

Flexural Analysis of Prestressed Concrete Structures

Modelos de Verificação à Flexão de Estruturas Protendidas



M. B. CAVALCANTI ^a
marlonbc@ibest.com.br

B. HOROWITZ ^b
horowitz@ufpe.br

Abstract

In the computation of the strength capacity of prestressed concrete structures prestressing may be viewed as strength or load. "Model 1" considers prestressing strands as integral part of the cross section where prestressing operation induces imposed deformations corresponding to prestraining. Alternatively, "Model 2" considers prestressing as external loading, composed of a self-equilibrating system of forces on the anchorages and transversely on concrete. After transfer prestressing strands are considered as conventional reinforcement in computations except that the deformation axis is displaced to take into account pre-elongation. In spite of Model 1 being the most commonly used in designing of continuous beams and officially adopted by NBR 6118 it has the inconvenience of the mandatory consideration of additional secondary effects known as hyperstatic moments which must be taken into account in ultimate strength analysis. The computation of secondary effects is simple for continuous beams but becomes more involved in cases of frames and grids and infeasible in cases of plates and shells. In Model 2 there is no need to compute secondary effects but the cross section must be verified for combined axial force and bending moment. In order to compare results from the models two examples are presented: one example of a statically indeterminate frame and finally an example of a prestressed bridge deck is presented using grillage analogy.

Keywords: Prestress, Continuous, Secondary Effects.

Resumo

No cálculo da capacidade portante de estruturas protendidas a protensão pode ser considerada tanto como resistência quanto como carga. Tem-se, portanto, o "Modelo 1" que considera os cabos como parte integrante da seção, onde a operação de protensão induz deformação imposta correspondente ao pré-alongamento das armaduras ativas. Alternativamente, tem-se o "Modelo 2" que considera a protensão como caso de carregamento externo, composto por sistema auto-equilibrante de forças nas ancoragens e transversais no concreto. Após ativação da aderência os cabos de protensão são considerados no cálculo como armadura convencional, apenas deslocando o eixo das deformações para levar em conta o pré-alongamento. Apesar do "Modelo 1" ser mais utilizado no dimensionamento de vigas contínuas e estar consagrado na NBR-6118, ele possui o inconveniente do surgimento de esforços adicionais denominados efeitos hiperestáticos de protensão, que precisam ser considerados na verificação a ruptura. O cálculo dos efeitos hiperestáticos de protensão é relativamente simples no caso de vigas contínuas, porém torna-se complexo no caso de pórticos e grelhas e inviável no caso de lajes e cascas. Já no "Modelo 2" não há necessidade do cálculo dos efeitos hiperestáticos, porém as seções forçosamente terão que ser verificadas à flexão composta. Para comparar os resultados dos modelos são apresentados dois exemplos: um pórtico e uma de laje de tabuleiro de viaduto analisado utilizando-se analogia de grelha.

Palavras-chave: Protensão, Continuidade, Hiperestáticos.

^a Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, marlonbc@ibest.com.br, Av. Acadêmico Hélio Ramos, s/n, 50740-530, Recife – PE – Brasil;

^b Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, horowitz@ufpe.br, Av. Acadêmico Hélio Ramos, s/n, 50740-530, Recife – PE – Brasil.

1. Introdução

1.1 Descrição do problema

As normas internacionais procedem à verificação de peças protendidas segundo dois tipos de modelos, onde a protensão pode ser considerada tanto como deformação imposta correspondente ao pré-alongamento das armaduras ativas, como carregamento externo composto por sistema auto-equilibrante de forças.

A protensão considerada como deformação imposta acarreta para as estruturas hiperestáticas o surgimento de esforços externos denominados efeitos hiperestáticos, devidos à restrição a livre deformação das peças e que precisam ser levados em consideração na verificação à ruptura.

A protensão considerada como carregamento externo consiste de sistema auto-equilibrante de forças nas ancoragens e transversais no concreto. Após a aderência, os cabos de protensão são considerados como armação passiva convencional, apenas levando em consideração o pré-alongamento.

As normas européias permitem a utilização de qualquer das duas considerações de protensão. Já a norma brasileira e a americana não comentam explicitamente, porém, como utilizam diretamente o conceito de “momento hiperestático” de protensão há indicação implícita da protensão considerada como deformação imposta.

A verificação de peças protendidas segundo normas internacionais é baseada em valores representativos da força de protensão e valores de cálculo da força de protensão. O valor de cálculo da força de protensão é dado pelo seu coeficiente de ponderação, γ_p , multiplicado pelo valor representativo da protensão.

1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é expor uma metodologia onde não se faz necessário o cálculo dos efeitos hiperestáticos da protensão, tomada como carregamento externo. É também objetivo comparar resultados com a metodologia usual de considerar a protensão como resistência, uma vez que as normas modernas fazem com que essa visão dual da protensão: quer como resistência, quer como carga,

forneçam o mesmo resultado, contribuindo dessa forma no processo de discussão da norma brasileira quanto ao valor de γ_p .

2. Protensão como carregamento externo

2.1 Modelos de Cálculo

Os efeitos da protensão podem ser considerados tanto como ações como resistência causada por pré-deformação e pré-curvatura (alínea 5.10.1 do EC2 [1]). Assim têm-se dois possíveis modelos de verificação, a saber:

- **Modelo 1:** Considera os cabos como parte integrante da seção, onde a operação de protensão introduz deformação imposta correspondente ao pré-alongamento das armaduras ativas.
- **Modelo 2:** Considera a protensão como carregamento externo composto por sistema auto-equilibrante de forças nas ancoragens e transversais no concreto. Após ativação da aderência, os cabos de protensão são considerados como armação passiva convencional, apenas levando em consideração o pré-alongamento.

2.2 Protensão considerada como ação externa

Neste modelo a estrutura encontra-se solicitada por carregamento externo calculado através de cargas equivalentes de protensão, sendo o aço de protensão após a aderência considerado como armação passiva convencional, apenas com a origem da sua curva tensão-deformação deslocada do pré-alongamento ($\Delta\epsilon_p$) e tensão correspondente (σ_p) (ver Figura [1]).

Na análise de estruturas hiperestáticas protendidas aplicando a protensão como carregamento externo, não há a necessidade de se computar os efeitos hiperestáticos da protensão. Isto simplifica a verificação, uma vez que os esforços de protensão são diretamente obtidos das saídas dos programas de análise.

3. Verificação de seções protendidas

3.1 Introdução

As normas européias permitem a utilização dos dois modelos de verificação mencionados. A NBR 6118 [2] e o ACI 318-02 [3] não comentam sobre os modelos, porém, como utilizam o conceito de “momento hiperestático” de protensão há indicação implícita do modelo 1.

O EC2 e a NBR 6118 indicam três valores representativos para a força de protensão: médio, P_m , característicos superior e inferior, $P_{k\ sup}$ e $P_{k\ inf}$. O ACI somente contempla o valor médio. Exceto a NBR 6118, as normas são unânimes em especificar P_m como o valor a ser utilizado nas verificações de capacidade resistente. A NBR 6118 faz ressalvas na alínea 9.6.1.3 quando as perdas superam 35% e no caso de “obras especiais”. O valor de cálculo da força de protensão é dado pela expressão:

$$P = \gamma_p P_k \quad (3.1)$$

onde, γ_p = coeficiente de ponderação da protensão; P_k = valor representativo da protensão de uma dada seção no tempo considerado. Todas as normas exceto a NBR 6118 especificam $\gamma_p = 1$ para verificações globais. De fato, na alínea 11.7.1 da NBR 6118 é especi-

Figura 1 – Diagrama tensão-deformação utilizado no modelo 2

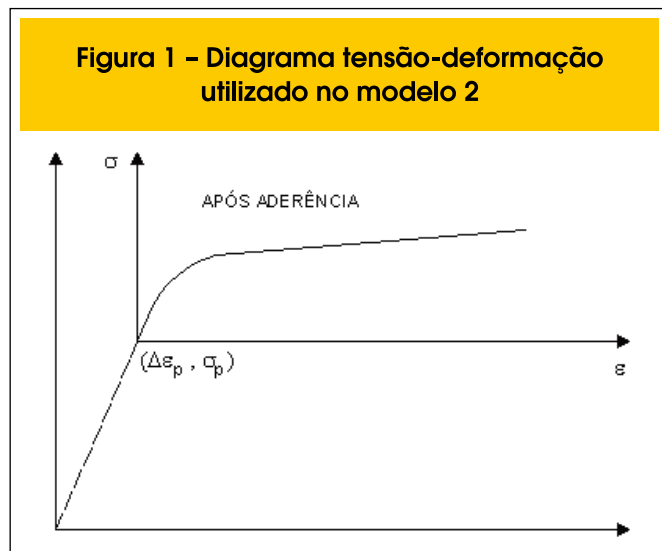
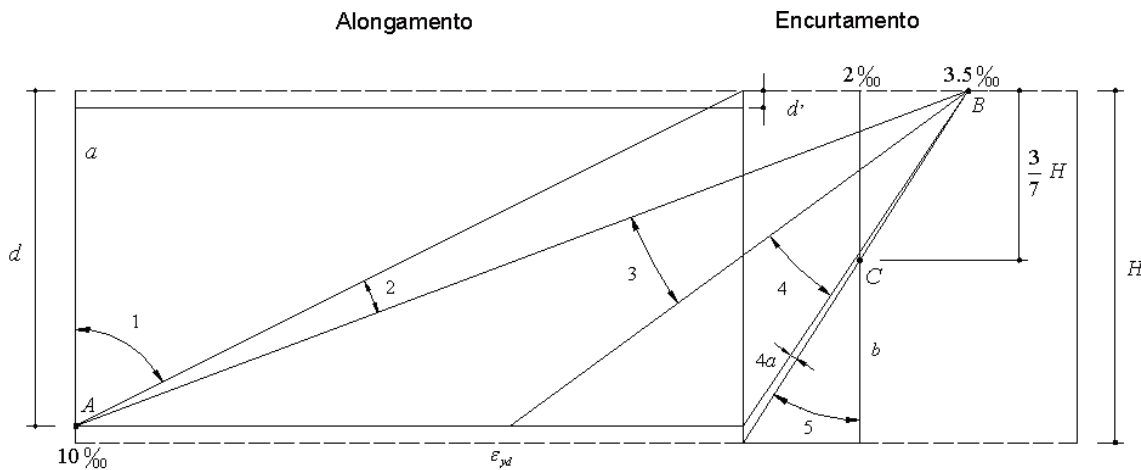


