

Comparison between simplified and FE models for short-term deflection in continuous RC beams

Comparação entre modelos simplificados e de elementos finitos para flecha imediata em vigas contínuas de concreto armado



E. JUNGES^a
bethjunges@gmail.com

H. L. LA ROVERE^a
henriettelarovere@gmail.com

Abstract

In this work, a comparative study of different simplified methods and nonlinear finite element (FE) models used for calculating short-term deflections (vertical displacements of the longitudinal axis) in continuous reinforced concrete (RC) beams, under service loads, is performed. The simplified methods employed are the one proposed by Branson and the bilinear method recommended by the European Code CEB - Design Manual on Cracking and Deformations. Two finite element models are utilized: the first one with frame elements in which material nonlinearities are considered along the element and its cross section divided into layers, by using of constitutive relationships for steel and concrete, while the second one utilizes beam elements, with physical nonlinearity considered by means of moment-curvature diagrams, obtained from Branson equation. Several examples of continuous RC beams under service loads are analysed and the results obtained by the different models are compared taking as reference the nonlinear frame element model. A few conclusions and recommendations regarding the use of the different methods are drawn at the end of the work.

Keywords: deflections, beams, reinforced concrete, nonlinear analysis.

Resumo

Neste trabalho é realizado um estudo comparativo dos resultados de flecha (deslocamento vertical do eixo longitudinal) imediata de vigas contínuas de concreto armado sob cargas de serviço, obtidos por diferentes métodos simplificados e por modelos não lineares de elementos finitos (EF). Os métodos simplificados abordados são o proposto por Branson e o método Bilinear recomendado pelo CEB – Manual de projeto sobre Fissuração e Deformações. São utilizados dois modelos de EF: o primeiro com EF de pórtico plano, sendo a não linearidade dos materiais considerada ao longo do elemento e da seção discretizada em camadas, a partir de relações constitutivas do aço e do concreto, enquanto que o segundo utiliza EF de viga, sendo a não linearidade física considerada por meio de diagramas momento-curvatura, obtidos a partir da fórmula de Branson. Os resultados dos diferentes modelos são comparados entre si para diversas vigas de projeto, adotando como referência os resultados do modelo não linear de elementos de pórtico plano. A partir da análise dos resultados, extraem-se algumas conclusões e recomendações quanto ao uso dos métodos simplificados e modelos de EF estudados.

Palavras-chave: flecha, vigas, concreto armado, análise não linear.

^a Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil;
^b Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

1. Introdução

Para a verificação do Estado Limite de Serviço (ELS) de deformação excessiva conforme a NBR 6118 [1], torna-se necessário se estimar os valores de flechas máximas (deslocamentos verticais máximos dos eixos das barras) que ocorrerão na estrutura real na fase de projeto. Para esta verificação, utilizam-se métodos de cálculo recomendados por normas referentes ao assunto e/ou modelos implementados em programas computacionais de análise e dimensionamento.

O cálculo da flecha total em uma viga de concreto armado pode ser dividido em duas parcelas, uma de flecha imediata e outra de flecha diferida no tempo, a qual é devida principalmente aos efeitos de fluência e retração do concreto. Neste trabalho é estudada apenas a parcela de flecha imediata em vigas contínuas, entendendo-se que é o primeiro passo para a verificação da flecha total. No cálculo da parcela de deformação imediata no ELS, deve-se considerar a não-linearidade física dos materiais, devido principalmente à fissuração do concreto. Para levar em conta as não linearidades de material é necessário realizar uma análise não linear da viga, que é mais complexa e demanda mais recursos computacionais do que uma análise linear. Para isso, existem diversos modelos de cálculo, que podem ser tanto modelos refinados, como, por exemplo, os que utilizam elementos finitos e modelos constitutivos mais elaborados, como métodos simplificados, citando como exemplo os adotados em normas de estruturas de concreto armado para a previsão de flechas de vigas. Um dos parâmetros mais difíceis de determinar é a contribuição do concreto entre as fissuras na rigidez da peça, conhecido como efeito "tension-stiffening". Os métodos simplificados dispensam a realização de uma análise não linear, pois consideram de forma simplificada a contribuição do concreto fissurado na rigidez da peça, podendo ser utilizados de maneira rápida por cálculo manual, ou exigindo poucos recursos computacionais.

A disponibilização de modelos mais refinados que permitem calcular com maior precisão as deformações em elementos estruturais de concreto armado, pois representam mais adequadamente seu comportamento não linear, juntamente com a disponibilização de recursos computacionais avançados, faz surgir o questionamento quanto ainda se utilizar métodos simplificados para o cálculo de flechas nos dias de hoje. No entanto, se estes métodos simplificados fornecem resultados satisfatórios comparados com os modelos mais refinados, ficaria justificada a sua utilização devido à sua simplicidade e facilidade de aplicação pelos engenheiros.

Junges [2] realizou um estudo abrangente sobre o cálculo de flechas imediatas em vigas bi-apoiadas e contínuas de concreto armado, sob cargas de serviço, comparando diversos métodos, refinados e simplificados. Como o comportamento das vigas contínuas se diferencia do das bi-apoiadas pela presença de momento negativo nos apoios, o que em geral acarreta numa maior extensão do vão fissurado, é interessante analisar separadamente os resultados das vigas contínuas dos resultados das vigas biapoiadas, fornecidos pelos diferentes métodos. Os resultados obtidos para as vigas biapoiadas já foram publicadas anteriormente em Junges e La Rovere [3]. Este trabalho tem como objetivo apresentar um resumo da parte do estudo realizado por Junges [2] relativa a vigas contínuas de concreto armado.

Os métodos simplificados estudados são descritos no item 2 a seguir. O primeiro método usa a fórmula de inércia equivalente proposta por Branson [4], aplicada de duas formas diferentes, uma conforme recomenda a NBR 6118 [1] e outra como descrito nos comentários técnicos da NB-1 [5] publicados pelo Ibracon; e o segundo método é o Bilinear indicado pelo CEB "Design Manual on Cracking and Deformations" [6].

