

Numerical-computational analysis of reinforced concrete structures considering the damage, fracture and failure criterion

Análise numérico-computacional de estruturas de concreto armado considerando o dano, a fratura e critério de falha

L. A. F. DE SOUZA ^a
lafarani@yahoo.com.br

R. D. MACHADO ^b



Abstract

The experimental results of testing structures or structural parts are limited and, sometimes, difficult to interpret. Thus, the development of mathematical-numerical models is needed to complement the experimental analysis and allow the generalization of results for different structures and types of loading. This article makes two computational studies of reinforced concrete structures problems found in the literature, using the Finite Element Method. In these analyses, the concrete is simulated with the damage classical model proposed by Mazars and the steel by a bilinear elastoplastic constitutive model. Numerical results show the validity of the application of constitutive models which consider the coupling of theories with the technique of finite element discretization in the simulation of linear and two-dimensional reinforced concrete structures.

Keywords: damage mechanics, line interface element, fracture, softening, failure criterion.

Resumo

Os resultados obtidos a partir de ensaios de estruturas ou de peças estruturais em laboratório são limitados e, às vezes, de difícil interpretação. Dessa forma, o desenvolvimento de modelos numérico-matemáticos se faz necessário para complementar a análise experimental e possibilitar a generalização dos resultados para diferentes estruturas e tipos de carregamento. Este artigo faz dois estudos computacionais de problemas de estruturas de concreto armado encontrados na literatura, utilizando o Método dos Elementos Finitos. Nas análises, o concreto é simulado com o modelo clássico de dano proposto por Mazars e o aço por um modelo constitutivo elastoplástico bilinear. Os resultados numéricos mostram a validade da aplicação de modelos constitutivos que consideram o acoplamento de teorias com a técnica de discretização por elementos finitos na simulação do comportamento de estruturas lineares e bi-dimensionais em concreto armado.

Palavras-chave: mecânica do dano, elemento de interface de linha, fratura, amolecimento, critério de falha.

^a Professor Doutor, Engenharia Ambiental, UFFS – Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, Campus Cerro Largo, Rua Major Antônio Cardoso, 590, Cerro Largo – Rio Grande do Sul – Brasil – e-mail: lafarani@yahoo.com.br – tel.: (55) 3359 - 3950;

^b Professor Doutor, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUCPR – Departamento de Engenharia Mecânica – Pontifícia Universidade Católica – PUC PR – Rua Imaculada Conceição, 1.155 – Prado Velho – Curitiba – Brasil.

1. Introdução

O concreto tem sido o material estrutural mais utilizado no mundo nos últimos sessenta anos. É empregado em todos os tipos de construção por suas inúmeras vantagens: facilmente moldável, adaptando-se a qualquer tipo de forma; resistente ao fogo, às influências atmosféricas e ao desgaste mecânico; e é uma alternativa econômica, uma vez que é constituído de matéria prima barata. Uma das dificuldades na modelagem computacional de estruturas de concreto é a definição das relações constitutivas que contemplem o comportamento não linear do material, a possibilidade de fissuração e as diferentes respostas à tração e à compressão. No concreto é muito difícil separar os fenômenos de deformação e de ruptura, porque as microfissuras e as cavidades que existem antes mesmo da existência de qualquer sollicitação interferem diretamente na resposta inicial do material se movimentando (Lemaitre e Chaboche [8]).

Análises de estruturas de concreto armado baseadas em modelos materiais elásticos (lineares ou não lineares) são largamente utilizados em escritórios de projeto na atualidade, sendo seus resultados empregados no dimensionamento e avaliação do comportamento global das mesmas. Quando essas estruturas são submetidas a carregamentos que causam o início de fissuração do concreto em tração, as análises elásticas não têm capacidade de simular adequadamente esse comportamento (Leonel *et al.* [9]).

As teorias da Plasticidade, Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura são bastante difundidas para a análise de estruturas em concreto armado, sendo cada uma delas adequada para simular determinado fenômeno. A tendência, como não se tem ainda um modelo constitutivo completo para o concreto, é o emprego conjunto dessas teorias para a representação dos fenômenos relacionados ao comportamento do material.

Uma evolução natural são os modelos que acoplam mais de uma teoria, surgindo formulações quase sempre complexas. Contudo, buscando diminuir o grau de complexidade das formulações, mas ainda levando-se em conta na sua formulação o acoplamento de efeitos, e por consequência de teorias, grande destaque tem sido dado aos chamados modelos constitutivos simplificados (Álvares *et al.* [1]).

A ruína do concreto, em geral, pode ser dividida em dois tipos: o primeiro, por tração, é caracterizado pela formação de fissuras e perda de resistência à tração na direção normal à fissura formada; o segundo, por compressão, é caracterizado pela formação de muitas fissuras paralelas à direção das forças de compressão, de tamanho reduzido, que fazem o concreto perder grande parte de sua resistência.

Um critério de resistência tem como finalidade estabelecer leis, pelas quais se podem prever, pelo comportamento do material nos ensaios de tração e de compressão simples, a condição de ruptura sob qualquer tipo de combinação de tensões ou deformações (Nicolas *et al.* [12]). Muitos dos critérios de resistência existentes apresentam restrições para aplicação a materiais heterogêneos e anisotrópicos, com propriedades de elasticidade e de resistência direcionais, como o concreto. Nesse sentido, torna-se importante e necessária a investigação de um critério de resistência que seja possível avaliar de modo adequado a ruptura desse material para um estado de tensão axial ou biaxial.

Este artigo apresenta duas propostas de modelagem para estruturas de concreto armado através de dois estudos numérico-computacionais, por meio do Método dos Elementos Finitos, com o objetivo de analisar os aspectos envolvidos na modelagem computacional, incluindo itens relativos aos modelos constitutivos dos materiais. As análises não lineares são efetuadas considerando o método de Comprimento de Arco com o processo iterativo tipo Newton-Raphson modificado. Essa técnica caracteriza-se por apresentar um controle concomitante de carga e deslocamento.

