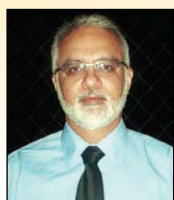


Bending moments in beams of reinforced concrete buildings

Momentos fletores em vigas de edifícios de concreto armado



F. A. N. SILVA ^a
artur@unicap.br

B. HOROWITZ ^b
horowitz@ufpe.br

Abstract

Residential buildings with slab systems supported by reinforced concrete beams are widely used in building industry. For design purposes, the computation of the loads on supporting beams is performed using simplified procedures, in which the slab is analyzed as an isolated element. New Brazilian code keeps the same recommendation presented in the old code allowing that, in the case of rectangular slabs with uniform load, the reactions on supporting beams may be computed assuming that those reactions correspond to the loads acting on triangles or trapezoids determined from the yield lines of the slab. In a simplified way, it is still allowed that these reactions may be considered as uniformly distributed on the slabs supports. The work shows through illustrative examples that these recommendations can some times lead to unsafe results and proposes a correction to overcome the problems.

Keywords: reinforced concrete beams, bending moments, reinforced concrete slabs.

Resumo

Edifícios residenciais compostos de sistema de lajes maciças apoiadas em vigas de concreto armado são largamente utilizados na indústria da construção civil. Na prática, o cálculo das reações destas lajes sobre as vigas é feito através de processos simplificados, nos quais os painéis de laje são analisados de forma isolada. A NBR 6118 [1] mantém em seu texto o mesmo teor da antiga NB-1 [2] permitindo que, no caso de lajes maciças retangulares com carga uniforme, as reações possam ser calculadas admitindo-se que elas correspondem às cargas atuantes nos triângulos ou trapézios determinados através do método das charneiras plásticas. De maneira aproximada, a norma brasileira permite ainda que estas reações possam ser consideradas como uniformemente distribuídas sobre as vigas de apoio. O trabalho demonstra através de exemplos práticos que tal recomendação pode conduzir a resultados contrários à segurança e propõe uma correção para o cálculo das reações de apoio em lajes maciças sobre as vigas de concreto armado.

Palavras-chave: vigas de concreto armado, momentos fletores, lajes maciças de concreto armado.

^a Departamento de Engenharia Civil - Universidade Católica de Pernambuco, e-mail: artur@unicap.br, Rua Dr. Manoel de Barros Lima 371/902, Bairro Novo, Olinda-PE, Brasil

^b Departamento de Engenharia Civil - Universidade Federal de Pernambuco, e-mail: horowitz@ufpe.br.

1. Introdução

A utilização de lajes maciças de concreto armado apoiadas sobre vigas também de concreto tem sido uma solução estrutural largamente empregada na construção de edificações em concreto armado no Brasil nas últimas décadas. Na prática de projeto, é usual se admitir a hipótese prevista na nova versão da NBR 6118 de que as ações das lajes sobre as vigas possam ser consideradas uniformemente distribuídas (item 14.7.6.1), a exemplo do que já era permitido pela NB-1. A determinação destas reações costuma ser feita através de diversos procedimentos, tais como Teoria das Grelhas, Teoria da Elasticidade ou Análise Plástica sendo permitido, ainda, considerar as linhas de ruptura da laje como retas inclinadas a partir dos vértices com ângulos de 45°, 60° e 90°, a depender das condições de vínculo dos apoios, quando uma análise plástica não for efetuada.

O presente trabalho discute a eficácia da recomendação de uniformização das reações das lajes maciças de concreto armado sobre as vigas de apoio prevista na NBR 6118 através de exemplos práticos ilustrativos, mostrando que esta hipótese pode, em algumas situações, conduzir a resultados contrários à segurança, já que mecanismos de colapso envolvendo a formação de charneiras plásticas na laje e rótulas plásticas nas vigas resultam em cargas de colapso inferiores às cargas de projeto [3] e a condição de equilíbrio do sistema não é sempre satisfeita.

2. Estudo de um painel interno típico de um piso de concreto armado

Para o estudo do projeto das vigas de apoio de lajes de concreto armado, considere um piso típico apresentado na Figura 1, onde se destaca um painel interno de vão L_x e L_y , de interesse para as discussões que se seguem.

