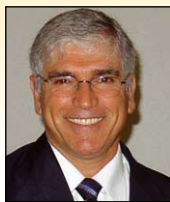


# Techniques to monitor the crack width and the neutral axis position of steel fiber reinforced concrete beams subjected to bending

## *Técnicas para monitorar a abertura de fissura e a posição da linha neutra em vigas de concreto reforçado com fibras de aço submetidas à flexão*



G. P. GAVA<sup>a</sup>  
gpgava@yahoo.com.br

L. R. PRUDÊNCIO JR.<sup>b</sup>  
prudenciouk@hotmail.com

T. S. PIERI<sup>c</sup>  
thpieri@hotmail.com

W. R. L da SILVA<sup>d</sup>  
wilsonecv@gmail.com

### Abstract

In this work, three different techniques are investigated for measuring and monitoring the crack-mouth opening displacement and the depth of the neutral axis of six beams, such as: electrical resistance strain gauges, digital image processing, and displacement transducers. Steel fibers reinforced concrete beams were subjected to bending and the load, displacement, compressive strain, crack-mouth opening displacement and depth of the neutral axis were monitored. For displacement transducers and digital image processing techniques it is showed equations to be used to correct the crack-mouth opening displacement and the depth of the neutral axis due to the beam displacement and rotation. The results show that electrical resistance strain gauges and displacement transducers techniques are more efficient to monitor the depth of the neutral axis. Using the technique of digital image processing it is observed that a small error in the measurement of grid deformations causes a great error in the measurement of the neutral axis position. The crack-mouth opening displacement is measured only by image processing and displacement transducers techniques, and a good agreement between the results from these two techniques can be seen. It is verified that the best technique is the displacement transducers, because with this it is possible to monitor and measure, both, the crack-mouth opening displacement and the depth of the neutral axis. Additionally, the displacement transducers technique is easier to be applied.

**Keywords:** *steel fiber reinforced concrete, steel fiber, depth of neutral axis, crack width, flexural test.*

### Resumo

Neste trabalho, três diferentes técnicas para medir e monitorar a abertura de fissura e a posição da linha neutra são investigadas, sendo elas: *strain gauges*, análise digital de imagens e transdutores de deslocamento. Foram ensaiadas à flexão vigas de concreto reforçado com fibras de aço, nas quais foram monitoradas as cargas, os deslocamentos, as deformações à compressão, a abertura de fissura e a posição da linha neutra. Para as técnicas dos transdutores de deslocamento e da análise digital de imagens são apresentadas formulações matemáticas que devem ser empregadas para a correção dos valores de abertura de fissura e posição da linha neutra em função do deslocamento e do giro da viga durante o ensaio de flexão. Os resultados mostraram que as técnicas do *strain gauges* e dos transdutores de deslocamento foram mais eficientes para monitorar a posição da linha neutra. Na técnica da análise digital de imagens observou-se que um pequeno erro na medição das deformações nos pontos da grade de referência colada na lateral da viga ocasionou um grande erro no valor da posição da linha neutra medido. A abertura de fissura só foi possível ser medida por meio das técnicas dos transdutores de deslocamento e da análise digital de imagens, sendo que ambas apresentaram bons resultados. Verificou-se que a melhor técnica para monitorar tanto a posição da linha neutra quanto a abertura de fissura foi a dos transdutores de deslocamento, além de ser a técnica que apresenta maior facilidade de aplicação.

**Palavras-chave:** *concreto reforçado com fibras de aço, fibras de aço, abertura de fissura, posição da linha neutra, ensaio de flexão.*

<sup>a</sup> Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Curso de Engenharia Civil, gpgava@yahoo.com.br, Rua Fortaleza, nº 1740, apto. 111, Centro, CEP 85810-051, Cascavel-PR, Brasil.

<sup>b</sup> Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Departamento de Engenharia Civil, prudenciouk@hotmail.com, Rua Prof. Milton Sullivan, nº 107, apto. 201, CEP 88040-620, Carvoeira, Florianópolis-SC, Brasil.

<sup>c</sup> Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Departamento de Engenharia Civil, thpieri@hotmail.com, Rua Henrique Chenaud, nº 25, apto. 605, CEP 88802-390, Centro, Criciúma-SC, Brasil.

<sup>d</sup> Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Departamento de Engenharia Civil, wilsonecv@gmail.com, Av. Lédio João Martins, nº 356, apto. 202, CEP 88101-100, Kobrasol, São José-SC, Brasil.

## 1. Introdução

As matrizes de cimento, como o concreto de cimento Portland, são frágeis, com baixa resistência à tração e pequena capacidade de deformação. A introdução de fibras de aço no concreto convencional promove dois importantes efeitos: primeiro contribui para o reforço do compósito quando submetido a todo tipo de carregamento que induz tensão de tração, flexão e cisalhamento e, segundo, melhora a ductilidade e a tenacidade do concreto [1]. Uma razão importante para a adição de fibras descontínuas de aço na matriz de concreto é melhorar a resposta do concreto após a fissuração, isto é, aumentar a sua capacidade de absorver energia (tenacidade) e aparente ductilidade, e garantir resistência e controle à fissuração [2].

Assim, alguns pesquisadores desenvolveram estudos referentes à avaliação do comportamento após a fissuração do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), objetivando, principalmente, estimar a curva carga por deslocamento do concreto quando submetido ao esforço de flexão [3, 4, 5]. Estes modelos baseiam-se no equilíbrio de forças na seção fissurada a partir da construção do diagrama de tensões e deformações em função do deslocamento e da abertura de fissura da viga. Admite-se, nestes modelos, a formação de uma única fissura no centro do vão da viga e a formação da rótula plástica no ponto final da fissura.

Para a verificação da validade dos modelos teóricos é necessário comparar suas respostas com os resultados de ensaios experimentais de vigas de CRFA. Torna-se fundamental conduzir ensaios de flexão de vigas de CRFA nos quais são monitoradas as cargas, os deslocamentos, as deformações e as aberturas de fissura durante o ensaio. O monitoramento de cargas e deslocamentos é realizado rotineiramente nos ensaios de flexão de vigas de CRFA e por isso a comunidade científica já domina os equipamentos e procedimentos de ensaio para tal. Contudo, o monitoramento da abertura de fissura não é realizado com tanta frequência nos ensaios de flexão de vigas de CRFA e além disso não há um consenso entre os pesquisadores da melhor forma para monitorá-la. Verifica-se em alguns trabalhos experimentais o emprego de transdutores de deslocamento para a medição da abertura de fissura. Robins et al.[6] inovaram as pesquisas referentes ao monitoramento da abertura de fissura ao utilizarem imagens digitais para esta finalidade. Com esta técnica que utiliza imagens fotográficas para a medição de abertura de fissura e que a denominaram de *grid methods*, os autores conseguiram medir abertura de fissura de até 0,2 mm.

Diante disso, este trabalho teve como objetivo principal avaliar três diferentes técnicas: *strain gauges*, transdutores de deslocamento e análise digital de imagens para monitorar a abertura de fissura e a posição da linha neutra durante o ensaio de flexão de vigas de CRFA.

## 2. Materiais e programa experimental

### 2.1 Confeção das vigas

Para a avaliação das três técnicas de medição de abertura de fissura e posição da linha neutra foi necessária a confecção de vigas de concreto reforçadas com fibras de aço que foram submetidas ao ensaio de flexão. Foram confeccionadas 6 vigas nas dimensões de 100x130x400 mm, sendo que estas vigas possuíam no centro das duas laterais um entalhe de 15 mm de profundidade para garantir a fissuração da viga no centro do vão e facilitar a medição de abertura de fissura, conforme proposta de Gava, Pieri e Prudêncio Jr. [7]. Para a obtenção das vigas foram mol-

Figura 1 – Viga preparada para o ensaio



dadas placas de concreto de 100 mm de altura, das quais serravam-se 3 vigas de cada placa. O concreto utilizado para a confecção das placas apresentava um consumo mínimo de cimento de 430 kg/m<sup>3</sup>, a proporção de 1:0,61:1,43:1,67:0,6 (cimento:areia fina:areia média:brita 0:água) e teor de 100 kg/m<sup>3</sup> de fibra de aço. A fibra utilizada era do tipo deformada na extremidade na forma de gancho, com 30 mm de comprimento nominal, seção circular com 0,62 mm de diâmetro e, portanto, com um fator de forma de 48,38.