O primeiro estudo consiste da análise estrutural unidimensional de uma viga proposta por Jarek *et al.* [7]. A modelagem desse elemento estrutural é feita com o programa Scilab, versão 5.3.3. O comportamento do concreto é simulado através do modelo constitutivo de dano proposto por Mazars [10], e o aço por um modelo constitutivo elastoplástico bilinear. Também, ao modelo, é incorporado o critério de falha de Tsai e Wu [18].

A partir do problema bi-dimensional de um tirante armado adaptado de Mazars e Pijaudier-Cabot [11], o segundo estudo faz uma análise da resposta estrutural considerando o acoplamento do modelo constitutivo de dano proposto por Mazars [10] e um modelo de fraturamento no Modo I baseado no trabalho de Schellekens [16]. Esse modelo foi implementado em código Fortran – Compaq Visual Fortran Edition 6.5. A fissura é simulada através de um elemento de interface de linha, podendo considerar o fenômeno de amolecimento – linear, bilinear ou exponencial – no modelo constitutivo.

2. Modelo constitutivo para o concreto

O modelo de dano proposto por Mazars [10] tem por base algumas evidências experimentais observadas em ensaios uniaxiais de corpo de prova em concreto, tendo por hipóteses fundamentais (Proença [14]):

- localmente o dano é devido a extensões (alongamentos) evidenciadas por sinais positivos, ao menos um deles, das componentes de deformação principal ($\varepsilon_i > 0$);
- o dano é representado por uma variável escalar $D \in [0,1]$ cuja evolução ocorre quando um valor de referência para o ‘alongamento equivalente’ é superado;
- considera-se, portanto, que o dano seja isotrópico, embora análises experimentais mostrem que o dano conduz, em geral, a uma anisotropia do concreto (o qual pode ser considerado inicialmente como isotrópico) e;
- o concreto danificado comporta-se como meio elástico. Assim, deformações permanentes evidenciadas experimentalmente numa situação de descarregamento são desprezadas.

Nesse modelo, supõe-se que o dano se inicia quando a deformação equivalente atinge um valor de deformação de referência e_{d0} , determinado em ensaios de tração uniaxial em correspondência à tensão máxima.

A relação constitutiva é dada por (Tiago *et al.* [17]):

$$\sigma = (I - D)C^o \quad (1)$$

Onde I é o tensor identidade e C^o é o tensor elástico do material íntegro. O estado de extensão é localmente caracterizado por

uma deformação equivalente que é expressa por (Pituba e Proença [13]):

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2} \quad (2)$$

Onde ϵ_i , $i = 1, \dots, 3$, são componentes de deformação principal e $\langle \epsilon_i \rangle_+$, $i = 1, \dots, 3$, são as partes positivas definidas por:

$$\langle \epsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2} (\epsilon_i + |\epsilon_i|) \quad (3)$$

O concreto, em relação aos modos de ruptura, apresenta um comportamento distinto a tensões de tração e compressão. A ruptura do concreto por esforços de tração é ocasionada pela formação de fissuras e consequente perda de resistência normal à direção da fissura. Quanto à ruína na compressão, o concreto apresenta um comportamento que pode ser considerado como plástico, que é o esmagamento ocasionado pela superação da coesão interna por efeito da tensão de cisalhamento caracterizada por grande quantidade de microfissuras (Leonel *et al.* [9]). Considerando-se um carregamento continuamente crescente ou radial, das curvas tensão-deformação obtidas em ensaios uniaxiais de tração e compressão, podem ser determinadas explicitamente as variáveis de dano D_T e D_C da seguinte forma, respectivamente:

$$D_T(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1-A_T)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_T}{e^{(B_T\tilde{\epsilon}-\epsilon_{d0})}} \quad (4)$$

$$D_C(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1-A_C)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_C}{e^{(B_T\tilde{\epsilon}-\epsilon_{d0})}} \quad (5)$$

Onde A_T e B_T são parâmetros característicos do material em tração uniaxial, A_C e B_C são parâmetros do material em compressão uniaxial e ϵ_{d0} é a deformação elástica limite. Os subíndices T e C significam tração e compressão, respectivamente.

Para estados complexos de tensão, a variável de dano pode ser determinada por uma combinação linear de D_T e D_C mediante a seguinte condição (Pituba e Proença [13]):

$$D = \alpha_T D_T(\tilde{\epsilon}) + \alpha_C D_C(\tilde{\epsilon}), \quad \alpha_T + \alpha_C = 1 \quad (6)$$

Onde os coeficientes α_T e α_C assumem valores no intervalo fechado $[0,1]$, e representam a contribuição de solicitações à tração e à compressão para o estado local de extensão, respectivamente. Mazars [10] propôs os seguintes limites de variação para os parâmetros A_T , B_T , A_C e B_C , obtidos a partir da calibração com resultados experimentais: $0,7 \leq A_T \leq 1$ $10^4 \leq B_T \leq 10^5$ $1 \leq A_C \leq 1,5$ $10^3 \leq B_C \leq 2 \cdot 10^3$ $10^{-5} \leq \epsilon_{d0} \leq 2 \cdot 10^{-4}$

3. Modelo constitutivo para o aço

Neste artigo, utiliza-se um modelo uniaxial para descrever o comportamento das armaduras, uma vez que, em estruturas de concreto armado, as barras de aço resistem fundamentalmente a esforços axiais. No modelo computacional implementado, o aço é representado como um material elastoplástico e com o mesmo comportamento em tração e em compressão. A representação se dá por um diagrama tensão-deformação bilinear. Assim, a tensão no aço é determinada por (Tiago *et al.* [17]):

$$\sigma = \begin{cases} E_a \epsilon & , -\epsilon_{sy} \leq \epsilon \leq \epsilon_{sy} \\ E_{at} \epsilon & , \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

Onde E_a é o módulo de elasticidade longitudinal inicial do aço, ϵ_{sy} é a extensão de cedência e $E_{at} = k_a E_a$ é o módulo de elasticidade longitudinal após a cedência do aço.