O painel em destaque, na condição de ruptura, pode desenvolver

Figura 1 - Geometria de um piso típico de concreto armado

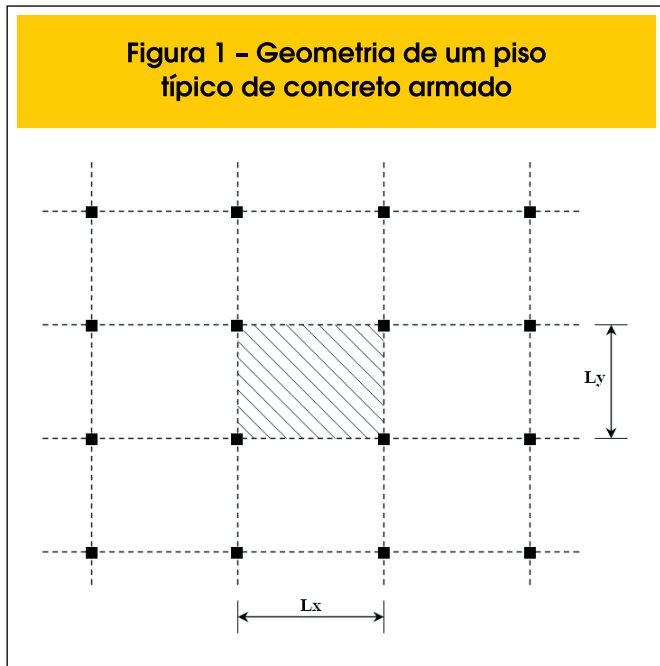
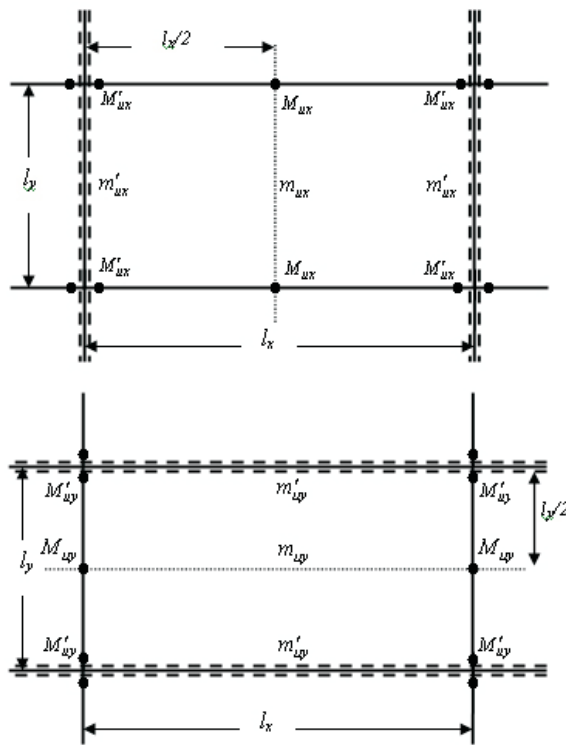


Figura 2 - Mecanismos compostos de colapso



mecanismos de colapsos que envolvem tanto a própria laje quanto as vigas que a contornam e que lhe servem de apoio. A Figura 2 ilustra estes mecanismos segundo as direções x e y, respectivamente, nos quais charneiras se desenvolvem ao longo da laje e rótulas plásticas se formam sobre as vigas.

Promovendo-se o equilíbrio de um segmento da laje em torno do eixo da viga de apoio, conforme indicado na Figura 2, é possível mostrar [4] que os momentos equilibrantes totais nas vigas e lajes nas direções x e y valem, respectivamente:

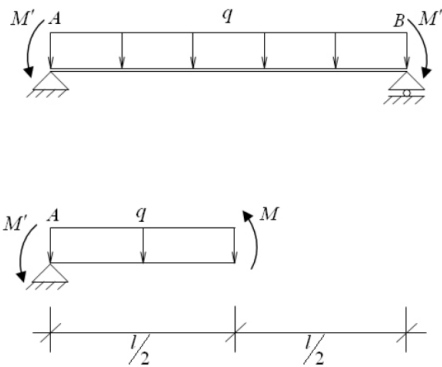
$$M'_{ux} + M_{ux} + l_y (m'_{ux} + m_{ux}) = \frac{(q_x l_x)^2}{8} \tag{1}$$

$$M'_{uy} + M_{uy} + l_x (m'_{uy} + m_{uy}) = \frac{(q_y l_y)^2}{8} \tag{2}$$

onde: m'_{ux} , m_{ux} , m'_{uy} , m_{uy} são os momentos fletores resistentes últimos negativos e positivos da laje, considerados uniformes, nas respectivas direções e M'_{ux} , M_{ux} , M'_{uy} , M_{uy} são os momentos fletores resistentes últimos negativos e positivos das vigas.

O conceito de momento equilibrante total pode ser claramente

Figura 3 – Momento equilibrante total



Equilíbrio de momentos em relação a A

$$\sum M_A = M' + M - \left(\frac{ql}{2}\right)\frac{l}{4} = 0$$

$$\therefore M' + M = \frac{ql^2}{8} = M_o = \text{momento equilibrante}$$

compreendido examinado o seu cálculo para uma viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído e momentos aplicados às extremidades, conforme indicado na Figura 3. Observando esta figura pode-se concluir que para o equilíbrio é imperativo assegurar que a soma dos momentos flettores positivo e negativo seja igual ao momento equilibrante total $\frac{ql^2}{8}$, neste caso. Esta condição encontra-se configurada nas equações (1) e (2) para as vigas e para a laje do painel da Figura 2, em cada uma de suas direções, e o dimensionamento destas vigas de forma que sejam satisfeitas estas equações assegurará que a carga de colapso será não inferior a q_u .

Caso se deseje permitir a consideração de uniformização do carregamento das lajes sobre as vigas, como indica a NBR 6118, é necessário garantir, portanto, a satisfação da condição de momento equilibrante total nas duas direções. Esta condição pode ser atendida se, em cada direção, exigirmos que o momento equilibrante total nunca seja inferior a:

$$M_o = \frac{ql_1l_2^2}{8}$$

(3)

onde:

q = carga por unidade de área da laje;

l_n = vão na direção onde os momentos estão sendo calculados;

l_2 = vão na direção transversal à l_n .