Figura 2 – Domínios do estado limite último – ELU (NBR 6118)



ficado $\gamma_p = 0,9$ para ações favoráveis e $\gamma_p = 1,2$ para ações desfavoráveis. O EC2, na alínea 2.4.2.2 especificada $\gamma_p = 1$ para ações favoráveis e $\gamma_p = 1,3$ ou $1,2$ para ações desfavoráveis, nos casos de protensão externa e verificações locais, respectivamente. Como a protensão é, na esmagadora maioria das vezes, efeito favorável no caso da capacidade resistente a flexão, adotando-se $\gamma_p = 0,9$ os resultados da análise segundo os dois modelos somente coincidirão se o pré-alongamento e as cargas equivalentes de protensão forem computados com base no mesmo valor de cálculo da força de protensão.

3.2 Caracterização do estado limite último segundo a NBR 6118

O estado limite último é caracterizado quando a distribuição das

deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios definidos na Figura [2].

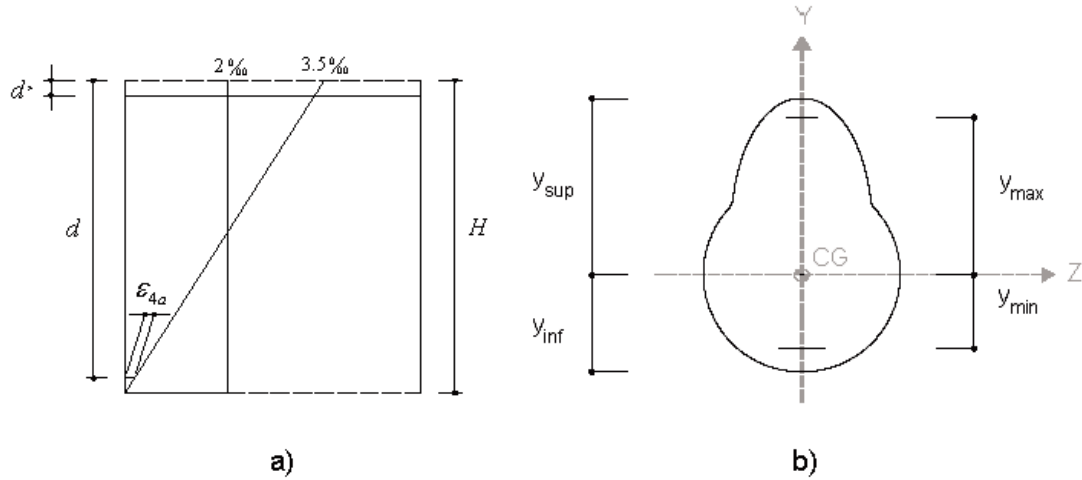
As deformações das fibras extremas correspondentes ao estado limite último podem ser convenientemente expressas em função de um único parâmetro adimensional, D [4]. É apresentado abaixo procedimento ligeiramente modificado de modo a incluir o domínio 4a. A deformação correspondente à fibra mais comprimida de concreto, $\epsilon_s(D)$, e a deformação correspondente ao aço mais tracionado, $\epsilon_i(D)$, podem ser visualizadas na Tabela [1], onde é apresentada a correspondência entre os domínios 1 a 5 (para momento positivo) e 5' a 1' (para momento negativo) com os valores de D.

Para a Tabela [1] tem-se que: y_s = distância da fibra extrema comprimida ao CG da peça; y_i = distância da fibra extrema tra-

Tabela 1 – Correspondência entre os domínios do ELU e D

Dom.	D	y_s	$\epsilon_s(D)\%$	y_i	$\epsilon_i(D)\%$
1	$0 \leq D < 2$	Y_{sup}	$10 - 5D$	Y_{min}	10
2	$2 \leq D < 7$	Y_{sup}	$1,4 - 0,7D$	Y_{min}	10
3/4	$7 \leq D \leq 12$	Y_{sup}	-3,5	Y_{min}	$24 - 2D$
4a	$12 < D < 13$	Y_{sup}	-3,5	Y_{min}	$12\epsilon_{4a} - \epsilon_{4a}D$
5	$13 \leq D < 14$	Y_{sup}	$-23 + 1,5D$	Y_{inf}	$26 - 2D$
5'	$14 \leq D \leq 15$	Y_{sup}	$-30 + 2D$	Y_{inf}	$19 - 1,5D$
4a'	$15 < D < 16$	Y_{max}	$-16\epsilon_{4a'} + \epsilon_{4a'}D$	Y_{inf}	-3,5
3'/4'	$16 \leq D < 21$	Y_{max}	$-32 + 2D$	Y_{inf}	-3,5
2'	$21 \leq D < 26$	Y_{max}	10	Y_{inf}	$-18,2 + 0,7D$
1'	$26 \leq D \leq 28$	Y_{max}	10	Y_{inf}	$-130 + 5D$

Figura 3 - Ilustração das variáveis descritas na Tab. 3.1



cionada ao CG da peça. Ainda da Tabela [1] tem-se que:

$$\epsilon_{4a} = \frac{3,5}{H} (y_{inf} - y_{min}); \epsilon_{4a}' = \frac{3,5}{H} (y_{sup} - y_{max}) \quad (3.2)$$

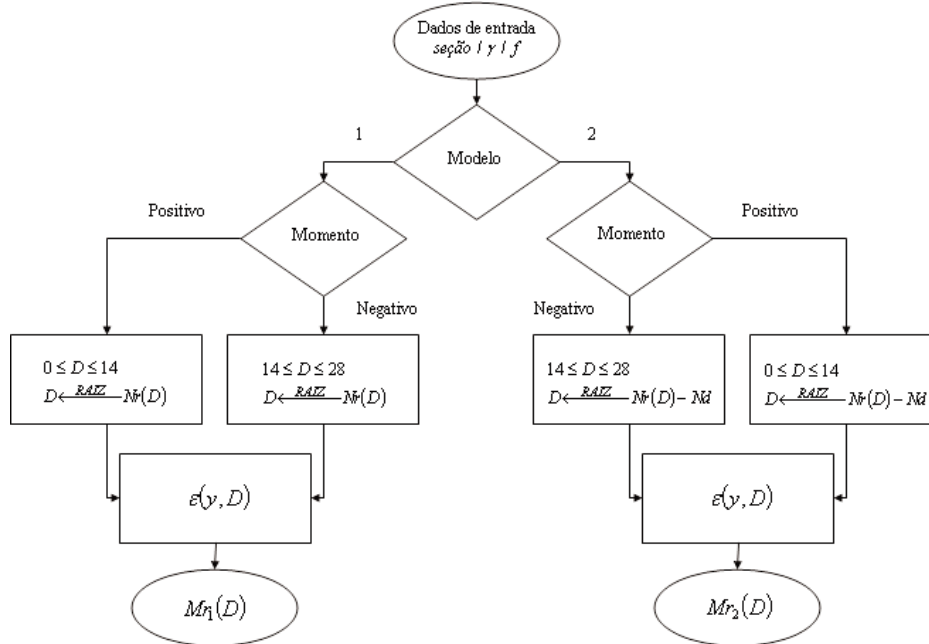
onde ϵ_{4a} (e conseqüentemente ϵ_{4a}') corresponde ao segmento indicado na Figura [3 a]. As demais variáveis podem ser vistas na Figura [3 b].

Para a Figura [3 b] tem-se que: y_{max} = distância da armadura mais superior ao CG da peça; y_{min} = distância da armadura mais inferior ao CG da peça.

3.3 Rotinas de cálculo para verificação de seções protendidas

Nesta etapa é apresentada uma descrição da seqüência lógica para as rotinas de cálculo desenvolvidas com o software Mathcad 2000 Professional [5], acompanhada de fluxograma (ver Figura [4]) contendo os principais passos para verificação de seções.