4. Elemento de interface de linha

As descontinuidades geométricas podem ser modeladas com muito êxito por meio de elementos finitos de interface. Esses elementos têm a finalidade de transmitir esforços entre os dois corpos ou partes do mesmo entre os quais se encontra.

Neste artigo foram utilizados elementos de interface de linha para simular fissuras pré-estabelecidas na peça supondo o modo de fraturamento I. O efeito de modo I é representado pela transmissão de esforços normais às faces da fissura.

O elemento de interface de linha é baseado no trabalho de Schellekens [16]. Esse elemento unidimensional é isoparamétrico, com quatro pontos nodais (dois graus de liberdade por nó - u , v), funções de forma lineares e espessura zero.

O vetor de deslocamentos nodais u é dado por:

$$u = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T \quad (8)$$

Onde u_i e v_i , $i = 1, \dots, 4$, são os deslocamentos nodais na direção ξ e η , respectivamente. O operador B que relaciona os deslocamentos nodais ao campo de deslocamentos relativos do elemento é:

$$B = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Onde h_i , $i = 1, \dots, 4$, são as funções de forma dadas por:

$$h_1 = h_4 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (10)$$

$$h_2 = h_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (11)$$

Usualmente, as tensões são avaliadas em função das deformações; no entanto, no caso das tensões na interface, as mesmas são determinadas em função dos deslocamentos relativos. Os deslocamentos relativos (Δw) do elemento são calculados através da seguinte relação:

$$\Delta w = Bu \quad (12)$$

Sendo D a matriz de propriedades do material, considerando que o elemento de interface de linha não tem dimensão na direção η e que a espessura e é constante ao longo do comprimento do mesmo, a matriz de rigidez K é obtida por:

$$K = e \int_{\xi=-1}^{\xi=1} B^T D B \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi \quad (13)$$

Onde L é o comprimento do elemento. A matriz constitutiva D é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Onde K_s e K_0 denotam as componentes de rigidez horizontal (rigidez tangencial) e rigidez vertical (rigidez à tração), respectivamente. No cálculo das componentes de rigidez da matriz D, pode-se considerar o fenômeno de amolecimento – linear, bilinear ou exponencial - no modelo constitutivo.

O modelo de amolecimento linear despreza os efeitos coesivos tangenciais e simplifica a curva de rigidez à tração, considerando que o material perde a resistência desde o início. A matriz D pode ser escrita na forma:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w \leq w_c \rightarrow K_0' = K_0 \left(\frac{w_c - w}{w_c} \right) \\ w > w_c \rightarrow K_0' = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Onde w_c é o deslocamento relativo crítico a partir do qual não há transmissão de esforços entre as faces da fissura, K_0 é a rigidez à tração inicial, e w é a abertura entre os nós do elemento de interface normal às faces da fissura. A abertura da fissura crítica (w_c), no caso de amolecimento linear, é obtida a partir da energia de fraturamento (G_f) e é dada por:

$$w_c = \frac{2G_f}{\sigma_U} \quad (16)$$

Onde σ_u é a tensão última de tração do material. Esse modelo está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura, uma vez que a área limitada pela curva tensão transmitida através da fissura versus abertura da fissura ($\sigma \times w$) é igual à energia de fratura do material (G_f).

O modelo constitutivo de amolecimento exponencial é caracterizado pela curva na qual a rigidez à tração decresce exponencialmente em relação ao deslocamento relativo. Nesse modelo é desprezada a contribuição da componente de rigidez tangencial. A matriz D pode ser escrita por:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_0' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w \leq w_c \rightarrow K_0' = K_0 e^{-\theta w} \\ w > w_c \rightarrow K_0' = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Onde θ é o coeficiente de amolecimento exponencial. A energia de fraturamento (G_f) para o amolecimento exponencial pode ser obtida integrando-se a lei constitutiva e variando-se a abertura da fissura de 0 a ∞ , obtendo-se:

$$G_f = \frac{\sigma_u}{\theta} \quad (18)$$

O modelo constitutivo bilinear é caracterizado por uma curva com duas inclinações diferentes, considerando que o material perde a resistência desde o início da sollicitação. A matriz D pode ser escrita na forma:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_0' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w \leq w_1 \rightarrow K_0' = K_0 + \frac{(K_1 - K_0)w}{w_1} \\ w_1 < w \leq w_c \rightarrow K_0' = \frac{K_1(w - w_c)}{w_1 - w_c} \\ w > w_c \rightarrow K_0' = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Onde w_1 é a abertura da fissura e K_1 é a rigidez à tração a partir da qual a relação rigidez-abertura obedece à outra lei constitutiva. No caso de amolecimento bilinear, a abertura crítica de fissura w_c é obtida por:

$$w_c = \frac{2G_f}{\sigma_U} - w_1 - \frac{2\sigma_U}{\sigma_1} \quad (20)$$

Onde σ_1 é a tensão de tração do material para a abertura igual a w_1 .

5. Critério de resistência de Tsai e Wu

O procedimento proposto por Tsai e Wu [18] foi o de aumentar o número de termos na equação do critério de falha de Hill [6], com o objetivo de melhor aproximar os dados experimentais obtidos para os vários materiais. A falha de um determinado material é interpretada como a ocorrência de qualquer descontinuidade na resposta

do material aos estímulos mecânicos (Nicolas *et al.* [12]). Algumas das descontinuidades de interesse são: o início da não linearidade na relação tensão *versus* deformação, a ocorrência de deformações irreversíveis e a ruptura do material. As condições para a ocorrência desses fenômenos são referidas como critério de falha ou de ruptura. A condição de ruptura frágil deve ser considerada como um caso especial em que o critério de falha por escoamento coincide com o critério de falha por ruptura (Gagliardo *et al.* [3]). Considerando-se materiais totalmente anisotrópicos, deve-se admitir que os modos de falha sejam condicionados tanto pelas tensões normais quanto pelas tangenciais, visto que as fraturas podem ocorrer em virtude de diferentes conjuntos de tensões que agem sobre o elemento. De forma geral, essa teoria pode ser apresentada por:

$$\sum_{i=1}^6 F_i \sigma_i + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 F_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1 \quad (21)$$

