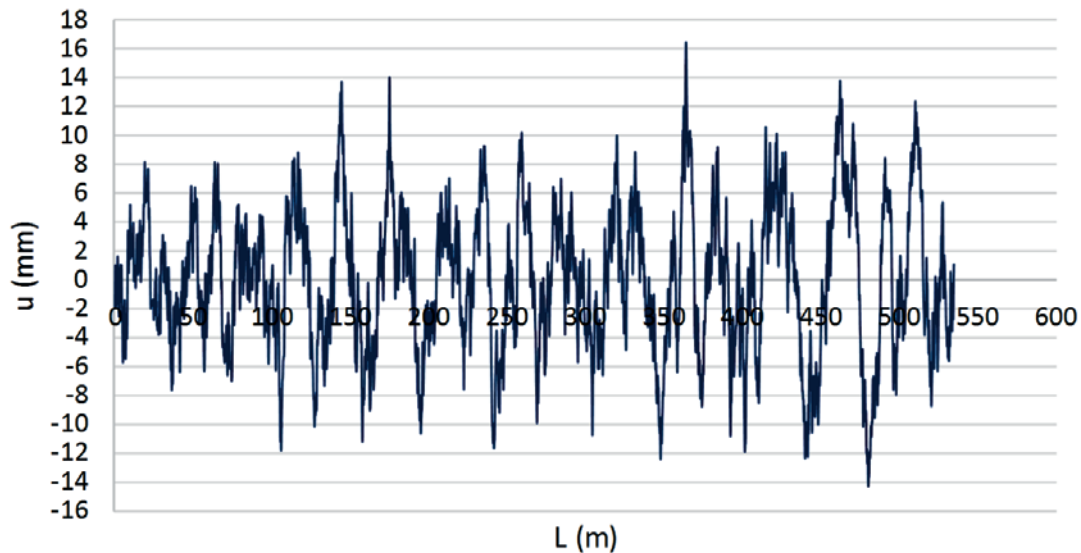
Figura 4 Seções transversais nos pilares: (a) P1 (b) P2 e P3 (c) P4 (d) P5

Tabela 2 Correlação entre as classificações adotadas no Brasil (IRI) e pela ISO

Condição do pavimento	$\bar{\alpha} (x10^{-6} m^2 / (m/ciclo) )$	IRI (m/km)
Excelente	$\bar{\alpha} \leq 0,24$	$IRI \leq 1,90$
De excelente a regular	$0,24 < \bar{\alpha} \leq 1,00$	$1,90 < IRI \leq 3,80$
De regular a péssimo	$\bar{\alpha} > 1,00$	$IRI > 3,80$



## Perfil de Irregularidade



**Figura 5**

Perfil de irregularidade para IRI = 4,10m/km,  $\alpha = 1,5 \times 10^{-6}$ ,  $\beta = 1,85$  e  $0,5\text{m} < \lambda < 50\text{m}$

Organization for Standardization (ISO),  $\beta$  é o expoente que depende do material que constitui o pavimento, sendo igual a 2,03 para pavimentos asfálticos e igual a 1,85 para pavimentos de concreto e  $\omega_k$  a frequência de onda, definida como o inverso do comprimento de onda.

Para Rossigali [16], dentre as diversas escalas padronizadas que podem ser adotadas na medida da irregularidade do pavimento, uma referência bastante utilizada em nível mundial para denotar a qualidade do pavimento em função do grau de rugosidade é o *International Roughness Index* (IRI). A correlação entre os padrões da ISO e a escala de classificação adotada pelo DNIT em função do IRI é apresentada na Tabela 2.

Os perfis de rugosidade foram gerados a partir do espectro da eq. (1) como uma série de cossenos (eq. 2) (Santos [1]):

$$u_{ir}(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos(2\pi\omega_k x + \varphi_k) \quad (2)$$

onde  $u_{ir}(x)$  é a rugosidade aleatória do pavimento,  $\alpha_k$  é a amplitude de rugosidade,  $\omega_k$  é a frequência de rugosidade em ciclos por metro,  $\varphi_k$  é o ângulo de fase aleatório definido no intervalo  $[0, 2\pi]$ ,  $x$  é a posição do eixo do veículo ao longo de sua trajetória e  $N$  é o número total de termos da série.

A amplitude  $\alpha_k$  é expressa pela eq. (3):

$$\alpha_k = 2\sqrt{S_r(\omega_k)\Delta\omega} \quad (3)$$

Yang e Lin [20] definem o incremento de frequência por  $\Delta\omega = (\omega_{\max} - \omega_{\min})/N$ , onde  $\omega_{\max}$  e  $\omega_{\min}$  são a frequências de rugosidade máxima e mínima admitida na resposta.

De acordo com Campos [21], o comprimento de onda da rugosidade deve estar entre 0,5m e 50m. As ondas com dimensões fora destes intervalos são avaliadas como macrotextura, microtextura e megatextura, não sendo consideradas como irregularidades do pavimento. O perfil de rugosidade foi obtido para um IRI de 4,10 m/km, que é classificado como pavimento de má qualidade. A Figura 5 mostra o perfil de irregularidade adotado.

### 2.4 Aplicação dos esforços de contato do modelo estrutural

Os esforços de interação dos pneus são condensados estaticamente no centro de gravidade do veículo, para a obtenção do modelo veicular reduzido. Assim, o modelo de carregamento fica reduzido a três esforços, sendo eles: força vertical ( $f_{wk}$ ), devido ao movimento de "bounce", momento transversal ( $m_{vk}$ ), devido ao movimento de "pitch" e momento longitudinal ( $m_{xk}$ ), devido ao movimento de "roll". Com os esforços de interação, devido à excitação do veículo, condensados estaticamente no centro de gravidade do mesmo, parte-se para a aplicação do carregamento na ponte. Primeiramente, deve-se somar aos esforços de interação os carregamentos estáticos devido ao peso do veículo ( $P$ ) e força centrífuga ( $F_c$ ). O veículo está posicionado de forma excêntrica com relação ao eixo da ponte, considerando-se a faixa de rolamento dele mais afastada, de forma a maximizar o momento longitudinal (ver figura 6a). Os esforços são, então, transportados para o centro de gravidade da seção, gerando um momento longitudinal  $M_{xk}$  igual a:

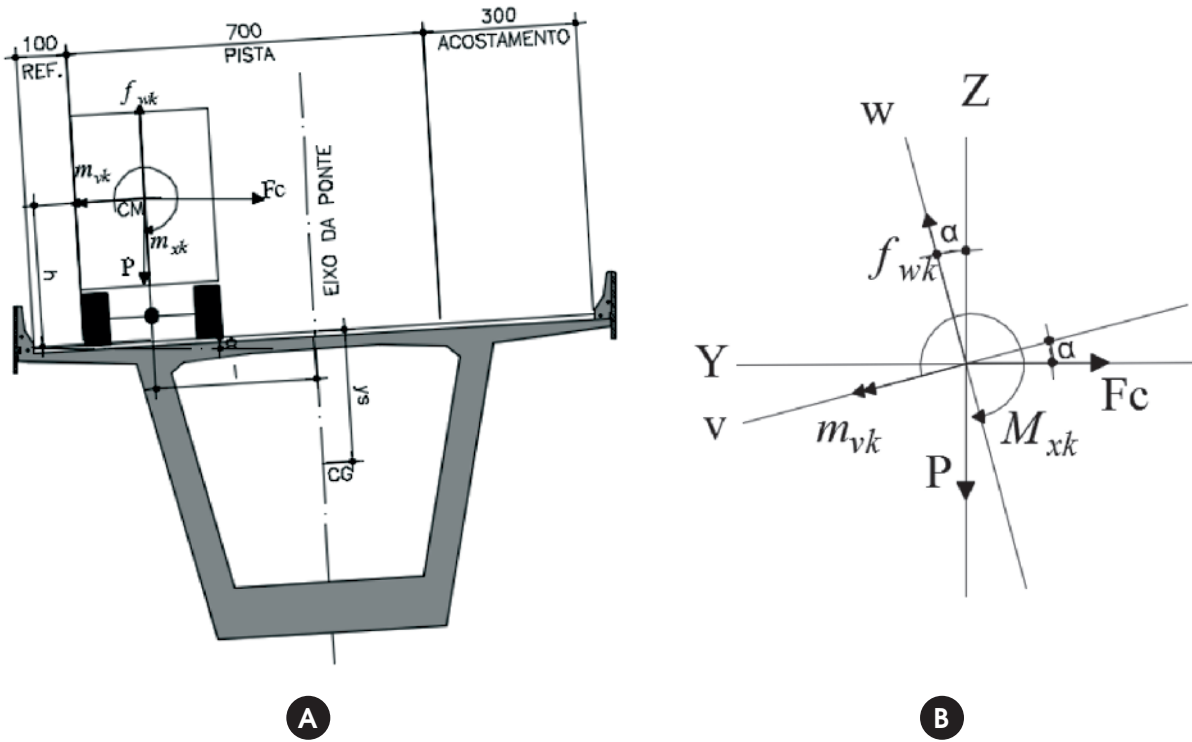
$$M_{xk} = F_c[(h + y_s) \cos \alpha - l \sin \alpha] - P[l \cos \alpha + (h + y_s) \sin \alpha] + f_{wk}l + m_{xk} \quad (4)$$