### 2.2 Ensaio à flexão das vigas – monitoramento da carga e deslocamentos

As vigas foram ensaiadas à flexão a quatro pontos, sendo monitoradas as cargas, os deslocamentos, as deformações específicas na região comprimida e a abertura de fissura. A configuração do ensaio consistiu em apoiar a viga em dois cutelos e aplicar o carregamento através de outros dois cutelos posicionados na parte superior da viga, no terço médio do vão. Para a aplicação da carga, utilizou-se uma prensa da marca Shimadzu, por meio da qual foi possível aplicar uma velocidade de deslocamento ou subida do pistão constante de 0,5 mm/min. A leitura de carga foi feita através de célula de carga com capacidades até 50 kN. O deslocamento foi medido por meio de dois transdutores de deslocamento posicionados na parte superior central de cada um dos lados da viga, de forma que o deslocamento medido corresponde à média dos dois valores lidos. A viga preparada para o ensaio, com os equipamentos de monitoramento de cargas, deslocamentos, deformações específicas e abertura de fissura pode ser visualizada na Figura 1.

### 2.3 Ensaio à flexão das vigas – monitoramento das deformações específicas

A avaliação das deformações específicas do concreto na região comprimida foi feita por meio de *strain gauges* colados na face lateral das vigas. Em cada lado da viga foram colados dois *strain gauges*. Conhecendo-se as deformações específicas do concreto em determinada altura da viga, para os dois pontos nos quais estavam posicionados os *strain gauges*, foi possível determinar o local na altura da viga onde a deformação específica à compressão do concreto é nula, sendo que este ponto era considerado como a posição da linha neutra no determinado momento de ensaio. Isso era feito com os dados dos *strain gauges* de cada lado da viga, sendo utilizada para análise a posição da linha neutra calculada pela média dos valores determinados em cada lado da viga. Com estes dados foi possível correlacionar a posição da linha neutra com o deslocamento da viga. O valor para a posição da linha neutra varia de zero a 50 mm contado a partir do topo da viga.

### 2.4 Ensaio à flexão das vigas – monitoramento da abertura de fissura

A abertura de fissura foi monitorada de duas maneiras: por meio de transdutores de deslocamento e por meio de análise digital de imagens.

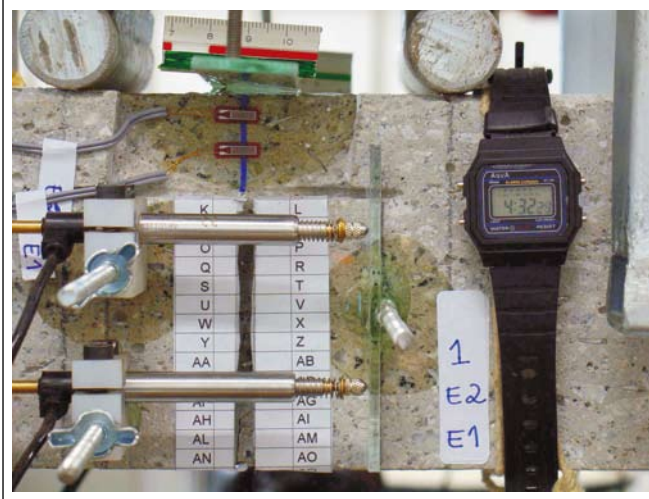
As técnicas para monitoramento de abertura de fissura e posição de linha neutra empregadas neste trabalho foram definidas em função dos equipamentos disponíveis no laboratório em que foram realizados os ensaios. Outra técnica que poderia ter sido testada é a utilização de *clip gauges*, porém não foi empregado por não se dispor de tais equipamentos.

#### 2.4.1 Técnica dos transdutores de deslocamento

Esta técnica consistiu no emprego de transdutores de deslocamento fixados nas laterais da viga e posicionados de forma que estes estavam presos de um lado do entalhe lateral da viga e a suas respectivas pontas apoiadas em uma chapa de vidro fixada do outro lado do entalhe. Com o desenvolvimento do ensaio e a conseqüente fissuração da viga no entalhe, os transdutores de deslocamento mediam o distanciamento entre os pontos de fixação dos transdutores de deslocamento situados de um lado do entalhe e a chapa de vidro fixada do outro lado. Foram empregados 2 transdutores de cada lado da viga. Um transdutor foi posicionado a uma distância de aproximadamente 10 mm da base da viga e o outro transdutor a uma distância aproximada de 50 mm acima do primeiro, estando ambos também posicionados a uma distância de aproximadamente 30 mm do centro do entalhe.

Na Figura 2 é possível visualizar os dois transdutores de deslocamento fixados nas laterais da viga e a chapa de vidro na qual estes transdutores estavam apoiados. Nesta figura são vistos, também, os *strain gauges* utilizados para monitoramento das deformações específicas na região comprimida, a grade de linhas empregada para medição com a técnica da análise de imagens digitais, a escala métrica para a conversão das medidas na imagem digital de pixels para milímetros, o relógio empregado para relacionar os dados capturados pelo sistema de aquisição de dados e a imagem digital obtida, a ponta do transdutor de deslocamento empregado para medir o deslocamento vertical da viga, os cutelos de ensaio

Figura 2 – Imagem utilizada para medição da abertura de fissura, mostrando: os transdutores, os *strain gauge*, a grade de linhas empregada na análise digital de imagens, o cronômetro, a escala métrica, a identificação da face da viga e da posição dos transdutores de deslocamentos e *strain gauges*



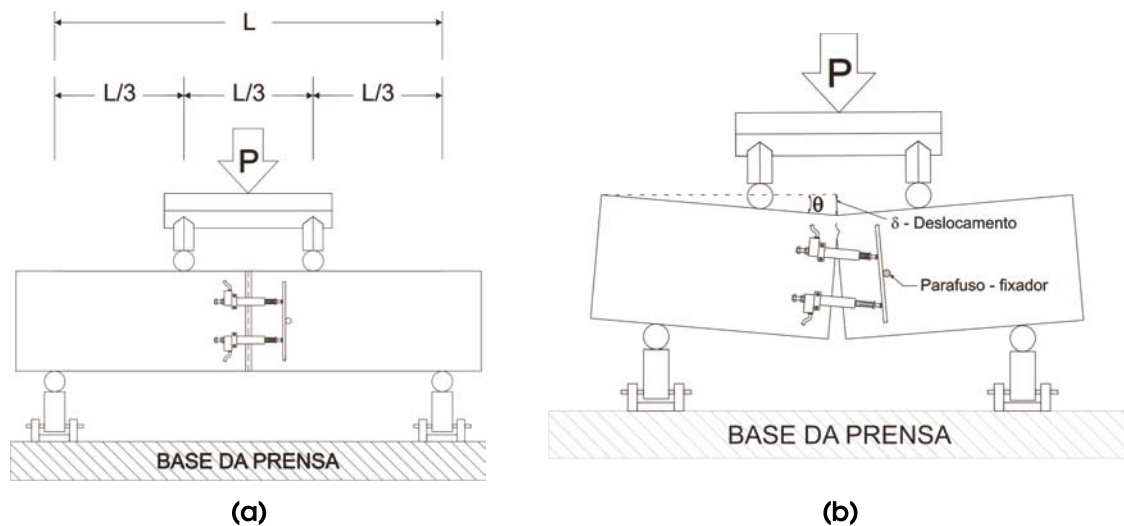
para aplicação da carga e a etiqueta identificando o lado da viga e o posicionamento dos *strain gauges*.