Dois modelos de elementos finitos, descritos no item 3, estão incluídos no estudo: o primeiro com EF de pórtico plano, sendo a não linearidade dos materiais considerada ao longo do elemento e da seção discretizada em camadas, a partir de relações constitutivas do aço e do concreto, enquanto que o segundo utiliza EF de viga, sendo a não linearidade física considerada por meio de diagramas momento-curvatura, obtidos a partir da fórmula de Branson.

Adota-se o modelo de EF de pórtico plano, implementado no programa computacional ANEST/CA, para ser utilizado como referência no estudo comparativo dos diversos modelos/métodos. Esse modelo foi escolhido por apresentar ótimos resultados em comparação com diversos ensaios experimentais de estruturas de concreto armado, vigas e pórticos planos, principalmente para as estruturas com comportamento predominante de flexão, conforme demonstrado por Stramandinoli [9]. No caso porém de vigas contínuas, há poucos resultados de ensaios experimentais disponíveis na literatura, apresentando-se três exemplos neste trabalho, no item 4, para ilustrar a escolha do modelo de referência. Tendo em vista o número reduzido de ensaios experimentais, optou-se em analisar exemplos teóricos de vigas de projeto para o estudo comparativo, inclusive para que o estudo fosse abrangente, podendo-se analisar a influência do tipo de carregamento, taxa de armadura, número de vãos e geometria das vigas nos resultados dos diversos modelos e métodos.

No estudo analisa-se um total de 60 vigas contínuas de projeto, de dois e três vãos, submetidas a carregamento de serviço, variando-se a geometria das vigas, tipo e valor do carregamento, taxa de armadura e resistência do concreto. Os resultados dos diferentes modelos são comparados entre si, adotando como referência os resultados do modelo não linear de EF de pórtico plano, conforme explicado acima.

Com esse estudo pretende-se fornecer orientação quanto ao uso de métodos simplificados e alguns modelos de elementos finitos, avaliando a variação dos resultados obtidos por cada método/modelo conforme a variação do tipo de carregamento, taxa de armadura e extensão do vão fissurado. A partir da análise dos resultados, extraem-se algumas conclusões e recomendações quanto ao uso dos métodos simplificados e modelos de EF estudados.

2. Métodos simplificados para cálculo de flecha imediata de vigas de concreto armado (CA)

São utilizados dois métodos simplificados para cálculo de flecha imediata de vigas de CA neste trabalho: a fórmula de Branson, que é aplicada conforme indicada a NBR 6118 [1] e ainda seguindo-se os comentários técnicos da NB-1 [5] publicados pelo Ibracon; e o método Bilinear recomendado pelo CEB [6]. Estes métodos foram implementados no programa computacional AVSer e estão descritos no que se segue.

2.1 Fórmula de Branson

O método simplificado proposto por Branson [4] adota uma fórmula de inércia equivalente (I_{eq}), em que a inércia é ponderada entre o estágio I e o estágio II puro, para considerar que parte da viga não está fissurada e também o efeito “tension-stiffening” na parte fissurada da viga.

2.1.1 Fórmula de Branson conforme NBR 6118

A NBR 6118 [1], desde a versão 2003, recomenda a fórmula de Branson para o cálculo da flecha imediata em vigas de concreto armado, adotando apenas uma seção de referência para o cálculo da rigidez equivalente (EI_{eq}) de um vão da viga:

$$EI_{eq} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^m I_c + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^m \right] I_{II} \right\} = E_{cs} I_c \quad (1)$$

em que I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto; I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II (desconsidera-se o concreto tracionado); E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto, que pode ser obtido pela Equação [2] a partir do módulo tangente inicial E_{ci} (em MPa):

$$E_{cs} = 0,85 E_{ci} = 0,85 \cdot \alpha_E \cdot 5600 f_{ck}^{1/2} \quad (2)$$

onde f_{ck} é a resistência característica do concreto em MPa, e o coeficiente α_E varia de acordo com o material do agregado adotado (entre 0,7 e 1,2).

Adota-se $m = 3$ para cálculo de EI_{eq} quando se utiliza uma seção de referência para todo o vão, para considerar o efeito “tension-stiffening” e também que parte do vão ainda se encontra no estágio I. Já para o cálculo de uma seção individual adota-se $m = 4$ (Sabnis et al., [7]).

M_a é o momento fletor na seção crítica do vão considerado e M_{cr} é o momento de fissuração do elemento estrutural:

$$M_{cr} = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (3)$$

em que y_t é a distância do centróide da seção à fibra mais tracionada; o coeficiente α correlaciona de maneira aproximada a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, sendo igual a 1,5 para seções retangulares; e f_{ct} é a resistência à tração direta do concreto, sendo que, na falta de ensaios para determinação deste valor, pode ser adotada a seguinte equação para verificação de estado limite de deformação excessiva:

$$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (4)$$

sendo $f_{ct,m}$ a resistência média à tração do concreto ($f_{ct,m}$ e f_{ck} em MPa). Para momento fletor atuante M_a menor que M_{cr} , ou seja, seção no estágio I, utiliza-se a rigidez da seção bruta $E_{cs} I_c$.

2.1.2 Fórmula de Branson conforme comentários técnicos da NB-1

Nos comentários técnicos da NB-1 [5] publicados pelo Ibracon, sugere-se, para o caso de vigas contínuas em que se deseja maior precisão, aplicar a equação de Branson adotando-se para os vãos um valor ponderado da rigidez equivalente, conforme a Equação [5]:

$$(EI)_{eq} = \frac{1}{l} \left[(EI)_{eq,1} \cdot a_1 + (EI)_{eq,v} \cdot a_v + (EI)_{eq,2} \cdot a_2 \right] \quad (5)$$

em que $(EI)_{eq,1}$ é rigidez à flexão equivalente no trecho 1; $(EI)_{eq,v}$ a rigidez à flexão equivalente no trecho de momentos positivos; e $(EI)_{eq,2}$ é a rigidez à flexão equivalente no trecho 2 (ver Figura [1]). Em cada trecho a rigidez à flexão equivalente deve ser calculada com EI_{II} considerando as armaduras existentes da seção mais solicitada de cada trecho e com M_a igual a M_1 , M_v e M_2 , respectivamente.