onde  $h$  é a altura do pavimento ao centro de massa da massa suspensa, adotada igual a 2,16m,  $l$  é a excentricidade do veículo em relação ao eixo da ponte, igual a 3,15m, e  $y_s$  é a distância até o centro de gravidade da estrutura, variável para cada seção.

Depois de calculado o momento longitudinal, as cargas são aplicadas no eixo da ponte, lembrando que os esforços de interação  $f_{wk}$  e  $m_{vk}$  devem ser decompostos de acordo com a superelevação, para levar dos eixos  $w$  e  $v$  do veículo para os eixos  $Z$  e  $Y$  do modelo da ponte (ver figura 6b). Note-se que a decomposição do momento  $m_{vk}$  gera um momento vertical  $M_{zk}$  que, apesar de ser pequeno, é considerado na análise.

Portanto, a força vertical  $F_{zk}$ , na direção global da ponte é mostrada na eq. 5:

$$F_{zk} = f_{wk} \cos \alpha - P \quad (5)$$



**Figura 6**

(a) Posicionamento do veículo para cálculo das forças. (b) Decomposição das forças, de acordo com a superelevação

A força horizontal proveniente da decomposição da força de interação deve ser somada a força de inércia centrífuga, resultando na força horizontal  $F_{yk}$  a ser aplicada no modelo da ponte (eq. 6)

$$F_{yk} = f_{wk} \sin \alpha - F_c \quad (6)$$

O momento  $m_{vk}$  também deve ser decomposto em um momento na direção Y e um momento na direção Z (eq. 7).

$$M_{zk} = -m_{vk} \sin \alpha \quad (7)$$

Considerou-se que o momento  $M_{yk}$  aplicado é igual ao momento de interação  $m_{vk}$  decomposto mais o momento devido à distribuição do peso próprio do veículo (eq. 8).

$$M_{yk} = \left[ m_{vk} + (P_1 + P_4)d_1 \cos \alpha - (P_2 + P_5)d_2 \cos \alpha - (P_3 + P_6)d_3 \cos \alpha \right] \cos \alpha \quad (8)$$

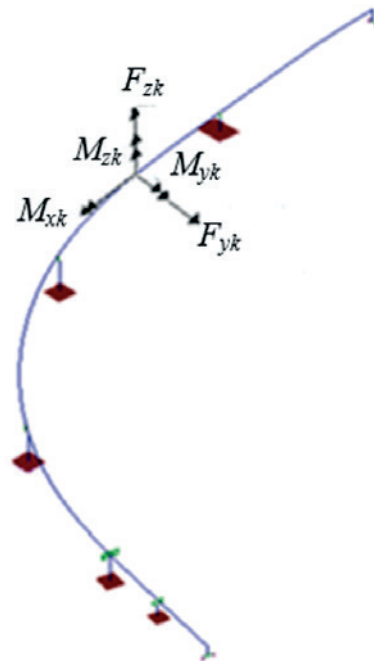
onde  $P_i$  é a força que a roda  $i$  exerce sobre a estrutura devido ao peso próprio do veículo.

Esses esforços são aplicados a um modelo de baixa hierarquia da ponte (estrutura unifilar), dividido em elementos de barras tri-dimensionais, sendo que em cada nó  $k$  da ponte discretizada são especificados os cinco esforços reduzidos: força vertical ( $F_{zk}$ ), momento transversal ( $M_{yk}$ ), momento longitudinal ( $M_{xk}$ ), momento vertical ( $M_{zk}$ ) e força horizontal ( $F_{yk}$ ), ver figura 7. Assim, no instante em que o veículo se encontra sobre o nó  $k$ , são especificados os cinco esforços reduzidos e, para os demais instantes, estes valores são nulos, pois o centro de gravidade do veículo se encontra sobre outros nós.

### 3. Resultados e discussões

Primeiramente foram realizadas as análises modais da ponte e do

veículo, cujas frequências se encontram na tabela 3. A partir dos dois primeiros modos de vibração da ponte, foram calibrados os coeficientes de Rayleigh referentes a amortecimento modal  $\xi$  de 2,5%. Como se pode ver pela tabela 3, a ponte possui frequências muito baixas. Desta forma, quanto maior for a velocidade, mais próximos da frequência da ponte vai estar o carregamento do veículo.



**Figura 7**

Modelo unifilar da ponte curva com exemplificação dos esforços aplicados nos nós



**Tabela 3**  
Frequências naturais da ponte e do veículo

Modos	Frequência Ponte (Hz)	Modo da Ponte	Frequência Carro (Hz)	Modo do Carro
1°	0,47	Flexão vertical	1,68	Bounce da massa suspensa
2°	0,59	Torção com deslocamento longitudinal	2,15	Roll da massa suspensa
3°	0,62	Flexão lateral do trecho reto	2,23	Pitch da massa suspensa
4°	0,69	Flexão vertical	10,06	Roll das massas não suspensas
5°	0,89	Flexão lateral com torção	10,14	Pitch das massas não suspensas
6°	0,92	Flexão lateral com torção	10,40	Roll das massas não suspensas

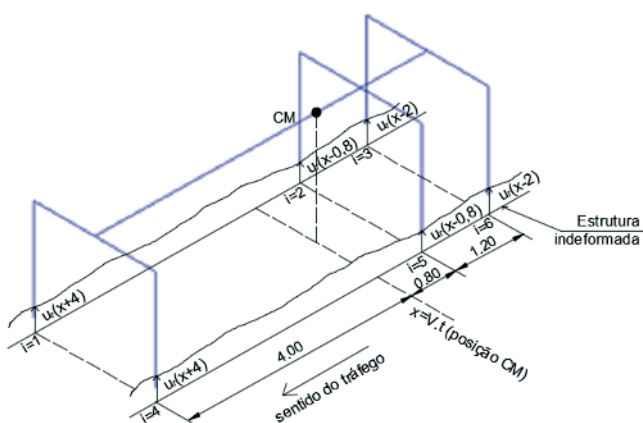
Sendo assim, o estudo foi realizado para a velocidade máxima para as condições de tráfego na ponte de 80 km/h, assim como para velocidades de 60km/h e 40km/h.

Primeiramente foram obtidos os esforços oriundos da interação veículo-pavimento, sob a hipótese inicialmente adotada de tabuleiro rígido. Estes esforços foram decompostos de acordo com a superelevação da ponte, considerando também os momentos de transporte até o centro de gravidade da seção da ponte.