A recomendação de uniformização das reações das lajes sobre as vigas de apoio prevista na NBR 6118 não atende necessariamente a condição de momento equilibrante total referida. Também não satisfaz a condição de equilíbrio do semipainel nem assegura a capacidade de carga do sistema.

Para exemplificar o que se afirma, considere a análise do painel interno indicado na Figura 1, individualizado na Figura 4. O modelo de projeto adotado admite que as vigas sejam suficientemente resistentes e dimensiona-se a laje isolada sobre apoios indesclocáveis. Posteriormente, dimensionam-se as vigas para as reações correspondentes das lajes.

Os momentos flettores para o dimensionamento da armação da

laje podem ser calculados através de qualquer um dos processos abaixo, que buscam garantir a carga de colapso do mecanismo simples da laje indicado na Figura 5:

- a) Tabelas baseadas na teoria elástica das placas;
- b) Método de Marcus;
- c) Método dos Elementos Finitos
- d) Analogia da Grelha;
- e) Método das Charneiras Plásticas.

As tabelas baseadas na teoria elástica das placas são sistematizações da solução da equação geral das placas para casos particulares de apoio e carregamento. Admite material homogêneo, linear-elástico e isotrópico e usualmente fornecem momentos flettores máximos nas duas direções. No presente trabalho, foram utilizadas as tabelas desenvolvidas por KALMANOK [5] adaptadas por ARAÚJO [6].

O Método de Marcus se constitui numa adaptação da teoria das grelhas para o dimensionamento de lajes retangulares. Baseia-se

Figura 4 – Geometria do painel analisado

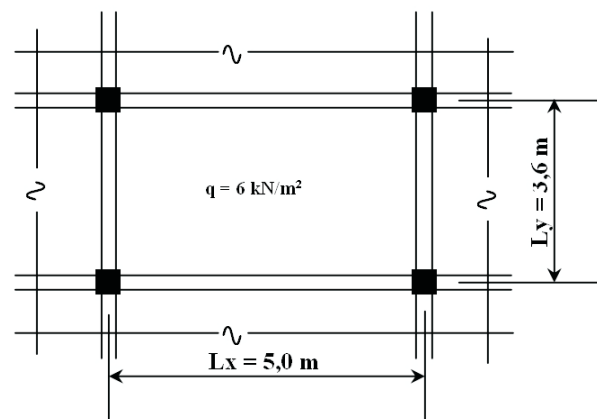
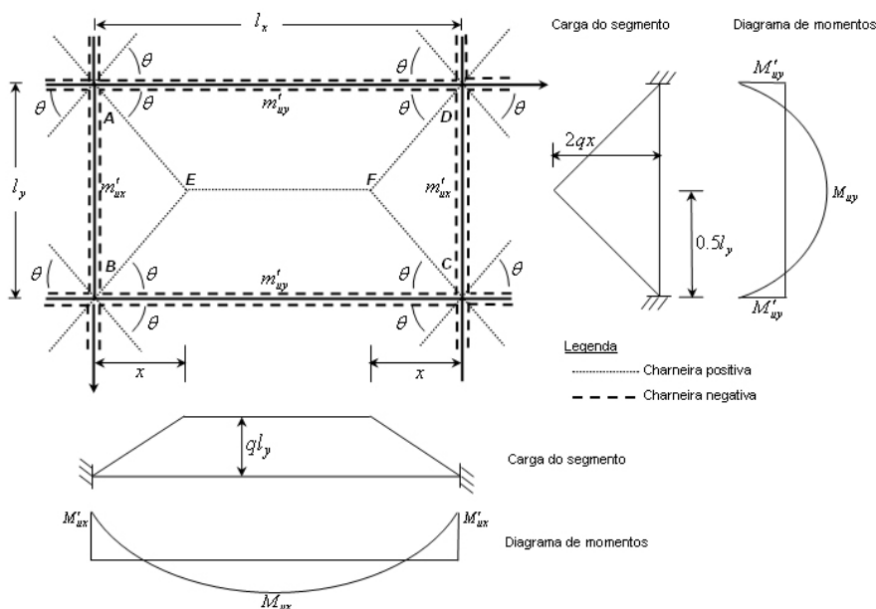


Figura 5 - Mecanismo de colapso simples da laje



no princípio de que a carga aplicada pode ser equilibrada apenas por flexão. Marcus observou que o processo das grelhas fornecia valores relativamente altos para os momentos fletores positivos e propôs, então, uma correção destes momentos através da adoção de coeficientes específicos de modo a aproximá-los dos valores reais advindos da teoria das placas. Desenvolveu várias tabelas para o cálculo dos momentos fletores em lajes maciças retangulares de concreto armado para diversas condições de apoio que se encontram disponíveis na literatura [7].

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma poderosa ferramenta para análise numérica de estruturas em geral. Para as análises realizadas, as lajes foram modeladas por elementos de placa fina e as vigas de apoio por elementos usuais de barras tridimensionais com seção transversal em T e largura contribuinte da laje de acordo com a norma brasileira. O programa utilizado foi o

STRAP [8]. Como a utilização prática do MEF no projeto de estruturas ainda demanda um árduo trabalho na análise e interpretação dos resultados, foram também realizadas análises através da analogia da grelha, que se constitui numa abordagem freqüentemente utilizada pela maioria dos programas automáticos para o cálculo e detalhamento de estruturas de concreto armado de edifícios residenciais [9], [10]. A técnica da analogia da grelha além de ser de fácil aplicação é fundamentada em conceitos físicos de significado imediato, aspecto que torna sua aplicação bastante simplificada e atrativa.