Como as vigas possuíam os entalhes nas laterais, era garantido que a fissura iria acontecer no entalhe e, desta forma, fixando o transdutor de um lado do entalhe e posicionando sua ponta do outro lado, com o surgimento da fissura havia uma conseqüente separação das duas partes da viga. Portanto, os transdutores de deslocamento eram capazes de medir o deslocamento entre estas duas partes para a altura em que estavam fixados. Conhecendo-se as leituras dos transdutores (deslocamento entre as duas partes da viga após fissura), a posição de cada transdutor e considerando o movimento de corpo rígido entre as duas partes da viga, foi possível determinar a abertura de fissura na região de máxima tração (base da viga), a abertura de fissura ao longo de toda a altura da viga e a altura da viga em que a abertura da fissura é nula. A altura da viga em que a abertura de fissura é nula fornece, também, um indicativo da posição da linha neutra. Lembrando que a posição da linha neutra é medida a partir do topo da viga.

É importante ressaltar que, durante a fissuração, a viga se comporta como dois blocos rígidos que se separam independentemente e cada lado da fissura se desloca com uma determinada inclinação que é proporcional ao deslocamento no centro do seu vão. Devido a esta inclinação das partes da viga e devido ao fato dos transdutores de deslocamento estarem fixos nas laterais da viga, a leitura feita pelo transdutor de deslocamento não corresponde à abertura da fissura real na posição do transdutor (Figura 3).

Quando são utilizados transdutores de deslocamentos fixos nas laterais da viga para medir a abertura de fissura, estes transdutores se movimentam juntamente com a lateral da viga de forma que estes sofrem uma rotação. A rotação sofrida pelos transdutores de deslocamento é a mesma que ocorre na viga, ou seja, é função do deslocamento. Isso faz com que os transdutores não se mante-

**Figura 3 – Esquema do ensaio de flexão a quatro ponto de vigas**  
**(a) configuração do ensaio; (b) movimento de corpo rígido da viga durante o ensaio**



nam na posição horizontal, como deveriam para que fosse possível medir a abertura da fissura na altura em que estão posicionados. Estes transdutores rotacionam conforme aumenta o deslocamento da viga de forma que os valores medidos por estes não correspondem à abertura da fissura real na altura em que estão posicionados, sendo necessário, portanto a correção das suas leituras, em função do deslocamento da viga.

Na Figura 4 é apresentado um esquema da rotação dos transdutores de deslocamentos em virtude do deslocamento da viga.

A abertura de fissura na altura em que está posicionado o transdutor de deslocamento (ABER) é determinada conhecendo-se a distância entre a ponta do transdutor e a face da fissura ( $L_2$ ) e o ângulo  $\theta$ , sendo que o ângulo  $\theta$  é função do deslocamento ( $\delta$ ) e o vão ( $L$ ) da viga, conforme as equações 1 e 2.

$$ABER = \left[ TR - L_2 \times \left( \frac{1}{\cos\theta} - 1 \right) \right] \times \frac{\sin(90 - 2\theta)}{\sin(90 + \theta)} \quad (1)$$

Onde:

ABER = abertura da fissura na altura em que está fixado o transdutor de deslocamento, esta é a distância que precisa ser determinada. (mm)

TR = valor medido pelo transdutor de deslocamento (mm)

$L_2$  = distância da ponta do transdutor de deslocamento na viga até a face da fissura (mm)

$\theta$  = ângulo de inclinação da viga em função do deslocamento

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta}{L/2} \quad (2)$$

Onde:

$\delta$  = deslocamento da viga (mm)

$L$  = vão da viga (mm)

#### 2.4.2 Técnica da análise digital de imagens

Outro procedimento utilizado para a medição da abertura de fissura durante o andamento do ensaio foi a técnica da análise digital de imagens, que consiste na obtenção de medidas através de imagens fotográficas. Esta técnica foi empregada por Robins et al. [6] que a denominaram de *grid method*. Neste trabalho foi empregada esta técnica de análise de imagens para avaliação da abertura de fissura nas duas faces laterais da viga.

Foi empregada uma grade de linhas impressa (Figura 2) em um papel adesivo que foi colada sobre a superfície lateral da viga. Os cruzamentos das linhas eram os pontos de medição para a avaliação das distorções da grade ao longo do ensaio. A distância vertical entre os pontos de referência utilizados para as medições (cruzamentos das linhas) foi de 5 mm e a distância horizontal de 30 mm. A grade era colada em toda a altura da lateral da viga, sendo excluída somente a região onde estavam colados os *strain gauges*.

As imagens foram obtidas com duas câmaras fotográficas digitais da marca SONY, modelo DSC V1, com 5 megapixels.

O posicionamento das câmaras fotográficas durante o ensaio pode ser visualizado na Figura 1.

As câmaras fotográficas eram posicionadas sobre tripé, com as lentes paralelas às laterais da viga a ser fotografada, a uma distância aproximada de 70 cm. As imagens foram capturadas da seguinte forma: uma primeira imagem inicial era obtida antes do início do ensaio. Esta primeira imagem era a imagem de referência. A captura das demais imagens iniciava logo após o surgimento da fissura, ou seja, quando se observava que a média do deslocamento medido pelos transdutores de deslocamento era superior

a 0,3 mm. A partir deste valor de deslocamento, as imagens eram capturadas em seqüência, com intervalo entre elas de aproximadamente 3 segundos. A escolha deste valor de deslocamento para início da captura das imagens está associada ao fato que, para deslocamentos inferiores a este, a abertura de fissura é tão pequena que a técnica de análise de imagens não tem precisão para a sua medição. Os disparos para captura das imagens eram feitos por controle remoto para evitar movimentação da câmara fotográfica durante o ensaio. Os dois controles remotos, um de cada câmara fotográfica, foram unidos de forma que eram disparados simultaneamente.

Em cada área fotografada (duas faces da viga) foram posicionados dois equipamentos: uma escala métrica para que fosse feita a calibração da imagem para a medição das aberturas da fissura e um cronômetro para permitir a relação da foto com o valor de carga e deslocamento que estavam sendo capturados pelo sistema de aquisição de dados no momento fotografado. Para permitir esta sincronia, o sistema de aquisição de dados e o cronômetro eram ligados no mesmo instante. Assim, o sistema de aquisição de dados registrava o tempo de cada dado coletado e o cronômetro da foto registrava o momento da captura da imagem. Além disso, cada lateral da viga era identificada na área fotografada, sendo identificados também os transdutores de deslocamento e os *strain gauges* utilizados em cada lado.

Um exemplo de imagem utilizada para medição da abertura de

fissura é apresentado na Figura 2, onde se destaca também os *strain gauges* utilizados para a medição das deformações e os transdutores de deslocamentos empregados para o monitoramento da abertura de fissura.

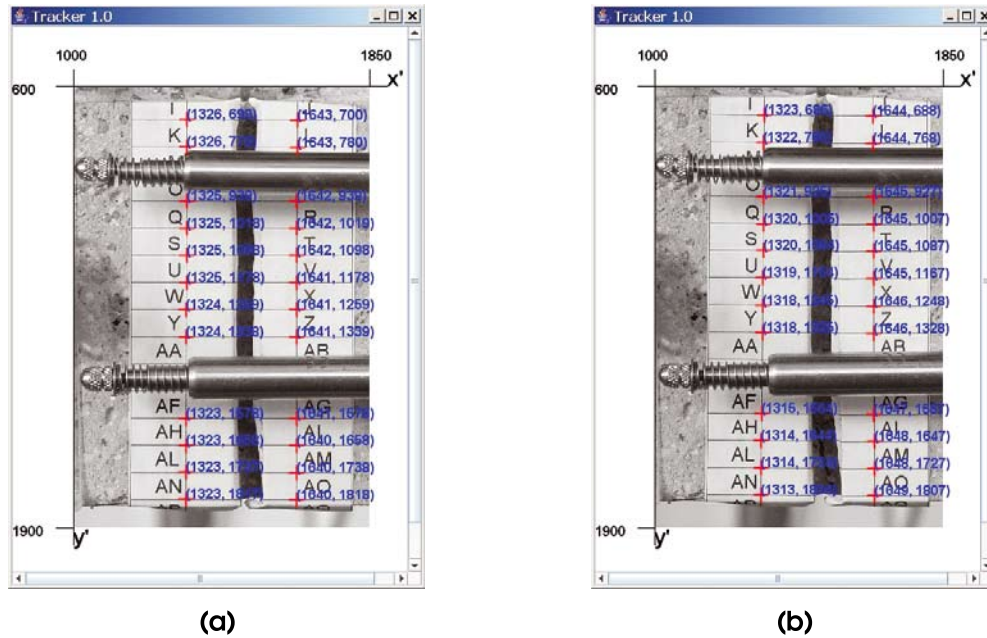
A primeira etapa da análise das imagens consistia na escolha das fotografias que seriam empregadas para a medição da abertura de fissura. Foram escolhidos os deslocamentos de vigas de 0; 0,5; 1,0; 1,5 e 2 mm para medição de abertura de fissura. Assim, com os dados registrados pelo sistema de aquisição de dados, era possível determinar o tempo do ensaio em que ocorreu cada um dos deslocamentos analisados. Com este tempo, procurava-se nas imagens, qual a imagem que correspondia a cada tempo e, conseqüentemente, a cada deslocamento. Caso a imagem correspondente a um determinado deslocamento não tivesse sido obtida, utilizava-se a imagem mais próxima ao tempo procurado e buscava-se nos dados do sistema de aquisição de dados o deslocamento a que estava relacionada tal imagem. Tal procedimento era realizado para as duas imagens obtidas para cada face da viga, sempre utilizando o par de imagens capturadas no mesmo instante para a avaliação da abertura de fissura em determinado deslocamento.