Com os esforços aplicados no modelo da ponte foi feita a análise dinâmica, resultando em funções temporais de deslocamentos para cada nó. Como os esforços aplicados foram obtidos considerando tabuleiro rígido, eles precisam ser ajustados, já que a ponte possui deslocamentos quando o carregamento do veículo trafega pela ponte. Este ajuste é realizado mediante o processo iterativo descrito a seguir:

**1° Passo:** Partindo-se da hipótese de tabuleiro rígido e estrutura indeformada, para cada instante  $t$ , aplica-se a rugosidade do pavimento  $u_r(x)$  em cada pneu  $i$  de posição  $x_i = x - d$ , sendo  $x$  a posição do centro de massa (CM) do veículo no instante  $t$  ( $x = V \cdot t$ ) e  $d$  a distância longitudinal do CM até o pneu (ver figura 8). Pela análise dinâmica do veículo, são obtidas as forças de contato  $f_i(t)$  e  $f_o(t)$ , referentes a cada pneu.

**2° Passo:** Redução ao centro de gravidade da massa suspensa dos esforços para aplicação em modelo estrutural de baixa hierarquia.

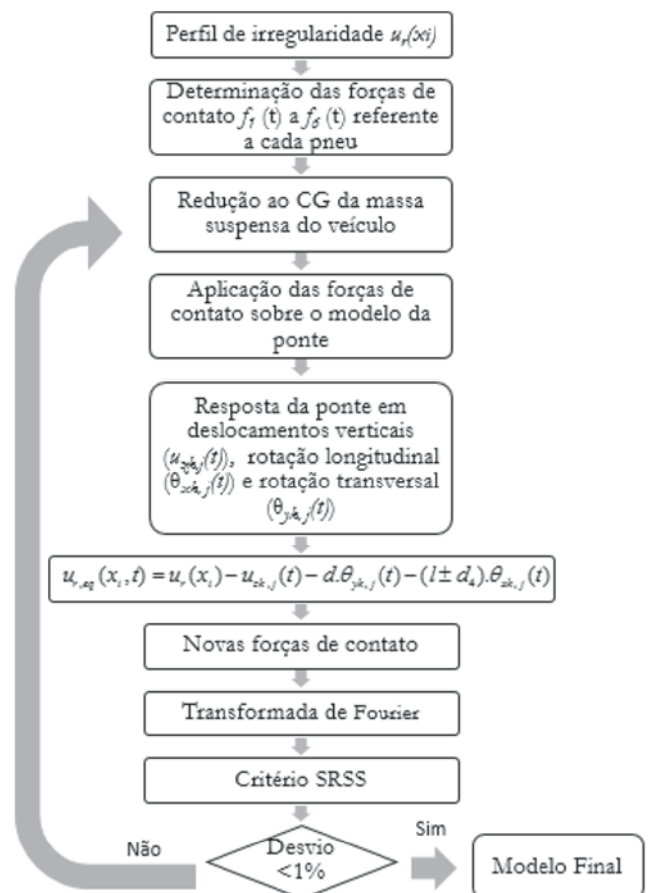


**Figura 8**  
Aplicação da irregularidade no modelo do veículo

Nota-se que quando o CM está no início da ponte ( $x=0$ ) apenas o primeiro eixo de rodas está sobre a ponte e está influenciado pela irregularidade. Os demais eixos, que estariam fora da ponte, apesar de serem considerados por causa da redução dos esforços no centro de massa, possuem irregularidade nula, e, portanto, não influenciariam na resposta dinâmica.

**3° Passo:** Aplicação das forças sobre o modelo da ponte.

**4° Passo:** Obtenção dos deslocamentos estruturais de translação vertical,  $u_{z_{k,j}}(t)$ , rotação em torno do eixo longitudinal  $\theta_{x_{k,j}}(t)$  e

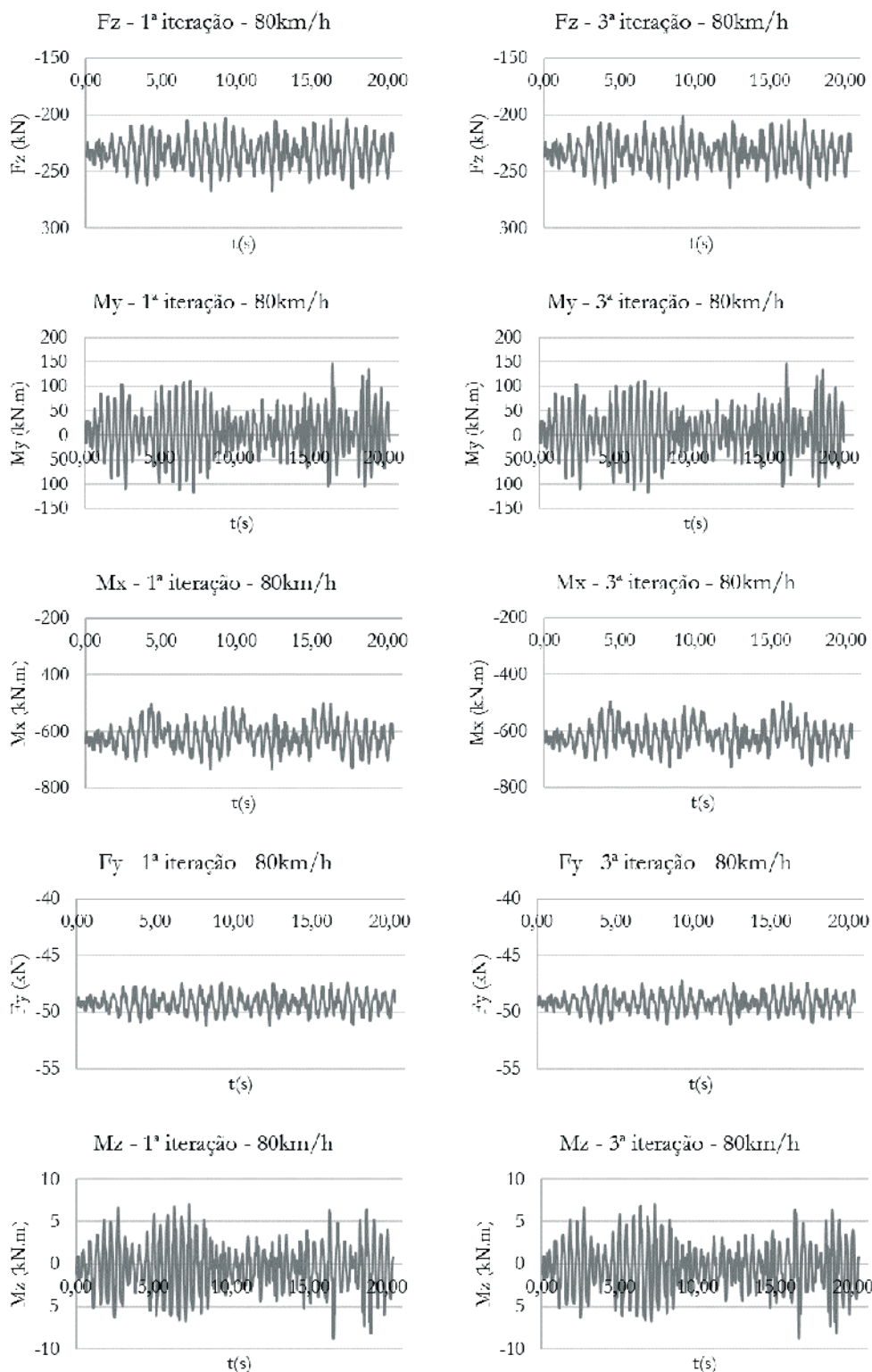


**Figura 9**  
Fluxograma da metodologia proposta

rotação em torno do eixo transversal  $\theta_{y_k}(t)$  para cada nó  $k$ , no instante  $t$  em que o centro de massa (CM) do veículo está sobre o mesmo.