O Método das Charneiras Plásticas utiliza a teoria das linhas de ruptura para investigar os mecanismos de colapso no estado limite último. O projeto de lajes de concreto armado através deste método possui importantes vantagens, dentre as quais se destacam a economia, a simplicidade e a versatilidade. A economia e a simplicidade

Tabela 1 - Momentos fletores para dimensionamento e carga de colapso - Laje com Lx=5 m e Ly=3,6 m

Processo	Momentos Fletores (kNm/m)				Carga de Colapso (kN/m ²)
	m _x ⁺	m _y ⁺	m _x ⁻	m _y ⁻	
Tabelas	1,42	2,60	-4,40	-5,58	10,0
Marcus	1,20	2,30	-2,65	-5,11	8,30
MEF	1,43	2,65	-4,20	-5,47	9,90
Analogia da Grelha	1,50	2,42	-4,75	-5,28	9,90
Charneiras Plásticas	0,90	2,15	-1,80	-4,30	6,80

Tabela 2 – Momentos equilibrantes totais do painel – Laje com Lx=5 m e Ly=3,6 m

Processo	Momentos equilibrantes totais no painel (kNm)			
	Vão menor		Vão maior	
	m_d	m_d/m_{eq}	m_d	m_d/m_{eq}
Tabelas/NBR	58,40	1,20	64,08	0,95
Marcus/NBR	54,50	1,12	56,81	0,84
Charneiras Plásticas/NBR	49,75	1,02	52,84	0,78
MEF	48,60	1,00	67,50	1,00
Analogia da Grelha	49,20	1,02	68,07	1,01

m_d = momento de dimensionamento; m_{eq} = momento equilibrante

já foram demonstradas na prática com a construção do European Concrete Building Project em Cardington [11] onde, em cada andar da edificação, foi utilizado processo distinto para o dimensionamento e detalhamento das lajes. Economia de aproximadamente 14% foi observada no andar projetado pelo Método das Charneiras Plásticas quando comparado com métodos elásticos tradicionais de dimensionamento utilizado nos outros andares. Além disto, o detalhamento resultante demonstrou praticidade de execução e adequado comportamento, tanto em serviço quanto em ruptura. Nos exemplos onde se utilizou este método, uma margem adicional de 10% nos valores dos momentos fletores para dimensionamento foi considerada para levar em conta os efeitos do mecanismo de leque, conforme recomendado em [11], e para a relação entre o momento fletor na direção x e o momento fletor na direção y foi adotado um valor de 0.4. Este é um número próximo àquele obtido através de modelo simplificado de otimização do custo da armação da laje.

A carga uniformemente distribuída adotada para o cálculo dos momentos fletores na laje foi de 6,0 kN/m² para todos os processos descritos acima.

A Tabela 1 apresenta os momentos fletores positivos e negativos para o dimensionamento das armações da laje analisada para cada um dos processos descritos anteriormente bem como as respectivas cargas de colapso, calculadas através da teoria das linhas de ruptura para o mecanismo simples indicado na Figura 5. Como pode ser observado desta tabela, a carga de colapso proveniente da utilização do processo de armação das charneiras plásticas foi a que ficou mais próxima do valor alvo de 6,6 kN/m², resultante da majoração da carga de projeto em 10%, ao passo em que a carga de colapso obtida através do uso dos momentos fletores decorrentes das tabelas foi a que mais se distanciou daquele valor (cerca de 67% acima da carga utilizada para o dimensionamento da laje). Isto ocorre naturalmente porque estas tabelas usualmente fornecem valores máximos para os momentos fletores de dimensionamento, aspecto que concorre para um detalhamento antieconômico da laje.

A Tabela 2 apresenta os momentos equilibrantes totais para as duas direções do painel. Nesta tabela, os momentos fletores na laje foram calculados por cada um dos processos descritos anteriormente e, onde indicado com a abreviação NBR, as reações da laje sobre as vigas, necessárias ao cálculo dos momentos fletores destas, foram determinadas através do procedimento simplificado permitido pela

norma brasileira em seu item 14.7.6.1 alínea (a). Os momentos equilibrantes totais nas duas direções obtidos através da equação (3) são: Direção x = 48,60 kNm, Direção y = 67,50 kNm.

Podem ser observados na Tabela 2 que:

- Na direção do vão maior, a condição de momento equilibrante total não é atendida para nenhum dos processos simplificados de armação de lajes isolados com reação uniformizada sobre as vigas segundo a NBR 6118;
- A relação mais desfavorável entre o momento resistente e o momento equilibrante corresponde ao Método das Charneiras Plásticas/NBR, com subdimensionamento de 22%; a melhor relação corresponde a utilização de tabelas, com 5% de subdimensionamento;
- Do ponto de vista da segurança, o processo de dimensionamento da laje com a utilização de tabelas é mais aceitável que os outros dois métodos simplificados. No entanto, do ponto de vista da economia, não é justificável superdimensionar as lajes para garantir a sua estabilidade. A solução mais otimizada seria dimensionar as lajes para garantir contra o mecanismo simples de colapso e dimensionar as vigas para os mecanismos compostos de colapso, assegurando a condição de momento equilibrante total. Como as vigas são peças de maior altura, a quantidade de armadura resultará diminuída, como foi constatado em [11];
- O processo de Marcus/NBR, que já foi tradicionalmente utilizado no país, resulta em subdimensionamento de 16% na direção do maior vão. Este subdimensionamento é coberto pelos valores dos coeficientes de segurança e não resulta necessariamente em colapso. No entanto, é de conhecimento dos autores o surgimento de fissuras nas vigas, principalmente na direção do vão maior, e que são freqüentemente atribuídas a esforços devidos à retração;
- Não é recomendável que prescrições normativas dependam de processos que superdimensionem as lajes para garantia do equilíbrio para as combinações de ações de cálculo.