Os coeficientes F_i , F_{ij} e F_{ijk} são estruturas rearranjadas de tensores de 1ª, 2ª e 3ª ordem, respectivamente. Uma vantagem desse método é que existe liberdade para a utilização de tantos termos quantos forem necessários para a aproximação dos pontos experimentais de um material. Contudo, uma vez que cada constante está associada a um tipo distinto de ensaio mecânico para sua determinação, comumente a Equação 21 restringe-se apenas aos termos de 2ª ordem. Caso isso não seja feito, a quantidade e a complexidade dos ensaios necessários para a determinação das constantes tornaria inviável o método. Assim, a Equação 21 reduz-se a:

$$\sum_{i=1}^6 F_i \sigma_i + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (22)$$

Considerando o estado plano de tensões aplicado a materiais ortotrópicos e desenvolvendo a Equação (22), obtém-se:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{44} \sigma_4^2 = 1 \quad (23)$$

Onde σ_i , $i = 1, \dots, 3$, são as tensões principais e σ_4 é a tensão de cisalhamento. A Equação (23) indica que o estado de tensões encontra-se num ponto crítico (no limite da falha). Entretanto, se o estado de tensões dado pelo membro esquerdo da Equação (23) apresentar resultado numérico inferior a um, tem-se a situação de segurança. Diferentemente de outros critérios de resistência, esse leva em consideração o efeito das componentes hidrostáticas das tensões.

6. Método de Comprimento de Arco com o processo de iteração tipo Newton-Raphson modificado

Para problemas de ponto limite, ao aplicar-se o método de Newton-Raphson com controle de carga, a matriz de rigidez tende a singu-

larizar nas proximidades desse ponto em sua trajetória ascendente. Uma alternativa para detectar e ultrapassar o ponto limite é a utilização de métodos de solução associados ao método Newton-Raphson, como por exemplo, o método de Comprimento de Arco. O método de Comprimento de Arco caracteriza-se por apresentar um controle concomitante de carga e deslocamento. Há duas incógnitas: o incremento do fator de carga $\Delta\varphi$ e o vetor de incremento de deslocamento Δu . Em cada passo de solução, as trajetórias de iteração são perpendiculares aos arcos, que por sua vez podem ser aproximados por tangentes à trajetória de equilíbrio, nos pontos iniciais desses passos (Ramm [15]). Considerando o método Comprimento de Arco com o processo de iteração tipo Newton-Raphson modificado, as equações de equilíbrio para i -ésima iteração podem ser escritas como:

$$K_T^a \Delta u^i = \Delta\varphi^i R_0 + \Delta Q^{i-1} \quad (24)$$

Onde $\Delta\varphi^i$ é o incremento do fator de carga da iteração i , Δu^i é o vetor incremento de deslocamento, R_0 é o vetor de cargas de referência, K_T^a é a matriz de rigidez tangente atualizada apenas no início de cada passo de carga, e ΔQ^{i-1} é o vetor de cargas não equilibradas dado por:

$$\Delta Q^{i-1} = R_{ext}^{i-1} - F_{int}^i \quad (25)$$

Sendo R_{ext}^i o vetor de forças externas e F_{int}^i é o vetor de forças nodais internas. O vetor F_{int}^i deve ser escrito em função do fator de carga φ^i , atualizado ao final da iteração anterior, e do vetor de cargas de referência, constante, através da seguinte relação:

$$R_{ext}^{i-1} = \varphi^{i-1} R_0 \quad (26)$$

Para um sistema de ordem $n+1$, equivalendo n ao número de graus de liberdade da estrutura, tem-se:

$$\begin{bmatrix} K_T^a & -R_0 \\ \Delta u^1 & \Delta\varphi^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^i \\ \Delta\varphi^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta Q^{i-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Onde Δu^1 é o primeiro vetor de incrementos de deslocamento do passo de solução e $\Delta\varphi^1$ o primeiro incremento do fator de carga no referido passo. Nota-se que a resolução do sistema dado em (27) gera um sistema de equações com solução não-trivial mesmo que a matriz seja singular, o que representa grande vantagem para a solução de problemas com ponto limite.

6.1 Critérios de convergência

Com o objetivo de limitar os processos iterativos, dois critérios de convergência são estabelecidos: um para os deslocamentos e outro para as forças.

O critério de convergência para os deslocamentos deve obedecer a seguinte desigualdade:

$$\frac{\|\Delta u^i\|}{\|u^i\|} \leq u_{tol} \quad (28)$$

Onde o numerador é a norma euclidiana do vetor de incremento de deslocamento Δu^i correspondente à iteração i , e o denominador é a norma euclidiana do vetor de deslocamento total $u^i = u^{i-1} + \Delta u^i$ da i -ésima iteração.

O critério de convergência para forças deve obedecer à relação:

$$\frac{\|\Delta Q^i\|}{\|\varphi^i R_0\|} \leq Q_{tol} \quad (29)$$

Onde o numerador é a norma euclidiana do incremento de carga não equilibrada correspondente à iteração i , e o denominador é a norma euclidiana do incremento de força do passo de solução.

7. Resultados e discussões

7.1 Simulação 1

Este exemplo, adaptado de Jarek *et al.* [7], faz uma análise não linear unidimensional por elementos finitos de uma viga de concreto armado, considerando o modelo de dano de Mazars [10] para simular o concreto e o modelo elastoplástico bilinear para o aço. Como critério de falha para o concreto foi adotado o critério de Tsai e Wu [18]. A viga biapoada tem 6 m de comprimento, seção transversal retangular

de (20 x 40) cm², sujeita a uma força concentrada aplicada no meio do vão. As armaduras longitudinais inferiores (A_{st}) e superiores (A_{sc}) da mesma são constituídas por 3 ϕ 12,5mm, com recobrimento de 0,02m. Na Tabela 1 são apresentados os parâmetros materiais e os coeficientes de resistência para o critério de Tsai e Wu [18].

