

Smearred Crack Models for Reinforced Concrete Beams by Finite Element Method

Modelos de Fissuração Distribuída em Vigas de Concreto Armado pelo Método dos Elementos Finitos



R.C.G. MENIN ^a
renatomenin@gmail.com

L.M. TRAUTWEIN ^b
leandromt@gmail.com

T.N. BITTENCOURT ^c
tbitten@gmail.com

Abstract

The main goal of the present work is to present a comparison between two different strategies for the computational simulation of reinforced concrete structures, both using smeared crack models to represent the behavior of the materials. As a first approach, a multidirectional smeared crack model available in DIANA has been adopted along with different softening rules for the cracked materials (brittle, linear, non-linear of Moelands-Reinhardt and Hordijk). Additionally, the Disturbed Stress Field Model – DSFM has also been adopted to model cracked concrete as an orthotropic material with smeared rotating cracks. The finite element codes DIANA and VecTor2 have been used to evaluate the performance of the different smeared crack models to predict the behavior of reinforced concrete beams subjected primarily to flexure.

Keywords: *smeared crack, reinforced concrete, finite element method.*

Resumo

O objetivo principal do trabalho é apresentar uma comparação entre distintas estratégias de simulação computacional de estruturas de concreto armado utilizando modelos de fissuração distribuída. Em uma primeira abordagem, foi adotado o modelo multidirecional de fissuração distribuída do programa DIANA empregando-se diferentes regras de amolecimento para o material fissurado (frágil, linear e não-lineares de Moelands-Reinhardt e de Hordijk). Posteriormente, foi utilizada a formulação DSFM – Disturbed Stress Field Model, modelando o concreto fissurado como um material ortotrópico com fissuras distribuídas do tipo rotacionais. Os programas DIANA e VecTor2 foram utilizados como ferramentas para avaliar a eficácia dos diferentes modelos no estudo de vigas de concreto armado submetidas a esforços de flexão.

Palavras-chave: *fissuração distribuída, concreto armado, método dos elementos finitos.*

^a Grupo de Modelagem de Estruturas de Concreto / GMEC, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo / EPUSP, renatomenin@gmail.com, Av. Prof. Almeida Prado tv.2, n.83
Cidade Universitária CEP 05508-900, São Paulo, Brasil;

^b Grupo de Modelagem de Estruturas de Concreto / GMEC, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo / EPUSP, leandromt@gmail.com, Av. Prof. Almeida Prado tv.2, n.83
Cidade Universitária CEP 05508-900, São Paulo, Brasil;

^c Grupo de Modelagem de Estruturas de Concreto / GMEC, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo / EPUSP, tbitten@gmail.com, Av. Prof. Almeida Prado tv.2, n.83,
Cidade Universitária CEP 05508-900, São Paulo, Brasil.

1. Introdução

O concreto armado se tornou um dos mais importantes materiais estruturais no último século, sendo amplamente utilizado em diferentes áreas da engenharia civil. Em função da sua baixa resistência a esforços de tração, ocorrem fissuras nas estruturas de concreto mesmo quando submetidas a baixos níveis de carregamento, que provocam uma redução da sua rigidez e modificam a sua distribuição interna de tensões, de modo que a estrutura começa a apresentar comportamento não-linear.

A modelagem da fissura é um tópico bastante complexo e intrigante por estar associada ao estudo de descontinuidades no campo de deslocamentos. Na simulação numérica de estruturas de concreto armado fissuradas via Método dos Elementos Finitos, três correntes distintas vem sendo desenvolvidas para representar as fissuras: discreta, distribuída e incorporada.

Os modelos de fissuração discreta se baseiam na idéia de trabalhar sempre com a parte do sólido que permanece contínua e sem danos, de modo que durante a formação ou progressão de uma fissura existente, seus lados se incorporam ao contorno do sólido. As fissuras são modeladas como descontinuidades de deslocamentos entre os elementos finitos e devem se desenvolver ao longo do contorno dos mesmos, o que acaba gerando uma restrição na sua direção da propagação. A aplicação destes modelos fica restrita ao estudo de problemas envolvendo a progressão de poucas fissuras, o que dificulta a sua utilização no caso da grande maioria das estruturas de concreto armado.

Nos modelos de fissuração distribuída, o material fissurado é tratado como contínuo, e a descontinuidade do campo de deslocamentos causada pela fissura é espalhada ao longo do elemento, alterando-se a equação constitutiva. Apesar do sucesso no estudo da grande maioria das estruturas de concreto armado, dentre as deficiências destes modelos, podem-se destacar a dificuldade no estudo de situações de fraturamento localizado, bem como problemas de sensibilidade em relação à malha de elementos finitos. Posteriormente, surgiram os modelos de fissura incorporada, que reúnem os aspectos favoráveis das duas correntes anteriores: não há necessidade de fazer uma re-definição de malha (deficiência observada no modelo discreto) e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada (deficiência do modelo distribuído). Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas em elementos finitos padrão.

2. Histórico dos modelos de fissuração distribuída

Desde o início da utilização do Método dos Elementos Finitos em estruturas de concreto armado, se tornou evidente as vantagens em representar as fissuras pela alteração das equações constitutivas (fissuração distribuída) em relação à alteração da malha de elementos finitos (fissuração discreta). As primeiras análises baseavam-se na idéia de ruptura frágil, ou seja, tornar nula a rigidez do material na direção da máxima tensão de tração quando a mesma excedia a resistência à tração.

Posteriormente, observou-se que melhores resultados na fase pós-pico poderiam ser obtidos admitindo-se uma diminuição gradual da tensão com o aumento da deformação. Para representar esta diminuição gradual de tensão, o diagrama tensão-deformação passou a ser definido por meio de valores experimentais e, assim,

vários modelos foram propostos (Cedolin e Dei Poli [1], Bazant e Gambarova [2], Gupta e Maestrini [3], e Vecchio [4]).

Embora utilizados com grande êxito para representar o comportamento de peças de concreto armado que apresentam um padrão de fissuração bem distribuído, quando usados para simular o comportamento de peças em que uma fissura predomina e abre excessivamente (concreto simples ou vigas parede), estes modelos apresentam algumas deficiências. Uma das deficiências é a sensibilidade em relação à malha, causada em especial pela não consideração de conceitos da Mecânica da Fratura. Assim, surgiu a necessidade de aplicar diretamente os conceitos da Mecânica da Fratura na análise de estruturas de concreto, surgindo uma série de novos modelos (Bazant e Cedolin [5], Bazant e Oh[6], Feestra e de Borst [7]) . Simultaneamente, Rots e Blaauwendraad [8] apresentaram um estudo comparativo entre modelos de fissura discreta e distribuída. Neste estudo foi apresentada uma divisão das fissuras distribuídas em fixas e rotacionais. No modelo fixo, a orientação da fissura é mantida constante durante o processo computacional, enquanto no modelo rotacional é possível a orientação da fissura mudar, acompanhando as direções principais. Existe ainda uma opção intermediária que é o conceito de fissura distribuída fixa multi-direcional. Existem também os modelos baseados na teoria da plasticidade, que são capazes de representar bem o comportamento das fases pré-pico e pós-pico, sendo constituídos por um modelo constitutivo e um critério de ruptura. Nesta linha estão os modelos de Ottosen [9] e Pramono e Willam [10].

3. Modelos de fissuração no programa DIANA

O programa DIANA – versão 9.1 foi utilizado para avaliar o desempenho de diferentes modelos de fissuração distribuída. O DIANA é um software de elementos finitos baseado no método dos deslocamentos para análise não-linear de estruturas de concreto, que vem sendo desenvolvido, desde 1972, pela Delft University of Technology na Holanda.

Os modelos de fissuração distribuída no DIANA são definidos através da combinação de três fatores: um critério de ruptura (constante ou linear), a transferência de corte através da fissura (total, constante ou variável) e o comportamento de amolecimento do material (frágil, linear, multilinear ou não-linear). De modo a possibilitar uma combinação do modelo de fissuração com um comportamento plástico do material, a deformação total, ϵ , é decomposta em duas parcelas, sendo uma elástica, ϵ^e , e outra de fissura, ϵ^{cr} . Na definição do modelo constitutivo deve-se ainda estabelecer um critério de iniciação da fissura e a relação entre as tensões e deformações de fissura.

No processo de iniciação de uma nova fissura, dois pré-requisitos são necessários: a tensão principal de tração deve exceder uma tensão limite; e, no caso de existência de uma fissura prévia, o ângulo entre a fissura existente e a tensão principal de tração deve exceder o valor do ângulo de fissuração inicial. Em relação ao modelo constitutivo, a relação entre a tensão e a deformação na direção normal da fissura pode ser expressa por:

$$\sigma^{cr}(\epsilon^{cr}) = f_t y \left(\frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_{ult}} \right) \quad (1)$$

onde, f_t é a resistência à tração do concreto e a variável y é a função que representa o diagrama de amolecimento do material. No modo I de fissuração, a deformação última da fatura ε_{ult} é suposta constante, podendo ser obtida em função da resistência à tração f_t , da energia de fratura G_f e da área do elemento (representada pelo seu comprimento equivalente h):

$$\varepsilon_{ult} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{G_f}{hf_t} \right) \quad (2)$$

sendo

$$\alpha = \int_{x=0}^{x=\infty} y(x) dx \quad e \quad x = \frac{\varepsilon^{cr}}{\varepsilon_{ult}} \quad (3)$$

Dentre os modelos de fissuração distribuída disponíveis no programa DIANA pode-se destacar: fixos, multidirecionais e rotacionais. Tais modelos são baseados no princípio de engrenamento entre agregados do material concreto, no qual a energia de fratura G_f pode ser calculada de duas formas: a primeira delas com base no código modelo CEB-FIP [11] e a segunda com base nas leis de representatividade dos ramos de endurecimento e amolecimento do concreto. Uma outra possibilidade é a utilização de leis de endurecimento-amolecimento com modelos reológicos simples e conjugados oriundos da teoria da plasticidade. No presente trabalho foram utilizados apenas os modelos multidirecionais de fissuração distribuída.

3.1 Modelos multidirecionais de fissuração distribuída

Os modelos multidirecionais se caracterizam por apresentar um comportamento intermediário entre os modelos fixo e rotacional. Estes modelos possibilitam a abertura de várias fissuras em um mesmo ponto e em função da definição do parâmetro denominado "threshold angle", pode-se obter um modelo fixo ou rotacional. Este parâmetro representa o ângulo entre uma fissura existente e outra formada num mesmo ponto e é por padrão igual a 60°. Se este parâmetro for modificado para 90° obtém-se o modelo fixo e para 0° obtém-se o rotacional. No caso do presente trabalho, utilizou-se o valor padrão fornecido pelo DIANA.