2.2 Método bilinear – CEB

O método bilinear é descrito pelo CEB “Design Manual on Cracking and Deformations” [6]. A flecha imediata é estimada por um valor intermediário entre o valor da flecha calculada com rigidez no estágio I e a flecha calculada com rigidez do estágio II puro, por meio do coeficiente de distribuição ζ , de forma a considerar a colaboração do concreto entre fissuras e também que parte do vão ainda está no estágio I.

$$W = (1 - \zeta) W_1 + \zeta W_2 \quad (6)$$

em que W_1 é a flecha calculada no estágio I; W_2 é a flecha calculada no estágio II; e o coeficiente ζ é um coeficiente adimensional, sendo nulo para uma seção não fissurada, em que $M_a < M_{cr}$, e varia entre 0 e 1 para seção fissurada, em que $M_a > M_{cr}$, dado por:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \frac{M_{cr}}{M_a} \quad (7)$$

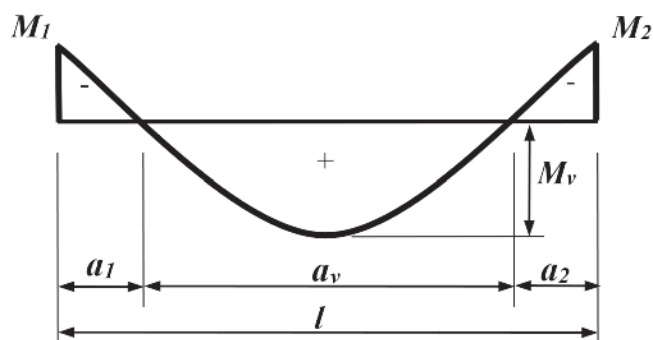


Figura 1
Parâmetros utilizados na Equação (5) para cálculo da rigidez equivalente em vão de viga contínua

sendo b_1 o coeficiente que caracteriza a qualidade da aderência das barras de aço e b_2 o coeficiente que representa a influência da duração da aplicação de carregamento (se aplicado de maneira constante ou com muitos ciclos de carga), que para barras de alta aderência e carregamento sem repetição (caso das vigas estudadas), segundo prescrições do Eurocode [8] é igual a:

$$\beta = \beta_1 \beta_2 = 1,0 \quad (8)$$

M_f é o momento de fissuração na seção crítica, que conforme o CEB é obtido por:

$$M_{cr} = \frac{y_t f_{ct}}{I_t} \quad (9)$$

sendo f_{ct} a resistência do concreto à tração definido pelo CEB como (f_{ct} e f_{ck} em MPa):

$$f_{ct} = f_{ctm} = 1,40 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3} \quad (10)$$

O coeficiente pode ser também aplicado diretamente à curvatura, ao invés da flecha, sendo este o procedimento adotado neste trabalho. Ressalta-se que a Equação [4] da NBR 6118 foi extraída da Equação [10] do CEB, logo o valor obtido para a resistência à tração pelas duas normas é praticamente coincidente, sendo que na Eq. [9] o momento de fissuração é definido em função da resistência à tração direta, dada pela Eq. [10], ao invés de em função da resistência à tração na flexão, conforme NBR 6118, Eq. [3]. No entanto, conforme será visto no item 5, no estudo comparativo as propriedades serão uniformizadas, sendo adotadas a Equação [3] e também a [4] para o Método Bilinear.

3. Modelos de elementos finitos para análise não linear de vigas de concreto armado

São utilizados dois modelos de elementos finitos, sendo o primeiro descrito resumidamente no item 3.1 e o segundo no item 3.2.

3.1 Modelo de elementos finitos de barras para análise não linear de pórticos planos de concreto armado

Este modelo foi desenvolvido na tese de Stramandinoli [9] para análise não linear física e geométrica de pórticos planos e vigas de concreto armado, e está implementado no programa computacional ANEST/CA. O modelo utiliza elemento finito de barra de três nós, sendo dois nós externos com três graus de liberdade (dois de translação no plano e um de rotação) e um nó interno com um grau de liberdade (deslocamento axial), inserido para capturar o efeito da variação da linha neutra ao longo do elemento. Adota-se a hipótese de viga de Euler-Bernoulli, sendo a não linearidade física considerada ao longo do elemento nos pontos de integração

de Gauss (três pontos) e ao longo de sua seção a partir de discretização em camadas. Admite-se que cada camada está submetida a um estado uniaxial de tensões, desprezando-se tensões de cisalhamento. Adota-se para o concreto sob compressão o modelo constitutivo do Código Modelo CEB-FIP 1990 [10]. Para o concreto sob tração utiliza-se o modelo de "tension-stiffening" proposto por Stramandinoli e La Rovere [11], que considera a interação entre o concreto e a armadura após a fissuração alterando o modelo constitutivo do concreto por meio de uma curva com decaimento exponencial, função de um parâmetro α o qual leva em conta a taxa de armadura da seção e a relação dos módulos de elasticidade do aço e do concreto. Após o escoamento do aço das armaduras, a tensão de tração no concreto cai para zero abruptamente. Para o aço das armaduras admite-se um comportamento idealizado elasto-plástico, levando em conta o encruamento. O método incremental e iterativo de Newton-Raphson é utilizado para resolução do sistema de equações não lineares da estrutura. Maiores detalhes sobre a formulação deste modelo podem ser encontrados em Stramandinoli [9] e Junges [2], e também em Stramandinoli e La Rovere [12].