As imagens selecionadas eram transferidas para um programa de desenho no qual eram feitas as medições necessárias para a determinação do afastamento entre os pontos de referência da imagem e, conseqüentemente, da abertura de fissura em cada ponto.

Figura 4 -Esquema de rotação dos transdutores de deslocamento de acordo com o deslocamento da viga



Figura 5 – Imagens analisadas pelo programa computacional, com as coordenadas identificadas pelo programa para cada cruzamento das linhas de grade, para (a) imagem referente ao deslocamento inicial (zero) e (b) imagem referente ao deslocamento de 1,5 mm, ambas da Viga 1

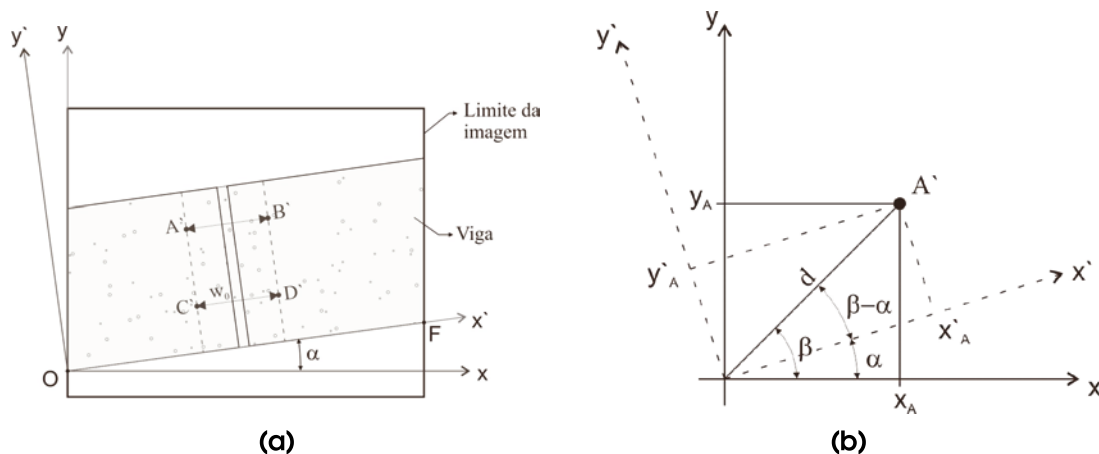


Em cada imagem eram feitas as seguintes medições, sempre em *pixel*:

- a) Coordenadas  $x$  e  $y$  de cada cruzamento das linhas de referência, identificadas pelas letras maiúsculas na grade. Estas coordenadas foram medidas manualmente e por meio de um programa computacional de reconhecimento automático de feições em imagens digitais.

Na análise manual, as imagens selecionadas eram transferidas para um programa de desenho no qual eram identificados os cruzamentos das linhas da grade de referência e determinadas as coordenadas (em *pixels*) destes cruzamentos. O programa computacional, desenvolvido especificamente para este trabalho, realizava uma varredura sobre a imagem a ser analisada, com uma máscara (ou

Figura 6 – (a) Esquematização gráfica do posicionamento inclinado da viga na imagem fotográfica e (b) detalhe do ponto A



matriz de busca) que modela a feição a ser reconhecida, no caso o cruzamento das linhas da grade de referência. Com isso, o programa identificava e registrava os valores de coordenadas dos *pixels* que se ajustam à máscara, considerando determinado coeficiente de correlação. Exemplos de imagens do ensaio de uma viga que foram processadas pelo programa são apresentados na Figura 5.

- b) Cotas y no centro da base e do topo da viga, para determinar a sua altura;
- c) Cotas y do canto inferior esquerdo e do canto inferior direito da base da viga, para determinar a inclinação da viga na imagem, pois era muito difícil evitar uma pequena inclinação da viga na imagem ao posicionar a câmara fotográfica e a viga;
- d) Distância em pixels de uma determinada distância em milímetros da escala métrica para obter a relação entre pixels e milímetros da imagem e transformar todas as medidas para a unidade do Sistema Métrico Internacional;
- e) Cota y do centro dos strain gauges e dos transdutores de deslocamento para a determinação do posicionamento de cada um destes equipamentos na altura da viga;
- f) Cota x do centro do entalhe e da ponta dos transdutores de deslocamento, para determinar a distância (L2) empregada na correção das leituras de abertura de fissura feitas por cada transdutor de deslocamento.

Conhecidos todos estes parâmetros medidos nas imagens, era possível determinar a abertura de fissura em cada altura da viga em que se possuía um ponto de referência (cruzamento das linhas da grade). Isso era feito pela diferença entre as coordenadas de cada cruzamento das linhas na imagem correspondente ao deslocamento analisado (0,5; 1,0; 1,5 e 2 mm) e as coordenadas de cada cruzamento das linhas na imagem de referência (imagem correspondendo ao deslocamento de 0 mm). Contudo, algumas correções são necessárias para determinar a abertura de fissura real para cada altura da viga em que eram medidas as coordenadas, levando-se em conta a inclinação de cada lado da viga após fissurada.

É necessário, inicialmente, corrigir todas as coordenadas medidas nos cruzamentos das linhas da grade de referência. Isto se faz necessário porque, ao posicionar a máquina fotográfica, muitas vezes não é garantido o seu perfeito nivelamento e com isso a imagem da viga na fotografia pode ficar um pouco inclinada. Caso não sejam feitas estas correções as medições da distância entre os pontos da grade não corresponderão a abertura de fissura real, mas sim a projeção desta abertura.

Apesar da possibilidade de corrigir as distorções nos valores das coordenadas medidas na imagem, conforme será apresentado na sequência, recomenda-se que, durante a montagem do ensaio, a máquina fotográfica seja posicionada o mais nivelada possível, evitando assim muitas distorções no posicionamento da viga na imagem.

Nas Figuras 6(a) e 6(b) pode-se definir:

x e y = eixos da imagem

x' e y' = eixos da viga

$\alpha$  = ângulo entre o eixo da imagem e o eixo da viga

$\beta$  = ângulo entre a diagonal (d) do ponto A e o eixo da imagem.

Para conhecer  $\alpha$  é preciso determinar as coordenadas x e y dos extremos da base da viga, pontos O e F na Figura 6(a). Assim:

$$\tan \alpha = \frac{|y_F - y_O|}{|x_F - x_O|} \quad (3)$$

Para determinar  $\beta$  emprega-se as coordenadas do ponto que está sendo corrigido, neste exemplo, as coordenadas do ponto A.

$$\tan \beta = \frac{y_A}{x_A} \quad (4)$$

A diagonal d é determinada pela seguinte Equação:

$$d = \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2} \quad (5)$$

As coordenadas do ponto A corrigidas serão obtidas pelas Equações 6 e 7.

$$x'_A = d \times \cos(\beta - \alpha) \quad (6)$$

$$y'_A = d \times \text{sen}(\beta - \alpha) \quad (7)$$

Para corrigir as coordenadas dos demais pontos deve-se repetir estes cálculos, a partir das coordenadas referentes a cada ponto na imagem.