Os modelos multidirecionais apresentam algumas diferenças em relação aos modelos fixos, dentre as quais se pode destacar: adoção de um comportamento do concreto sobre tração, opção de minorar ou não a rigidez transversal e a utilização de modelos constitutivos oriundos da teoria da plasticidade. O comportamento do concreto submetido a esforços de tração pode ser definido de duas formas distintas: constante ou linear:

- **Constante:** que admite um valor constante de tração limite e considera a abertura de fissura se a máxima tensão principal de tração exceder a resistência à tração do material concreto f_t .
- **Linear:** que admite uma variação linear e considera a abertura de novas fissuras se a máxima tensão principal de tração exceder o valor mínimo entre f_t e $f_t(1 + \sigma_{lateral} / f_c)$, em que $\sigma_{lateral}$ é a tensão principal lateral e f_c é a resistência à compressão do concreto.

Nos modelos de fissuração distribuída, adota-se um parâmetro de minoração da rigidez transversal do material denominado "shear retention factor" ou fator de redução ao cisalhamento, o conhecido parâmetro β . Assim, uma vez definida a matriz constitutiva da fissura, a rigidez ao cisalhamento pode ser expressa por:

$$D_{sec} = \frac{\beta}{1 - \beta} G \quad (4)$$

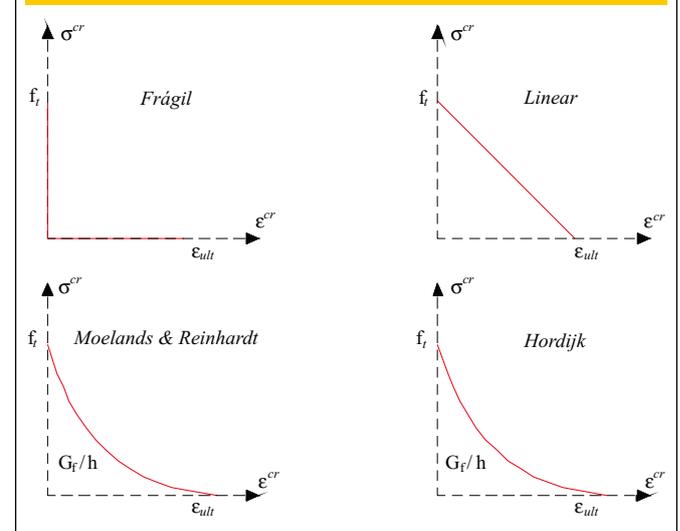
O fator β pode assumir valores entre 0 e 1. Desta forma, para valor nulo ou próximo de zero, tem-se uma rigidez ao cisalhamento do concreto muito pequena e no caso oposto, para valor unitário, tem-se uma rigidez infinita ao cisalhamento, o que dispensará formação de fissuras nesta direção. Seguindo recomendações encontradas na literatura, neste trabalho foi adotado $\beta = 0.2$ nos exemplos numéricos analisados.

No modelo multidirecional de fissuração distribuída é possível adotar um critério de plasticidade para o material: Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb ou Drucker-Prager, devendo-se também prever o comportamento do concreto no ramo de amolecimento à tração. Dentre os modelos de amolecimento do material sob tração disponíveis no programa DIANA pode-se destacar: frágil, linear, não-linear de Moelands-Reinhardt e de Hordijk, conforme a Figura 1.

O comportamento frágil é caracterizado pela redução total da tensão após o critério de ruptura ter sido atingido. Este comportamento pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\frac{\sigma^{cr}(\varepsilon^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 & \rightarrow \varepsilon^{cr} \leq 0 \\ 0 & \rightarrow 0 < \varepsilon^{cr} < \infty \end{cases} \quad (5)$$

Figura 1 - Modelos de amolecimento do material sob tração no programa DIANA



No caso do modelo de amolecimento linear a relação tensão-deformação na fissura é definida pela seguinte expressão:

$$\frac{\sigma^{cr}(\epsilon^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_{ult}} \rightarrow 0 < \epsilon^{cr} \leq \epsilon_{ult} \\ 0 \rightarrow \epsilon_{ult} < \epsilon^{cr} < \infty \end{cases} \quad (6)$$

Dois outros modelos não-lineares ainda podem ser adotados. O modelo de amolecimento de Moelands-Reinhardt utiliza uma relação não-linear entre tensões e deformações expressa na equação a seguir, com o coeficiente c_1 assumindo o valor constante de 0.31:

$$\frac{\sigma^{cr}(\epsilon^{cr})}{f_t} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_{ult}}\right)^{c_1} \rightarrow 0 < \epsilon^{cr} \leq \epsilon_{ult} \\ 0 \rightarrow \epsilon_{ult} < \epsilon^{cr} < \infty \end{cases} \quad (7)$$

O outro modelo não-linear presente no DIANA é o modelo de Hordijk que utiliza uma relação exponencial entre as tensões normais de tração e as deformações, com os coeficientes c_1 e c_2 assumindo, respectivamente, os valores de 3.0 e 6.93, conforme a seguinte equação:

$$\frac{\sigma^{cr}(\epsilon^{cr})}{f_t} = \begin{cases} \left[1 + \left(c_1 \frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_{ult}}\right)^3\right] \exp\left(-c_2 \frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_{ult}}\right) - \frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_{ult}} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \rightarrow 0 < \epsilon^{cr} \leq \epsilon_{ult} \\ 0 \rightarrow \epsilon_{ult} < \epsilon^{cr} < \infty \end{cases} \quad (8)$$

O modelo multidirecional do DIANA é caracterizado por modelar o material combinando um modelo especial de fissuração distribuída para tração (frágil, linear, ...) com um modelo plástico para compressão, podendo-se utilizar os modelos clássicos de ruptura de Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

O modelo constitutivo para simular o comportamento das barras de aço que compõem as armaduras é do tipo elasto-plástico perfeito. Adotando-se o modelo elasto-plástico perfeito, a tensão na

armadura pode ser determinada pelas equações (9) e (10), sendo f_y a tensão de escoamento, E_s o módulo de elasticidade e ϵ_s a deformação longitudinal do aço:

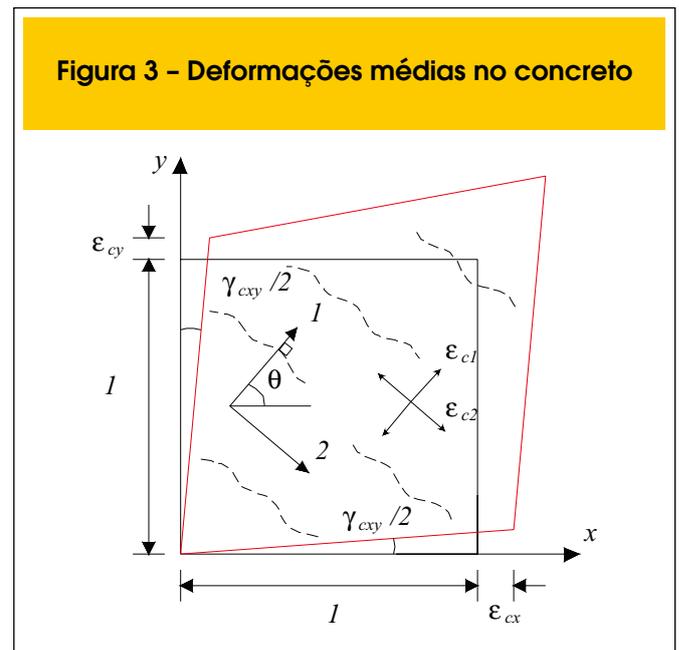
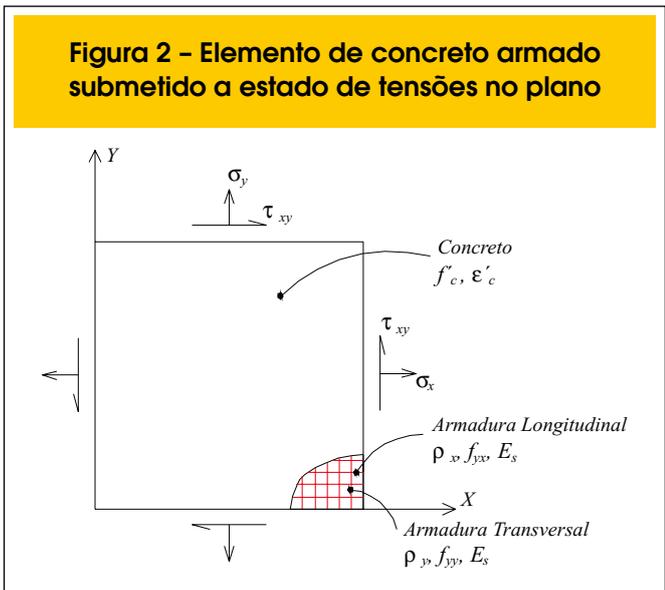
$$\sigma_s = \pm E_s \epsilon_s \quad \text{se} \quad -\epsilon_y \leq \epsilon_s \leq \epsilon_y \quad (9)$$

$$\sigma_s = \pm f_y \quad \text{se} \quad \epsilon_y \leq \epsilon_s \leq \epsilon_s^{ult} \quad \text{ou} \quad -\epsilon_s^{ult} \leq \epsilon_s \leq -\epsilon_y \quad (10)$$

4. Modelos de fissuração no programa VecTor2

O programa VecTor2 é um software de elementos finitos utilizado na análise de estruturas bidimensionais de concreto armado que vem sendo desenvolvido na Universidade de Toronto desde 1990. O desenvolvimento do programa vem ocorrendo paralelamente a uma série de testes experimentais realizados em laboratório, de modo a melhor prever o comportamento de diversas estruturas reais de concreto armado.

As bases teóricas do VecTor2 são as formulações MCFT – Modified Compression Field Theory, desenvolvida por Vecchio e Collins [12] e a DSFM – Disturbed Stress Field Model, desenvolvida posteriormente por Vecchio [4]. Estas formulações são modelos analíticos para prever a resposta de elementos de concreto armado, representando o concreto fissurado como um material ortotrópico com fissuras distribuídas do tipo rotacionais. Nas próximas seções serão abordados os principais conceitos das formulações MCFT e DSFM.



4.1 Formulação MCFT – Modified Compression Field Theory

A formulação MCFT é um modelo analítico para representar o comportamento de estruturas bidimensionais de concreto armado, discretizadas por elementos de membrana submetidos a esforços normais e de cisalhamento, conforme mostrado na Figura 2.