Sabe-se que deveria ser extraído um deslocamento para cada roda. Porém, devido à aplicação dos esforços reduzidos, nesta

metodologia foi adotada uma simplificação, obtendo-se apenas os deslocamentos e rotações no centro de massa do veículo. Os respectivos deslocamentos para cada roda podem ser encontrados, multiplicando-se as rotações longitudinais e transversais pelas correspondentes distâncias do centro de massa até cada roda,



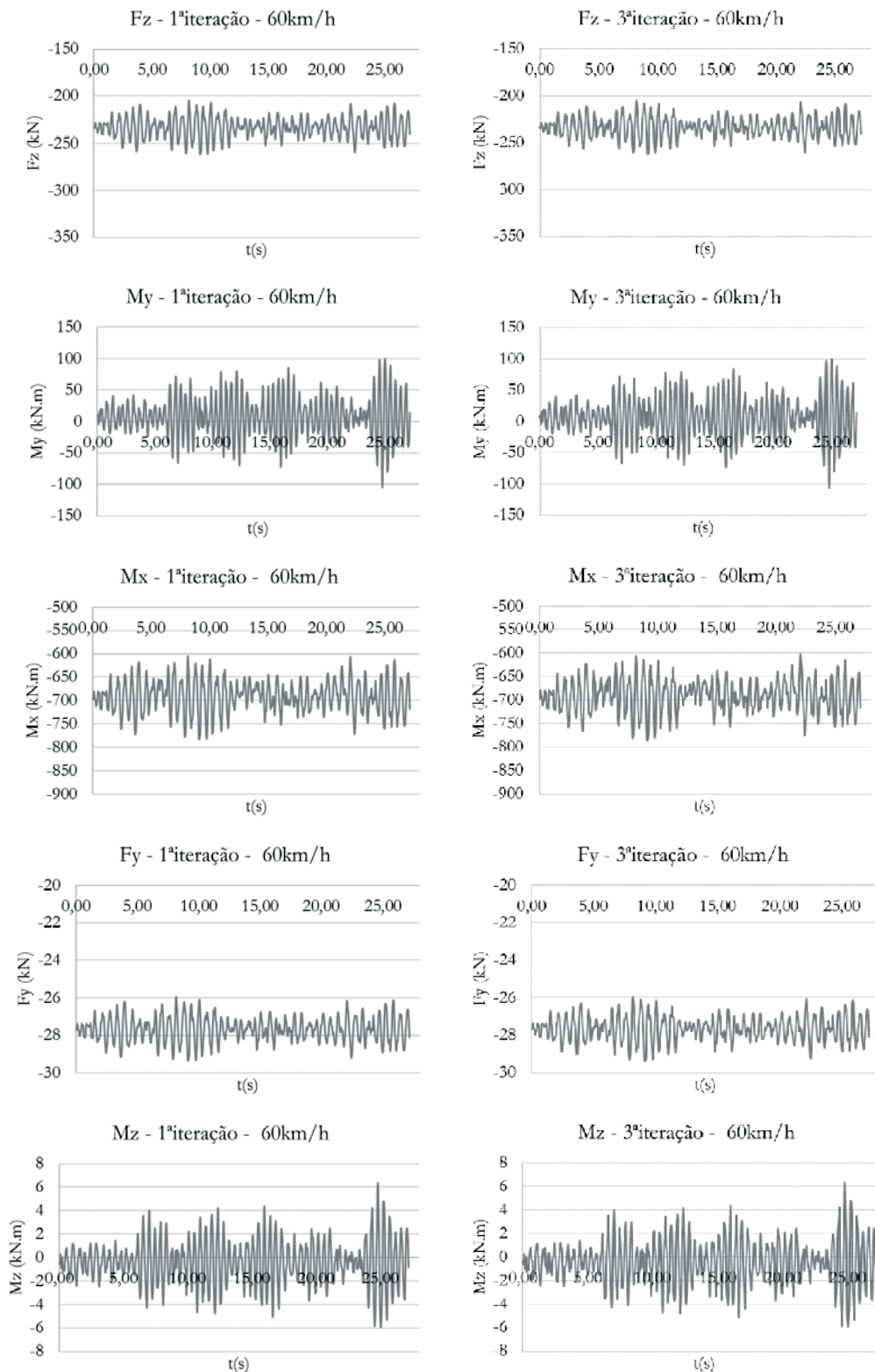
**Figura 10**  
 Comparação dos Esforços aplicados na ponte na 1ª iteração (tabuleiro rígido) e 3ª iteração com velocidade de 80 km/h

somando estas parcelas aos deslocamentos verticais, como será visto no próximo passo.

**5º Passo:** Somam-se os deslocamentos obtidos na primeira interação  $j=1$  à rugosidade do pavimento  $u_r(x_i)$  considerada no primeiro passo, para cada roda  $i$  e para cada tempo  $t$ , de forma a se

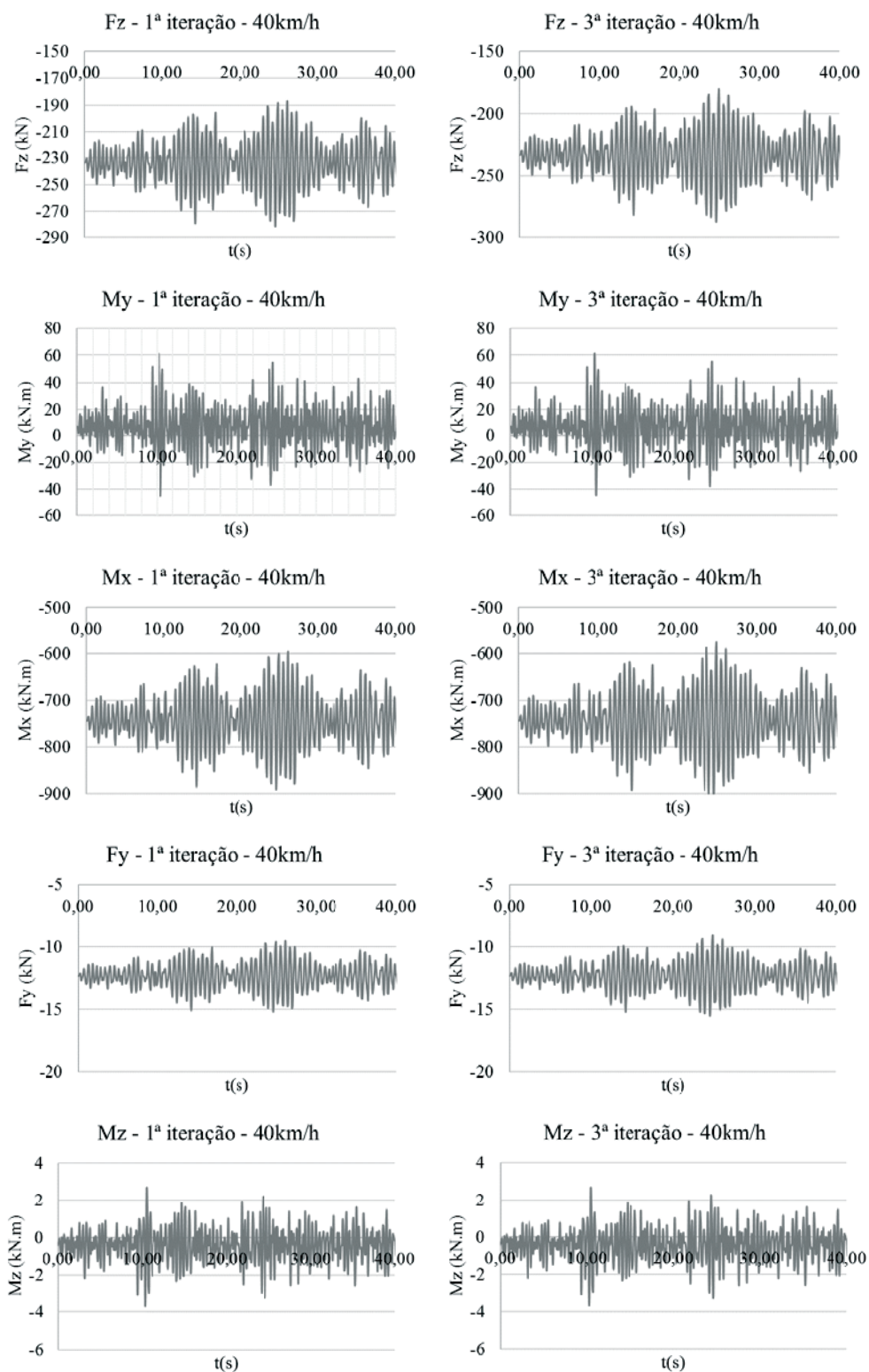
obter uma função de “irregularidade equivalente”, considerando os efeitos dos deslocamentos estruturais distintamente em cada roda (ver Equação 9).