Figura 4 - Fluxograma das rotinas 1 e 2



3.3.1 Rotina 1 – cálculo do momento último de projeto pelo modelo 1

Inicialmente são solicitados todos os dados referentes à seção de concreto, as camadas de armação e fatores de ponderação. De posse desses dados de entrada inicia-se a análise da seção visando à obtenção do perfil de deformação da mesma. Para isso, os principais passos são executados: processamento das relações constitutivas para concreto e aço assim como do esforço normal em relação às deformações seccionais, conforme expressão abaixo.

$$Nr(D) = \int_{y_{inf}}^{y_{sup}} b(y) \sigma_{cd}(\epsilon(y, D)) dy + \sum_{cam\ s} A_s \sigma_{sd}(\epsilon(y, D)) + \sum_{cam\ p} A_p \sigma_{pd}(\epsilon(y, D)) \quad (3.3)$$

onde, Nr = esforço normal resultante na seção; $b(y)$ = largura da seção na ordenada y ; $cam\ s, cam\ p$ = camadas de armadura passiva e ativa na seção. O perfil de deformações seccionais correspondentes ao estado limite último é encontrado resolvendo a expressão:

$$Nr(D) = 0 \quad (3.4)$$

onde com o valor de D calcula-se o momento resistente de projeto, Mr , pela expressão:

$$Mr(D) = \int_{y_{inf}}^{y_{sup}} b(y) \sigma_{cd}(\epsilon(y, D)) y dy + \sum_{cam\ s} A_s \sigma_{sd}(\epsilon(y, D)) y_s + \sum_{cam\ p} A_p \sigma_{pd}(\epsilon(y, D)) y_p \quad (3.5)$$

3.3.2 Rotina 2 – cálculo do momento último de projeto pelo modelo 2

Nesta rotina também são fornecidos os dados referentes à seção de concreto, as camadas de armação e fatores de ponderação. Como diferencial em relação à rotina 1 tem-se que na definição da relação constitutiva para o aço de protensão o mesmo tem sua origem deslocada para o ponto $(\Delta\epsilon_p, \sigma_p)$. As demais relações constitutivas em nada se alteram. O perfil de deformações seccionais no estado limite último é encontrado resolvendo a expressão:

$$Nr(D) - Nd = 0 \quad (3.6)$$

onde Nd corresponde ao esforço normal atuando na seção e é calculado pela expressão:

$$Nd = Np + \gamma_f Nq \quad (3.7)$$

onde, Np = valor de cálculo do esforço normal devido à protensão (negativo para compressão); γ_f = fator de ponderação dos esforços solicitantes; Nq = valor do esforço normal adicional. Com o valor de D calcula-se Mr conforme a expressão (3.5). Devido a diferenças na consideração da protensão entre os dois modelos, os momentos resistentes últimos sempre guardam a relação:

$$Mr_2(D) = Mr_1(D) - Nd e \quad (3.8)$$

onde, e = excentricidade do cabo médio em relação ao CG da peça.

4. Exemplos de estruturas protendidas

4.1 Introdução

Nesta seção serão apresentados dois exemplos de estruturas hiperestáticas protendidas: um pórtico e um tabuleiro de viaduto. As estruturas serão abordadas pelos dois modelos de consideração da protensão. O objetivo é mostrar a equivalência dos modelos no cálculo da capacidade resistente de estruturas protendidas.

4.2 Exemplo de pórtico hiperestático

Considere o pórtico hiperestático protendido indicado na Figura [5], onde o traçado do cabo de protensão é dividido em quatro trechos parabólicos concordantes, como mostrado para metade do vão da viga. O objetivo é determinar a intensidade do carregamento uniformemente distribuído ao longo de toda a viga, q_u , para que o pórtico atinja o estado limite último de flexão. A força efetiva de protensão é $P = 3,6$ MN e com o propósito de simplificar a discussão do problema adotou-se as seguintes simplificações: P é a força efetiva de protensão na idade considerada e tomada constante ao longo do cabo, o aço de protensão e o aço da armadura passiva são considerados elasto-plásticos com limite de escoamento f_{py} e f_{sy} , as armaduras escoam nos estados limites últimos, os coeficientes de ponderação da resistência dos materiais e das forças externas são tomados iguais a um, é adotado o diagrama retangular de tensões para o concreto e o eixo neutro localiza-se no interior da mesa superior.

Inicialmente verificaremos o pórtico pelo modelo 1 como indicado na Figura [6 a], onde a = profundidade do bloco de compressão no concreto com tensão constante de $0.85 f_{ck}$; F_c = resultante das tensões de compressão no concreto; F_p = resultante da tensão de tração no aço de protensão; M_u = momento resistente último. Em seguida, verificaremos o pórtico pelo modelo 2 como

indicado na Figura [6 b], onde ΔF_p = resultante da tensão de tração no aço de protensão considerado como armadura passiva após aderência.

4.2.1 Modelo 1

A restrição elástica oferecida pelos pilares do pórtico acarreta o surgimento de esforços externos, denominados efeitos

hiperestáticos da protensão. No pórtico em apreço os efeitos hiperestáticos são: momento fletor hiperestático e esforço normal hiperestático.

O esforço normal hiperestático devido à ação da protensão corresponde à reação dos pilares do pórtico a deformação axial imposta à viga pela protensão, ocasionando assim um esforço normal de tração na peça que leva a diminuição do esforço normal de protensão (ver Figura [7]).

Figura 5 - Pórtico protendido

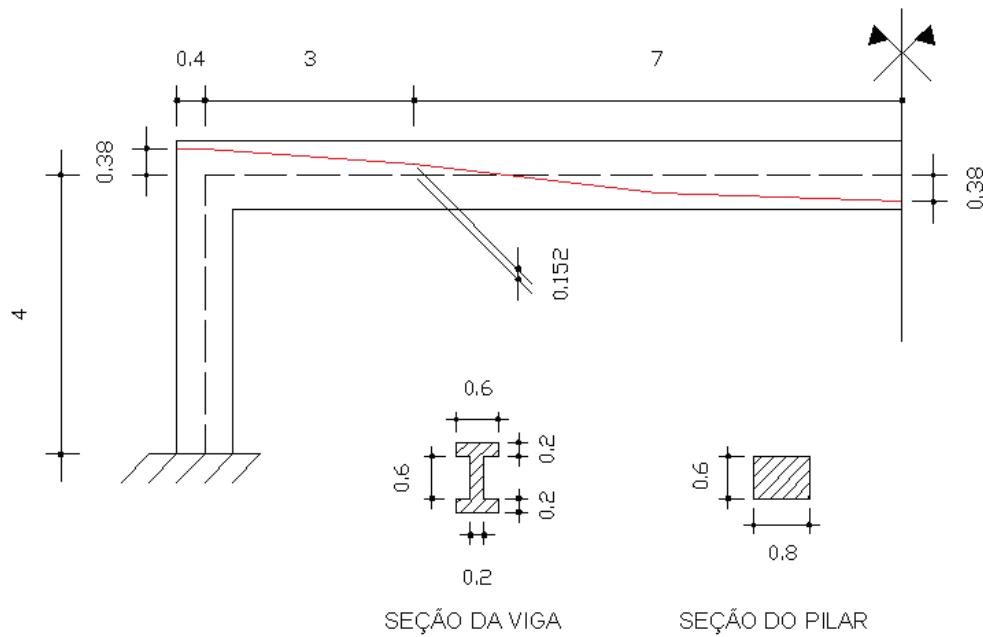


Figura 6 - Diagramas tensão-deformação; a) modelo 1; b) modelo 2

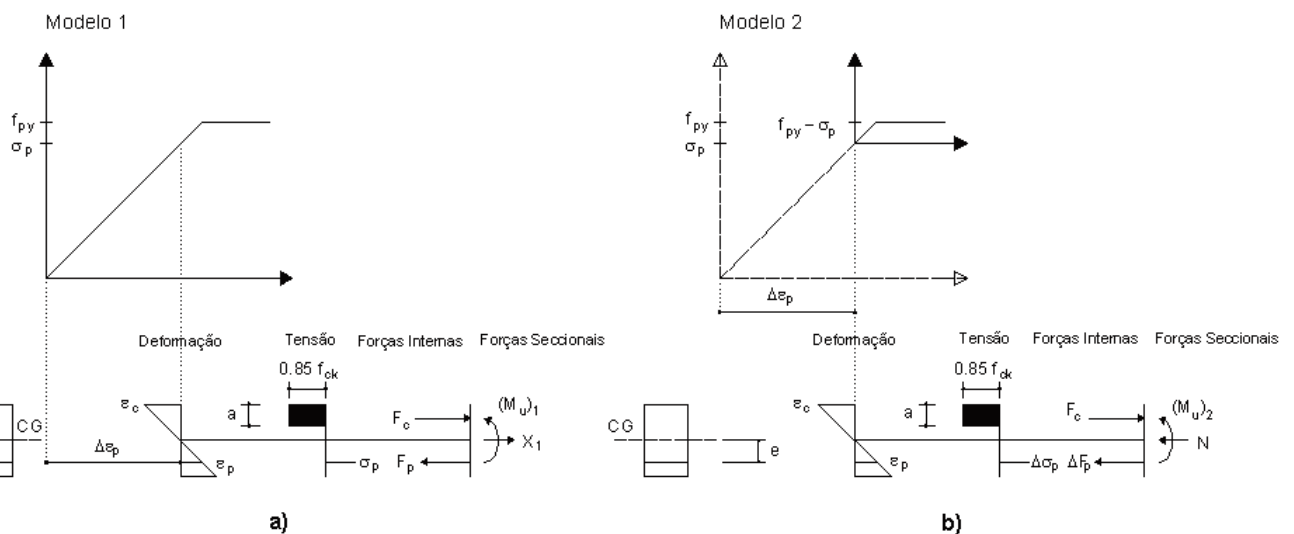


Figura 7 - Pórtico protendido e efeitos hiperestáticos da protensão na deformação imposta