Esta formulação avalia as tensões e deformações médias (na região entre fissuras) e locais (na região da fissura) no concreto e na armadura, bem como as aberturas e direções das fissuras ao longo do carregamento e, com base nestas informações, o modo de ruptura do elemento pode ser determinado.

Na formulação MCFT a modelagem do elemento de concreto fissurado é feita utilizando um material ortotrópico e um modelo de fissura distribuída do tipo rotacional. Em outras palavras, o concreto fissurado é tratado como um meio contínuo com as fissuras distribuídas ao longo do elemento de membrana. As fissuras distribuídas podem sofrer alterações em suas direções, permanecendo sempre atreladas à mudança na direção no campo de tensões principais.

A teoria da MCFT está baseada em três grupos de relações: relações de compatibilidade para as deformações médias no concreto e na armadura; relações de equilíbrio envolvendo as tensões médias no concreto e na armadura; e as relações constitutivas para o concreto fissurado e armadura. Dentre as hipóteses admitidas na formulação MCFT, pode-se destacar: armadura uniformemente distribuída dentro do elemento; as cargas são uniformemente aplicadas no elemento; aderência perfeita entre o concreto e a armadura; fissuras distribuídas do tipo rotacionais; e direções das tensões e deformações principais são coincidentes.

4.1.1 Relações de compatibilidade na formulação MCFT

As relações de compatibilidade na formulação MCFT são obtidas a partir das deformações médias nos componentes que representam o concreto e a armadura, conforme Figura 3. Com base na hipótese de aderência perfeita, pode-se dizer que as deformações médias no concreto (ϵ_c) são iguais às deformações médias na armadura (ϵ_s). Embora na formulação MCFT possa ser considerado qualquer número de componentes e orientações das armaduras, considerando o elemento de membrana ortogonalmente armado da Figura 2, as equações de compatibilidade podem ser expressas por:

$$\epsilon_x = \epsilon_{cx} = \epsilon_{sx} \tag{11}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_{cy} = \epsilon_{sy} \tag{12}$$

Conhecido o valor para a deformação de cisalhamento γ_{xy} , pode-se obter os valores para as deformações principais médias de tração (ϵ_{c1}) e de compressão (ϵ_{c2}) no concreto, bem como as direções

das deformações e tensões principais médias de tração utilizando o círculo de Mohr:

$$\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2} = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y) \pm \frac{1}{2} \left[(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2 \right]^{0.5} \tag{13}$$

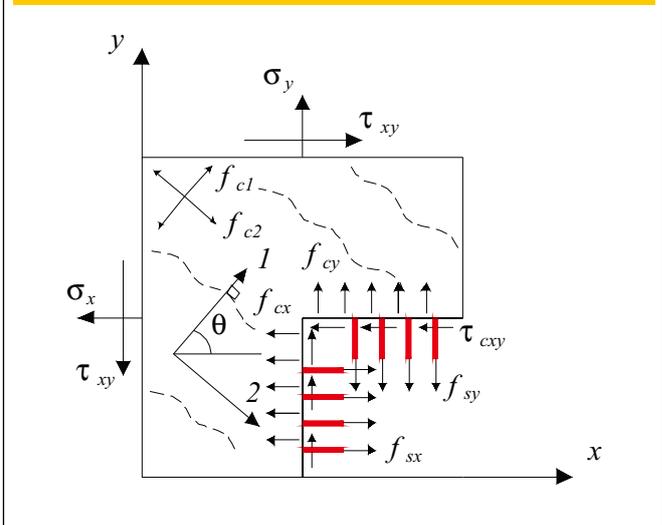
$$\theta = \theta_\epsilon = \theta_\sigma = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right) \tag{14}$$

4.1.2 Relações de equilíbrio na formulação MCFT

Considerando o diagrama de corpo livre do elemento de membrana apresentado na Figura 4, pelo equilíbrio de forças nas direções x e y, as resultantes das tensões normais aplicadas no painel σ_x e σ_y devem ser equilibradas pelas tensões normais no concreto f_{cx} e f_{cy} e pelas tensões na armadura f_{sx} e f_{sy} . O equilíbrio de momentos exige que as tensões de cisalhamento aplicadas no painel, representadas por τ_{xy} , sejam totalmente resistidas pelas tensões de cisalhamento médias no concreto τ_{cxy} , admitindo que a armadura não apresente nenhum tipo de efeito de pino (dowel action). Desta forma, estas relações de equilíbrio para as tensões médias podem ser expressas pelas seguintes equações, sendo ρ_{sx} e ρ_{sy} as taxas de armadura nas direções x e y:

$$\sigma_x = f_{cx} + \rho_{sx} f_{sx} \tag{15}$$

Figura 4 - Diagrama de corpo livre do elemento de concreto armado



$$\sigma_y = f_{cy} + \rho_{sy} f_{sy} \tag{16}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{cxy} \tag{17}$$

Uma vez que o concreto fissurado é ortotrópico em relação às direções das tensões principais, o círculo de Mohr para as tensões pode ser usado para relacionar as tensões médias no concreto f_{cx} e f_{cy} , com a tensão principal média de tração no concreto f_{ct} :

$$f_{cx} = f_{c1} - \tau_{cxy} / \tan(\theta) \tag{18}$$

$$f_{cy} = f_{c1} - \tau_{cxy} \cdot \tan(\theta) \tag{19}$$

4.1.3 Relações constitutivas na formulação MCFT

Um conjunto de trinta painéis de 890x890x70 mm foi ensaiado experimentalmente, sendo os resultados analisados para desenvolver modelos constitutivos capazes de representar o comportamento do concreto fissurado tanto na compressão quanto na tração.

As relações constitutivas para descrever o concreto comprimido relacionam as tensões principais de compressão, f_{c2} , com as deformações principais de compressão, ϵ_{c2} . Os ensaios com os painéis

indicaram que a resistência a compressão e a rigidez sofreram diminuições a medida que ocorria um aumento na deformação principal de tração, ϵ_{ct} . Este fenômeno, conhecido por amolecimento na compressão é incorporado pela diminuição da rigidez na curva tensão-deformação do concreto submetido a compressão axial, sendo expresso por:

$$f_{c2} = \frac{f_c' (2(\epsilon_{c2} / \epsilon_0) - (\epsilon_{c2} / \epsilon_0)^2)}{0.8 - 0.34(\epsilon_{c1} / \epsilon_0)} \tag{20}$$

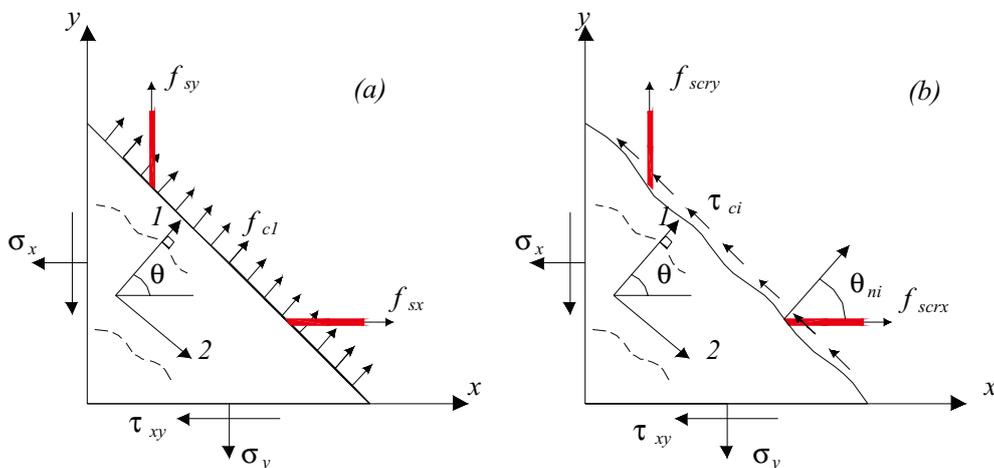
O termo que aparece no numerador é a conhecida relação parabólica de Hognestad, obtida para o concreto submetido à compressão uniaxial, usualmente usada para concretos de resistência normal. O valor ϵ_0 corresponde à deformação associada a tensão de pico do concreto f_c' , determinada experimentalmente pelo ensaio de resistência a compressão uniaxial de corpos de prova cilíndricos. Já o termo no denominador reflete o amolecimento.

Em relação ao comportamento do concreto na tração, inicialmente, é necessário determinar os valores da resistência a tração uniaxial do concreto, f_t' , e a sua correspondente deformação, ϵ_{cr} , que podem ser obtidas através das seguintes expressões:

$$f_t' = 0.33 \sqrt{f_c'} \quad (\text{MPa}) \tag{21}$$

$$\epsilon_{cr} = \frac{f_t'}{E_c} \tag{22}$$

Figura 5 - (a) Tensões médias entre fissuras e (b) tensões locais na superfície livre da fissura



sendo E_c o módulo de rigidez tangente inicial do concreto, estimado pela seguinte expressão:

$$E_c = 5000\sqrt{f_c'} \quad (\text{MPa}) \quad (23)$$

Admite-se que antes da fissuração, o concreto apresenta um comportamento linear elástico na tração. Entretanto, após a fissuração, as tensões de tração podem continuar a existir no concreto íntegro existente entre as fissuras devido à ligação existente entre o concreto e a armadura, sendo este fenômeno conhecido por *tension stiffening*. Na formulação MCFT é proposta a seguinte relação para descrever este fenômeno:

$$f_{cl} = E_c \varepsilon_{cl} \quad \text{para} \quad 0 < \varepsilon_{cl} \leq \varepsilon_{cr} \quad (24)$$

$$f_{cl} = \frac{f_t'}{1 + \sqrt{200\varepsilon_{cl}}} \quad \text{para} \quad \varepsilon_{cl} > \varepsilon_{cr} \quad (25)$$

Para a armadura tracionada ou comprimida, o modelo MCFT utiliza uma relação bi-linear para relacionar as tensões e deformações, da mesma forma que havia sido feito com o modelo de fissuração no programa DIANA.

$$f_s = E_s \varepsilon_s \leq f_s^{yield} \quad (26)$$

sendo E_s o módulo de elasticidade e f_s^{yield} a tensão de escoamento do aço.

4.1.4 Tensões locais na superfície da fissura na formulação MCFT

Uma vez conhecidas as deformações médias, as relações constitutivas podem ser utilizadas na determinação das tensões médias no concreto e na armadura, bem como das tensões normais e cisalhantes atuantes na estrutura. Entretanto, seria contrária à segurança a desconsideração da possibilidade de que a resposta da estrutura possa ser governada pelo escoamento local da armadura na superfície fissurada ou mesmo pelo cisalhamento ao longo da superfície da fissura. Para abranger estas possibilidades, a formulação MCFT impõe limites aos valores das tensões locais na fissura e às tensões médias de tração no concreto.