Na discretização por elementos finitos, foram empregados 100 elementos de viga com 2 nós e 2 graus de liberdade/nó, fazendo-se o uso das simetrias de carregamento e geometria, analisando-se, portanto, apenas metade da viga (Figura 1). Para a resolução das equações não lineares, utilizou-se o método de Newton-Raphson modificado combinado com a técnica de Comprimento de Arco. O incremento de carga utilizado foi tomado igual a 0,5 kN. Os erros máximos admitidos no final de cada incremento foram $u_{tol} = 10^{-3}$ e $Q_{tol} = 10^{-2}$.

Na análise, a deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$ é avaliada da seguinte forma (Tiago *et al.* [17]):

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_x & , \varepsilon_x \geq 0 \\ -v\sqrt{2}\varepsilon_x & , \varepsilon_x < 0 \end{cases} \quad (30)$$

Onde v é o coeficiente de Poisson do concreto.

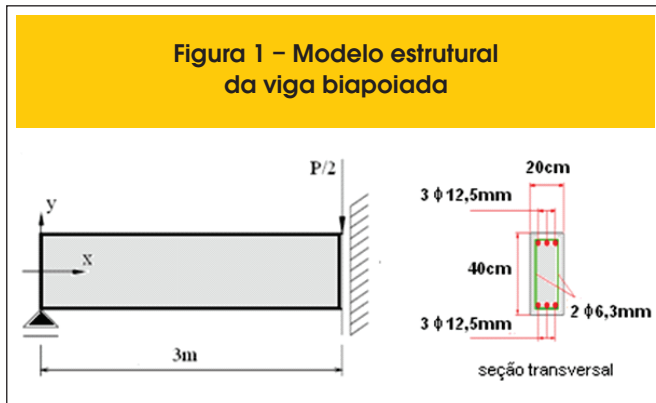
A rigidez à flexão equivalente da viga (EI_{eq}) é determinada considerando duas parcelas. A primeira refere-se à rigidez à flexão equivalente para o concreto (EI_{eqc}) e é obtida dividindo-se a seção transversal da viga em n camadas. O momento de inércia I_i referente a i -ésima camada é calculado através do Teorema do Eixo Paralelo por:

$$I_i = \frac{b(y_i - y_{i-1})^3}{12} + b(y_i - y_{i-1}) \left(y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2} \right)^2, \quad i=1, \dots, n \quad (31)$$

Tabela 1 – Parâmetros do modelo

Concreto	Aço	Tsai and Wu (18)		
		Coefficiente	Equação	Valores adotados (MPa) (Gagliardo et al. (3))
$E_{c0} = 30,2 \text{ GPa}$	$E_a = 210 \text{ GPa}$	F_1	$\frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}}$	0,224
$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	F_2	$\frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}}$	0
$A_t = 0,995$	$k_a = 0,85$	F_{11}	$\frac{1}{f_{t1} f_{c1}}$	-0,0288
$B_t = 10^5$		F_{22}	$\frac{1}{f_{t2} f_{c2}}$	0
$A_c = 1,1$		F_{44}	$\frac{1}{f_{v4}^2}$	0,0305
$B_c = 8 \cdot 10^3$		F_{12}	$\pm \sqrt{F_{11} F_{22}}$	$\pm 0,00385$

Figura 1 – Modelo estrutural da viga biapoada



Onde n é o número total de camadas, b a largura da seção transversal retangular e y_i é a coordenada da i -ésima camada a partir do centróide da seção. A parcela EI_{eqc} é obtida por:

$$EI_{eqc} = \sum_{i=1}^n E_{ci} I_i \quad (32)$$

Onde $E_{ci} = E_{c0i} (1 - D_{ji})$, com $j = C, T$, é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto danificado da i -ésima camada. Neste exemplo, a seção transversal da viga foi dividida em 60 camadas iguais. A segunda parcela refere-se à rigidez à flexão equivalente para o aço EI_{eqa} e é determinada pela seguinte expressão:

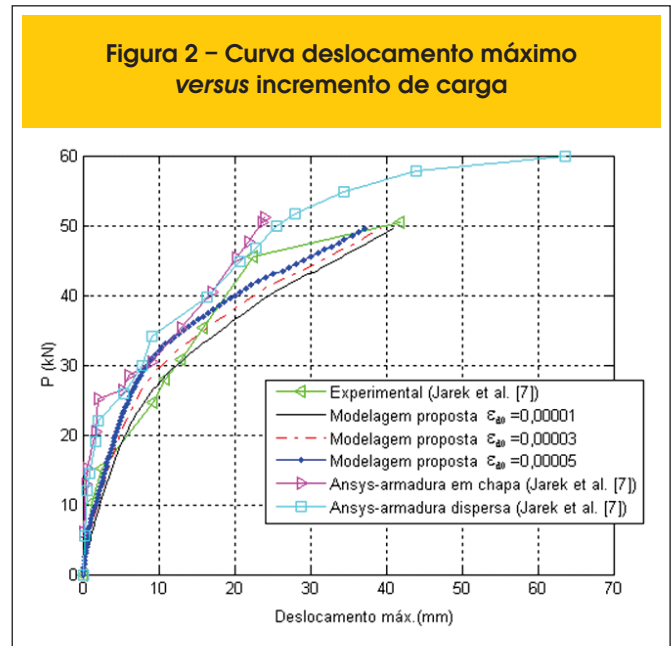
$$EI_{eqa} = \sum_{k=1}^{nb} E_{ak} \left(\frac{\pi \phi_k^4}{64} + \frac{\pi \phi_k^2}{4} y_{ai}^2 \right) \quad (33)$$

Onde n_b é o número de barras; ϕ_k o diâmetro da barra k ; E_{ak} é o módulo de elasticidade longitudinal do aço da barra k ; e y_{ai} , $i = 1, 2$, é a distância do centróide da barra k ao centro geométrico da seção transversal da viga. Assim, a rigidez à flexão equivalente total EI_{eq} é calculada, de maneira simplificada, pela soma das parcelas EI_{eqc} e EI_{eqa} :

$$EI_{eq} = EI_{eqc} + EI_{eqa} \quad (34)$$

Na obtenção do vetor de força interna elementar, a rigidez à flexão equivalente é determinada para cada ponto de Gauss na integração numérica, utilizando-se o método de Quadratura Gaussiana. No processo de cálculo da rigidez equivalente, supõe-se, por simplificação, que a linha neutra ($\sigma_x = 0$) está localizada no centróide da seção transversal; essa condição é verdadeira desde que haja simetria da armadura (armaduras longitudinais inferior e superior com mesma área e posicionadas simetricamente com relação ao centróide) e os materiais tenham comportamento elástico linear (lei de Hooke). No entanto, quando os materiais (concreto e/ou aço) apresentam comportamento não linear, a localização da linha neutra é alterada. Portanto, em uma análise não linear o posicionamento da linha neutra é alterado a cada iteração numérica.