3. Sistema de pisos de concreto armado com vigas rígidas

O projeto das vigas de apoio de lajes retangulares de concreto armado com carregamento uniformemente distribuído, projetadas

mediante recurso à Teoria das Charneiras Plásticas, pode ser conduzido através de um dos seguintes procedimentos [4]:

- i. método baseado nos mecanismos compostos de colapsos;
 - ii. método baseado nos carregamentos transferidos para as vigas.
- O primeiro método é para projetar os painéis partindo do princípio de que as vigas de apoio são suficientemente resistentes para suportar a carga última da laje e, satisfeita esta condição, as vigas são então projetadas através de análise limite baseada nos mecanismos de colapso viga/laje, de forma que a carga de colapso do sistema seja atingida.

O exame do equilíbrio de um segmento da laje em torno dos eixos das vigas de apoio (ver Figura 2) resulta nas equações (1) e (2) anteriormente apresentadas e o dimensionamento destas vigas, de forma que sejam satisfeitas estas equações em cada direção, assegura que ocorrerá ruptura simultânea das vigas e da laje, quando do atingimento da capacidade de carga desta.

O segundo método de projeto consiste no cálculo do carregamento transferido pela laje para as vigas de apoio, conforme se observa esquematicamente na representação da Figura 5. Uma questão que se coloca como de importância, entretanto, é que a teoria das linhas de ruptura não explicita de que maneira as reações das lajes se distribuem sobre as vigas de apoio.

Uma opção para resolver este problema é admitir que a distribuição do carregamento sobre a laje para as vigas de apoio se processa em consonância com o formato das linhas de ruptura, i.e: carregamento triangular para as vigas na direção do vão menor e trapezoidal para as vigas na direção do vão maior. Levando-se em conta esta hipótese, é possível mostrar que se o equilíbrio para as vigas em cada uma das direções for verificado, as equações (4) e (5), a seguir, seriam obtidas.

Direção do Vão Menor

$$M'_{yy} + M_{yy} = \frac{(ql_2)l_2^2}{6} \quad (4)$$

Direção do Vão Maior

$$M'_{xx} + M_{xx} = \frac{ql_y l_x^2}{8} - \frac{ql_y l_2^2}{6} \quad (5)$$

Se verificarmos o equilíbrio do segmento BEFC em relação ao lado BC (ver Figura 5) e simplificarmos a expressão resultante obtém-se a equação (6) a seguir:

$$q \frac{l_2 l_y^2}{6} = \frac{ql_x l_y^2}{8} - l_x (m'_{xy} + m_{xy}) \quad (6)$$

De maneira inteiramente análoga, fazendo-se o equilíbrio do segmento CFD em relação CD obtém-se a equação (7) a seguir:

$$q \frac{l_y l_2^2}{6} = l_y (m'_{xx} + m_{xx}) \quad (7)$$

É possível mostrar que, se substituirmos o termo do lado direito da equação em (4) pela equação (6) e o termo do lado direito da equação (5) pela equação (7) obteríamos as equações a seguir.

$$M'_{yy} + M_{yy} = \frac{ql_x l_y^2}{8} - l_x (m'_{xy} + m_{xy}) \quad (8)$$

$$M'_{xx} + M_{xx} = \frac{ql_y l_x^2}{8} - l_y (m'_{xx} + m_{xx}) \quad (9)$$

As equações (8) e (9) são idênticas às equações (1) e (2), fato que permite concluir que os dois métodos expostos conduzem às mesmas expressões para o momento equilibrante total em cada direção. Desta forma, se as vigas forem projetadas por um destes métodos, a capacidade do sistema estará assegurada.

Para que não seja necessária a análise plástica das lajes para o cálculo das cargas nas vigas, as normas de projeto permitem aproximar o mecanismo de colapso das mesmas fixando o ângulo das charneiras com os eixos das vigas a depender da vinculação dos painéis das lajes. Para o caso de painel interno este ângulo é $\theta=45^\circ$ (ver Figura 5). Utilizando a teoria da elasticidade é possível mostrar que estas simplificações são justificadas apenas no caso de vigas muito rígidas [4].

A questão principal que se coloca, portanto, é como saber se as vigas de apoio são, de fato, suficientemente rígidas para serem consideradas apoios indesejáveis.