O campo de tensões no concreto armado sofre variações quando avaliado em função dos seus valores médios na região entre fissuras e quando avaliado localmente na superfície da fissura. Este comportamento pode ser melhor entendido considerando a Figura 5(a), que mostra as tensões médias em uma seção situada entre fissuras, e a Figura 5(b), que apresenta as tensões locais na superfície da fissura.

Pode-se ver claramente que na superfície livre da fissura, as tensões de tração no concreto reduzem para praticamente zero. Conseqüentemente, para transmitir as tensões de tração média através da fissura, as tensões e deformações na armadura devem aumentar localmente na fissura. Conseqüentemente, por equivalência estática entre as tensões médias e tensões locais na direção normal a superfície da fissura chega-se à definição da seguinte relação:

$$f_{cl} = \rho_x (f_{scrx} - f_{sx}) \cos^2 \theta_{nx} + \rho_y (f_{scry} - f_{sy}) \cos^2 \theta_{ny} \quad (27)$$

sendo f_{scrx} e f_{scry} as tensões locais na armadura na região da fissura, e θ_{nx} e θ_{ny} os valores dos ângulos entre a normal à fissura e a armadura. Considerando a equação (27), pode-se verificar que a tensão de tração média no concreto deve ser limitada pelo escoamento da armadura na fissura e conseqüentemente:

$$f_{cl} \leq \rho_x (f_{sxyield} - f_{sx}) \cos^2 \theta_{nx} + \rho_y (f_{syyield} - f_{sy}) \cos^2 \theta_{ny} \quad (28)$$

Em uma direção principal, as tensões cisalhantes estão ausentes e portanto não aparecem na Figura 5(a). Entretanto, como as armaduras geralmente cruzam as fissuras em ângulos diferentes de zero ou noventa graus, tensões locais cisalhantes, τ_{ci} estarão presentes na superfície da fissura. Conseqüentemente, por equivalência estática das tensões médias e tensões locais na direção tangencial a superfície da fissura, pode-se determinar as tensões cisalhantes pela seguinte equação:

$$\tau_{ci} = \rho_x (f_{scrx} - f_{sx}) \cos(\theta_{nx}) \sin(\theta_{nx}) + \rho_y (f_{scry} - f_{sy}) \cos(\theta_{ny}) \sin(\theta_{ny}) \quad (29)$$

Entretanto, o valor da tensão cisalhante é limitado pelo mecanismo de ligação pasta-agregado, que por sua vez diminui com o aumento da abertura da fissura (w) e com a diminuição do tamanho do agregado (a). Com base na análise de mecanismos de ligação pasta-agregado desenvolvido por Walraven [13], a formulação MCFT estabelece um limite para a tensão de cisalhamento na fissura, definido por:

$$\tau_{ci} \leq \frac{0.18\sqrt{f_c'}}{0.31 + 24w/(a + 26)} \quad (30)$$

4.2 Formulação DSFM – Disturbed Stress Field Model

A formulação DSFM é uma extensão da formulação MCFT, tendo por objetivo o tratamento de deficiências da MCFT. Por exemplo, em elementos com pouca armadura, nos quais os deslizamentos devidos ao cisalhamento ao longo da fissura são mais expressi-

vos, a rotação do campo de tensões tende a apresentar uma certa discrepância em relação à rotação do campo de deformações. Nestes casos, a resistência acaba sendo superestimada pela formulação MCFT, que assume que as direções das tensões e das deformações principais são coincidentes. Por outro lado, em elementos que apresentam pequenas rotações nos campos de tensões e deformações, a formulação MCFT geralmente subestima a resistência ao cisalhamento.

A formulação DSFM é conceitualmente similar a MCFT, entretanto, ela acaba estendendo a MCFT em vários aspectos. Primeiramente, a DSFM amplia as relações de compatibilidade da MCFT, incluindo as deformações devidas ao deslizamento na fissura (crack shear slip). Além disso a DSFM desvincula a orientação do campo de tensões e de deformações principais. Pelo fato de calcular explicitamente as deformações devidas ao deslizamento, a DSFM elimina a necessidade de verificação da tensão de cisalhamento. São também apresentadas modificações no cálculo das relações constitutivas para o concreto e a armadura.

4.2.1 Relações de compatibilidade na formulação DSFM

Embora a formulação MCFT admita que as direções das tensões e deformações principais permanecem coincidentes, testes experimentais indicam que esta hipótese nem sempre é válida após a fissuração. Os resultados experimentais mostram que o campo de deformações principais geralmente sofre modificações em sua direção em uma taxa mais acentuada do que o campo de tensões principais.

Este fenômeno é atribuído à maneira pela qual os campos de tensões e deformações são avaliados. As deformações medidas são as deformações totais, que por sua vez são obtidas pelo somatório das deformações médias no concreto fissurado (Figura 2) e das deformações cisalhantes, causadas pelo deslizamento ao longo da fissura, conforme mostrado na Figura 6.

De modo a representar este comportamento, a formulação DSFM define as deformações totais ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} como sendo a soma das de-

formações no concreto (net strains), ϵ_{cx} , ϵ_{cy} e γ_{cxy} , e as deformações cisalhantes devidas ao deslizamento (slip strains), ϵ_x^s , ϵ_y^s e γ_{xy}^s .

$$\epsilon_x = \epsilon_{cx} + \epsilon_x^s \tag{31}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_{cy} + \epsilon_y^s \tag{32}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{cxy} + \gamma_{xy}^s \tag{33}$$

Pode-se obter os valores para as deformações principais de tração (ϵ_{c1}) e de compressão (ϵ_{c2}) no concreto (net principal strains) utilizando o círculo de Mohr:

$$\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2} = \frac{1}{2}(\epsilon_{cx} + \epsilon_{cy}) \pm \frac{1}{2} \left[(\epsilon_{cx} - \epsilon_{cy})^2 + \gamma_{cxy}^2 \right]^{0.5} \tag{34}$$

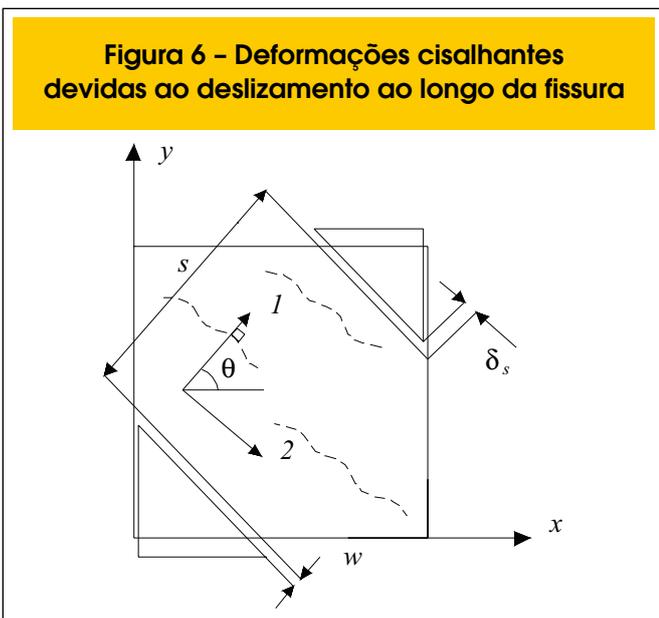
Os componentes da deformação cisalhante devidos ao deslizamento na fissura, ϵ_x^s , ϵ_y^s e γ_{xy}^s , podem ser calculados a partir do deslizamento ao longo da fissura γ_s . Esta deformação é definida como sendo igual ao deslizamento na fissura, δ_s , dividido pelo espaçamento médio entre fissuras, s , conforme a seguinte expressão:

$$\gamma_s = \frac{\delta_s}{s} \tag{35}$$

$$\epsilon^s = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^s \\ \epsilon_y^s \\ \gamma_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \gamma_s \cdot \sin(2\theta) \\ \frac{1}{2} \gamma_s \cdot \sin(2\theta) \\ \gamma_s \cdot \cos(2\theta) \end{Bmatrix} \tag{36}$$

A orientação das deformações principais no concreto, θ , e a orientação das tensões principais, θ_σ , definidas em relação ao eixo x podem ser determinadas utilizando-se o círculo de Mohr com os componentes da deformação no concreto (net strains) pela seguinte expressão:

$$\theta = \theta_\sigma = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{cxy}}{\epsilon_{cx} - \epsilon_{cy}} \right) \tag{37}$$



e de forma análoga a orientação do campo de deformações principais totais, θ_ε , pode ser determinada a partir dos componentes da deformação total:

$$\theta_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) \quad (38)$$

Embora na formulação DSFM seja possível utilizar qualquer número e orientação dos componentes para representar a armadura, considerando-se o elemento de membrana armado ortogonalmente e assumindo-se aderência perfeita, as deformações médias nos componentes da armadura nas direções x e y serão iguais às deformações totais:

$$\varepsilon_{sx} = \varepsilon_x \quad (39)$$

$$\varepsilon_{sy} = \varepsilon_y \quad (40)$$

4.2.2 Relações de equilíbrio na formulação DSFM

Considerando-se novamente um painel de concreto armado submetido a um estado de tensões planas, as relações de equilíbrio para as tensões médias na formulação DSFM são as mesmas definidas anteriormente para a MCFT, ou seja:

$$\sigma_x = f_{cx} + \rho_{sx} f_{sx} \quad (41)$$

$$\sigma_y = f_{cy} + \rho_{sy} f_{sy} \quad (42)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{cxy} \quad (43)$$

Similarmente, a formulação DSFM também incorpora as relações de equilíbrio para as tensões locais na superfície da fissura:

$$f_{cl} = \rho_x (f_{scrx} - f_{sx}) \cos^2 \theta_{nx} + \rho_y (f_{scry} - f_{sy}) \cos^2 \theta_{ny} \quad (44)$$

$$\tau_{ci} = \rho_x (f_{scrx} - f_{sx}) \cos(\theta_{nx}) \cdot \sin(\theta_{nx}) + \rho_y (f_{scry} - f_{sy}) \cos(\theta_{ny}) \cdot \sin(\theta_{ny}) \quad (45)$$

Vale ressaltar que a tensão de tração média no concreto deve ser limitada pelo escoamento da armadura na fissura e conseqüentemente:

$$f_{cl} \leq \rho_x (f_{sxyield} - f_{sx}) \cos^2 \theta_{nx} + \rho_y (f_{syyield} - f_{sy}) \cos^2 \theta_{ny} \quad (46)$$

Entretanto, ao contrario da formulação MCFT, as tensões de tração não estão mais sujeitas à limitação da tensão de cisalhamento na superfície da fissura, uma vez que a formulação DSFM incorpora explicitamente as deformações cisalhantes devidas ao deslizamento, no lugar de impor uma tensão limite correspondente à ruptura por cisalhamento causada pelo deslizamento ao longo da fissura.