Figura 2 – Curva deslocamento máximo versus incremento de carga



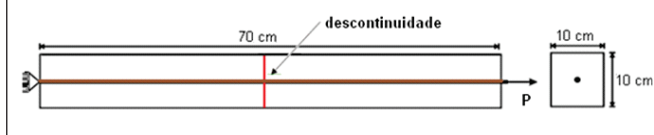
Os resultados obtidos das simulações computacionais com a modelagem proposta variando-se o parâmetro ϵ_{d0} são mostrados na Figura 2, bem como as curvas numéricas (obtidas com o programa Ansys) e experimental apresentadas no trabalho de Jarek *et al.* [7]. Este exemplo evidencia um aspecto importante do modelo de Mazars que diz respeito à sensibilidade dos resultados quanto à variação do parâmetro ϵ_{d0} . O dano determinado nos pontos de Gauss surge no material quando a deformação equivalente atinge a deformação de referência ϵ_{d0} , ocasionando, assim, a diminuição da rigidez no ponto correspondente.

Vê-se que, conforme a Figura 2, as respostas numéricas previstas com a modelagem proposta para a viga são mais rígidas (deslocamentos menores) para ϵ_{d0} igual a 0,00003 e 0,00005 até determinado incremento de carga, se comparadas aos experimentais. Diferentemente, para ϵ_{d0} igual a 0,00001 o deslocamento máximo v assume valores numéricos maiores desde o início da análise. Nota-se também que há uma tendência de comportamento linear, na relação carga-deslocamento, a partir de certo valor de carga e se mantém até o processo de ruptura. Segundo os autores Guello e Bittencourt [5], simulações com o modelo de Mazars podem conduzir a deformações excessivas na estrutura a partir de um determinado carregamento. Para limitar essas deformações esses autores sugerem limitar o valor do dano durante a análise, isto é, fazer $D_T < 1$ e $D_C < 1$. Contudo, tais restrições não foram consideradas nas simulações realizadas com a modelagem proposta. Considerando o caso uniaxial de tensão ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_4 \neq 0$ e $\sigma_2 = 0$), a Equação (23) é re-escrita da seguinte forma:

$$F_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{44} \sigma_4^2 = 1 \quad (35)$$

Para todas as simulações efetuadas variando-se ϵ_{d0} , a viga entra em colapso quando P atinge o valor de aproximadamente 50 kN, ficando próximo à carga de ruptura experimental. No modelo com-

Figura 3 – Modelo estrutural do tirante de concreto armado com fissura prévia



putacional, considera-se que a peça falha no momento em que um dos elementos finitos da malha, em um dos pontos de Gauss, falha, ou seja, no momento em que a desigualdade $F_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{44} \sigma_4^2 > 1$ é satisfeita (resultado avaliado a partir da determinação das tensões máximas na seção transversal correspondente: $\sigma_1 = \sigma_x$ e $\sigma_4 = \sigma_y/2$). Verificam-se diferenças nas respostas obtidas a partir dos modelos tridimensionais (com armadura em chapa e dispersa) com o auxílio do *software* Ansys (Jarek *et al.* [7]) e o implementado neste artigo. Essas diferenças podem ser explicadas por alguns fatores como, por exemplo: o modelo implementado neste artigo é unidimensional e adota a relação constitutiva para o concreto baseada na teoria da Mecânica do Dano Contínuo; já no trabalho de Jarek *et al.* [7], para simular a fissuração do concreto, avaliando o seu comportamento à tração, empregou-se o critério de Willan-War-nke, e para o comportamento do mesmo à compressão admitiu-se o critério de plastificação de von Mises.

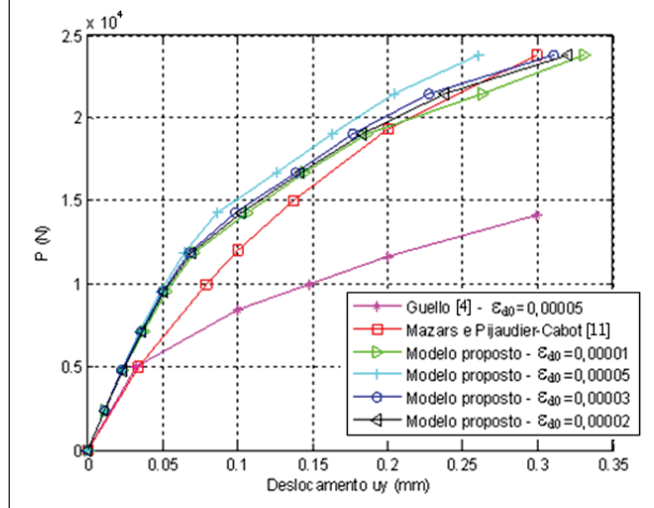
7.2 Simulação 2

Este problema bi-dimensional foi adaptado de Mazars e Pijaudier-Cabot [11]. O problema consiste de um tirante armado de 70 cm de comprimento e seção transversal retangular (10 x 10) cm², com uma barra de aço com momento de inércia $I = 490,87 \text{ mm}^4$ localizada no centróide da seção (Figura 3). Uma força de tração $P = 23823,53 \text{ kN}$ é aplicada na extremidade livre do tirante. Foi admitido que o comportamento do aço é elástico linear, o que corresponde assumir k_s igual a 1, sendo irrelevante o valor utilizado para ϵ_{sy} . Para a discretização do problema, foram considerados 310 elementos planos lineares isoparamétricos: 270 para simular o concreto e 31 para simular a barra de aço. Para simular a descontinuidade foram utilizados 9 elementos de interface de linha. Nas simulações efetuadas com esse modelo, utilizou-se o método de Newton-Raphson modificado combinado com a técnica de Com-