Após a obtenção das coordenadas corrigidas de todos os pontos referentes aos cruzamentos das linhas da grade, deve-se proceder aos cálculos para a determinação da abertura da fissura. Nesta etapa deve ser lembrado que a viga ao fissurar divide-se em dois blocos, unidos por uma rótula plástica (movimento de corpo rígido), conforme a Figura 3, sendo que a inclinação de cada lado da viga ( $\theta$ ) é proporcional ao deslocamento da viga ( $\delta$ ).

Devido a este movimento, ocorre o afastamento das duas partes da viga, conseqüentemente, o afastamento entre os pontos da grade posicionados em cada lado da fissura e a rotação de cada uma das partes. Este efeito é esquematizado na Figura 7, na qual apresenta-se o posicionamento dos pontos na grade de referência antes da fissuração (Figura 7(a)) e o posicionamento dos pontos na grade de referência após a fissuração (Figura 7(b)).

A partir da Figura 7(a) define-se:

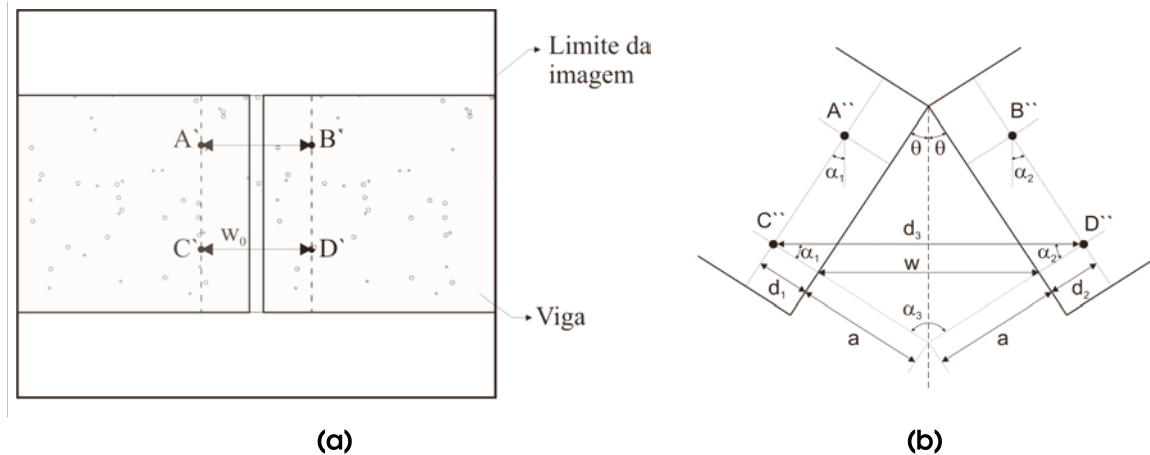
$w_0$  = distância entre os pontos C' e D'

$$w_0 = |x'_D - x'_C| \quad (8)$$

Onde:

$x'_c$  e  $x'_d$  são as coordenadas x corrigidas dos pontos C e D na primeira imagem, antes da fissuração.

**Figura 7 – Posicionamento dos pontos na grade de referência da imagem empregada para medição da abertura de fissura (a) antes da fissuração; (b) depois da fissuração**



Considerando o movimento esquematizado na Figura 7(b) observa-se que a abertura de fissura na altura dos pontos C'' e D'' corresponde a distância  $w$  entre estes pontos, e não a distância  $d_3$  e por tal motivo não é possível determinar a abertura de fissura fazendo-se apenas as diferenças entre as coordenadas dos pontos C'' e D''. Para determinar a abertura de fissura, deve-se conhecer a distância  $w$ . A partir das coordenadas dos pontos C'' e D'' na segunda imagem (imagem com a viga já fissurada), é possível obter a distância  $d_3$  entre eles.

$$d_3 = \sqrt{(x_C'' - x_D'')^2 + (y_C'' - y_D'')^2} \quad (9)$$

É possível determinar também os ângulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , conforme as Equações 10, 11 e 12.

$$\tan \alpha_1 = \frac{|x_A'' - x_C''|}{|y_A'' - y_C''|} \quad (10)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{|x_B'' - x_D''|}{|y_B'' - y_D''|} \quad (11)$$

$$\alpha_3 = 180 - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (12)$$

A partir das Figuras 7(a) e 7(b) é possível deduzir que:

$$w_0 = d_1 + d_2 \quad (13)$$

Aplicando-se a lei dos senos no triângulo formado pelos ângulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  pode-se determinar o lado  $a$  deste triângulo.

$$a = \left[ \frac{d_3}{2 \sin \alpha_3} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \right] - \frac{w_0}{2} \quad (14)$$

Aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo formado pelos lados  $a$ ,  $a$  e  $w$ , pode-se determinar a abertura de fissura ( $w$ ) referente a altura dos pontos C'' e D''.

$$w = \sqrt{2a^2 \times (1 - \cos \alpha_3)} \quad (15)$$

Para determinar a abertura de fissura referente aos demais pontos da grade deve-se repetir os cálculos apresentados nas Equações 8 até 15.

Ao final, sendo conhecida a abertura de fissura real em cada altura da viga em que foram medidas as coordenadas dos cruzamentos das linhas para cada face da viga e considerando o movimento do corpo rígido determina-se a equação da reta que melhor ajusta os pontos no gráfico abertura de fissura por distância do ponto ao topo da viga, para as duas faces da viga. Com a média aritmética simples das duas retas ajustadas, pode-se determinar a posição na altura da viga em que a abertura de fissura é nula, considerando-se esta a posição da linha neutra, e a abertura de fissura

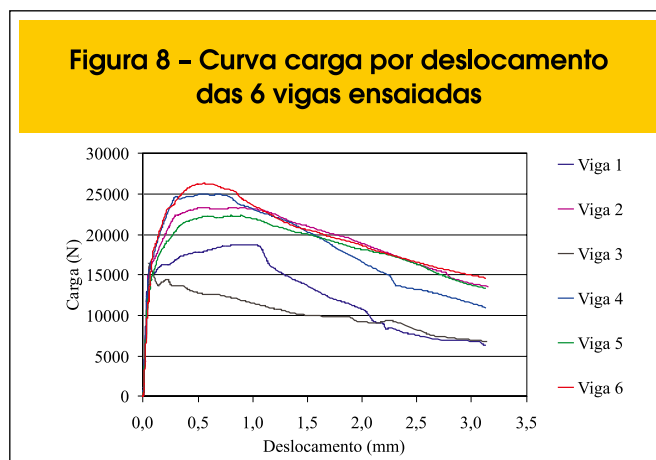


na região de máximo esforço de tração (base), para cada nível de deslocamento analisado. Lembrando- seu que neste trabalho, o valor para a posição da linha neutra varia de zero a 50 mm contado a partir do topo da viga.

### 3. Resultados e discussões

Na Figura 8 são apresentadas as curvas carga por deslocamento das 6 vigas ensaiadas para a avaliação das técnicas de monitoramento de abertura de fissura e posição da linha neutra.

A diferença de comportamento entre as curvas carga por deslocamento verificada na Figura 8 é comum em resultados de ensaios de vigas de concreto reforçado com fibras de aço. Conforme demonstrado por Gava et al. [8] esta diferença de comportamento normalmente é atribuída à quantidade de fibras presentes na seção de fratura da viga, bem como ao posicionamento, localização e comprimento aparente destas fibras.