4.2.3 Relações constitutivas na formulação DSFM

A análise experimental de uma série de painéis de concreto armado levaram Vecchio e Collins [12] a propor um fator de redução, β_d , de modo a refletir o efeito de amolecimento do concreto e sua ligação com a deformação principal de tração.

$$\beta_d = \frac{1}{1 + C_s C_d} \leq 1.0 \quad (47)$$

Nesta equação, o efeito de amolecimento do material, causado pelo surgimento de forças transversais de tração é levado em conta pelo fator C_d , definido por:

$$C_d = 0.35(-\varepsilon_{c1} / \varepsilon_{c2} - 0.28)^{0.8} \quad (48)$$

O fator C_s determina se a análise do elemento levará em conta ou não as deformações devidas ao deslizamento. Se a análise não levar em conta o deslizamento, como no caso da formulação MCFT então o fator $C_s = 1.0$. Já no caso da análise considerar as distorções no elemento devidas ao deslizamento, como no caso da formulação DSFM, então o efeito do amolecimento resulta em um valor menor para um mesmo valor da relação $\varepsilon_{c1} / \varepsilon_{c2}$ uma vez que o efeito do amolecimento é atribuído somente às deformações de tração e neste caso, $C_s = 0.55$. De modo a levar em conta o amolecimento do concreto quando submetido a esforços de compressão, a resistência a compressão do concreto f'_c , obtida de ensaios de corpos de prova

cilíndricos e a sua correspondente deformação de pico, ϵ_c' , são ambos reduzidos:

$$f_p = -\beta_d \cdot f_c' \tag{49}$$

$$\epsilon_p = -\beta_d \cdot \epsilon_c' \tag{50}$$

Já em relação aos modelos constitutivos para simular o comportamento do concreto a tração, admite-se que a resposta antes da fissuração é linear elástica e que após a fissuração as tensões médias de tração, f_{cl}^a , devido ao efeito de rigidez na tração (tension stiffening), podem ser modeladas por uma relação de decaimento não-linear:

$$f_{cl} = E_c \epsilon_{cl} \quad , \quad 0 \leq \epsilon_{cl} \leq \epsilon_{cr} \tag{51}$$

$$f_{cl}^a = \frac{f_t'}{1 + \sqrt{c_t \epsilon_{cl}}} \quad , \quad \epsilon_{cl} > \epsilon_{cr} \tag{52}$$

O coeficiente c_t incorpora a influência das características da armadura e pode ser determinado pela seguinte equação:

$$c_t = 2.2m \tag{53}$$

$$\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4\rho_i}{d_{bi}} |\cos\theta_{mi}| \quad (\text{mm}) \tag{54}$$

sendo d_{bi} o diâmetro das barras e ρ_i a taxa de armadura em cada um dos n componentes que compõem a armadura. Na formulação DSFM, admite-se um modelo constitutivo tri-linear para a armadura comprimida ou tracionada, considerando os efeitos de endurecimento do material (strain-hardening):

$$f_s = E_s \epsilon_s \quad , \quad 0 < \epsilon_s \leq \epsilon_{syield} \tag{55}$$

$$f_s = f_{syield} \quad , \quad \epsilon_{syield} < \epsilon_s \leq \epsilon_{sh} \tag{56}$$

$$f_s = f_{syield} + E_{sh} (\epsilon_s - \epsilon_{sh}) \quad , \quad \epsilon_{sh} < \epsilon_s \leq \epsilon_u \tag{57}$$

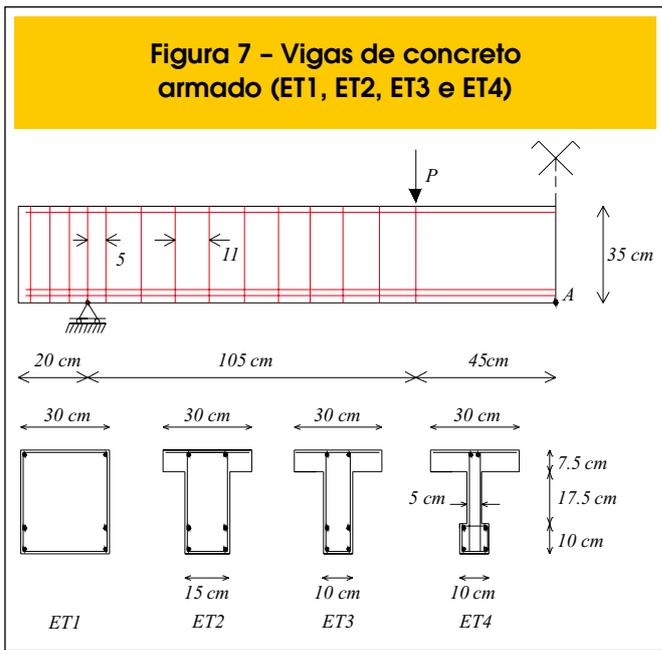
sendo E_s o módulo de elasticidade do aço no regime linear; f_{syield} a tensão de escoamento da armadura; ϵ_{syield} a deformação de escoamento da armadura; ϵ_{sh} a deformação máxima durante o processo de endurecimento; e ϵ_u a deformação última da armadura.

4.3 Matriz de rigidez material

A matriz de rigidez material é a soma da matriz de rigidez material do concreto D_c e a matriz de rigidez material de cada um dos componentes que compõem a armadura D_{si} :

$$D = D_c + \sum_{i=1}^n D_{si} \tag{58}$$

Uma vez que nas formulações MCFT e DSFM o elemento de concreto armado é modelado como um material ortorrópico nas direções principais de tensão, é necessário formular inicialmente a matriz de rigidez material relativa às direções principais, D_c' . Assumindo que o efeito de Poisson seja desprezível, então D_c' pode ser computada por:



$$\mathbf{D}_c' = \begin{bmatrix} \bar{E}_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G}_c \end{bmatrix} \quad (59)$$

Os módulos secantes podem ser avaliados em função dos valores atuais das tensões principais f_{c1} e f_{c2} e as correspondentes deformações principais no concreto ε_{c1} e ε_{c2} :

$$\bar{E}_{c1} = \frac{f_{c1}}{\varepsilon_{c1}}, \quad \bar{E}_{c2} = \frac{f_{c2}}{\varepsilon_{c2}}, \quad \bar{G}_c = \frac{\bar{E}_{c1} \cdot \bar{E}_{c2}}{\bar{E}_{c1} + \bar{E}_{c2}} \quad (60)$$

De forma similar, a matriz de rigidez material de cada um dos componentes da armadura \mathbf{D}_{si}' deve ser determinada inicialmente com relação ao eixo longitudinal das barras. Assumindo-se que a armadura resiste unicamente a tensões axiais, a matriz \mathbf{D}_{si}' pode ser determinada por:

$$\mathbf{D}_{si}' = \begin{bmatrix} \rho_i \bar{E}_{si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\bar{E}_{si} = \frac{f_{si}}{\varepsilon_{si}} \quad (62)$$

Posteriormente, as matrizes de rigidez materiais \mathbf{D}_c' e \mathbf{D}_{si}' avaliadas inicialmente em relação às direções principais são transformadas para alinharem em relação às direções dos eixos x e y , utilizando-se a matriz de transformação:

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{T}_c^T \cdot \mathbf{D}_c' \cdot \mathbf{T}_c \quad (63)$$

$$\mathbf{D}_{si} = \mathbf{T}_{si}^T \cdot \mathbf{D}_{si}' \cdot \mathbf{T}_{si} \quad (64)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi & \cos \psi \cdot \sin \psi \\ \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -\cos \psi \cdot \sin \psi \\ -2 \cos \psi \cdot \sin \psi & 2 \cos \psi \cdot \sin \psi & \cos^2 \psi - \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (65)$$

5. Exemplos numéricos

5.1 Viga biapoiada de concreto armado – Leonhardt e Walther [14]

Um conjunto de quatro vigas de concreto armado (ET1, ET2, ET3 e ET4) analisadas experimentalmente por Leonhardt e Walther [14] será estudado numericamente utilizando diferentes modelos de fissuração distribuída nos programas DIANA e VecTor2. As vigas são simplesmente apoiadas e carregadas verticalmente por cargas concentradas conforme Figura 7.

As vigas são dimensionadas com a mesma quantidade de armadura, mas possuem diferentes larguras de alma, o que implica em diferentes taxas de armadura. A armadura positiva é composta por quatro barras de 20 mm de diâmetro com tensão de escoamento $f_y = 428 \text{ MPa}$, aço classe B. A armadura longitudinal na face superior consiste de duas barras de 8 mm de diâmetro com tensão de escoamento $f_y = 465 \text{ MPa}$, aço classe B. A armadura transversal é representada por estribos de 6 mm e tensão de escoamento $f_y = 320 \text{ MPa}$, aço classe A.

A resistência cúbica à compressão do concreto, obtido experimentalmente por Leonhardt e Walther [14], foi de $f_{cub} = 28.5 \text{ MPa}$. Os valores correspondentes da resistência cilíndrica à compressão ($f_c = 22.8 \text{ MPa}$), da resistência à tração ($f_t = 1.57 \text{ MPa}$) e do módulo de elasticidade inicial do concreto ($E_{co} = 23874.67 \text{ MPa}$) foram determinados a partir da resistência cúbica à compressão do concreto, conforme Vecchio e Collins [12].

A metodologia utilizada consiste na modelagem do conjunto de vigas adotando modelos de fissuração distribuída, empregando-se diferentes regras de amolecimento do programa DIANA (frágil, linear, não-lineares de Moelands-Reinhardt e de Hordijk) e o critério de plasticidade de von Mises, bem como utilizando a formulação DSFM do programa VecTor2. Os parâmetros usados nos diversos modelos de amolecimento são apresentados na Tabela 1. Nas armaduras foi considerado comportamento elasto-plástico perfeito e $E_s = 210000 \text{ MPa}$.