Tabela 2 – Parâmetros materiais do modelo estrutural

Concreto	Aço	Interface
$E_c = 30 \text{ GPa}$	$E_s = 200 \text{ GPa}$	$G_I = 4,87 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}$
$\nu = 0,2$	$\nu = 0,2$	$K_0 = 0,158 \text{ kN/cm}^2$
$A_T = 0,8$	$k_a = 1$	$w_c = 0,00616 \text{ cm}$
$B_T = 5 \cdot 10^3$	-	$s_u = 0,158 \text{ kN/cm}^2$
$A_C = 1,4$	-	-
$B_C = 2 \cdot 10^3$	-	-

Figura 4 – Curva deslocamento máximo versus carga



primento de Arco. Os erros máximos admitidos no final de cada incremento de carga foram $u_{tol} = 10^{-3}$ e $Q_{tol} = 10^{-3}$. A geometria simétrica do tirante permitiu a modelagem de metade do tirante. Os parâmetros materiais são dados na Tabela 2.

As curvas deslocamento máximo versus carga obtidas da modelagem proposta variando-se o valor de ϵ_{d0} de Mazars e Pijaudier-Cabot [11] e de Guello [4] são apresentadas na Figura 4. Em relação aos resultados obtidos, verificou-se que as curvas obtidas das simulações com a modelagem proposta ficaram próximas à curva obtida do modelo numérico dos autores Mazars e Pijaudier-Cabot [11].

A fissura é simulada através de elementos de interface de linha de comportamento constitutivo de amolecimento linear. Os parâmetros da interface foram adotados conforme Bessa *et al.* [2]. Na Figura 5 são mostrados os mapas da distribuição do dano no concreto correspondentes aos valores de ϵ_{d0} iguais a 0,00001, 0,00003 e 0,00005. Em todos os casos, nota-se a formação de novas fissuras transversais ao eixo do tirante e paralelas à existente, bem como fissuras no entorno da barra. Não houve o arrancamento da barra de aço. A variação do valor de ϵ_{d0} ocasiona diferenças na distribuição do dano na peça, uma vez que o modelo de Mazars prediz o surgimento de dano em pontos diferentes no tirante para cada valor. As fissuras perpendiculares ao eixo da peça se desenvolvem se a tensão no concreto excede a resistência à tração, não somente no entorno da barra de aço, mas em toda a seção transversal. Essas fissuras são, basicamente, devidas à tensão de tração provenientes da transferência de tensões do aço para o concreto através da aderência.

De fato, em peças tracionadas de concreto armado ocorre um escorregamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente, sempre que as deformações de ambos tenham valores diferenciados. Esse escorregamento decorre, principalmente, do esmagamento do concreto em frente às saliências da barra da armadura (Bessa *et al.* [2]).

Ademais, no modelo constitutivo para simular a fissura é desprezada a contribuição da componente de rigidez tangencial (K_s). Essa simplificação pode resultar em singularidades e instabilida-

des na análise numérica, uma vez que o deslocamento relativo tangencial fica completamente sem restrição.

8. Conclusões

A análise tradicional de estruturas de concreto se baseia em ensaios de estruturas ou de peças estruturais em laboratório. Os resultados obtidos a partir desses ensaios são limitados e, às vezes, de difícil interpretação. Dessa forma, o desenvolvimento de modelos numérico-matemáticos se faz necessário para complementar a análise experimental e possibilitar a generalização dos resultados para diferentes estruturas e formas de carregamento.

Com relação a primeira simulação, o modelo numérico-computacional implementado neste artigo, mesmo sendo unidimensional, conseguiu reproduzir razoavelmente os resultados em relação às demais respostas obtidas em Jarek *et al.* [7]. A carga de ruptura predita pelo critério de Tsai e Wu [18] ficou próxima a da carga de colapso experimental. Entretanto, dependendo do valor adotado para a deformação de referência ϵ_{d0} , a resposta numérica pode diferir, e conduzir a resultados não satisfatórios.

A teoria de Tsai e Wu [18] foi escolhida por apresentar diversas vantagens em relação às inúmeras outras teorias existentes,

como, por exemplo: é uma equação escalar e invariante, na qual as componentes de resistência são expressas em um tensor; e as propriedades de simetria do tensor podem ser determinadas rigorosamente.

O segundo problema é um estudo do acoplamento de teorias - Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura - para a simulação dos fenômenos relacionados ao comportamento do material concreto. A análise estrutural de peças de concreto armado com fissura prévia (descontinuidade), por meio do elemento de interface de linha - para simular a fissura - juntamente com um modelo de dano, mostrou-se satisfatória do ponto de vista qualitativo, visto que os mapas de distribuição do dano para todas as simulações apresentaram fissuras perpendiculares ao eixo do tirante e paralelas entre si.