Com os dados de deformações específicas à compressão medidas pelos *strain gauges* para cada posição foi possível obter as retas relacionando tais parâmetros, e, considerando que as deformações de compressão são nulas na linha neutra, com estas retas inferia-se a posição da linha neutra para cada deslocamento analisado. Procedimento semelhante foi realizado com os dados de abertura de fissura medidos pelos transdutores de deslocamento e pela análise digital de imagens, sendo que para estes

dois últimos procedimentos foi possível determinar não somente a posição da linha neutra, mas também a abertura de fissura na máxima região de tração (base da viga). É conveniente lembrar que o monitoramento das deformações específicas e das aberturas de fissura foi feito nas duas faces da viga e os resultados apresentados correspondem à média dos valores medidos em cada face. Conforme detalhado na metodologia, os dados obtidos com os transdutores de deslocamento empregados no monitoramento de aberturas

Tabela 1 - Valores de linha neutra e abertura de fissura máxima determinados a partir dos dados dos transdutores de deslocamentos

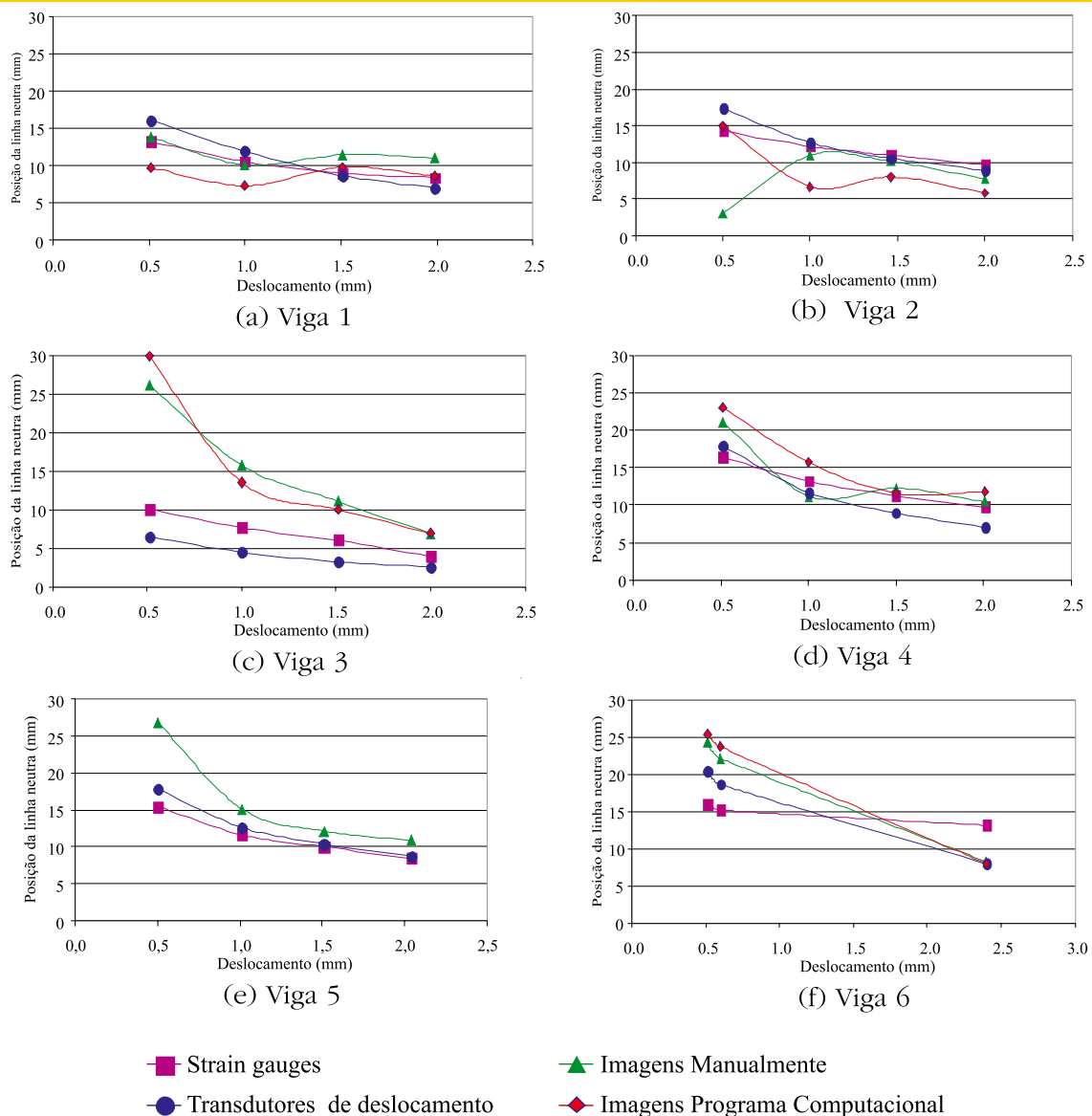
Viga	Deslocamento (mm)	Posição da linha neutra (mm)			Abertura de fissura máxima - CMOD (mm)		
		Transdutores sem correção	Transdutores corrigidos	Erro relativo (%)	Transdutores sem correção	Transdutores corrigidos	Erro relativo (%)
1	0,51	15,89600	16,00950	-0,71	0,53159	0,53093	0,12
	1,00	11,68750	11,91000	-1,90	1,09841	1,09582	0,24
	1,51	8,32675	8,64445	-3,82	1,81693	1,81086	0,33
	1,99	6,60270	7,01000	-6,17	2,52078	2,51005	0,43
2	0,49	17,24300	17,34300	-0,58	0,53383	0,53318	0,12
	1,00	12,55500	12,74770	-1,53	1,19359	1,19090	0,23
	1,46	10,27430	10,55685	-2,75	1,80807	1,80215	0,33
	2,02	8,55830	8,95115	-4,59	2,52706	2,51558	0,45
3	0,51	6,40855	6,54295	-2,10	0,47825	0,47754	0,15
	1,00	4,24960	4,49170	-5,70	1,05938	1,05655	0,27
	1,51	2,90355	3,26025	-12,28	1,65136	1,64487	0,39
	2,00	2,16045	2,62930	-21,70	2,20446	2,19301	0,52
4	0,51	17,80250	17,91450	-0,63	0,49636	0,49573	0,13
	1,00	11,50950	11,70195	-1,67	1,10887	1,10656	0,21
	1,50	8,65995	8,96690	-3,54	1,78143	1,77558	0,33
	2,01	6,60735	7,01300	-6,14	2,46425	2,45361	0,43
5	0,50	17,69950	17,83300	-0,75	0,45110	0,45035	0,17
	1,01	12,39180	12,63625	-1,97	1,09495	1,09181	0,29
	1,51	10,01900	10,37535	-3,56	1,72028	1,71317	0,41
	2,04	8,24410	8,71910	-5,76	2,38836	2,37528	0,55
6	0,51	20,32050	20,44550	-0,62	0,48587	0,48513	0,15
	0,60	18,47900	18,62550	-0,79	0,59101	0,58869	0,39
	2,40	7,40655	7,95105	-7,35	2,86455	2,84743	0,60

tura de fissura podem ser corrigidos em função da inclinação dos transdutores durante o desenvolvimento do ensaio. Para avaliar se esta correção dos dados dos transdutores ocasionaria diferenças significativas entre os valores de posição de linha neutra e abertura de fissura máxima, fez-se um estudo comparativo com os dados das 6 vigas ensaiadas. Na Tabela 1 são apresentados os valores de posição da linha neutra e abertura de fissura determinados com e sem a correção dos dados dos transdutores, para cada deslocamento e viga analisadas e ao erro relativo entre estas duas formas de medida.

Os dados da Tabela 1 revelam que existe diferença nos valores de linha neutra e de abertura de fissura obtidos a partir dos dados de transdutores de deslocamento que tiveram os valores corrigidos

ou não em função da inclinação do transdutor durante o ensaio. O erro relativo entre as duas formas de análise dos dados dos transdutores indicam que os valores de posição da linha neutra são os que sofrem maiores alterações. É possível verificar também que na medida em que aumenta o deslocamento da viga aumenta o erro relativo entre os dados dos transdutores corrigidos ou não. Este aumento do erro em função do aumento do deslocamento da viga já era esperado, uma vez que a correção dos dados dos transdutores é feita em função da inclinação que o transdutor sofre durante o ensaio devido ao movimento de corpo rígido da viga. Assim, aumentando o deslocamento da viga, aumenta a inclinação do transdutor. Com base nestes resultados conclui-se pela ne-

**Figura 9 – Posição da linha neutra em função do deslocamento determinada pelos três equipamentos: *strain gauge*, imagens digitais e transdutores de deslocamento**



cessidade da correção, em função da inclinação dos transdutores durante o ensaio, de todos os dados de transdutores de deslocamentos utilizados para medir abertura de fissura neste trabalho. Nas Figuras 9(a) até 9(f) são apresentadas as relações entre posição da linha neutra e deslocamento obtidas pelos três métodos: *strain gauges*, transdutores de deslocamento e análise de imagens. As imagens digitais foram analisadas de duas formas: manualmente e com o programa computacional.