A malha de elementos finitos utilizada para modelar a estrutura de concreto, contendo 341 nós e 300 elementos retangulares é apresentada na Figura 8. Na discretização das armaduras, foram

Tabela 1 – Propriedades dos modelos de amolecimento do concreto tracionado

Propriedade	Valor	Modelos de Amolecimento
Fator de redução (β)	0.2	Todos os modelos do DIANA
Deformação última de fratura (ε_u)	0.0003337	Linear
Energia de Fratura (G_f)	0.00068 KN/cm	Moelands-Reinhardt, Hordijk
Largura da banda de fissuração (h)	17.32 cm	Moelands-Reinhardt, Hordijk

Figura 8 - Malha de elementos finitos 10x30

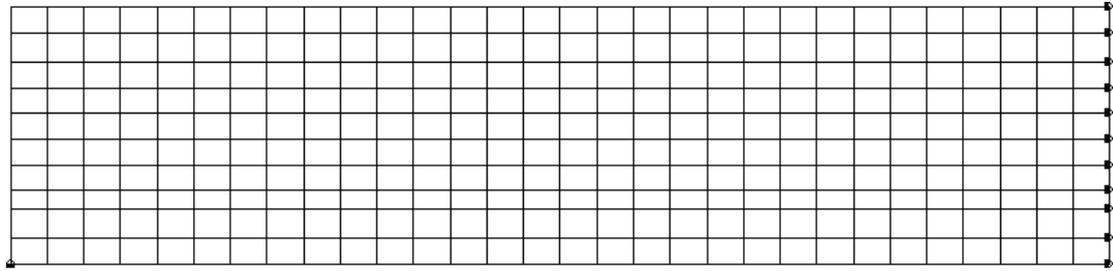


Figura 9 - Curva carga x deslocamento nas vigas biapoiadas

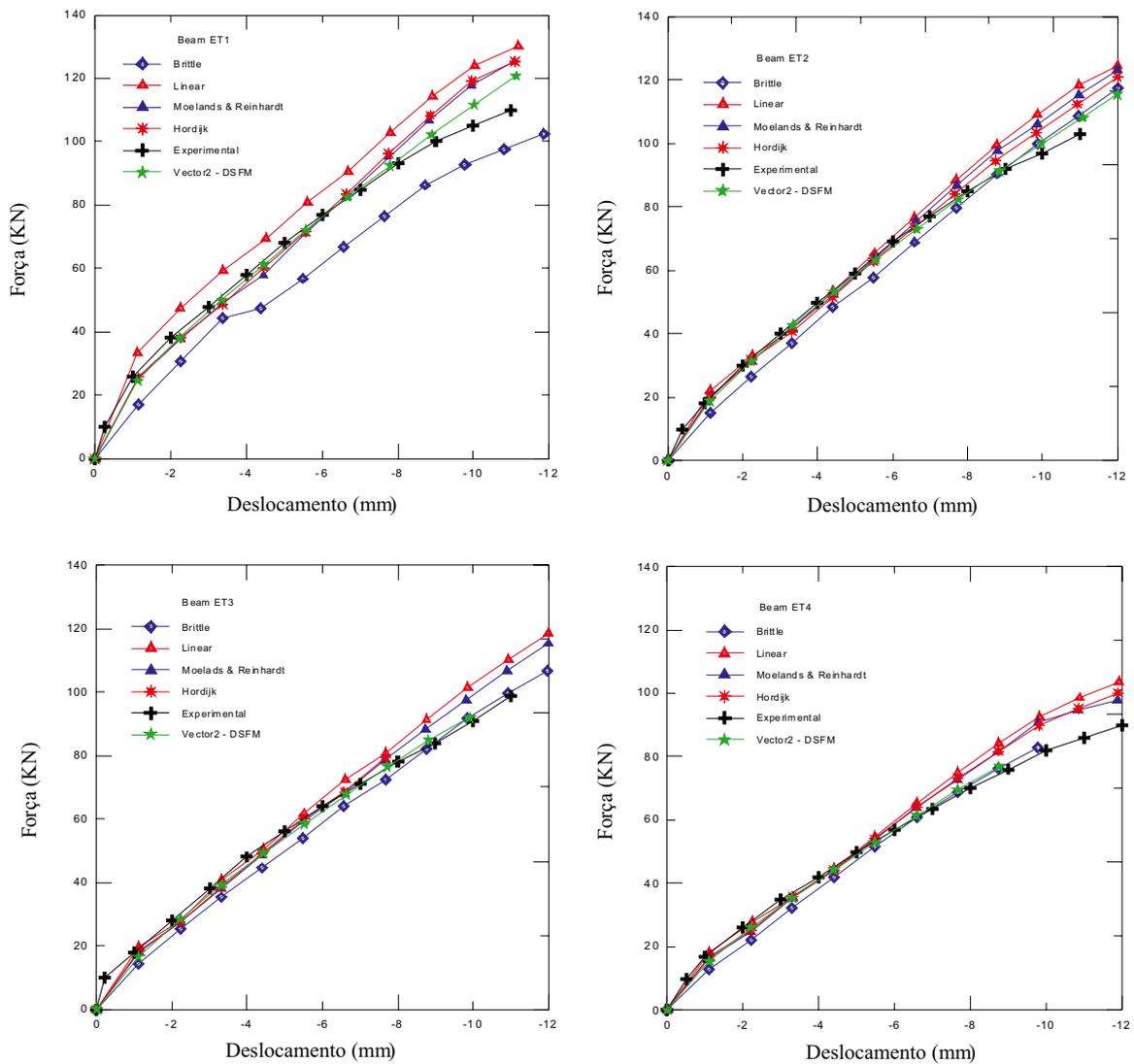


Figura 10 - Viga ET4 - (a) Deformada e padrão de fissuração da viga, (b) e (c) Direções das deformações principais ϵ_1 e ϵ_2

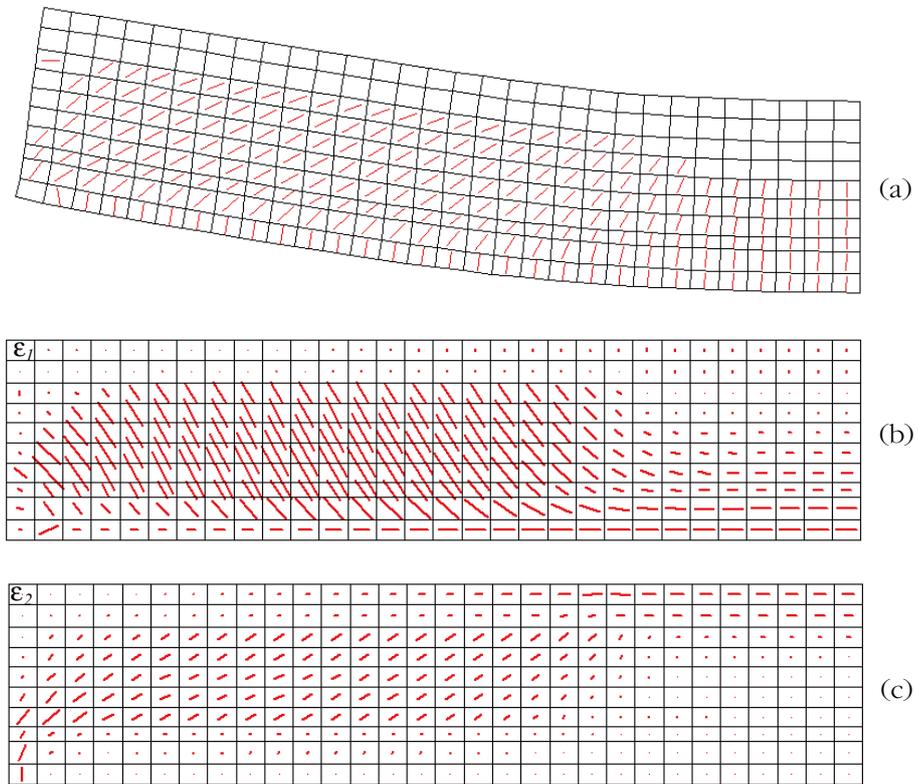


Figura 11 - Vigas de concreto armado (HH3, HH4 e HH5)

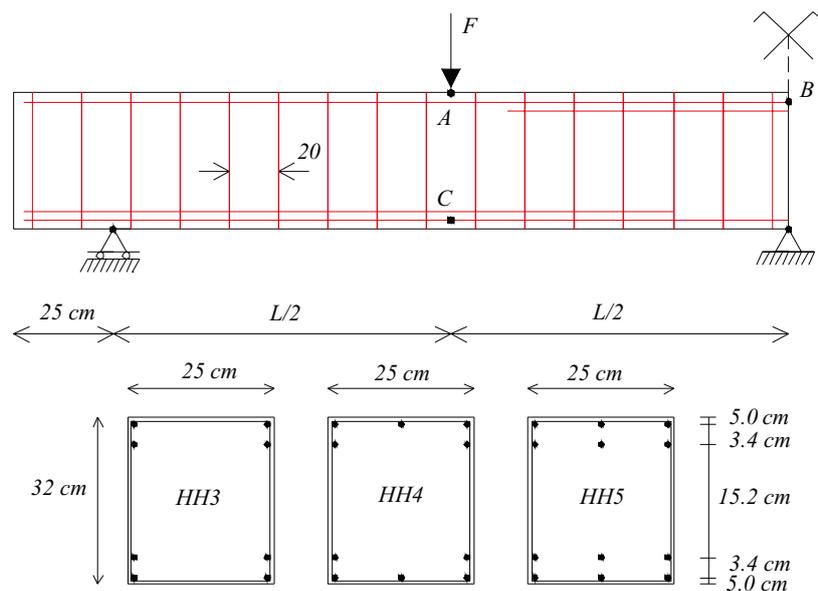


Tabela 2 – Propriedades mecânicas do concreto e comprimento dos vãos

Vigas	L (cm)	F_{cub} (MPa)	F_c (MPa)	F_t (MPa)	E_{c0} (MPa)
HH3	211	37.1	29.68	1.80	27240
HH4	257	33.6	26.88	1.71	25923
HH5	300	36.3	29.04	1.78	26944

Tabela 3 – Parâmetros do modelo de Hordijk no concreto tracionado

Propriedade	Valor	Vigas
Fator de redução (β)	0.2	HH3, HH4 e HH5
Energia de fratura (G_f)	0.00068 KN/cm	HH3, HH4 e HH5
Largura da banda de fissuração (h)	17.32 cm	HH3, HH4 e HH5

empregados modelos incorporados no caso do programa DIANA. No VecTor2 foram usados modelos discretos (armadura longitudinal) e distribuídos (estribos).

Na Figura 9, apresentam-se as flechas no meio do vão (Ponto A) ao longo do processo de carregamento. Dos resultados obtidos para o conjunto de vigas analisadas, pode-se observar que as curvas *carga x deslocamento* obtidas com os diferentes modelos apresentam uma grande concordância em relação aos valores experimentais. Também pode ser observado que na sua grande maioria os modelos computacionais apresentaram uma rigidez um pouco superior aos valores experimentais.