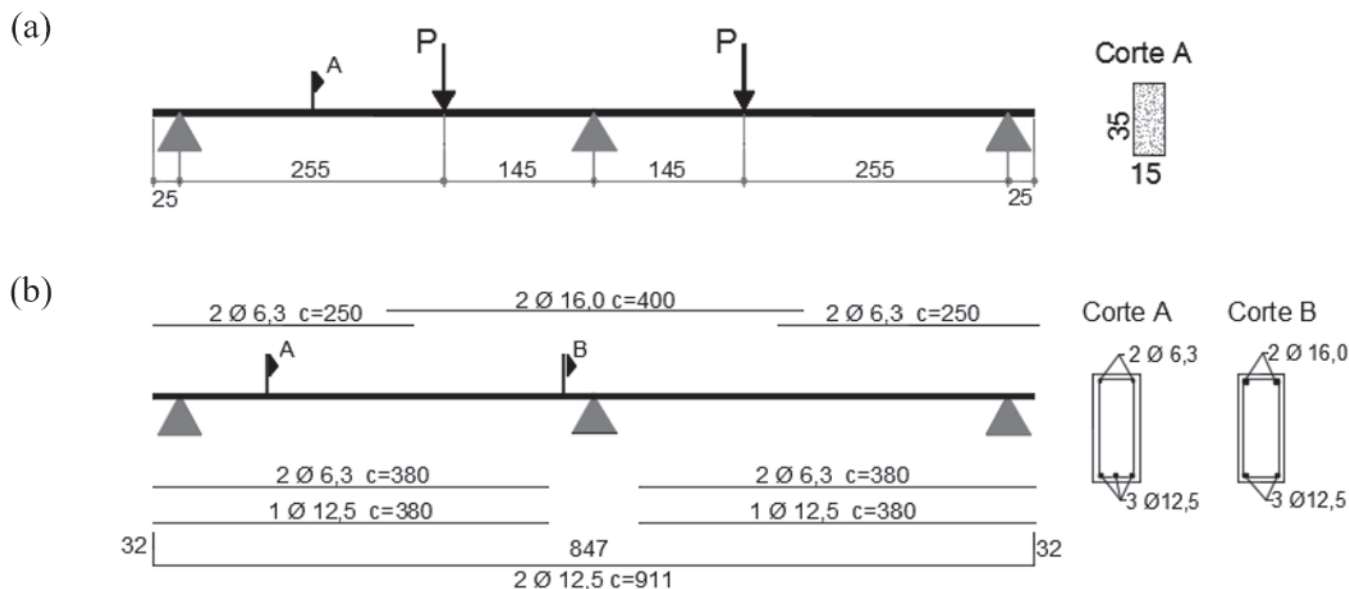
Este modelo de EF foi selecionado entre os modelos estudados como referência no estudo comparativo, escolha esta justificada por ser considerado o modelo mais refinado, e por já ter sido validado comparando-se seus resultados com diversos resultados experimentais de vigas bi-apoiadas, vigas contínuas e pórticos planos de concreto armado por Stramandinoli [9] e Junges [2]. Embora a comparação com resultados experimentais de vigas contínuas ter sido limitada devido à disponibilidade de poucos dados, os resultados apresentados pelo modelo de EF foram considerados satisfatórios nos exemplos estudados por essas autoras, sendo que neste trabalho incluíram-se alguns destes exemplos (item 4).

3.2 Modelo de elementos de viga utilizando modelos constitutivos a partir de diagramas momento-curvatura

Este modelo consiste em discretizar a viga em vários elementos de pequeno comprimento, utilizando a formulação de análise matricial para obtenção dos deslocamentos e esforços nodais, desprezando-se a deformação devido ao cisalhamento. Para cada elemento a rigidez secante (EI_{sec}) é calculada a partir do diagrama momento-curvatura (utilizando a média dos valores dos momentos em módulo atuantes nas extremidades do elemento), construído a partir da equação de Branson, na qual adota-se o expoente m igual a 4. É utilizado o método iterativo secante para se obter convergência na solução das equações não lineares de equilíbrio. Esse modelo, denominado MEV-Branson, foi implementado no programa AVSer desenvolvido pela primeira autora e limita-se à análise de vigas até a carga correspondente ao início do escoamento do aço.

4. Comparação entre resultados experimentais e os do modelo não linear de EF do programa ANEST/CA

O modelo de elementos finitos para análise não linear de estruturas de concreto armado (CA) implementado no programa

**Figura 2**

Viga ensaiada por Cruz (14): a) geometria e carregamento; b) detalhamento das armaduras longitudinais (medidas em cm)

ANEST/CA, já foi verificado por Stramandinoli [9] em comparação com diversos ensaios experimentais em vigas e pórticos planos. O modelo numérico demonstrou uma ótima aproximação do comportamento observado experimentalmente, principalmente para as estruturas com comportamento predominante de flexão. Junges [2], em seu estudo comparativo, também demonstrou o bom desempenho do modelo do ANEST/CA em relação a ensaios experimentais, sendo o modelo que melhor aproximou o comportamento estrutural em serviço das vigas ensaiadas, particularmente no caso de vigas bi-apoiadas. No caso de vigas contínuas, são poucos os resultados experimentais disponíveis na literatura, sendo que o modelo do ANEST/CA apresentou uma boa aproximação do comportamento em serviço, mas nem sempre conseguiu capturar o comportamento na ruptura obtido nos ensaios experimentais, devido provavelmente à abertura de fissuras inclinadas na seção mais solicitada (no apoio ou apoios centrais), que está submetida a flexão e cisalhamento combinados. Como o estudo comparativo limita-se a flechas para cargas em serviço, justifica-se assim a escolha do modelo do ANEST/CA (MA), com elementos de barra de Bernoulli, como referência para este trabalho. Ressalta-se que para o caso de vigas contínuas em que o cisalhamento for im-

portante, deve-se utilizar ou elementos finitos planos ou elementos de barra de Timoshenko, como, por exemplo, o desenvolvido por Stramandinoli e La Rovere [13]. Para mostrar a eficiência do modelo do ANEST/CA no caso de vigas contínuas de CA, selecionaram-se para este trabalho três vigas contínuas de dois vãos ensaiadas por dois diferentes autores.

A primeira viga analisada foi ensaiada experimentalmente por Cruz [14], que tinha como objetivo estudar a capacidade de redistribuição de esforços em vigas contínuas de concreto armado. A viga, que está detalhada na Figura [2], é formada por dois vãos de 4,0 m, com taxa de armadura longitudinal na seção de momento fletor máximo de 0,82 % e, na seção do apoio central, taxa de 1,46%. Para a análise pelo modelo do programa ANEST/CA a viga foi discretizada em 17 elementos e a seção transversal em 20 camadas na altura. As propriedades dos materiais estão listadas na Tabela [1], onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e ϵ_o é a deformação do concreto correspondente à f_{cm} ; f_y é a resistência ao escoamento do aço, E_s é o módulo de elasticidade do aço, ϵ_u é a deformação última e $s.h.$ é o parâmetro de enrijecimento após o escoamento do aço (igual a , sendo o módulo elasto-plástico do aço).