Uma solução possível é a utilização do critério adotado pela norma canadense [12] que considera rígidas as vigas nas quais se verifica a seguinte relação:

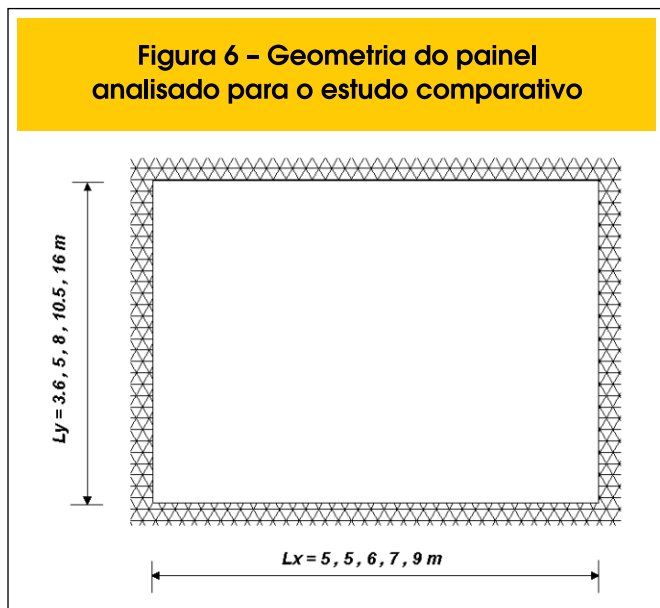
$$PRR = \frac{b_w h_b^3}{l_n^3 h_s} > 2,0 \quad (10)$$

onde:

- PRR = Parâmetro de Rigidez Relativa das vigas de apoio da laje;
- b_w = largura da viga;
- h_b = altura da viga;
- h_s = espessura da laje;
- l_n = vão livre da viga.

Garantida rigidez adequada para as vigas de apoio e caso se deseje admitir a uniformização das ações das lajes sobre as mesmas é preciso assegurar ainda o atendimento da condição de momento equilibrante total para as vigas duas direções, conforme já referido anteriormente. Uma maneira de fazer isto é determinar qual deve

Figura 6 - Geometria do painel analisado para o estudo comparativo



$$\frac{\bar{q}l_x^2}{8} = \frac{ql_y l_x^2}{8} - \frac{ql_y l_2^2}{6} \therefore \bar{q} = ql_y - \frac{4ql_y l_2^2}{3l_x^2} \tag{11}$$

Levando-se em consideração que $\theta=45$ ($l_2 = \frac{l_y}{2}$) e que a carga

utilizada na equação (5) corresponde à contribuição de dois painéis, a carga distribuída equivalente nas vigas na direção do vão maior pode ser calculada pela expressão que se segue:

$$\bar{q} = \frac{ql_y (3-m^2)}{3} \tag{12}$$

com $m = \frac{l_y}{l_x}$

ser o carregamento distribuído equivalente (\bar{q}) que satisfaz esta condição. Para o vão maior, este carregamento pode ser obtido a partir da seguinte expressão:

Tabela 3 - Momentos fletores calculados pelo Método de Marcus e Teoria das Placas com reações nas vigas segundo a NBR 6118

L_y/L_x	Momentos fletores na laje por Marcus (kNm/m)				Momentos fletores na laje pela Teoria das Placas (kNm/m)				Reações nas Vigas (kN/m)	
	mx	mx'	my	my'	mx	mx'	my	my'	Vão menor	Vão maior
0,72	1,2	2,6	2,3	5,1	1,42	4,40	2,6	5,58	5,4	6,9
1,00	2,7	6,3	2,7	6,3	3,16	7,67	3,16	7,67	7,5	7,5
1,33	6,0	13,7	3,4	7,7	6,98	15,08	4,06	12,18	11,3	9,0
1,50	9,2	20,5	4,1	9,1	10,54	22,04	4,98	16,64	14,0	10,5
1,78	16,9	36,8	5,4	11,6	16,08	38,91	6,62	27,28	19,4	13,5

Tabela 4 - Momentos equilibrantes totais do painel (laje/vigas) - Vão menor

L_y/L_x	Momentos Equilibrantes Totais no Painel (kNm)						
	NBR-M	NBR-P	CHRE	CHAP	CDE	MEF	AGR
0,72	54,50	58,40	58,59	60,33	60,33	48,60	49,20
1,00	91,87	101,03	107,50	107,50	107,50	93,75	94,38
1,33	238,60	257,48	259,61	265,60	265,60	216,00	217,26
1,50	440,48	470,72	465,48	483,35	483,35	385,88	387,60
1,78	1.132,58	1.153,22	1.155,39	1.223,70	1.223,70	972,00	969,84

Tabela 5 – Momentos equilibrantes totais do painel (laje/vigas) – Vão maior

L_y/L_x	Momentos Equilibrantes Totais no Painel (kNm)						
	NBR-M	NBR-P	CHRE	CHAP	CDE	MEF	AGR
0,72	56,81	64,08	71,19	69,52	69,52	67,50	68,07
1,00	91,87	101,03	107,50	107,50	107,50	93,75	94,38
1,33	247,40	278,24	306,43	300,60	300,60	288,00	288,98
1,50	478,28	537,21	602,40	585,46	585,46	578,80	580,13
1,78	1.394,60	1.546,70	1.760,66	1.698,75	1.698,75	1.728,00	1.729,59

Procedendo de maneira análoga é possível mostrar que o carregamento uniformemente distribuído para as vigas na direção do vão menor é dado pela seguinte expressão:

$$\bar{q} = \frac{q l_y}{3} \quad (13)$$

As equações (12) e (13) representam o carregamento uniformemente distribuído equivalente que garante o atendimento da condição de momento equilibrante total das vigas nas duas direções e deve ser utilizado, caso se deseje considerar a uniformização da ação das lajes sobre as vigas de apoio. É desta maneira, por exemplo, que a Norma Canadense [12] permite a uniformização das reações das lajes sobre as vigas de apoio, para fins de cálculo do momento fletor de projeto das mesmas.