A rigidez adicional associada à consideração de aderência perfeita e à contribuição do concreto entre fissuras, é mais significativa para taxas de armadura menores. A viga ET1, com a menor taxa de armadura, foi a que apresentou uma maior discrepância em relação aos resultados experimentais. Esta discrepância entre modelos numéricos e experimentais torna-se menos significativa nas vigas com maior taxa de armadura, ET2, ET3 e ET4, fato também observado por d'Ávila [15].

Para entender melhor o comportamento das vigas ao longo do carregamento e mecanismos de colapso, são apresentados na Figura 10, o padrão de fissuração e as direções das deformações principais de tração ϵ_1 e de compressão ϵ_2 da viga ET4 para uma carga de $P=76.8$ KN.

5.2 Viga contínua de concreto armado – Leonhardt e Walther [16]

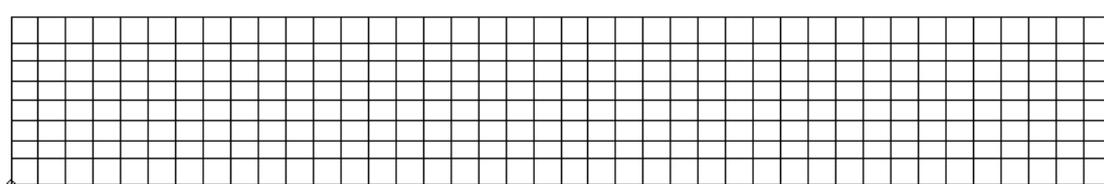
Neste exemplo, um conjunto de três vigas de concreto armado (HH3, HH4, e HH5) ensaiadas experimentalmente por Leonhardt e Walther [16] será analisado utilizando um modelo de fissuração distribuída com regra de amolecimento de Hordijk e critério de plastificação de von Mises no DIANA e com a formulação DSFM no VecTor2. As vigas são contínuas e de seção transversal retangular ($25 \times 32 \text{ cm}^2$), apresentando comprimentos de vãos variáveis e diferentes taxas de armadura, conforme apresentado na Figura 11.

As armaduras positivas e negativas são representadas por barras de 14 mm , com tensão de escoamento $f_y = 417 \text{ MPa}$, aço classe B. As armaduras transversais são compostas por estribos de 8 mm , com tensão de escoamento $f_y = 371 \text{ MPa}$, aço classe A.

Na Tabela 2 são apresentados os comprimentos dos vãos de cada uma das vigas, juntamente com os valores da resistência cúbica do concreto, determinados experimentalmente na data dos ensaios. Os valores da resistência cilíndrica à compressão, da resistência à tração e do módulo de elasticidade do concreto foram obtidos conforme Vecchio e Collins [12].

A metodologia empregada consiste na modelagem do conjunto de vigas adotando um modelo de fissuração distribuída, empregando-se a regra de amolecimento de Hordijk do programa DIANA e o critério de plasticidade de von Mises, bem como utilizando a formu-

Figura 12 – Malha de elementos finitos 8x40



lação DSFM do programa VecTor2. Os parâmetros adotados para o modelo de Hordijk são apresentados na Tabela 3. No aço foi adotado comportamento elasto-plástico perfeito e $E_s = 210000 \text{ MPa}$.

A malha de elementos finitos utilizada para modelar a estrutura de concreto, contendo 369 nós e 320 elementos retangulares é apresentada na Figura 12. Na discretização das armaduras, foram empregados modelos incorporados no caso do programa DIANA. No VecTor2 foram usados modelos discretos (armadura longitudinal) e distribuídos (estribos).

Na Figura 13, apresentam-se as flechas no meio do vão sob o ponto de aplicação da carga (Ponto A). Pode-se observar que as curvas *carga x deslocamento* apresentaram uma grande concordância com os valores experimentais, e que na fase inicial de carregamento os modelos computacionais apresentaram uma menor rigidez, entretanto, para a fase final, esta situação se inverte e os modelos computacionais passaram a apresentar uma rigidez um

pouco superior aos resultados experimentais. A rigidez adicional nos modelos computacionais é causada por dois fatores: a consideração de aderência perfeita e a contribuição do concreto entre fissuras, fato também observado no exemplo anterior.

Para esta série de vigas contínuas, foi também apresentada uma comparação dos valores das tensões nas armaduras. Os pontos analisados são: sob a carga para a armadura positiva (Ponto C) e sobre o apoio central para a armadura negativa (Ponto B), conforme mostrado na Figura 14, indicando que os modelos computacionais foram capazes obter adequadamente, as tensões nas armaduras ao longo do processo de carregamento.

Para entender melhor o comportamento das vigas ao longo do processo de carregamento e o mecanismo de colapso, são apresentados nas Figuras 15 e 16, o padrão de fissuração e as tensões ao longo das armaduras longitudinais na viga HH5 para uma carga $P=195.4 \text{ KN}$.

Figura 13 – Curva carga x deslocamento nas vigas contínuas

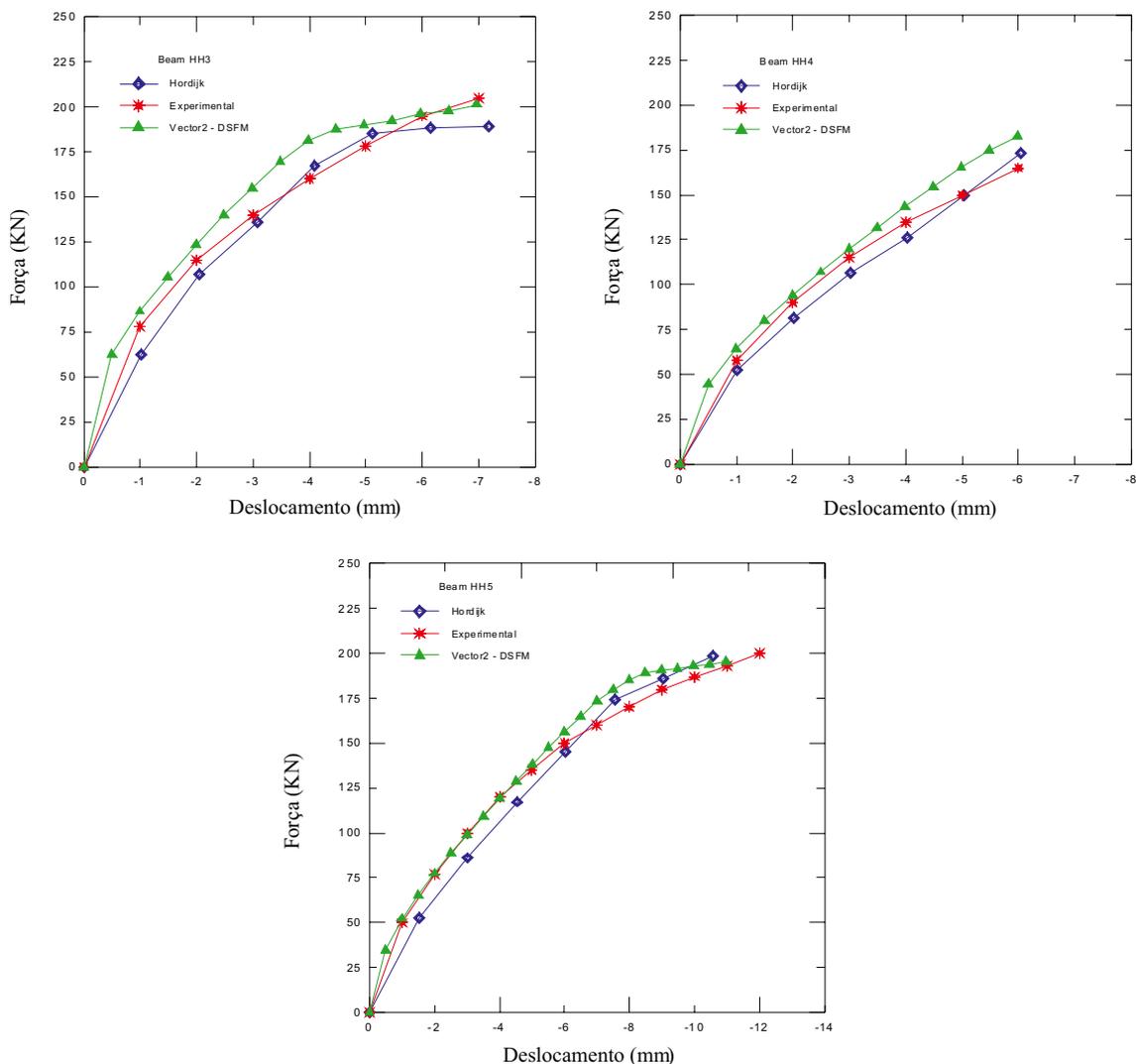
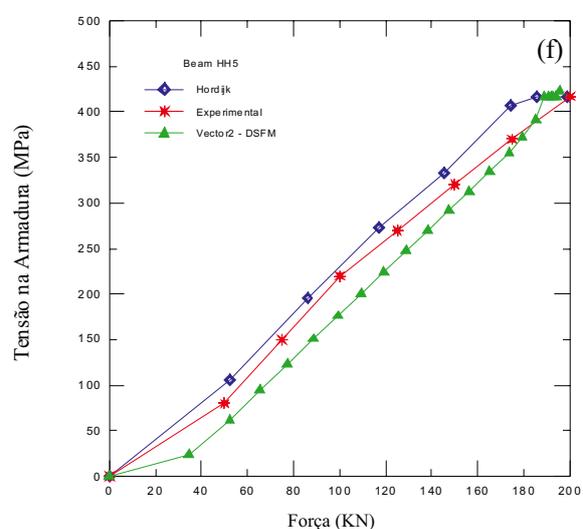
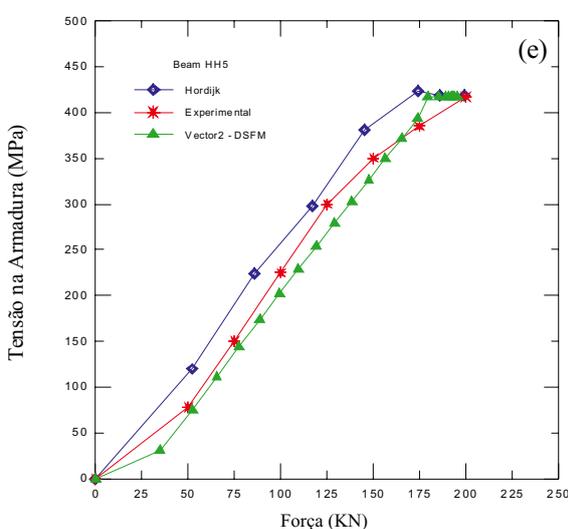
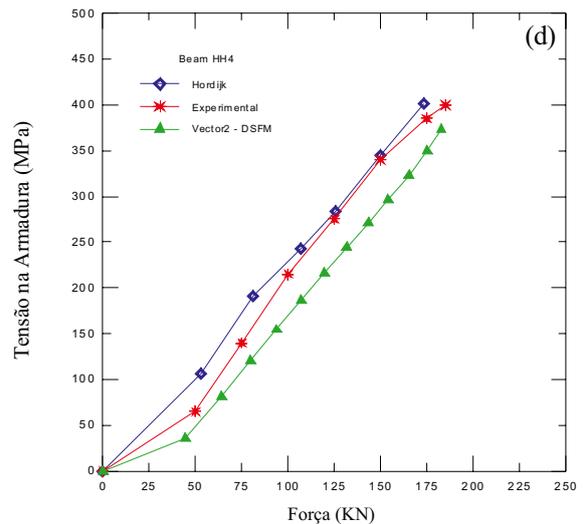
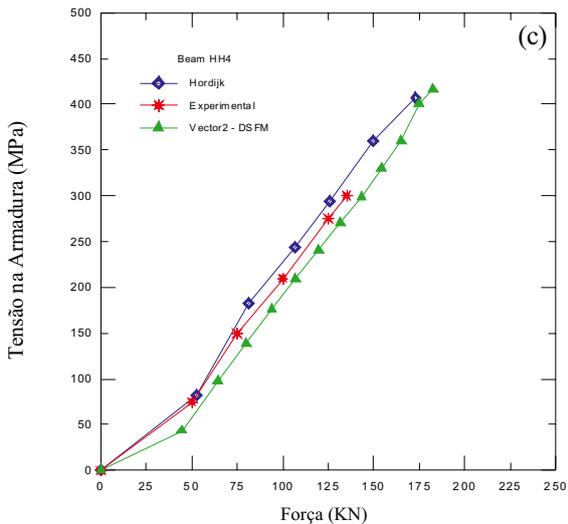
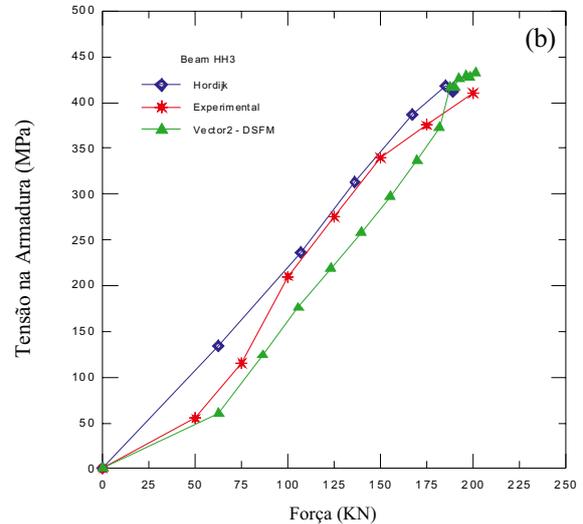
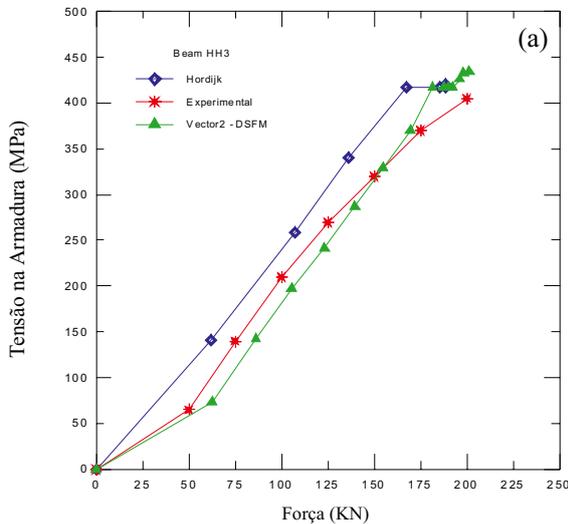