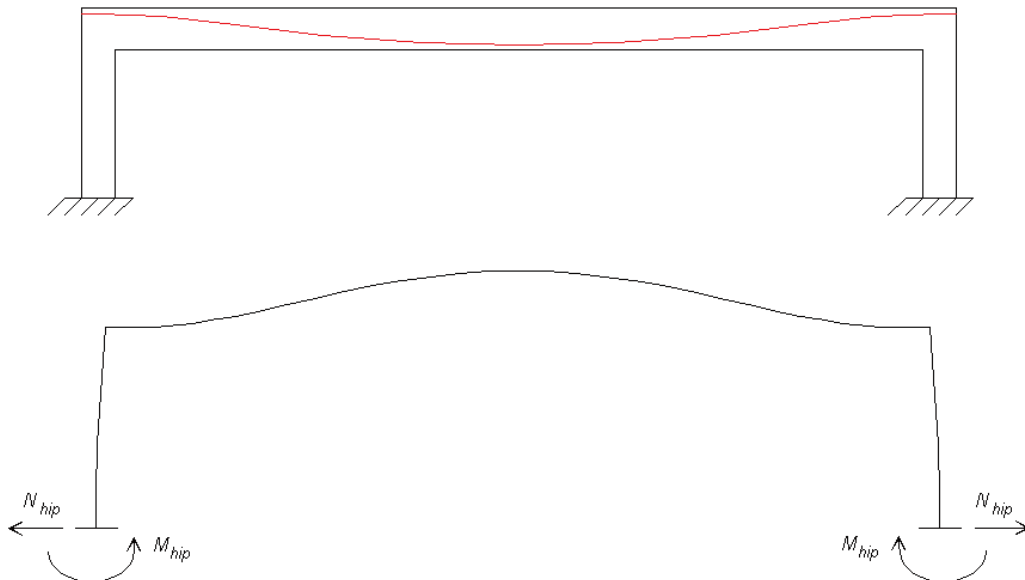
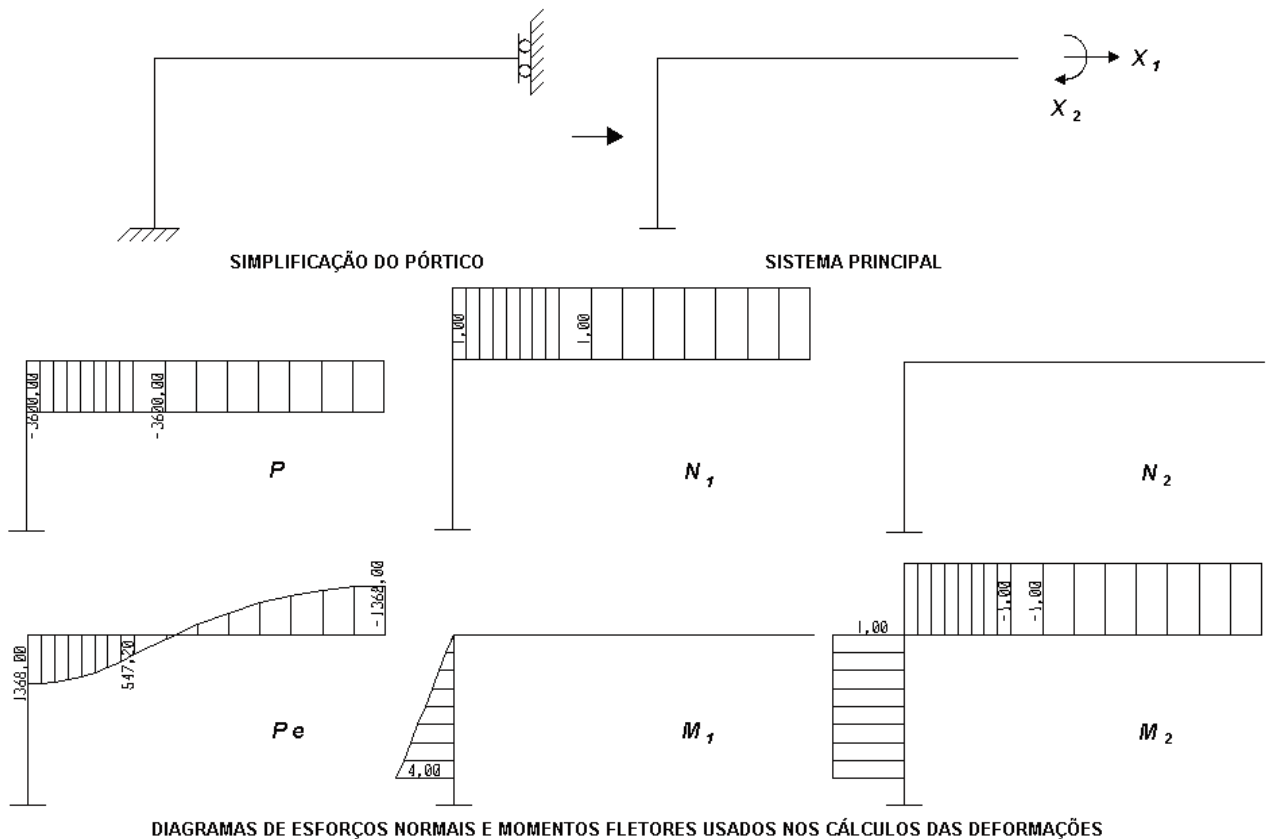


Figura 8 - Ilustração do método da flexibilidade



Para cada seção o procedimento de cálculo será:

- Calcular o momento fletor resistente último, M_u .
- Calcular o momento solicitante em função do carregamento externo unitário, M_{q1} .
- Da igualdade dos momentos resistentes e solicitantes calcula-se o valor de q_u para qual a seção em apreço atinja o estado limite último.

No modelo 1 o momento solicitante em uma dada seção vale:

$$M_{su} = q_u M_{q1} + X_2 \quad (4.1)$$

onde, X_2 = momento fletor hiperestático.

Podemos simplificar o pórtico como na Figura [8], onde cada um dos deslocamentos impedidos corresponde uma reação do vínculo, no caso, uma reação de força e uma reação de momento.

As equações que exprimem as condições de compatibilidade da Figura [8] podem ser escritas por:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

onde δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} e δ_{22} correspondem as flexibilidades devido a aplicação de uma carga unitária e momento unitário; δ_{01} e δ_{02} correspondem as deformações impostas a estrutura pela ação da protensão. Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se:

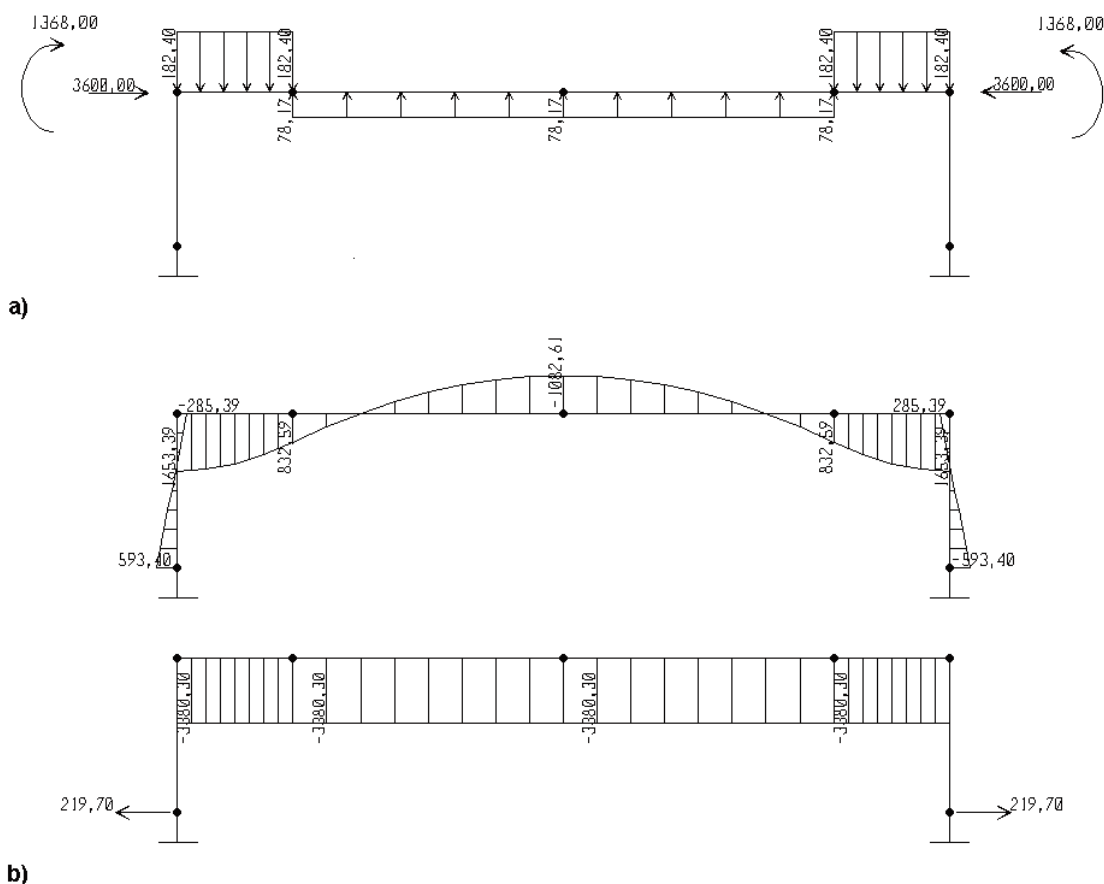
$$\delta_{11} = N_1 \left(\frac{N_1}{E_c A_v} \right) L_v + \int_0^4 M_1 \left(\frac{M_1}{E_c I_p} \right) dx \quad (4.3)$$

$$\delta_{22} = \int_0^{10} M_2 \left(\frac{M_2}{E_c I_v} \right) dx + \int_0^4 M_2 \left(\frac{M_2}{E_c I_p} \right) dx \quad (4.4)$$

$$\delta_{01} = N_1 \left(\frac{-P}{E_c A_v} \right) L_v ; \delta_{02} = \int_0^{10} M_2 \left(\frac{P e}{E_c I_v} \right) dx \quad (4.5)$$

onde, A_v = área da seção transversal da viga; I_p = momento de

Figura 9 - Protensão como carregamento externo; a) cargas; b) diagramas e reações



inércia do pilar; I_v = momento de inércia da viga; L_v = comprimento do trecho de viga considerada.