A uniformização do carregamento das lajes sobre as vigas de apoio, conforme permitido pela NBR 6118 [1], não garante a condição de momento equilibrante total nas duas direções, conforme já se demonstrou e, portanto, necessita ser ajustada.

4. Estudo comparativo

A fim de se avaliar a eficiência dos procedimentos disponíveis na literatura para o cálculo das reações das lajes sobre as vigas de

apoio de pisos de concreto armado, foi desenvolvido um estudo comparativo utilizando os seguintes métodos:

- Recomendações simplificadas da NBR 6118 e Método de Marcus (NBR-M);
- Recomendações simplificadas da NBR 6118 e Teoria das Placas (NBR-P)
- Charneiras reais (CHRE);
- Charneiras aproximadas (CHAP);
- Carregamento distribuído equivalente (CDE);
- Analogia da Grelha (AGR) e
- Método dos elementos finitos (MEF);

Para este estudo, foi considerada a geometria do painel indicada na Figura 6, com os respectivos vão examinados.

Para cada relação entre os vãos ($\lambda=L_y/L_x$) foram calculados os momentos fletor positivos e negativos na laje, pelo Método de Marcus e pela Teoria das Placas, e as reações sobre as vigas, utilizando as recomendações simplificadas da NBR 6118. Os resultados acham-se indicados na Tabela 3.

As charneiras reais correspondem ao procedimento de cálculo descrito em [3] ao passo em que as charneiras aproximadas correspondem aos ângulos recomendados pela NBR 6118. Além das análises através do MEF foram também efetuadas análises mediante recurso a elementos de grelha, que se constitui numa abordagem frequentemente utilizada pela maioria dos programas automáticos para o cálculo e detalhamento de estruturas de concreto armado de edifícios residenciais.

A Tabela 4 e a Tabela 5 resumiram os momentos equilibrantes totais para o sistema laje/viga na direção do vão menor e do

Tabela 6 – Efeito da flexibilidade dos apoios – vão maior

PRR	Momento Total Laje (kNm)				Momento Total Vigas (kNm)				Momento Equilibrante Total (kNm)			
	LISOL	CAN	MEF	AGR	NBR	CAN	MEF	AGR	NBR	CAN	MEF	AGR
0,5	13,68	-	23,29	23,15	43,13	-	44,21	44,92	56,81	-	67,50	68,07
1,0	13,68	-	18,13	18,20	43,13	-	49,37	49,87	56,81	-	67,50	68,07
2,0	13,68	12,0	15,19	15,38	43,13	55,84	52,31	52,69	56,81	67,84	67,50	68,07
2,5	13,68	12,0	14,49	14,71	43,13	55,84	53,01	53,36	56,81	67,84	67,50	68,07
3,0	13,69	12,0	13,98	14,23	43,13	55,84	53,52	53,84	56,81	67,84	67,50	68,07

Tabela 7 – Efeito da flexibilidade dos apoios – vão menor

PRR	Momento Total Laje (kNm)				Momento Total Vigas (kNm)				Momento Equilibrante Total (kNm)			
	LISOL	CAN	MEF	AGR	NBR	CAN	MEF	AGR	NBR	CAN	MEF	AGR
0.5	37,00	-	27,09	27,02	17,50	-	21,51	22,18	54,50	-	48,60	49,20
1.0	37,00	-	25,61	25,78	17,50	-	22,99	23,42	54,50	-	48,60	49,20
2.0	37,00	32,91	24,91	25,26	17,50	23,33	23,69	23,94	54,50	56,24	48,60	49,20
2.5	37,00	32,91	24,76	25,15	17,50	23,33	23,84	24,05	54,50	56,24	48,60	49,20
3.0	37,00	32,91	24,65	25,09	17,50	23,33	23,95	24,11	54,50	56,24	48,60	49,20

vão maior, calculados para cada um dos procedimentos elencados acima.

Os resultados apresentados mostram que na direção do vão maior (Tabela 5) a recomendação da NBR 6118 de uniformização das reações das lajes sobre as vigas de apoio em geral subestimaram a condição de momento equilibrante total para o sistema laje/viga, quando comparados com os resultados do MEF que, por sua vez, são idênticos aos valores obtidos com a eq. (3). O valor máximo desta subestimação foi de 20% para $\lambda=1,78$. Os resultados da Tabela 5 mostram ainda que, a menos da uniformização tradicional permitida pela norma brasileira, qualquer um dos outros métodos referidos conduzem a resultados similares e constituem, assim, alternativas para o projetista.

5. Efeito da flexibilidade dos apoios

A fim de se avaliar o efeito da flexibilidade das vigas no comportamento global do sistema laje/viga, foi realizado um estudo admitindo uma variabilidade de inércia das mesmas. Para tal, a laje representada na Figura 4 foi analisada para seis valores do Parâmetro de Rigidez Relativa (PRR) das vigas de apoio, conforme equação (10), a saber: PRR=0.5, PRR=1.0, PRR=1.5, PRR=2.0, PRR=2.5 e PRR=3.0. Nesta análise, foram considerados os cálculos das reações das lajes sobre as vigas adotando a recomendação da NBR 6118 combinados com o Método de Marcus para cálculo dos momentos fletores nas lajes, denotado nas Tabelas 6 e 7 por LISOL (lajes isoladas). Os resultados obtidos com o método dos elementos finitos, os resultados das análises com a analogia da grelha e as recomendações decorrentes da utilização da norma canadense são também apresentados.