Figura 14 - Tensões na armadura ao longo do processo de carregamento
 (a) armadura superior - HH3, (b) armadura inferior - HH3, (c) armadura superior - HH4,
 (d) armadura inferior - HH4, (e) armadura superior - HH5, (f) armadura inferior - HH5



6. Conclusões

Os modelos de fissuração distribuída dos programas DIANA e VecTor2 se mostraram bem eficientes na análise de problemas envolvendo fissuração em vigas de concreto armado submetidas à flexão. Pode-se observar pelos exemplos analisados, que as curvas *carga x deslocamento* obtidas com os modelos apresentam uma grande concordância em relação aos valores experimentais. Na sua grande maioria os modelos computacionais apresentaram uma rigidez um pouco superior aos resultados experimentais. Dentre as causas da rigidez adicional, pode-se destacar a contribuição do concreto entre fissuras, que se mostrou mais significativa para taxas de armadura menores e a hipótese de aderência perfeita dos modelos adotados, uma vez que em função da não consideração da perda de aderência, é natural que a estrutura fissurada se torne mais rígida. A escolha da regra de amolecimento do material se mostrou mais determinante para taxas de armadura menores, nas quais o modelo frágil apresentou a maior discrepância em relação aos valores experimentais.

Os modelos de fissuração distribuída permitiram simular o comportamento pós-fissuração do concreto armado, podendo-se acompanhar a evolução ao longo do processo de carregamento e obter um padrão de fissuração que possibilitou entender melhor o seu comportamento, bem como também acompanhar a evolução das tensões e o escoamento das armaduras.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo financiamento deste trabalho e ao professor Frank Vecchio da Universidade de Toronto pela liberação da licença para utilização do programa VecTor2.

8. Referências bibliográficas

- [01] Cedolin, L. e Dei Poli, S. Finite Element Studies of Shear-Critical R/C Beams. *Journal of Engineering Mechanics Division*, New York: ASCE, v.103, n.EM3, 1977; p.395-410.
- [02] Bazant, Z.P. e Gambarova, P. Rough Cracks in Reinforced Concrete. *Journal of the Structural Division*, New York: ASCE, v.106, 1980; p.819-842.
- [03] Gupta, A.K. e Maestrini, S.R. Post-Cracking Behavior of Membrane Reinforced Concrete Elements Including Tension-Stiffening. *Journal of Structural Engineering*. New York: ASCE, v.115, n.4, 1989; p.957-976.
- [04] Vecchio, F. Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation, ASCE, *Journal of Structural Engineering*, v.126, n.9, 2000; p.1070-1077.
- [05] Bazant, Z.P. e Cedolin, L. Finite Element Modeling of Crack Band Propagation. *Journal of Structural Engineering*, New York: ASCE, v.109, n.1, 1983;

Figura 15 - Padrão de fissuração na viga HH5

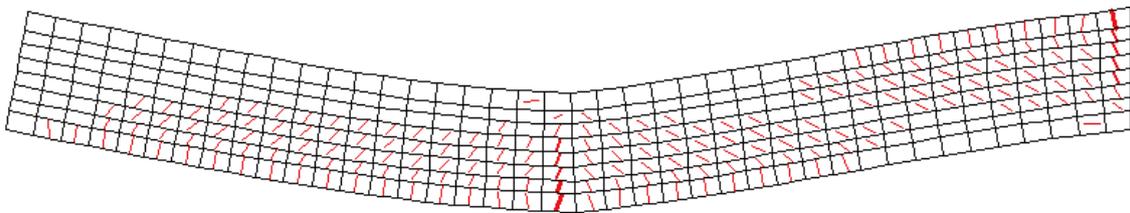
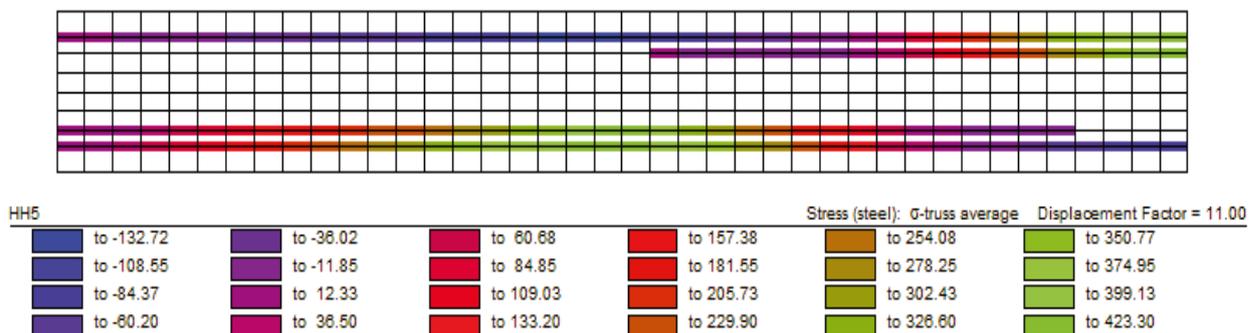


Figura 16 - Tensões ao longo das armaduras na viga HH5



- p.69-92.
- [06] Bazant, Z.P. e Oh, B. Crack Band Theory for Fracture Concrete. *Materials & Constructions*, v.16, n.93, 1983; p.155-177.
- [07] Feenstra, P.H. e de Borst, R. Constitutive Model for Reinforced Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, New York: ASCE, v.121, n.5, 1995; p.587-595.
- [08] Rots, J.G. e Blaauwendraad, J. Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared? Fixed, Multi-directional or Rotating? *HERON*, Delft, v.34, n.1, 1989.
- [09] Ottosen, N.S. Material Models for Concrete, Steel and Concrete-Steel Interaction. *Bulletin d'Information*, n.194, Lausane: CEB, 1988.
- [10] Pramono, E. e Willam, K. Fracture Energy-Based Plasticity Formulation of Plain Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, New York: ASCE, v.115, n.6, 1989; p.1183-1204.
- [11] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990, *Bulletin d'Information* n.213/214, Lausane: CEB, 1993.
- [12] Vecchio, F.J. e Collins, M.P. The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subject to Shear, *ACI Journal*, v.83, n.2, 1986; pp. 219-231.
- [13] Walraven, J.C. Fundamental Analysis of Aggregate Interlock, *ASCE: Journal of the Structural Division*, v. 107, n. 11, 1981; pp. 2245-2270.
- [14] Leonhardt, F. e Walther, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. *Beton-und Stahlbetonbau*, v.57, n.7, Berlin, 1962; p.161-173.
- [15] d'Avila, V.M.R. Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos, Porto Alegre, 2003, Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 259 p.
- [16] Leonhardt, F. e Walther, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. *Beton-und Stahlbetonbau*, v.60, n.2, Berlin, 1965; p.35-42.