Resolvendo o sistema para os dados em apreço: $X_1 = 219,7$ kN e $X_2 = -285,39$ kN-m, correspondentes aos efeitos hiper-

Tabela 2 - Dados numéricos para o exemplo do pórtico

Dados do concreto e do aço			
$f_{ck} = 50$	MPa	$E_p = 195000$	MPa
$E_c = 39597,98$	MPa	$\Delta_{ep} = 7,385$	%
$f_{py} = 1900$	MPa	$A_p = 2,5 \cdot 10^{-3}$	m ²
Modelo 1		Modelo 2	
$(M_u)_1 = 3,668$	MN-m	$(M_u)_2 = 2,3$	MN-m
$(q_u)_1 = 0,155$	MN/m	$(q_u)_2 = 0,155$	MN/m

Figura 10 - Vão da laje hiperestática protendida

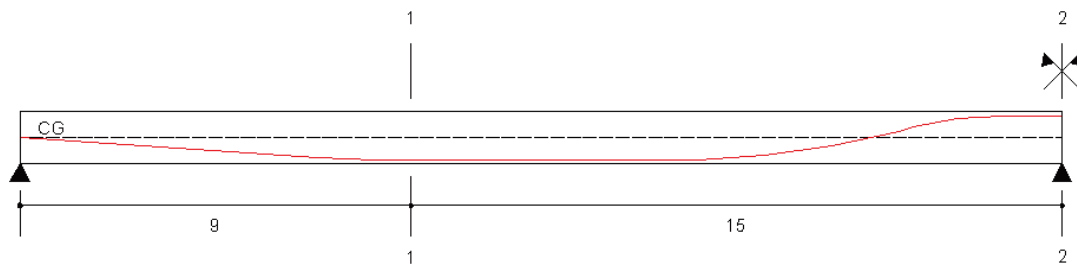
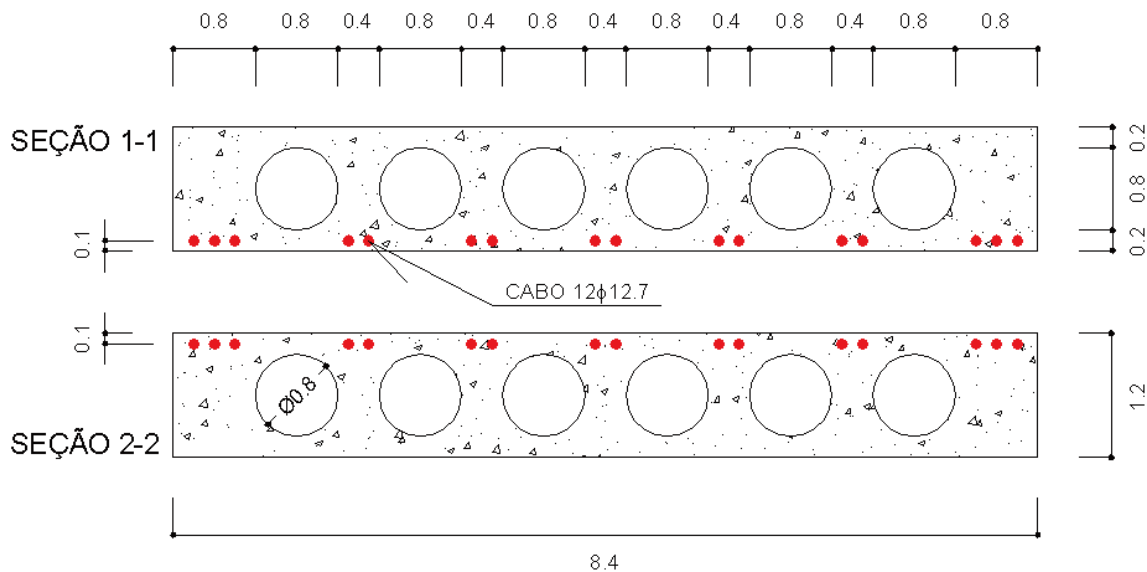


Figura 11 - Seção transversal da laje



restáticos da protensão. Para a seção em apreço q_u vale:

$$(q_u)_1 = \frac{(M_u)_1 + X_2}{M_{q1}} \quad (4.6)$$

4.2.2 Modelo 2

O procedimento de cálculo do momento resistente é semelhante ao do modelo 1. No entanto, as seções neste modelo estão sujeitas ao esforço normal resultante da protensão.

O valor do momento solicitante na seção considerada é:

$$M_{su} = q_u M_{q1} + M_{qp} \quad (4.7)$$

onde, M_{qp} = momento fletor devido unicamente a protensão. A carga última na seção considerada vale:

$$(q_u)_2 = \frac{(M_u)_2 - M_{qp}}{M_{q1}} \quad (4.8)$$

Na Figura [9 a] tem-se a protensão como carregamento externo

e, na Figura [9 b] tem-se o diagrama de momentos fletores devido a esse carregamento assim como o diagrama de esforço normal resultante e as reações exercidas nos apoios, onde as unidades são o kN e m.

A Tabela [2] apresenta valores para o concreto e aço, assim como os resultados obtidos. Pode ser observado da última linha da Tabela [2] que os valores finais de carga são idênticos para os dois modelos de análise.

4.3 Exemplo de viaduto hiperestático

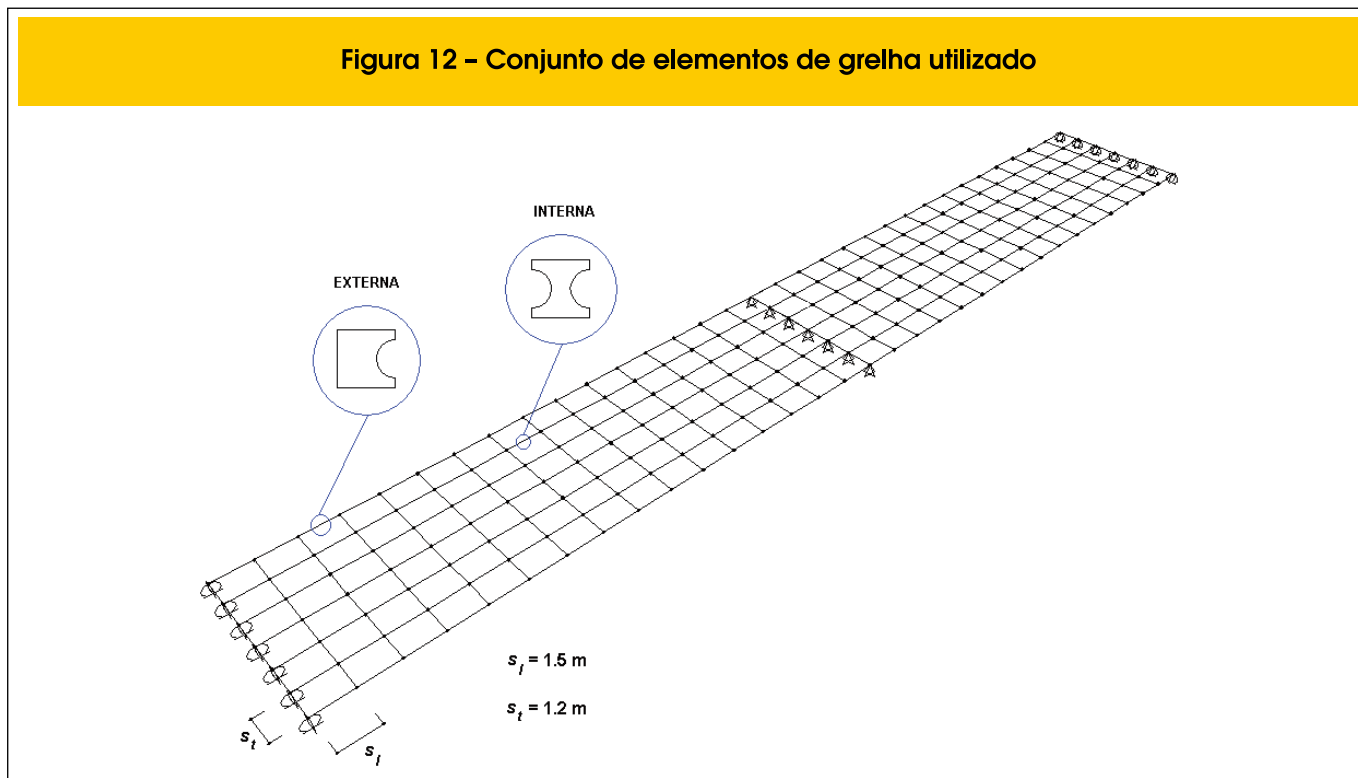
Para o caso de lajes carregadas transversalmente, a verificação à flexão no estado limite último, assim como no caso de pórticos, envolve um problema de flexão composta, para ambos os modelos, pela ação do esforço normal hiperestático e de protensão.