Os resultados apresentados na Tabela 6 e na Tabela 7 para as vigas na direção do maior e menor vão, respectivamente, mostram que a redução de rigidez das vigas de apoio resulta num acréscimo dos momentos fletores totais na laje e redução dos momentos fletores totais nas vigas, comportamento que não é abordado pela norma brasileira. Com efeito, se se comparam os resultados do método dos elementos finitos com o procedimento de lajes isoladas, é possível observar que, quando a flexibilidade das vigas de apoio é elevada (PRR=0.5), o momento fletor total da laje na direção do vão maior sofre um incremento de 127% o que se constitui numa situação indesejada do ponto de vista do projeto que resultará em subdimensionamento da laje. Outro aspecto que merece registro é que, a menos do dimensionamento através do Método

de Marcus combinado com a recomendação de uniformização da carga das lajes sobre as vigas, todos os outros métodos utilizados satisfazem a condição de momento equilibrante total.

6. Conclusões

O presente trabalho demonstrou através de exemplos ilustrativos que a recomendação da NBR 6118 de uniformização das reações das lajes sobre as vigas de apoio não garante a condição de momento equilibrante total para as duas direções e, portanto, não satisfaz a condição de equilíbrio do painel. Como consequência deste fato, este procedimento pode conduzir ao sub-dimensionamento das vigas de apoio das lajes. Apesar de não se ter registro de casos de acidentes em pisos de edifícios de concreto decorrentes exclusivamente deste subdimensionamento, é de conhecimento dos autores diversos casos de fissuração nas vigas de apoio de lajes de concreto armado na direção do vão maior, que são usualmente atribuídas a problemas de fissuração devido à retração.

Caso se deseje admitir a uniformização das reações das lajes sobre as vigas deve-se utilizar o carregamento equivalente conforme a norma canadense [12] ou utilizar as reações decorrentes do dimensionamento da laje pelo método das charneiras plásticas. O cálculo dos momentos fletores nas vigas determinados por estes dois métodos combinados com os momentos fletores nas lajes decorrentes dos mesmos conduz a momentos equilibrantes totais nas duas direções da laje que atendem à condição de equilíbrio do sistema laje/viga.

Considerando o estudo do efeito da flexibilidade dos apoios é possível concluir que:

- Para Parâmetro de Rigidez Relativa (PRR) das vigas de apoio do painel superiores a dois é aceitável o dimensionamento da laje sobre apoios indeslocáveis, sendo sugerida a incorporação deste critério na alínea 14.7.2.2 da NBR 6118 para caracterizar apoios “suficientemente rígidos”;
- Para Parâmetro de Rigidez Relativa (PRR) das vigas de apoio do painel inferiores a dois não é recomendável dimensionar o sistema de lajes como painéis isolados sobre apoios indeslocáveis;
- A hipótese de uniformização das reações das lajes sobre as vigas de apoio somente deveria ser permitida para vigas rígidas e com carregamentos corrigidos sobre as vigas para o cálculo dos momentos fletores de projeto da mesmas. O parâmetro de Rigidez Relativa da equação (10) e as cargas

distribuídas equivalentes das equações (12) e (13) fornecem alternativas mais consistentes do que aquela preconizada pela alínea 14.7.6.1 (a) da NBR 6118;

- d) Se as vigas de apoio da laje não puderem ser consideradas rígidas, utilizar o método dos elementos finitos ou a analogia da grelha para o dimensionamento do sistema laje/vigas.

7. Referências bibliográficas

- [01] ABNT. Norma Brasileira NBR-6118: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2003
- [02] ABNT. Norma Brasileira NB-1: Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, 1978.
- [03] SILVA, F. A. N.; HOROWITZ, B., Momentos Fletores em Vigas Rígidas de Pisos em Concreto Armado. 43º Congresso Brasileiro do Concreto, Foz do Iguaçu, 2001.
- [04] PARK, R.; GAMBLE, W. L. Reinforced Concrete Slabs, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [05] KALMANOK, A. S. Manual Para Cálculo de Placa. Editora Interciência, Montevideo, 1961.
- [06] ARAÚJO, J. M. Curso de Concreto Armado, Editora Dunas, Rio Grande do Sul, 2003, v2, 2 ed.
- [07] ROCHA, A. M. Curso Prático de Concreto Armado, Editora Científica, Rio de Janeiro, 1971, v. 1.
- [08] STRAP 8.0. Structural Analysis Program. Version 8.0, 2000 – ATIR - Manual do Usuário.
- [09] TQS. Sistemas computacionais – Manual do Usuário
- [10] EBERICK. Sistema Para Projetos de Edificações em Concreto Armado – Manual do Usuário.
- [11] KENNEDY, G., GOODCHILD, C. Practical Yield Line Design, British Cement Association, Crowthorne, Berkshire, 2003
- [12] CSA A23.3-04, Design of Concrete Structures. Canadian Standards Association, 2004.