Tabela 1

Propriedades do concreto e aço das vigas ensaiadas por Cruz (14) e Silva (15)

Autor / viga	Concreto				ϕ barra (mm)	f_y (MPa)	E_s (MPa)	ϵ_u	s.h.
	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_o					
Cruz (14)	40,80	2,92	27836,84	0,0021	6,3	647,0	196000	0,025	0,0219
Cruz (14)	40,80	2,92	27836,84	0,0021	12,5	580,0	193000	0,024	0,0197
Cruz (14)	40,80	2,92	27836,84	0,0021	16,0	547,0	202000	0,057	0,0266
Silva (15): vigas V1 e V3	30,20	2,40	23124,00	0,0021	6,3	540,3	200000	0,02	0,02
Silva (15): vigas V1 e V3	30,20	2,40	23124,00	0,0021	10,0	505,7	200000	0,02	0,02
Silva (15): vigas V1 e V3	30,20	2,40	23124,00	0,0021	12,5	562,6	200000	0,02	0,02

Silva [15], em seu estudo sobre a utilização do cálculo plástico em estruturas hiperestáticas de concreto armado, ensaiou diversas vigas de concreto armado, dentre as quais duas vigas contínuas de dois vãos: V1 e V3. A geometria, carregamento e detalhamento da armadura longitudinal das duas vigas estão mostrados na Figura [3]. As taxas de armadura longitudinal na seção central são 1,26% para a V1 e 0,80% para a V3, e na seção do apoio central a taxa é

de 1,64% e 0,59% para as vigas V1 e V3, respectivamente. Para cada uma das vigas, foram ensaiados dois espécimes iguais (A e B). Para a análise pelo programa ANEST/CA, as vigas V1 e V3 foram discretizadas, respectivamente, em 14 e 17 elementos ao longo do comprimento, e a seção transversal de ambas discretizada em 20 camadas na altura. Na Tabela [1] estão as demais informações referentes às propriedades dos materiais.

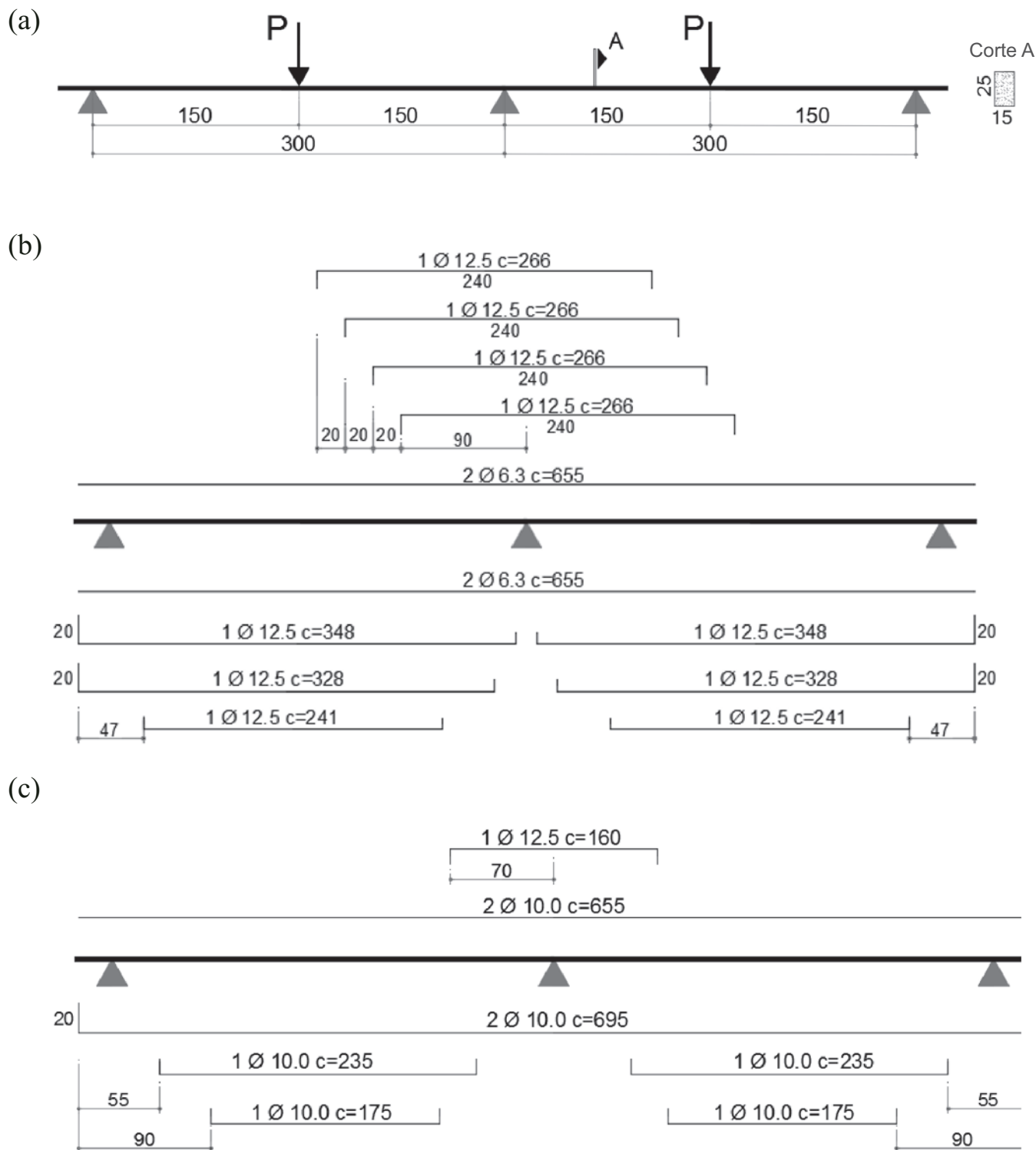


Figura 3

Vigas ensaiadas por Silva (15): a) geometria e carregamento; b) detalhamento das armaduras longitudinais da viga V1; c) detalhamento das armaduras longitudinais da viga V3 (medidas em cm)