$$u_{r,eq}(x_i, t) = u_r(x_i) - u_{zk,j}(t) - d \cdot \theta_{yk,j}(t) - (l \pm d_4) \theta_{xk,j}(t) \quad (9)$$



**Figura 11**

Comparação dos esforços aplicados na ponte na 1ª interação (tabuleiro rígido) e 3ª interação com velocidade de 60 km/h



**Figura 12**

Comparação dos esforços aplicados na ponte na 1ª iteração (tabuleiro rígido) e 3ª iteração com velocidade de 40 km/h

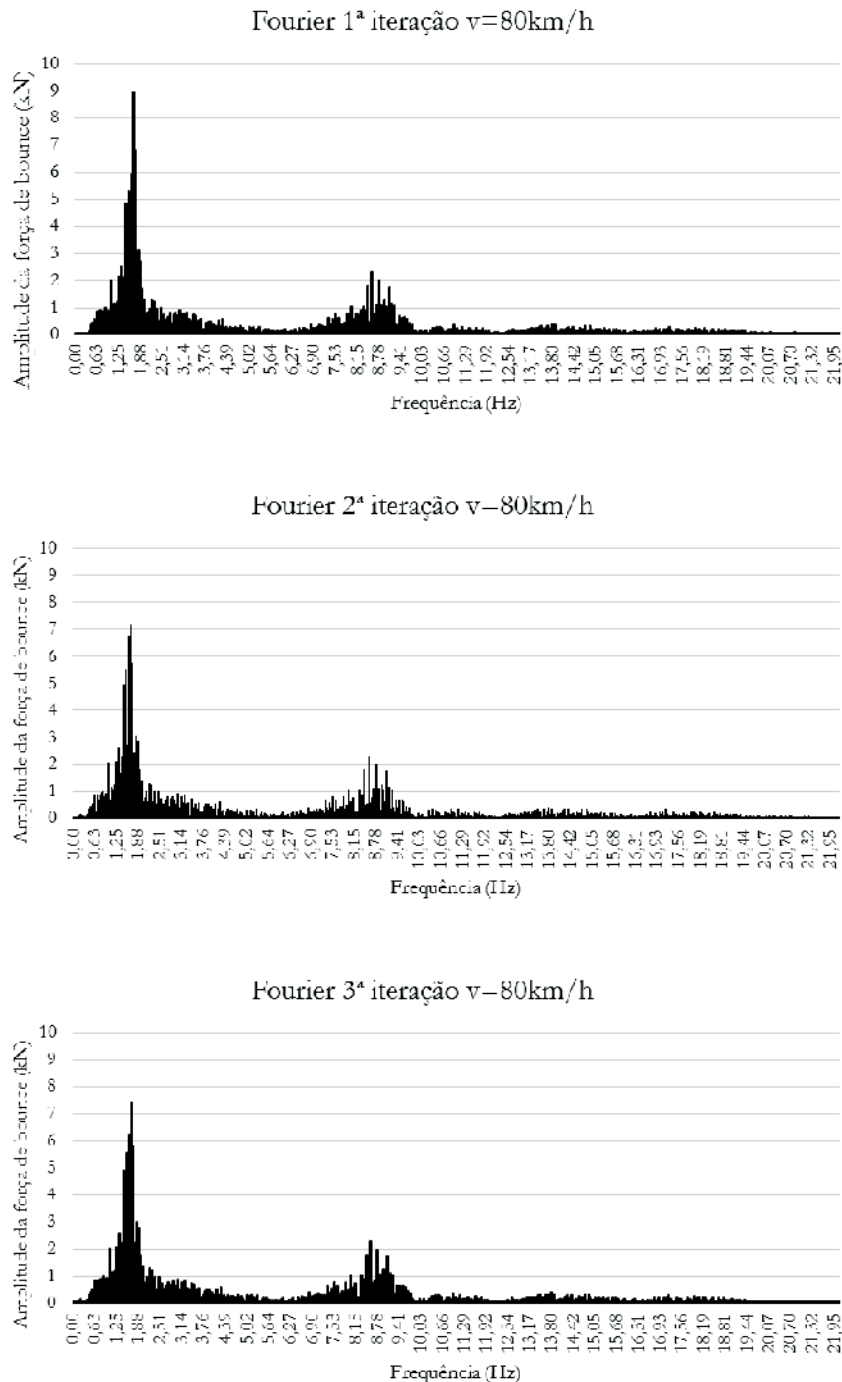
onde  $l$  é a distância do eixo da ponte até o eixo do veículo.

**6º Passo:** Novas forças de contato são obtidas pela análise dinâmica do veículo, sob a excitação de suporte provida da “irregularidade equivalente” do 3º passo.

**7º Passo:** Depois de obtidas as novas forças de contato, são determinadas as respostas das forças de interação no domínio da frequência, pela aplicação das transformadas de Fourier em cada iteração.

**8º Passo:** São calculados os desvios entre o resultado no domínio da frequência da iteração  $i$  e da iteração  $i-1$ , utilizando o critério SRSS – *Square Root of the Sum of Squares*, ou raiz quadrada da soma dos quadrados das máximas amplitudes.

**9º Passo:** Se o desvio entre duas iterações consecutivas for menor que 1%, então se considera que foi obtida convergência e parte-se para a análise do modelo final. Se não, repetem-se