Pelas Figuras 9(a) até 9(f) é possível constatar que os valores de posição de linha neutra determinados pelos dados obtidos pela análise de imagens processados manualmente são em alguns casos muito diferentes dos determinados pelos dados dos *strain gauges* e dos transdutores de deslocamento. Convém chamar a atenção para os dados das imagens das vigas 1, 2 e 4 nas quais não se observou a tendência da linha neutra aproximar-se do topo da viga com o aumento do deslocamento, visto que nestas vigas alguns valores de posição de linha neutra aumentaram com o aumento do deslocamento. Os valores de posição de linha neutra determinados pelos dados dos *strain gauges* e dos transdutores de deslocamento indicaram a tendência esperada, de diminuir seu valor na medida em que aumenta o deslocamento da viga.

Observou-se nas Figuras 9(a) até 9(f) que os maiores erros nas medições de posição da linha neutra pelo método da análise de imagens ocorre nos menores valores de deslocamento. Atribui-se esta diferença aos pequenos valores de abertura de fissura medidos. Em alguns pontos medidos nas imagens, os valores de abertura de fissura são muito próximos à precisão da medição, ou seja, muito próximos a um *pixel*. É importante ressaltar que em todas as imagens analisadas para determinação da abertura de fissura e da posição da linha neutra, 1 *pixel* corresponde a no máximo 0,065 mm. Assim, em pontos onde a abertura de fissura era inferior a 0,065 mm não era possível mensurar pela técnica da análise de imagem.

No processamento manual das imagens digitais havia uma dificuldade de escolher o *pixel* correspondente ao cruzamento das linhas da grade, conforme mostrado na Figura 10. Além disso, com a análise de várias imagens, percebeu-se que a escolha do *pixel* a ser me-

tido era, muitas vezes, influenciada pela pessoa que fazia a análise e, em alguns casos, os valores de coordenadas medidos por uma mesma pessoa em uma mesma imagem eram diferentes. Tais observações indicaram que este processo de análise de imagens estava sendo muito influenciado pela pessoa que o executava.

Com o emprego do programa computacional não foi possível identificar as coordenadas de todos os pontos das imagens. Na maioria dos casos, não foram identificados os pontos próximos às bordas inferior e superior da imagem analisada, o que inviabilizou a análise das imagens da Viga 5 por este método. No programa de reconhecimento automático de feições foram analisadas 48 imagens, que resultaram em 942 pontos e 1884 coordenadas identificados. Destes dados, verificou-se que em 77,1% dos casos as coordenadas medidas pelo programa foram iguais às coordenadas medidas manualmente, em 21,0% a diferença entre as coordenadas avaliadas por cada sistema foi de apenas 1 *pixel*, e em apenas 1,9% esta diferença foi de 2 *pixels*, não sendo verificada diferenças superiores a 2 *pixels*.

Analisando as Figuras 9(a) até 9(f) pode-se perceber algumas diferenças entre os valores de linha neutra determinados pelos dados da análise de imagens manualmente e pelo programa, sendo que a maior diferença ocorreu no ponto referente ao deslocamento de 0,5 mm da Viga 2.

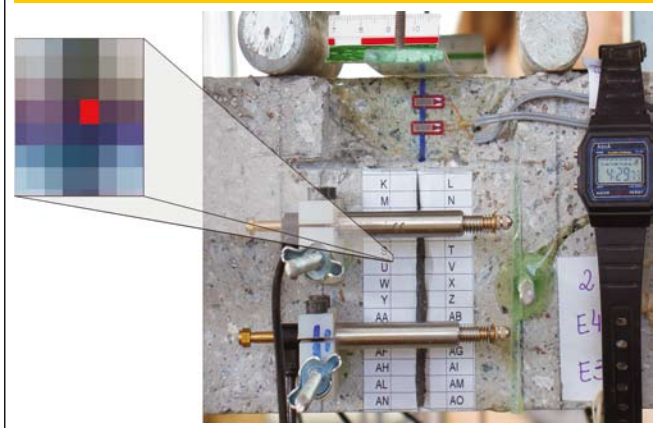
Analisando os dados referentes às coordenadas dos pontos do cruzamento das linhas da grade desta viga observou-se que as coordenadas medidas pelos dois métodos são, na maioria dos casos, iguais, sendo que em apenas dois pontos a diferença entre as coordenadas medidas por cada método é igual a 2. Com estes dados fez-se, ainda uma simulação na qual fazia-se a alteração de apenas 1 *pixel* em apenas uma coordenada dos pontos analisados em uma determinada imagem e calculava-se a posição da linha neutra. Observou-se que o erro de 1 *pixel* nas coordenadas x ou y dos pontos mais próximos ao topo da viga, normalmente a uma distância inferior a 55 mm, ou seja, nos pontos onde a abertura da fissura é muito pequena, altera significativamente a posição da linha neutra. Alterações nas coordenadas dos pontos mais distantes do topo, ou seja, onde a abertura de fissura é maior, não causa alteração na posição da linha neutra. Esta simulação foi feita com os dados de coordenadas obtidos da análise das demais vigas e verificou-se que alterações nas coordenadas x influenciam mais a posição da linha neutra do que alterações na coordenada y.

Outro item a ser analisado é a abertura de fissura, que pode ser determinada a partir dos dados dos transdutores de deslocamento e da análise digital de imagens. Os valores de abertura de fissura máxima para cada valor de deslocamento para as Vigas 1 até 6 são apresentados nas Figuras 11(a) até 11(f).

Analisando as Figuras 11(a) até 11(f) nota-se poucas diferenças na abertura de fissura determinada pelos dois sistemas de medição: transdutores de deslocamento e análise de imagens, incluindo as duas formas de fazer a análise de imagens, se manualmente ou se pelo programa computacional.

Comparando as Figuras 9(a) até 9(f) com as Figuras 11(a) até 11(f) observa-se que mesmo havendo diferenças nos valores de linha neutra determinados pelos vários sistemas de medição, não há diferenças na abertura de fissura máxima determinada a partir dos mesmos dados. Isso conduz a conclusão de que a abertura de fissura máxima é pouco influenciada por variação no coeficiente linear da reta (valor da posição da linha neutra) utilizada para a sua determinação. Isso ocorre porque o valor da abertura de fissura máxima depende dos maiores valores de abertura de fissura, ou

**Figura 10 -Exemplo de imagem utilizada para a medição da abertura de fissura indicando a dificuldade de escolha do pixel correspondente ao cruzamento das linhas da grade**



seja, daqueles que estão mais próximos da base da viga, enquanto que os valores da posição da linha neutra (coeficiente linear da reta) são mais influenciados pelas medições feitas nos pontos mais próximos ao topo da viga. Por tais motivos, erros de medição das coordenadas dos pontos na análise de imagens, como mostrado anteriormente, causam maiores alterações na posição da linha neutra e pouca influência na abertura de fissura máxima.