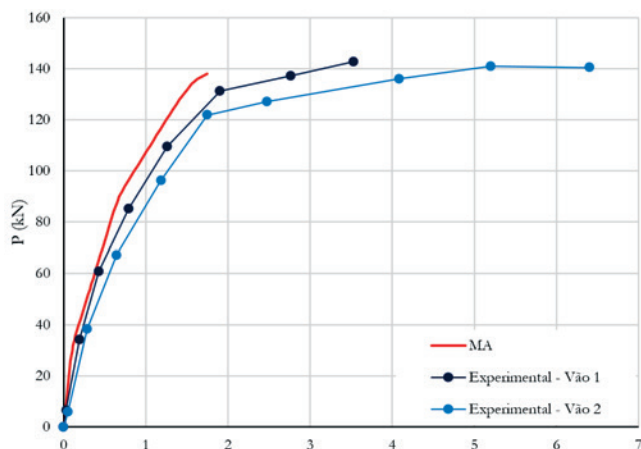


Figura 4
Gráfico carga versus flecha para a viga ensaiada por Cruz [14]

Com relação às malhas utilizadas para a análise numérica das vigas experimentais, a escolha foi baseada nos estudos paramétricos realizados anteriormente por Stramandinoli [9] e Junges [2]. Stramandinoli [9] analisou uma viga biapoiada sob flexão a três pontos e outra com flexão a quatro pontos; para a primeira obteve-se convergência da solução com o refino de malha para malhas a partir de 10 elementos, e, para a segunda, a partir de apenas 4 elementos. Junges [2] analisou uma viga contínua de dois vãos sob carga uniformemente distribuída, em que os resultados mostraram convergência da solução para as malhas a partir de 10 elementos por vão. Segue-se, também, a recomendação dada por Bazant *et al.* [16] de não se utilizar elementos de comprimento inferior à altura da sua seção transversal. Stramandinoli [9] também estudou o efeito do número de camadas na discretização da seção e concluiu que a partir de 10 camadas não há alteração nos resultados da solução. Ressalta-se, ainda, que o refinamento da malha influencia principalmente no comportamento da viga após o escoamento do aço, no trecho final antes da ruptura, sendo que o foco das análises aqui realizadas é o comportamento em serviço. Na Figura [4] mostra-se o gráfico carga versus flecha no meio do vão da viga ensaiada por Cruz [14], com os resultados obtidos experimentalmente medidos em cada vão e o resultado obtido pelo modelo numérico do ANEST/CA (MA). Analisando-se as curvas no trecho antes do escoamento do aço (até aproximadamente 120 kN), verifica-se uma boa proximidade entre os resultados numéricos e experimentais. Os resultados para as vigas V1 e V3 ensaiadas por Silva [15] estão mostrados na Figura [5], em que nota-se também uma boa proximidade entre os resultados do modelo numérico e os obtidos experimentalmente para a viga V3, que é a menos armada longitudinalmente; o mesmo não ocorre para a viga V1 que é mais armada longitudinalmente, apresentando uma diferença maior entre as curvas obtidas numérica e experimentalmente. Essa maior diferença se deve ao efeito do cisalhamento, que é mais importante nesta viga com maior armadura de flexão, e não é levada em conta no modelo de barra de Bernoulli do ANEST/CA, conforme demonstrou Stramandinoli [9], que analisou esta mesma viga V1 com o modelo de barra de Timoshenko (Straman-

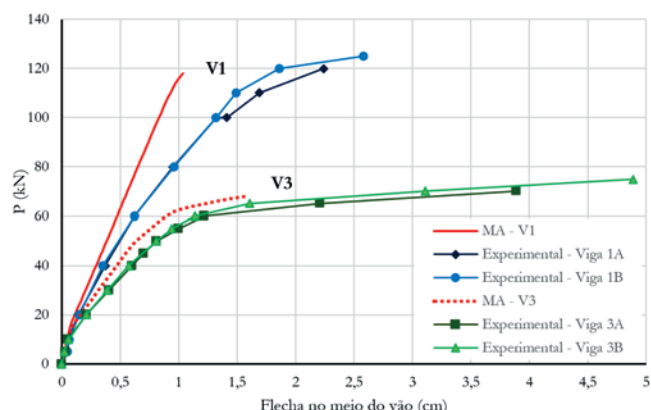


Figura 5
Gráficos carga versus flecha para as vigas V1 e V3 ensaiadas por Silva [15]

dinoli e La Rovere, [13]), obtendo uma aproximação bem melhor do comportamento observado no ensaio experimental. Ressalta-se também que é difícil reproduzir no modelo numérico exatamente as condições de ensaio, os apoios e as cargas aplicadas não são pontuais, e, além disso, existem diferenças nas medições de deslocamento obtidas em cada face da viga nos ensaios. Assim sendo, pequenas diferenças nas curvas carga-deslocamento obtidas numérica e experimentalmente podem ser consideradas aceitáveis.

5. Comparação entre modelos de elementos finitos e métodos simplificados para cálculo de flechas em vigas contínuas de CA

Foram estudadas no total 60 vigas contínuas de CA em serviço, denominadas vigas de projeto, sendo 44 de dois vãos e 16 vigas de três vãos. As vigas contínuas estudadas estão separadas em grupos, onde a geometria e dados do concreto são iguais dentro de cada grupo. Alguns grupos estão divididos em subgrupos que se diferenciam pelo tipo de carregamento (carga uniformemente distribuída ou carga concentrada no meio do vão). Cada subgrupo é formado por quatro vigas com valores de carregamento e armadura diferentes. Dessa forma pode-se avaliar a influência da variação da taxa de armadura, extensão do vão fissurado, tipo de carregamento, geometria e propriedades do material nos resultados obtidos pelos diferentes modelos e métodos estudados. Para a armadura longitudinal de todas as vigas de projeto estudadas foi adotado Aço CA-50, cujas propriedades estão mostradas na Tabela [2]. As propriedades do concreto são calculadas a partir da resistência à compressão f_{ck} , definida para o grupo de vigas em