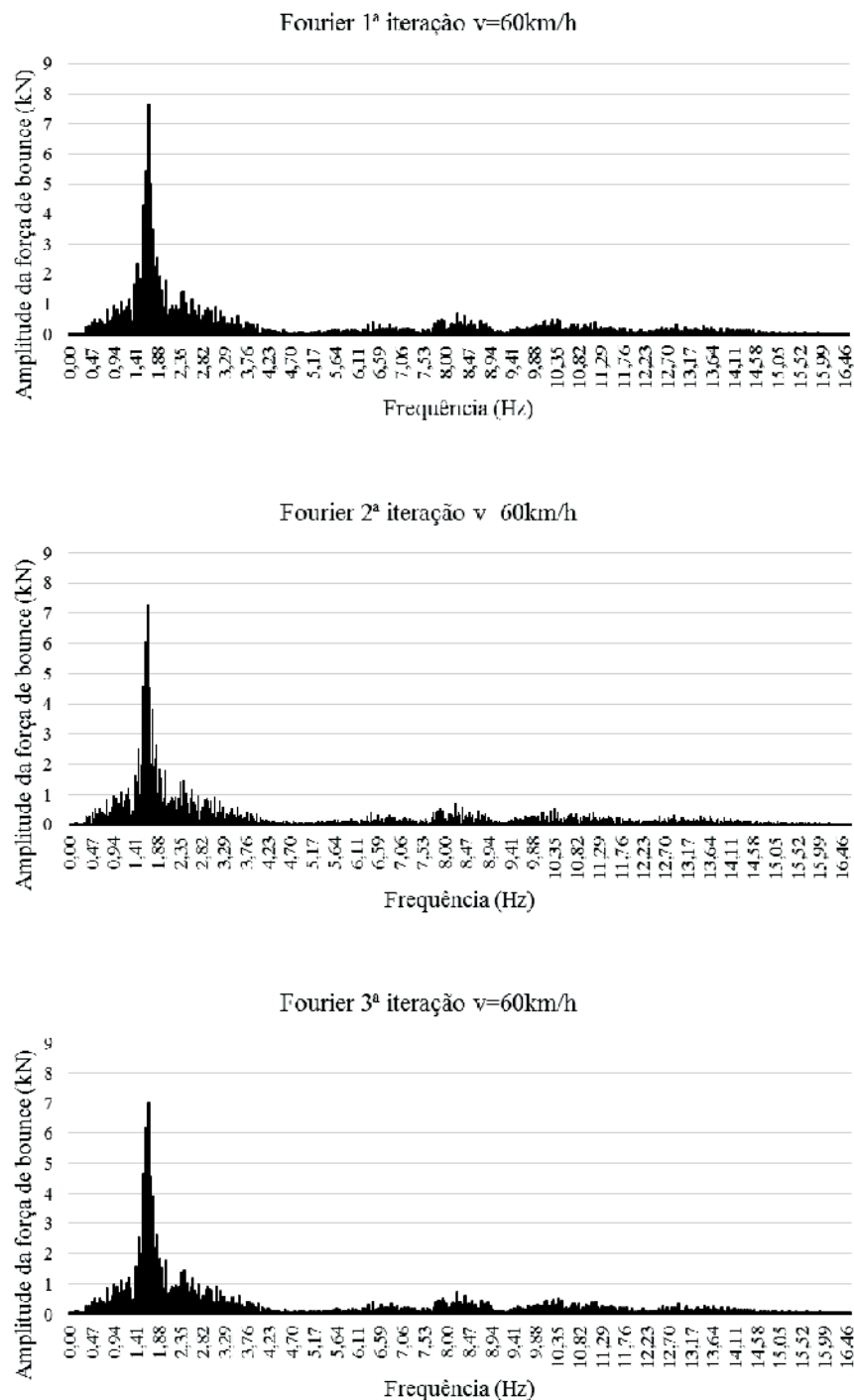
**Figura 13**

Análise de Fourier das forças de bounce  $F_z$  para as três iterações –  $V = 80\text{ km/h}$

os passos 2 a 6 até se obter a convergência das forças de interação.

A figura 9 mostra um fluxograma exemplificando a metodologia. Neste estudo, foram necessárias apenas três iterações para se obter a convergência das forças de interação, sendo que para a velocidade de 60 km/h apenas duas iterações se-

riam suficientes. As Figuras 10 a 12 mostram a comparação dos esforços aplicados na ponte para a primeira e terceira iteração. Foram obtidas as transformadas de Fourier da força de interação  $F_{z_k}$ , referente ao movimento de *bounce*, para cada iteração, calculando-se o desvio entre o resultado da iteração *i* e da iteração *i-1*, utilizando o critério SRSS – *Square Root of the Sum of*



**Figura 14**  
Análise de Fourier das forças de bounce  $F_{z_k}$  para as três iterações – V = 60 km/h

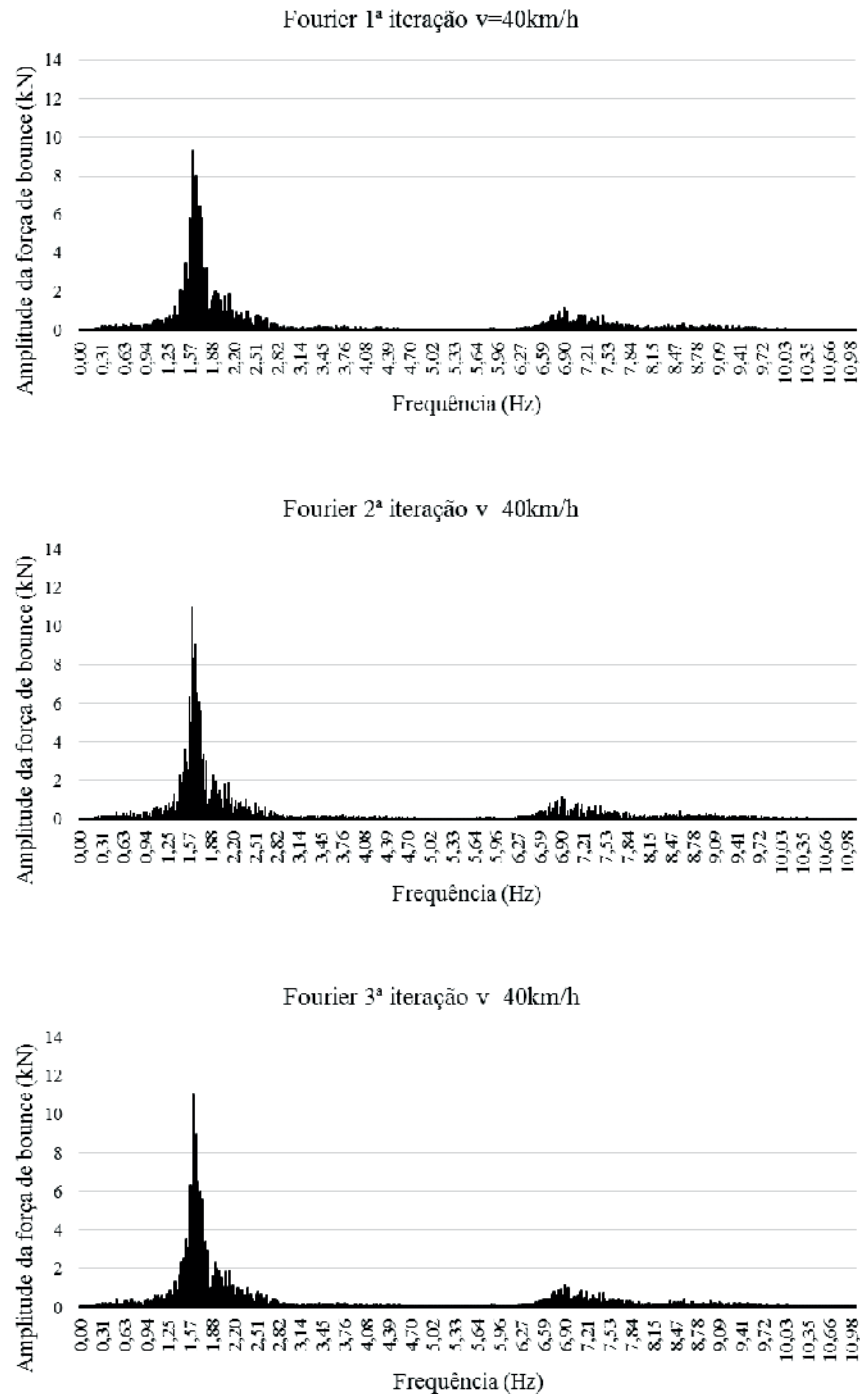


Squares, ou raiz quadrada da soma dos quadrados das máximas amplitudes, como indicado na eq. 10:

$$Deviation = \left( \frac{\sqrt{\sum_{w=1}^N A_{w,iteração(i)}^2}}{\sqrt{\sum_{w=1}^N A_{w,iteração(i-1)}^2}} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (10)$$

onde  $n$  é o número de frequências consideradas para cálculo das amplitudes.

As figuras 13 a 15 mostram as análises de Fourier para cada iteração. Nota-se, para todas as iterações, que o pico de maior amplitude tem frequência correspondente a 1,67 Hz, muito próxima de 1,68 Hz do primeiro modo de *bounce* da massa suspensa do



**Figura 15**  
Análise de Fourier das forças de bounce  $F_z$  para as três iterações –  $V = 40$  km/h

**Tabela 4**  
Diferenças entre as iterações utilizando o método SRSS

Velocidade	Iteração	Desvio (%)
80	1-2	-3,60
	2-3	-0,10
	1-3	-3,70
60	1-2	0,34
	2-3	-0,20
	1-3	0,14
40	1-2	8,5
	2-3	-0,03
	1-3	8,47

veículo. Nota-se também que há um aumento das amplitudes próximo às frequências de 8 a 10 Hz, que são próximas aos modos de vibração das massas não suspensas do veículo, porém com amplitudes bem menores.