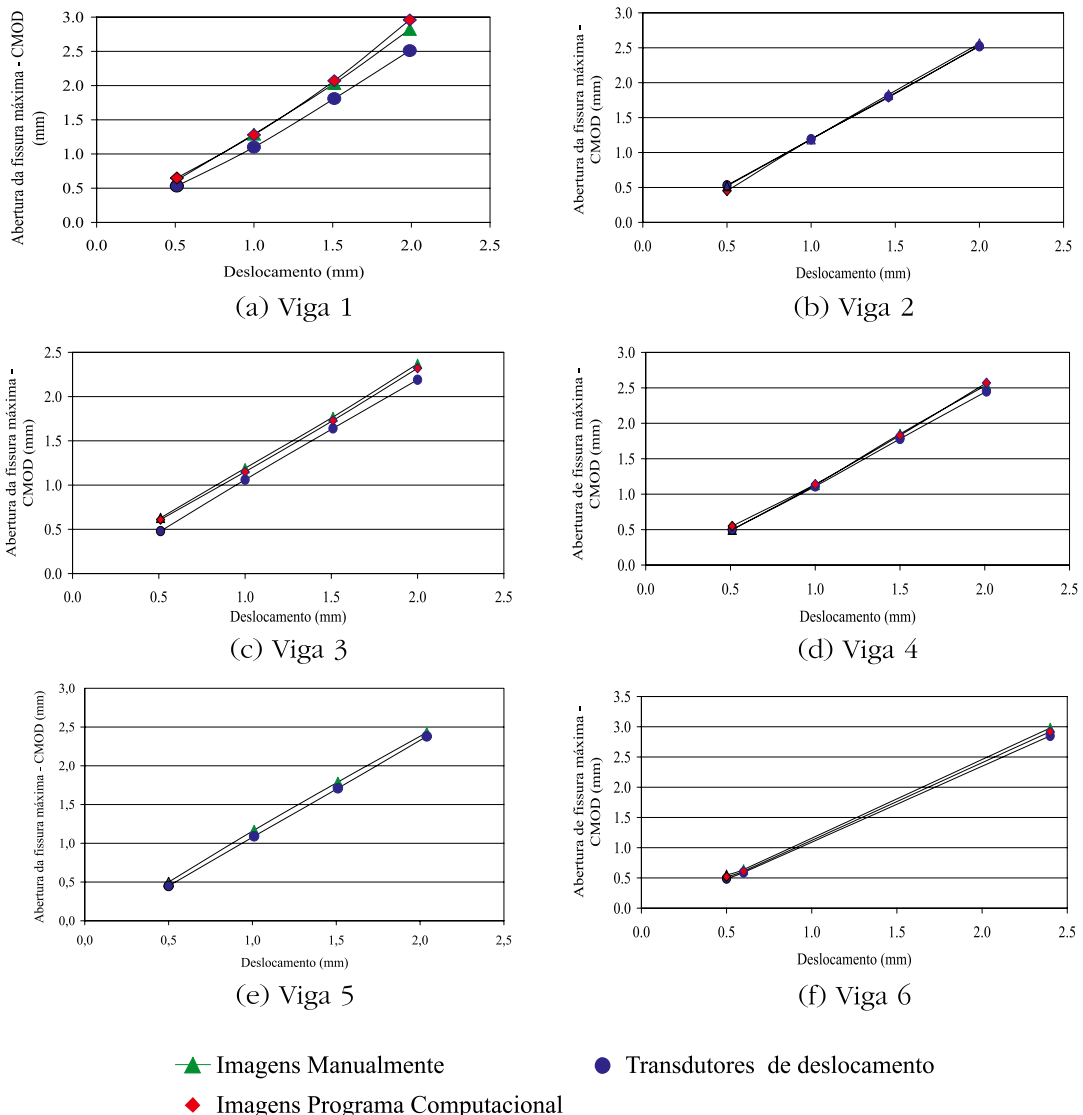
#### 4. Conclusões

Diante dos resultados encontrados verificou-se que as três técnicas avaliadas neste trabalho: *strain gauges*, transdutores de des-

locamento e análise digital de imagens, se mostraram viáveis para medição da posição da linha neutra e da abertura de fissura durante o desenvolvimento do ensaio de flexão de vigas de concreto reforçado com fibras de aço. No entanto, algumas considerações devem ser feitas.

Os valores encontrados para a posição de linha neutra determinados a partir dos dados dos *strain gauges* e dos transdutores de deslocamento foram mais coerentes do que os obtidos com os dados da análise de imagem. A medição da posição da linha neutra pela técnica da análise de imagem é muito influenciada por pequenas variações nas coordenadas dos pontos de medição. Com relação aos valores de abertura de fissura, os resultados obtidos

**Figura 11 – Máxima abertura de fissura em função do deslocamento determinada pelos dados obtidos na análise de imagem feita manualmente e feita com o programa computacional e com os dados dos transdutores de deslocamento**



dos dados dos transdutores de deslocamento e da análise digital de imagens foram muito parecidos.

Para a escolha da melhor técnica para medição da abertura de fissura e posição da linha neutra, deve-se levar em consideração não somente a precisão do sistema de medição, mas também a disponibilidade dos equipamentos ou de recursos financeiros para a aquisição dos mesmos.

Os *strain gauges* são materiais caros e da forma que foram empregados neste trabalho não podem ser reutilizados, pois foram levados até a sua ruptura. Os transdutores de deslocamento são equipamentos não muito caros, quando comparados aos demais equipamentos empregados no ensaio de flexão de vigas, como a máquina universal de ensaios e a célula de carga. O investimento em tais transdutores de deslocamento torna-se interessante, pois estes equipamentos são empregados para diversos ensaios em um laboratório de materiais de construção civil e de estruturas. No entanto, a sua utilização requer um sistema de aquisição de dados e que se o laboratório de ensaios não dispõe o investimento será muito maior.

A análise digital de imagens se mostrou uma técnica relativamente barata, pois a máquina fotográfica digital empregada neste trabalho, resolução de 5 *megapixels*, é um equipamento simples e disponível, uma vez que a maioria das máquinas digitais existentes no mercado já possuem esta resolução requerida para o ensaio. No caso de um laboratório não possuir um sistema de aquisição de dados e nem mesmo recursos para a sua aquisição, o que impossibilitaria o emprego de *strain gauges* e transdutores de deslocamento o emprego da técnica de análise de imagens digitais para medição da abertura de fissura se torna interessantes.

## 5. Referências bibliográficas

- [01] JOHNSTON, C. D.. Fibre-reinforced cement and concrete. In: MALHOTRA, V. M. Advances in Concrete Technology – Second Edition. Ottawa, Canada: CANMET, 1994.
- [02] CHEN, L.; MINDESS, S.; MORGAN, D. R.. Specimen geometry and toughness of steel-fiber-reinforced concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 6, n. 4, p. 529-541, nov. 1994.
- [03] ARMELIN, H.S. Rebound and toughening mechanisms in steel fiber reinforced dry-mix shotcrete. 1997. 231f. Tese (Doutorado). University of British Columbia, Vancouver, Canadá.
- [04] JONES, P.A.. Flexural modelling of steel fibre reinforced sprayed concrete. 1998. 343f. PhD thesis. Loughborough University. Loughborough, England.
- [05] PRUDÊNCIO JR., L.R.; AUSTIN S.; JONES, P.; ARMELIN, H.; ROBINS, P.. Prediction of steel fibre reinforced concrete under flexure from an inferred fibre pull-out response. *Materials and Structures/ Materiaux et Constructions*, v. 39, n. 290, p. 601-610, 2006.
- [06] ROBINS, P. et al.. Flexural strain and crack width measurement of steel-fibre-reinforced concrete by optical grid and electrical gauge methods. *Cement and Concrete Research*, v. 31, p. 719-729, 2001.
- [07] GAVA, G.P.; PIERI, T.S.; PRUDÊNCIO JR., L.R.. Ensaio de flexão de vigas de concreto reforçado com fibras de aço: influência da presença e posicionamento do entalhe e do número de fibras na seção fissurada. *e-Mat - Revista de Ciência e Tecnologia de Materiais de Construção Civil*. v. 1, N. 2, p. 114-127, nov. 2004.
- [08] GAVA, G.P.; PRUDÊNCIO JR., L.R.; DA SILVA, W.L.A.; PIERI, T.S.. Variabilidade do ensaio de flexão em vigas de concreto reforçado com fibras de aço. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 49º, Bento Gonçalves, 2007, Anais, Bento Gonçalves, 2007, 49CBC0041.