Considere o tabuleiro de um viaduto hiperestático protendido indicado nas Figuras [10, 11], onde o traçado dos cabos de protensão é mostrado através das coordenadas descritas na Tabela [3]. O objetivo é determinar a intensidade do máximo carregamento móvel através de um coeficiente de majoração da carga móvel, λ , para que a primeira seção atinja o estado limite último de flexão. A força efetiva média de protensão aplicada aos 16 cabos mostrados na Figura [11], em cada um dos 16 segmentos, no qual foi dividido o vão, também é mostrada na Tabela [3]. A seção transversal da laje do viaduto apresenta células circulares ao longo de todo seu comprimento, uma vez que não foi previsto neste caso diafragma sobre os apoios da laje. A discussão do problema adota os procedimentos de verificação do estado limite último de flexão segundo a NBR 6118.

Tabela 3 - Coordenadas e força efetiva de protensão do cabo nos segmentos do vão

Segmentos	Excentricidade do cabo (m)			Força efetiva de protensão (kN)		
	$e_{inicial}$	$e_{médio}$	e_{final}	$P_{inicial}$	$P_{médio}$	P_{final}
1	0,000	-0,050	-0,100	21055,3	21087,8	21120,3
2	-0,100	-0,150	-0,200	21120,3	21150,7	21181,1
3	-0,200	-0,249	-0,299	21181,1	21193,5	21205,9
4	-0,299	-0,349	-0,399	21205,9	21193,1	21180,3
5	-0,399	-0,444	-0,488	21180,3	21192,7	21205,2
6	-0,488	-0,494	-0,500	21205,2	21303,5	21401,8
7	-0,500	-0,500	-0,500	21401,8	21443,7	21485,5
8	-0,500	-0,500	-0,500	21485,5	21494,9	21504,2
9	-0,500	-0,500	-0,500	21504,2	21488,0	21471,8
10	-0,500	-0,500	-0,500	21471,8	21455,3	21438,9
11	-0,500	-0,478	-0,456	21438,9	21537,9	21636,9
12	-0,456	-0,378	-0,300	21636,9	21550,0	21463,1
13	-0,300	-0,164	-0,028	21463,1	21296,7	21130,3
14	-0,028	0,155	0,338	21130,3	20719,6	20309,0
15	0,338	0,419	0,499	20309,0	20040,3	19771,5
16	0,499	0,500	0,500	19771,5	19889,2	20006,9

Figura 12 - Conjunto de elementos de grelha utilizado



Neste exemplo aplica-se técnica bastante utilizada na prática do dimensionamento, que consiste em modelar a laje como um conjunto de elementos de grelha distribuindo a rigidez longitudinal e transversal da laje, respectivamente, nos elementos longitudinais e transversais da grelha, através de suas inércias a flexão e torção [6], como mostrado na Figura [12]. As peças longitudinais internas tiveram seus eixos locados a meia distância entre os centros de células adjacentes e, as longitudinais externas a meia distância entre o limite da laje e o centro da célula adjacente.

A laje é tratada como uma placa ortotrópica e as propriedades dos elementos longitudinais e transversais são determinadas separadamente [7].

O cálculo da inércia a flexão das porções de seções longitudinais segue a metodologia clássica. Na determinação da inércia a flexão das porções de seções transversais recomenda-se usar o Método de Elliott, representado pela expressão abaixo.

$$i = \frac{h^3}{12} \left[1 - 0,95 \left(\frac{d_v}{h} \right)^4 \right] \tag{4.9}$$

onde, i = momento de inércia por unidade de largura; d_v = diâmetro da célula.

Conseqüentemente, para as porções de seções transversais, o momento de inércia vale:

$$I_t = s_t \cdot i \tag{4.10}$$

onde, I_t = momento de inércia das peças transversais; s_t = medida do segmento longitudinal do elemento de grelha.

Para a inércia a torção de lajes vazadas por unidade de altura, recomenda-se usar o Método de Ward e Cassell, onde as constantes de torção para as peças longitudinais e transversais da grelha, respectivamente J_l e J_t , valem:

$$j = 0,83 \frac{h^3}{6} \tag{4.11}$$

$$J_l = s_t \cdot j \tag{4.12}$$

$$J_t = s_l \cdot j \tag{4.13}$$

onde, j = constante de torção por unidade de largura; s_t = medida do segmento transversal do elemento de grelha. A Tabela [4] sintetiza as propriedades geométricas das peças.

4.3.1 Carregamento

O carregamento aplicado aos nós dos elementos de grelha consis-

Tabela 4 – Síntese das propriedades geométricas

Propriedades das seções					
Longitudinal externa		Longitudinal interna		Transversal	
A = 1,189	m ²	A = 0,937	m ²	A = 1,8	m ²
I = 0,163	m ⁴	I = 0,153	m ⁴	I = 0,175	m ⁴
J = 0,287	m ⁴	J = 0,287	m ⁴	J = 0,359	m ⁴

te da composição de cargas distribuídas multiplicadas pela área de influência de cada nó e cargas concentradas. As cargas distribuídas consistem do peso próprio das seções, pavimentação e carga de multidão. As cargas concentradas originam-se das rodas do veículo. O valor das cargas distribuídas pela área de influência de cada nó vale:

$$F_{ext} = A_{ext} b 25 \text{ kN/m}^3; F_{int} = A_{int} b 25 \text{ kN/m}^3 \quad (4.14)$$

ii) para pavimentação:

$$F_{ext} = \frac{a}{2} b \text{ esp } 24 \text{ kN/m}^3; F_{int} = a b \text{ esp } 24 \text{ kN/m}^3 \quad (4.15)$$

iii) para carga de multidão:

$$F_{ext} = \frac{a}{2} b 5 \text{ kN/m}^2; F_{int} = a b 5 \text{ kN/m}^2 \quad (4.16)$$

onde: F_{ext} , F_{int} = carregamento concentrado nos nós da seção

externa e interna devido carregamento distribuído; A_{ext} , A_{int} = área da seção transversal da peça longitudinal externa e interna; a = altura da área de influência; b = base da área de influência; esp = espessura do pavimento = 0,07 m.

A Figura [13] mostra as áreas de influência para os nós das peças longitudinais externas e internas.

A Figura [14] mostra a carga distribuída de multidão e as cargas concentradas do veículo de classe 45 sobre uma região da laje do viaduto. A Figura [14] também exemplifica a simplificação adotada no tratamento das cargas móveis sobre a laje.

A carga concentrada das rodas do veículo coincide com os nós da grelha no sentido longitudinal para as hipóteses de carregamento. O mesmo não ocorre no sentido transversal, sendo necessária a distribuição dessa carga. A Tabela [5] resume o valor das cargas aplicadas aos nós dos elementos de grelha.

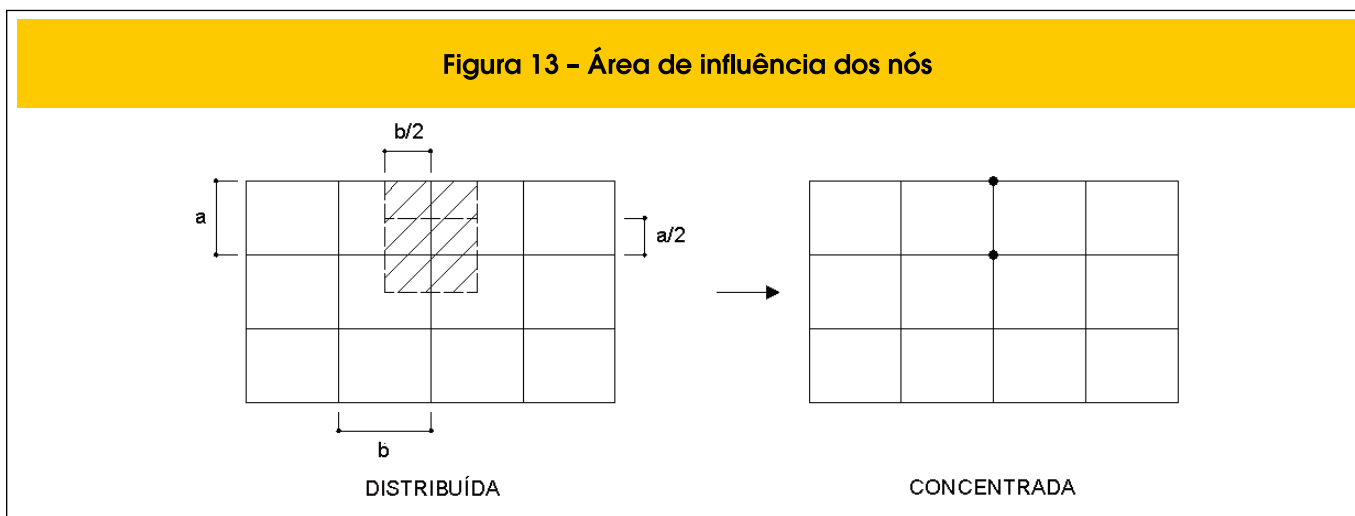
4.3.2 Hipóteses de carregamento

Neste caso, estão sendo analisadas apenas duas seções das peças longitudinais, uma na porção externa e uma na porção interna, para a seção 1-1 das Figuras [10, 11].