Tabela 2
Propriedades do aço usadas nas vigas de projeto

f_y (MPa)	E_s (MPa)	ϵ_u	s.h.
500	210000	0,02	0,001

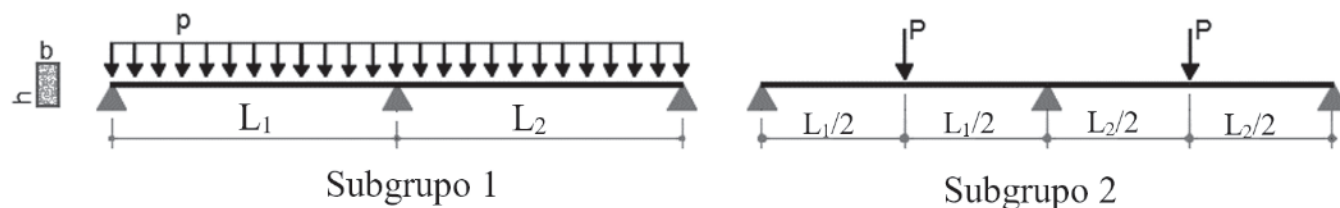


Figura 6

Ilustração dos tipos de carregamento e especificação das variáveis referentes à geometria das vigas de dois vãos

questão, conforme indicações da NBR 6118 [1], adotando-se valores iguais dessas propriedades para todos os modelos/métodos. Adota-se coeficiente $\alpha_E = 1$ para cálculo de E_{cs} .

Para o cálculo das flechas das vigas de projeto pelo modelo de EF do ANEST/CA (modelo de referência, denominado nos gráficos MA), a seção transversal das vigas é dividida em 20 camadas e o efeito “tension-stiffening” é considerado apenas nas 5 camadas, a partir da camada extrema (mais tracionada), até o escoamento da armadura (segundo-se recomendação do CEB para o caso de flexão, ver detalhes em Stramandinoli [9]). Para cada viga, foi utilizado um mesmo número de elementos para a análise pelos diferentes modelos, seguindo as mesmas recomendações mencionadas anteriormente em relação à escolha da malha e número de camadas para as vigas ensaiadas experimentalmente. Adiciona-se ainda o fato de que no estudo paramétrico realizado por Junges [2], analisou-se a variação da malha para o modelo MEV-Branson, tendo apresentado também convergência da solução para malhas a partir de 10 elementos por vão.

Para o cálculo pelo modelo MEV-Branson foi adotado o coeficiente m igual a 4, enquanto que para os métodos simplificados Branson-NBR 6118 e Branson Ibracon adota-se o valor usual m igual a 3. Para os métodos Branson-NBR 6118 e Bilinear-CEB, é calculado um valor de rigidez equivalente, E_{eq} , para cada vão, sendo adotados para o cálculo os dados da seção mais solicitada (momento fletor de maior módulo) no vão em questão. As flechas das vigas de projeto são calculadas para a combinação quase permanente de serviço (CQP), conforme recomendação da NBR 6118, sendo

que as vigas submetidas à carga concentrada (P_{CQP}) também estão submetidas à carga uniformemente distribuída, referente ao peso próprio da viga.

5.1 Vigas de dois vãos

Apresentam-se inicialmente os resultados das vigas de dois vãos. Na Figura [6] estão ilustrados a geometria e tipos de carregamento das vigas estudadas e na Tabela [3] detalham-se os dados do concreto e geometria que são comuns para as vigas de um mesmo grupo. Apenas as vigas dos grupos VCA-G1 e VCA-G2 possuem geometria assimétrica.

Na Tabela [4] estão os dados referentes ao carregamento de serviço de cada viga (p_{CQP} e/ou P_{CQP}), as áreas da armadura longitudinal: $A_s (M_{\max})$, referente à seção de momento positivo máximo no vão, e $A_s (M_{\min})$, referente à seção de momento mínimo (apoio central), junto com as respectivas taxas de armadura. Na última coluna está a porcentagem da extensão do vão de cada viga que está solicitada por momento M_a maior que o momento de fissuração M_f . Na Tabela [5] estão os dados das vigas dos grupos VCA-G1 e VCA-G2. Como são assimétricas, a armadura longitudinal também é assimétrica, logo, apresentam-se as armaduras na seção de momento máximo do primeiro vão, $A_s (M_{\max 1})$, na seção do apoio, $A_s (M_{\min})$, e na seção de momento máximo do segundo vão, $A_s (M_{\max 2})$.

Os resultados obtidos para cada método/modelo são analisados por meio de gráficos “carga aplicada versus flecha”, na seção

Tabela 3

Propriedades do concreto, momento de fissuração e dados da geometria dos grupos de vigas de dois vãos

Grupo	f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_{cr} (kN.m)	L_1 (m)	L_2 (m)	b (m)	h (m)
VC-G1	20	26,60	2,21	21287,4	0,002	5,97	3,00	3,00	0,12	0,30
VC-G2	25	31,60	2,56	23800,0	0,002	11,78	4,00	4,00	0,15	0,35
VC-G3	25	31,60	2,56	23800,0	0,002	12,31	4,50	4,50	0,12	0,40
VC-G4	25	31,60	2,56	23800,0	0,002	20,52	5,00	5,00	0,20	0,40
VC-G5	25	31,60	2,56	23800,0	0,002	32,06	6,00	6,00	0,20	0,50
VC-G6	30	36,60	2,90	26071,6	0,002	52,14	7,00	7,00	0,20	0,60
VCA-G1	25	31,60	2,56	23800,0	0,002	6,93	4,00	3,00	0,12	0,30
VCA-G2	25	31,60	2,56	23800,0	0,002	14,36	5,00	4,00	0,14	0,40