A tabela 4 mostra as diferenças encontradas entre as iterações. Do ponto de vista estático, esperar-se-ia que a situação de tabuleiro rígido correspondesse a forças de contato maiores e depois, com a correção dos deslocamentos, a flexibilização do tabuleiro diminuísse as forças de interação. Porém, não foi isso que ocorreu de forma geral na análise dinâmica. Dependendo da frequência que é excitada, a flexibilização do tabuleiro pode aumentar ou diminuir as forças de interação. Como pode ser visto na Tabela 4, para as velocidades de 40km/h e 60km/h, as forças de interação aumentaram da primeira para a última iteração, enquanto que para a velocidade de 80 km/h as forças de interação reduziram-se.

**Tabela 5**  
Deslocamentos e momentos fletores positivos – 1ª e 3ª iteração

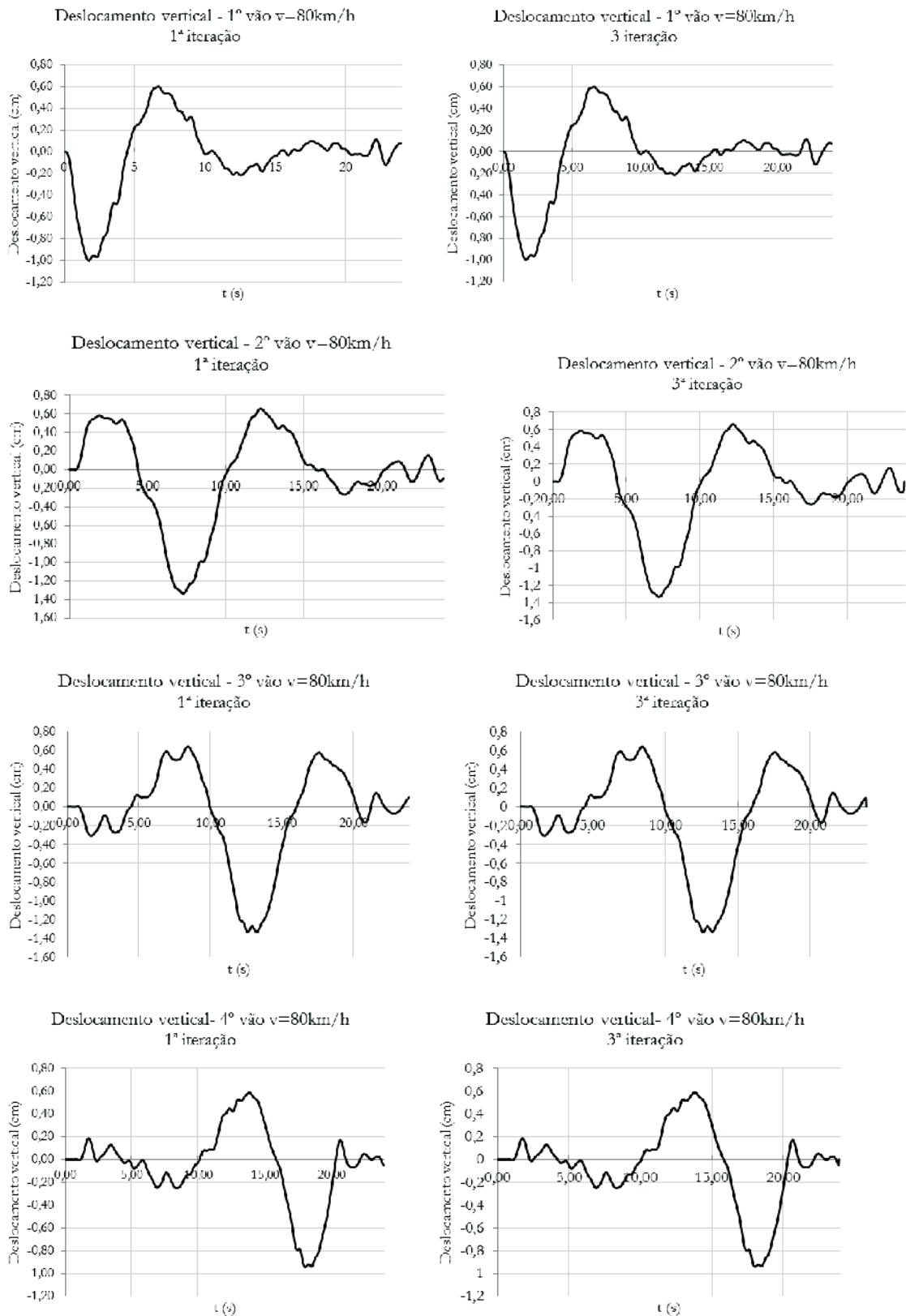
Velocidade	Local	1ª iteração		3ª iteração	
		Deslocamento (cm)	Momento fletor positivo (kN.m)	Deslocamento (cm)	Momento fletor positivo
40km/h	1º vão	1,01	4429,65	1,02	4609,40
	2º vão	1,32	4459,04	1,32	4565,55
	3º vão	1,36	4574,83	1,36	4781,33
	4º vão	0,98	4760,27	0,98	4776,20
60km/h	1º vão	0,99	4428,30	0,99	4589,45
	2º vão	1,30	4361,08	1,30	4478,83
	3º vão	1,35	4660,32	1,35	4656,25
	4º vão	0,96	4693,66	0,96	4694,49
80km/h	1º vão	1,01	4720,57	1,01	4691,20
	2º vão	1,33	4681,77	1,33	4545,50
	3º vão	1,34	4758,53	1,34	4673,27
	4º vão	0,94	4676,79	0,94	4673,47

A tabela 5 apresenta os deslocamentos e momentos fletores positivos para a 1ª e 3ª iterações e para as velocidades de 80km/h, 60km/h e 40km/h. Percebe-se uma boa convergência, com pequenas diferenças nos resultados de momentos fletores, sendo que os deslocamentos estruturais praticamente não se alteraram. Para fim de ilustração, as figuras 16 e 17 apresentam o histórico de deslocamentos e momentos fletores nos quatro vãos curvos, onde se consegue observar a proximidade das respostas entre a 1ª e 3ª iterações.

#### 4. Conclusões

O produto mais importante deste trabalho é a apresentação de uma metodologia simplificada para a análise dinâmica de pontes curvas, em que se postula a separação dos modelos da ponte e do veículo, sendo estes acoplados apenas pelas forças de interação. Para a determinação destas forças considera-se que o veículo esteja inicialmente sobre tabuleiro rígido e, posteriormente, esta hipótese é corrigida, mediante um processo iterativo. Esta metodologia é ao mesmo tempo, simples e acessível a engenheiros estruturais, utilizando-se de um programa de elementos finitos disponível comercialmente. Assim, os projetistas estarão cada vez mais aptos a realizarem análises dinâmicas em pontes curvas decorrentes do tráfego, considerando simultaneamente o efeito do carregamento móvel constituído pelas forças centrífugas e pelas forças de interação veículo-pavimento, e utilizando modelos mais realistas, que considerem os dados referentes ao tráfego real atuante nas malhas rodoviárias, assim como o estado de conservação dos pavimentos.

No estudo de caso apresentado, foram necessárias apenas três iterações para se obter convergência das forças de interação. Observou-se que, dependendo da frequência que é excitada, as forças de interação podem aumentar ou reduzir com a correção da flexibilidade, diferentemente do que se é esperado em um

**Figura 16**

Comparação dos deslocamentos para 1ª e 3ª iteração -  $V = 80\text{km/h}$

raciocínio puramente estático, segundo o qual quanto mais rígido o tabuleiro, mais carga ele absorveria.

Também se observou uma boa convergência nas respostas dinâmicas da ponte, com pequena diferença nos momentos fletores entre a primeira e terceira iteração, sendo que os deslocamentos estruturais praticamente não se alteraram.

Vale ressaltar que os resultados aqui apresentados são completamente dependentes da tipologia estrutural e de suas características dinâmicas, podendo apresentar diferenças consideráveis se alterados alguns desses fatores. Entretanto, a metodologia proposta e o procedimento iterativo mediante adaptações simples permanecem um meio adequado para avaliar a resposta dinâmica estrutural.