Na determinação de λ para que uma das duas seções em apreço atinja o estado limite último de flexão, considerou-se duas hipóteses de carregamento: hipótese 1 e hipótese 2.

Na hipótese 1 as cargas das rodas centrais do veículo foram posicionadas no primeiro vão a 15 m do apoio central, conforme ordenadas da linha de influência de momentos fletores para a seção

Figura 13 – Área de influência dos nós



1-1 do viaduto. As demais cargas foram aplicadas somente aos nós do primeiro vão (ver Figuras [15, 16]).

Na hipótese 2 as cargas das rodas centrais do veículo foram posicionadas no primeiro vão a 10,5 m do apoio central, conforme ordenadas da linha de influência de momentos fletores para a seção 2-2 do viaduto. As demais cargas foram aplicadas aos nós dos dois vãos.

4.3.3 Modelo 1

Pelo Princípio de St Venant, considerando uniforme a tensão de protensão que atua nas seções da laje do viaduto, posteriormente subdividindo proporcionalmente essa tensão nas porções de seção que formam os elementos de grelha longitudinal e subtraindo-se do esforço normal total dela resultante o esforço normal isostático

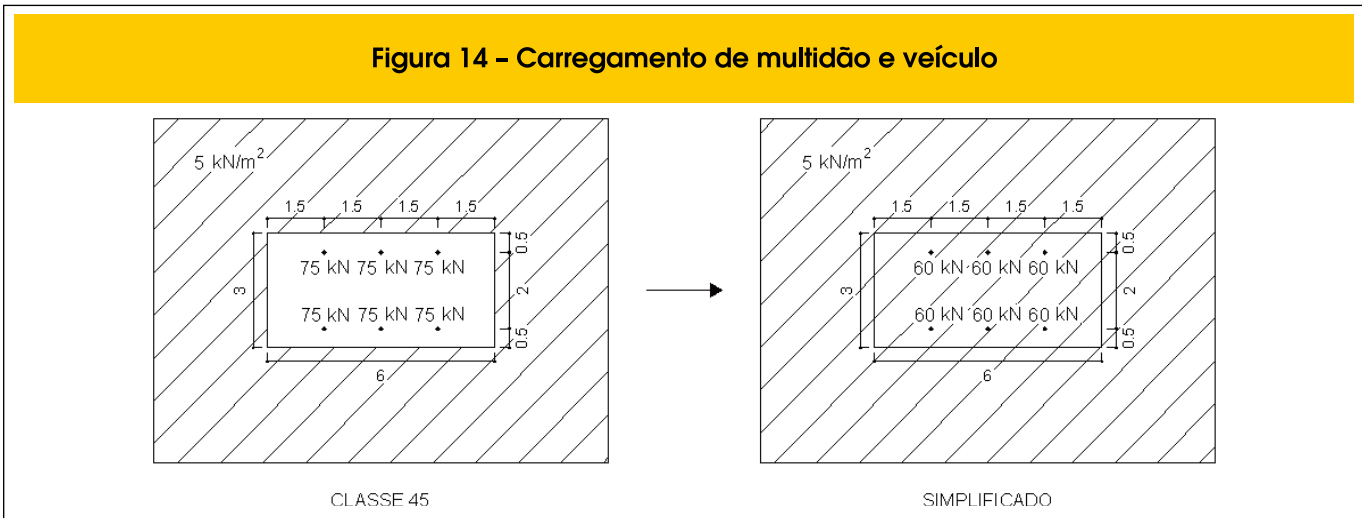
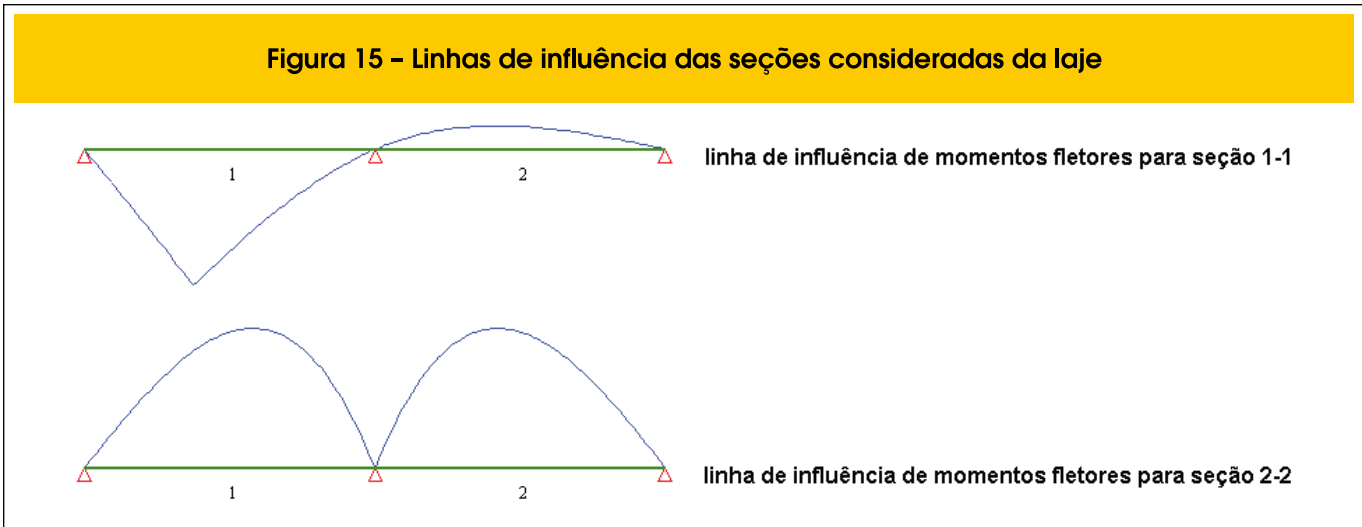


Tabela 5 - Resumo do valor das cargas aplicadas aos nós

Cargas (kN)	Seções	
	Longitudinal Externa	Longitudinal Interna
Peso Próprio	44,577	35,149
Pavimentação	1,512	3,024
Multidão	4,5	9
Veículo	60	Conforme Figura (16)



tico de protensão em cada porção de seção, obtêm-se os esforços normais hiperestáticos de protensão. Esses esforços normais hiperestáticos correspondem a forças de tração e compressão, conforme parcela da força efetiva de protensão aplicada à porção de seção analisada. Este procedimento é mostrado a seguir, tomando por base as informações constantes da Tabela [3] e Figura [11].

$$(\sigma)_{1-1} = \frac{(P_{final})_{1-1}}{(A_{seção})_{1-1}} \quad (4.17)$$

$$(N_{tot})_{ext} = (\sigma)_{1-1} A_{ext} ; (N_{iso})_{ext} = \frac{3}{16} (P_{final})_{1-1} \quad (4.18)$$

$$(N_{tot})_{int} = (\sigma)_{1-1} A_{int} ; (N_{iso})_{int} = \frac{2}{16} (P_{final})_{1-1} \quad (4.19)$$

para ambas vale:

$$N_{hip} = N_{tot} - N_{iso} \quad (4.20)$$

onde, σ = tensão de compressão na seção considerada da laje; P_{final} = força efetiva de protensão na seção considerada da laje; N_{tot} , N_{iso} e N_{hip} = esforços normais de protensão na porção de seção considerada da laje, respectivamente, esforço normal total, isostático e hiperestático. A Tabela [6] resume os valores de esforços normais.

Para cada porção de seção o procedimento de cálculo será:

- Calcular o momento fletor resistente último, $Mr(D)$.
- Obter dos programas comerciais de análise estrutural o momento solicitante em função do carregamento externo permanente e móvel, respectivamente, M_g e M_q .
- Da igualdade dos momentos resistentes e solicitantes calcula-se λ , para o qual uma das seções em apreço atinja o estado limite último.