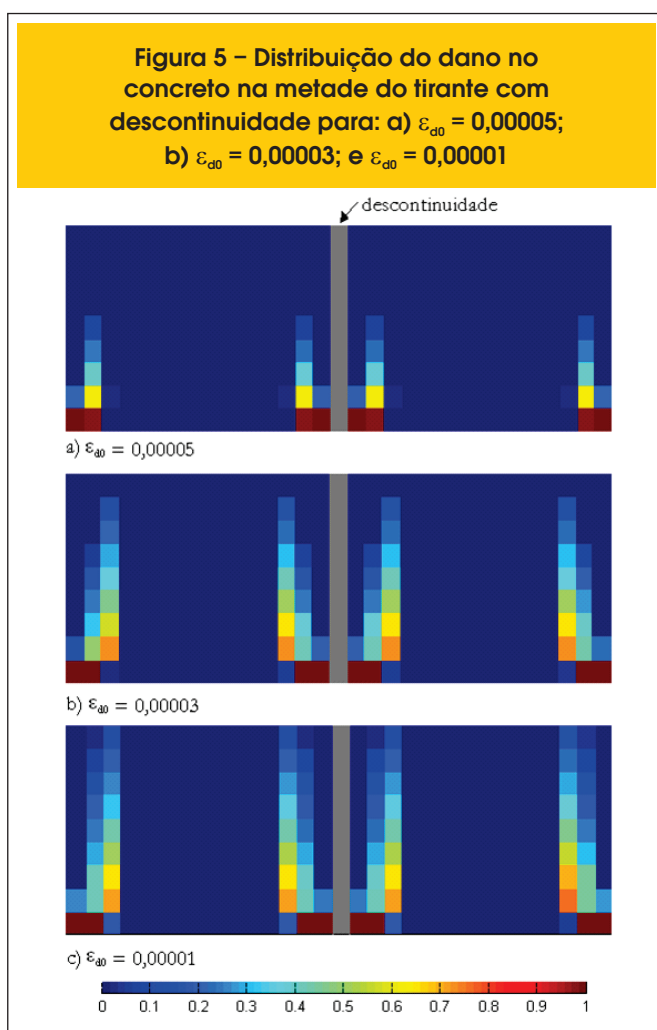
Essa metodologia apresenta a vantagem de não requerer o uso de técnicas de reconstrução da malha de elementos finitos. Em geral, modelos discretos necessitam de técnicas sofisticadas e onerosas computacionalmente de reconstrução da malha para capturar a propagação de fissuras ao longo do processo de carga.

Acredita-se que a aplicação de modelos constitutivos que consideram o acoplamento de teorias apresenta grande potencial em projetos para o cálculo de carga de colapso e identificação de todo o mecanismo, na verificação do comportamento de elementos sob fadiga e na análise de estruturas em concreto armado sujeitas a cargas aleatórias, por exemplo, com as provenientes de sismos, além da verificação da deformabilidade das estruturas em serviço. A aplicação conjunta de tais modelos em situações práticas fica prejudicada pela identificação experimental dos parâmetros contidos nas leis de evolução das variáveis de dano e da fratura. Segundo Pituba e Proença [13], o modelo de Mazars [10] pode ser estendido para sua aplicação em situações mais próximas da realidade, desde que sejam incorporados recursos como: a plasticificação das armaduras, localização de deformações permanentes e a consideração da interação entre o concreto e a armadura.

Em trabalhos futuros, além das sugestões desses autores, pretende-se implementar novos modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Contínuo para simular o concreto e outros critérios de falha, como o de William-Warnke, em estruturas de concreto armado bi-dimensionais e tridimensionais, possibilitando análises mecânicas mais realísticas.

9. Referências bibliográficas

- [01] ÁLVARES, M. S.; PROENÇA, S. P. B.; BILLARDON, R. Estudo e emprego de um modelo de dano localizado: aplicação a vigas em concreto armado. In: XX CILAMCE - Congresso Ibero-Latino Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, São Paulo, 1999.
- [02] BESSA, V. M. R. d'A.; QUININO, U. C. M.; BITTENCOURT, E.; ITURRIOZ, I. Análise da fissuração de um tirante de concreto simples - comparação de diferentes metodologias. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, 2003.
- [03] GAGLIARDO, D. P.; GAGLIARDO, J. C.; MASCIA, N. T. Comparação entre os critérios de Rankine e de Tsai Wu para uma viga de concreto reforçado com



- fibras. In: Anais do 53º Congresso Brasileiro do Concreto - CBC 2011, Florianópolis, SC, 2011.
- [04] GUELLO, G. A. Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano. Dissertação (Mestrado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- [05] GUELLO, G. A.; BITTENCOURT, T. N. Simulação Computacional de Estruturas de Concreto por meio da Mecânica do Dano. Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, São Paulo, v. 202, n. 1, p. 1-12, 2002.
- [06] HILL, R. A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. In: Proceedings of the Royal Society of London, Series A, London, v. 193, p. 281-297, 1948.
- [07] JAREK, A.; MARCONCIN, L. DO R.; SOUZA, L. A. F.; MACHADO, R. D.; LACERDA, L. A. Numerical modeling combined with experimental analysis of simply supported reinforced concrete beam monitored with fiber optic sensors. In: XXXII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto, MG, 2011.
- [08] LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. C. Mécanique des matériaux solides. Paris, Dunod-Bordas, 1985.
- [09] LEONEL, E. D.; RIBEIRO, G. O.; PAULA, F. A. Simulação Numérica de Estruturas de Concreto Armado por Meio do MEF/ANSYS. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, 2003.
- [10] MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, 1984.
- [11] MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory: application to concrete. Journal of Engineering Mechanics, v. 115, n. 2, p. 345-365, 1989.
- [12] NICOLAS, E. A.; MASCIA, N. T.; TODESCHINI, R. Ensaio uniaxiais e biaxiais para avaliação de critério de resistência (Tsai-Wu) de materiais anisotrópicos para a madeira. Minerva 6 (2), p. 107-116, 2006.
- [13] PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. Cadernos de Engenharia de Estruturas, v. 7, n. 23, p. 33-60, 2005.
- [14] PROENÇA, S. P. B. Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamassa armada pelo emprego de um modelo de dano. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v. 8, 4, 351-360, 1992.
- [15] RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Euro-US-Worshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Ruhr Universität Bochum, pp. 68-89, Springer, Berlin, 1981.
- [16] SCHELLEKENS, J. C. J. Interface Elements in Finite Elements Analysis. TNO-BI-90-165, 1990.
- [17] TIAGO, C. M.; LEITÃO, V. M. A.; ROSCA, V. Análise de problemas unidimensionais de mecânica do dano com funções de base radial. J.M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor e G. Bugeda, Editor, Métodos Numéricos en Ingeniería V, Artes Gráficas Torres S.A., 2002.
- [18] TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. Journal of Composite Materials, n. 1, v. 5, p. 58-80. Jan., 1971.