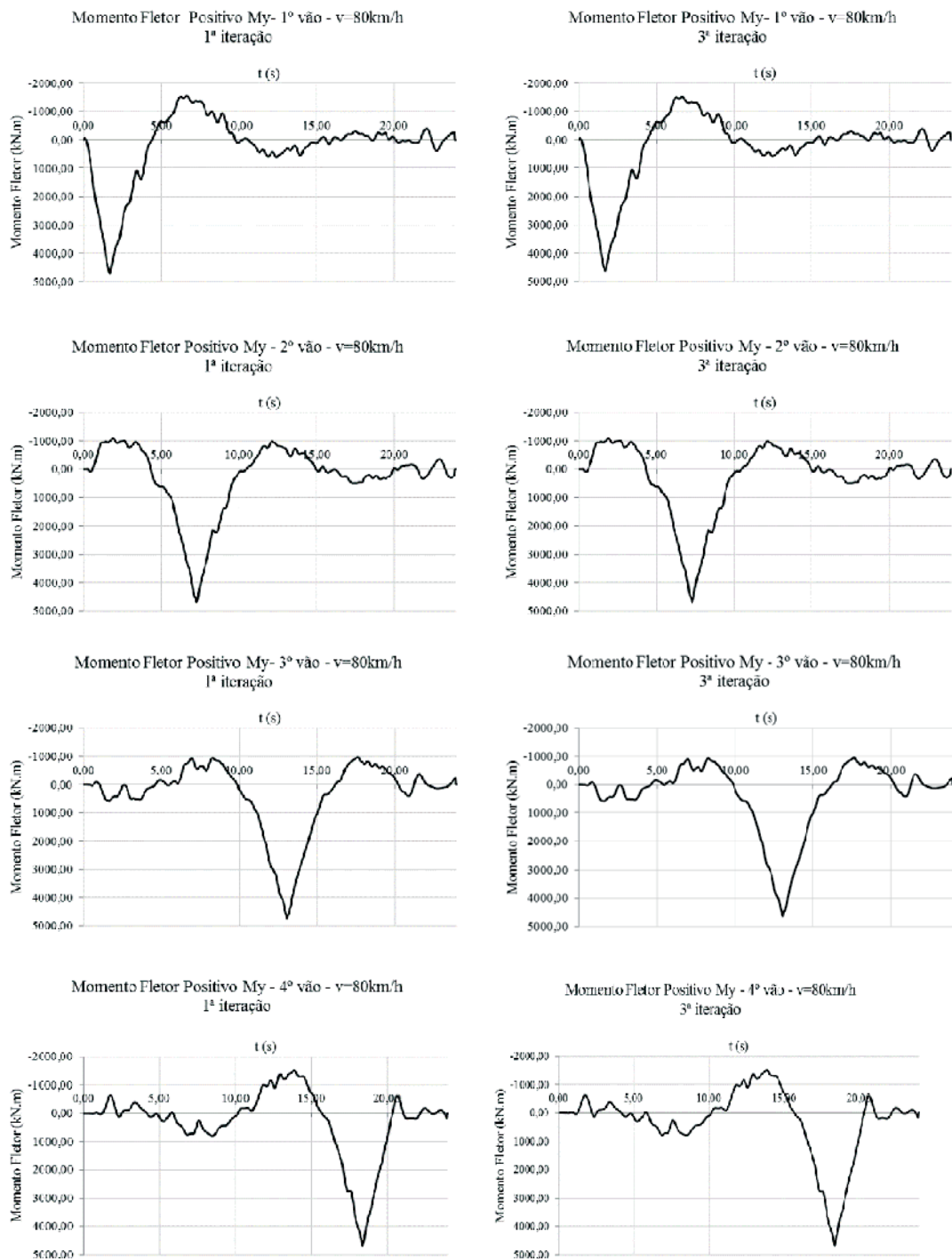


Figura 17 Comparação dos momentos fletores positivos My para 1ª e 3ª iteração - V = 80km/h

## 5. Agradecimentos

Os autores agradecem à EGT Engenharia pelo fornecimento do projeto do ramo 900 da ponte Anhanguera, objeto de estudo deste trabalho. O segundo autor é bolsista de produtividade em pesquisa do CNPq (grant no. 3-2757/2013-9).

## 6. Referências bibliográficas

- [1] SANTOS, E. F. Análise e redução de vibração em pontes rodoviárias. Doctoral Dissertation (in Portuguese), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 2007.
- [2] ALMEIDA, R. S. Análise de vibrações em pontes rodoviárias induzidas pelo tráfego de veículos sobre pavimentos irregulares. Master Thesis (in Portuguese), UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 2006.
- [3] WILLIS, R. Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures. Stationary Office, London. 1849.
- [4] STOKES, G. Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges, Trans. Cambridge Philosophic Soc, v8. 1849.
- [5] MELO, E.S Interação dinâmica veículo-estrutura em pequenas pontes rodoviárias. Master Thesis (in Portuguese), UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 2007.
- [6] INGLIS, C.E. A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges. Cambridge Univ. Press, London, 1934
- [7] TIMOSHENKO, S., Vibration Problems in Engineering. 3rd Edition, D. Van. Nostrand. 1964.
- [8] HUANG, T., VELETOS, A.S. Analyses of Dynamic Response of Highway Bridges. ASCE, J. Mech. Div., 1970. Vol. 96.
- [9] BRUCH, Y.A. Análise Dinâmica de Placas Retangulares pelo Método dos Elementos Finitos. Master Thesis (in Portuguese), COPPE/UFRJ. RJ, Brasil, 1973
- [10] CARNEIRO, R.J.F.M. Análise de Pontes Rodoviárias sob Ação de Cargas Móveis. Master Thesis (in Portuguese), PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 1986.
- [11] FERREIRA, K.I.I. Avaliação do Critério para Cálculo dos Efeitos de Cargas Móveis em Pontes Rodoviárias. Master Thesis (in Portuguese), PUC-Rio, RJ, Brasil. 1991.
- [12] CHANG, D., LEE, H., Impact Factors for Simple-Span Highway Girder Bridges. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.120, n.3, pp704-715.
- [13] NOWAK, A.S. Load Model for Bridge Design Code. Canadian Journal of Civil Engineering., v21, pp.36-49. 1994.
- [14] MOROZ, F. V. Uma metodologia para análise da influência do tráfego de veículos pesados na resposta dinâmica de pontes rodoviárias. Master Thesis (in Portuguese), EPUSP, São Paulo, SP, Brasil. 2009.
- [15] ROSSIGALI, C. E. Estudos probabilísticos para modelos de cargas móveis em pontes rodoviárias no Brasil. Master Thesis (in Portuguese), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 2006.
- [16] \_\_\_\_\_. Atualização do modelo de cargas móveis para pontes rodoviárias de pequenos vão no Brasil. Doctoral Dissertation (in Portuguese), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. 2013.
- [17] ADINA - Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis Software: version 9.0.1. Developed by ADINA R&D, Inc. Massachusetts, 2013. Available at: <http://www.adina.com>. Access in 06/02/2015.
- [18] HONDA, H., KAJIKAWA, Y., KOBORI, T., Spectra of Road Surface Roughness on Bridges. Journal of the Structural Division, ASCE, v108, ST9, pp 1956-1996, 1982
- [19] EJZENBERG, S. Os veículos pesados e a segurança no projeto das curvas horizontais de rodovias e vias de transito rápido. Master Thesis (in Portuguese), EPUSP, São Paulo, SP, Brasil. 2009.
- [20] YANG, Y, LIN, B. Vehicle-Bridge Interaction Analysis by Dynamic Condensation Method. Journal of Structural Engineering, ASCE, v121, pp 1636-1643, 1995.
- [21] CAMPOS, A.C.R., Métodos de Previsão de Desempenho de Irregularidade Longitudinal para Pavimentos asfálticos: Aplicação e Proposição de Critérios de Ajuste. Master Thesis (in Portuguese), Campinas State University, Campinas, SP, Brasil, 2004.