Figura 16 - Hipótese 1 de carregamento das cargas do veículo

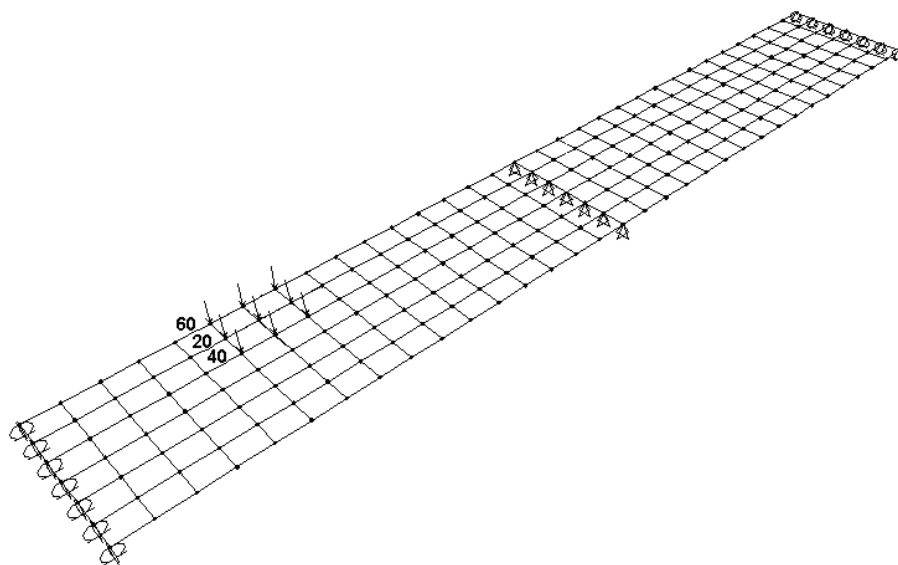


Tabela 6 - Resumo dos valores dos esforços normais

Esforço normal (MN)	Seção 1-1	
	Externa	Interna
N_{hip}	-0,412	0,164
N_{tot}	3,601	2,840

No modelo 1 o momento solicitante em uma dada seção vale:

$$M_{su} = 1,35 M_g + 1,5 \lambda \varphi M_q + M_{hip} \quad (4.21)$$

$$\varphi = 1,4 - 0,007 l = 1,232 \quad (4.22)$$

onde, φ = coeficiente de impacto para obras rodoviárias; l = comprimento, em metros, de cada vão teórico do elemento carregado, segundo a NBR 7187 [8].

O valor do momento hiperestático de protensão é obtido conforme a expressão a seguir:

$$M_{hip} = M_{qp} - M_{iso} \quad (4.23)$$

onde, M_{iso} = momento isostático de protensão; M_{hip} = momento hiperestático de protensão. O momento total devido a protensão na seção considerada foi obtido dos programas comerciais de análise estrutural e o momento isostático de protensão da equação:

$$M_{iso} = N_{iso} e \quad (4.24)$$

Os valores, em MN-m, dos momentos resistentes últimos, momentos solicitantes em função do carregamento externo permanente e móvel, momentos hiperestáticos devidos a protensão e λ , nas porções externa e interna da seção 1-1 nas hipóteses de carregamento 1 e 2, são mostrados na Tabela [7], sendo ilustrado na Figura [17] o cálculo do momento resistente último para a porção interna da seção 1-1, através da rotina 1 de cálculo.

No resultado das análises de modelagem por grelha tem-se descon-

tinuidade no diagrama de momentos nas duas direções para as cargas aplicadas aos nós, resultantes do carregamento externo na área de influência de cada nó. Para os valores dos momentos fletores, em cada nó, tomou-se à média das duas barras que nele incidem.

4.3.4 Modelo 2

Analogamente ao modelo 1, no modelo 2 o momento solicitante em uma dada seção vale:

$$M_{su} = 1,35 M_g + 1,5 \lambda \varphi M_q + M_{qp} \quad (4.25)$$

A Tabela [8] mostra os momentos e λ para o modelo 2. A Figura [18] dá continuidade a Figura [17].

Como a verificação do estado limite último de flexão envolve problema de flexão composta, em ambos os modelos, pela ação do esforço normal hiperestático e de protensão, as rotinas de cálculo foram ligeiramente modificadas, como mostra as Figuras [17, 18].

5. Conclusões

Pelo exposto anteriormente, as principais conclusões deste trabalho são:

- Para $\gamma_p \neq 1$, os resultados da análise de capacidade resistente segundo os dois modelos de consideração da protensão somente coincidirão se o pré-alongamento e as cargas equivalentes de protensão forem computados com base no mesmo valor de cálculo da força de protensão.
- A NBR 6118 ao frisar que na verificação a ruptura deve-se levar em conta os efeitos hiperestáticos da protensão, leva a utilização apenas do modelo 1 na verificação de estruturas protendidas. É desejável que o modelo 2 seja também contemplado, o que simplificaria a verificação uma vez que os esforços são diretamente obtidos das saídas dos programas de análise estrutural.
- Devido à equivalência dos dois modelos a ambigüidade na consideração da protensão é comumente utilizada, onde os efeitos hiperestáticos da protensão são extraídos das saídas dos programas de análise considerando a protensão como carregamento externo.

Tabela 7 – Resumo dos valores para o modelo 1					
Seção 1-1					
Hipótese 1	Mr(D)	1,35 M _g	1,5 φ M _q	M _{hip}	λ
Externa	5,154	2,058	1,089	0,682	2,22
Interna	3,753	1,931	0,983	0,093	1,76
Hipótese 2	Mr(D)	1,35 M _g	1,5 φ M _q	M _{hip}	λ
Externa	5,154	1,546	0,729	0,682	4,02
Interna	3,753	1,451	0,678	0,093	3,26

Tabela 8 – Resumo dos valores para o modelo 2

Seção 1-1					
Hipótese 1	Mr(D)	1,35 M_g	1,5 φ M_q	M_{hip}	λ
Externa	3,148	2,058	1,089	-1,325	2,22
Interna	2,415	1,931	0,983	-1,245	1,76
Hipótese 2	Mr(D)	1,35 M_g	1,5 φ M_q	M_{hip}	λ
Externa	3,148	1,546	0,729	-1,325	4,02
Interna	2,415	1,451	0,678	-1,245	3,26

– As normas brasileiras devem acompanhar as normas internacionais adotando $\gamma_p = 1$ para verificação global da capacidade portante de obras em concreto protendido com cabos internos.

6. Referências bibliográficas

- [01] EUROCODE 2 Ref. Nº EN 1992-1-1 (GEN, 2004), Design of Concrete Structures – Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings, European Standard, English Version, April 2004.
- [02] NBR 6118 – Março 2003 (ABNT, 2003), Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, 2003.
- [03] ACI 318-02, Building Code Requirements for Structural Concrete, American Concrete Institute, 2002.
- [04] MUSSO Jr, F., “Dimensionamento de Seções de Concreto Armado e Verificação da Estabilidade de Vigas Colunas no Estado Limite”, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Depto. de Eng. Civil, 1987.
- [05] MathSoft, “MATHCAD 2000 User’s Guide”, MathSoft Inc. U.S., 2000.
- [06] HAMBLY, E.C., Bridge Deck Behaviour, 2ª Edição, E & FN SPON, Londres e Nova Iorque, 1991.
- [07] O'BRIEN, E.J., KEOGH, D.L., Bridge Deck Analysis, E & FN SPON, USA e Canada, 1999.
- [08] NBR 7187 – Maio 1987 (ABNT, 1987), Projeto e Execução de Pontes de Concreto Armado e Protendido, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, 1987.

Figura 17 – Momento resistente último da porção interna na seção 1-1 pelo modelo 1

VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES PROTENDIDAS <modelo1>

1. Dados de Entrada

	Base Superior	Base Inferior	Altura	As <cm²>	Prof. <cm>	Preslon. <%>
traj :=	1	2	3			
1	1.2	1.2	0.2			
2	1.2	0.922	0.025			
3	0.922	0.813	0.025			
4	0.813	0.671	0.05			
5	0.671	0.576	0.05			
6	0.576	0.507	0.05			
7	0.507	0.458	0.05			
8	0.458	0.425	0.05			
9	0.425	0.406	0.05			
10	0.406	0.4	0.05			
11	0.4	0.406	0.05			
12	0.406	0.425	0.05			
13	0.425	0.458	0.05			
14	0.458	0.507	0.05			
15	0.507	0.576	0.05			
16	0.576	0.671	0.05			
17	0.671	0.813	0.05			
18	0.813	0.922	0.025			
19	0.922	1.2	0.025			
20	1.2	1.2	0.2			

cm :=	1	2	3
1	23.888	1.1	5.792
2			
3			
4			
5			

Momento Avaliado (positivo = p ou negativo = n) **M_A := "p"** $f_c = 0.85 \cdot f_{ck} / \gamma_c$

Fator do conc. $\gamma_c := 1.4$ Resistência carac. <MPa> $f_{tk} := 30$ Along. Rupt. (P) <%> $sak := 35$

Fator do aço $\gamma_s := 1.15$ Tensão escoam (S) <MPa> $f_{yk} := 500$ Mód. Elast. (S) <MPa> $E_s := 210000$

Fator dos esf. $\gamma_f := 1.4$ Tensão escoam (P) <MPa> $f_{pk} := 1900$ Mód. Elast. (P) <MPa> $E_p := 195000$

Esf Normal Prot. <MN> $N_{tot} := -0.164$ Esf Normal Hiperestático <MN> $N_{hip} := 0$ $N_d := N_{tot} + N_{hip}$ (+)tração (-)comp.

Cálculo = "OK" Opção de momento = "válida"

Seção Transversal

Deformada

$A_c = 0.941$ <m²> $I = 0.153$ <m⁴> $pen = 0.232$ <m>

$y_{sup} = 0.6$ <m> $y_{inf} = 0.6$ <m> $st = -2.679$ <%> $sb = 11.153$ <%>

Momento último de projeto <MN·m> **M_{h(D)} = 3.753** Momento de serviço <MN·m> $\frac{M_h(D)}{\gamma_f} = 2.682$

Figura 18 – Momento resistente último da porção interna na seção 1-1 pelo modelo 2