Tabela 4

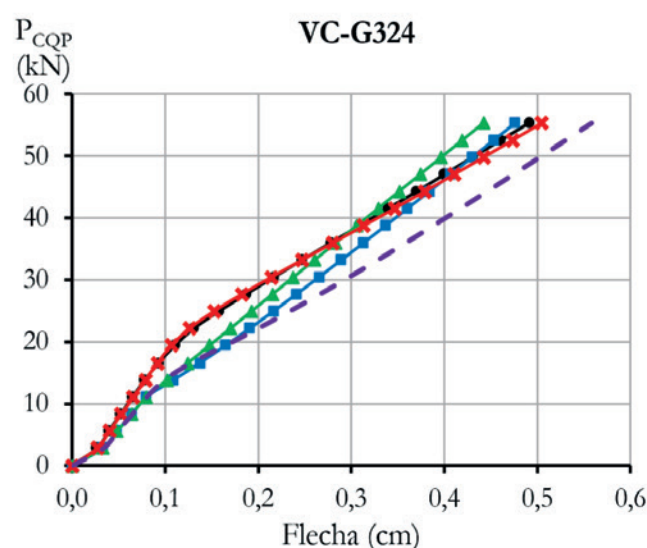
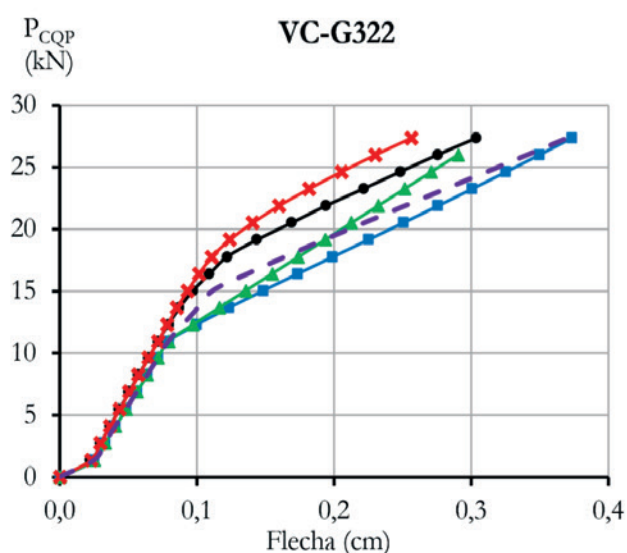
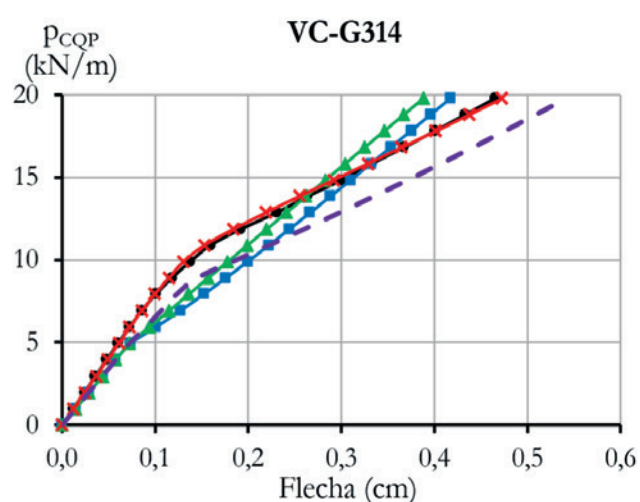
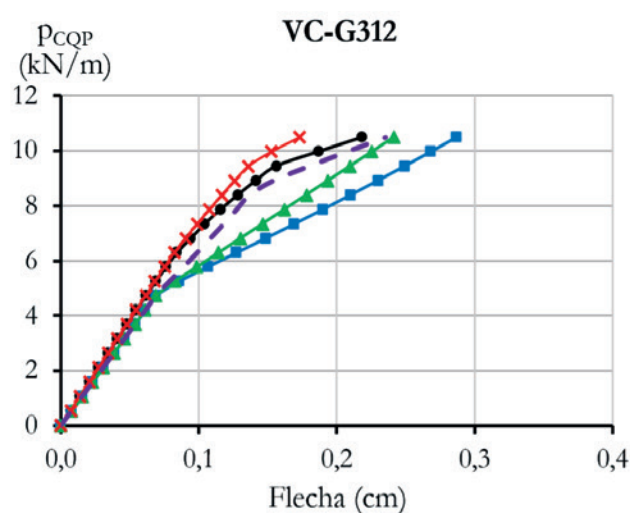
Dados do carregamento e armação longitudinal das vigas de dois vãos simétricos

Viga	P_{QPC} (kN/m)	P_{QPC} (kN)	$A_s (M_{max})$		$A_s (M_{min})$		$M_{QPC} > M_{cr}$ (% span)
			rebars	ρ (%)	rebars	ρ (%)	
VC-G111	4,70	–	2 ϕ 6,3	0,175	2 ϕ 8,0	0,28	0,00
VC-G112	8,50	–	2 ϕ 8,0	0,278	2 ϕ 12,5	0,68	8,00
VC-G113	12,30	–	2 ϕ 10	0,436	4 ϕ 10	0,87	49,00
VC-G114	16,10	–	2 ϕ 12,5	0,683	3 ϕ 12,5	1,03	63,67
VC-G121	0,90	6,60	2 ϕ 6,3	0,175	2 ϕ 8,0	0,28	0,00
VC-G122	0,90	14,85	2 ϕ 10,0	0,436	2 ϕ 10	0,44	25,67
VC-G123	0,90	23,10	3 ϕ 10,0	0,656	4 ϕ 10,0	0,87	84,67
VC-G124	0,90	31,35	3 ϕ 12,5	1,025	3 ϕ 12,5	1,03	63,67
VC-G211	5,11	–	2 ϕ 8,0	0,190	2 ϕ 10	0,30	0,00
VC-G212	8,91	–	2 ϕ 10,0	0,299	4 ϕ 10,0	0,60	7,25
VC-G213	12,71	–	3 ϕ 10,0	0,450	2 ϕ 16,0	0,77	43,00
VC-G214	16,51	–	4 ϕ 10,0	0,598	3 ϕ 16,0	1,15	59,75
VC-G311	5,85	–	2 ϕ 8,0	0,210	2 ϕ 12,5	0,51	3,56
VC-G312	10,50	–	2 ϕ 12,5	0,513	3 ϕ 12,5	0,77	43,11
VC-G313	15,15	–	4 ϕ 10,0	0,654	3 ϕ 16,0	1,26	64,44
VC-G314	19,80	–	2 ϕ 16,0	0,838	4 ϕ 16,0	1,68	74,00
VC-G321	1,20	11,65	2 ϕ 10,0	0,327	2 ϕ 10	0,33	1,11
VC-G322	1,20	27,38	4 ϕ 10,0	0,654	3 ϕ 12,5	0,77	46,22
VC-G323	1,20	42,52	4 ϕ 12,5	1,025	3 ϕ 16,0	1,26	66,44
VC-G324	1,20	55,34	3 ϕ 16,0	1,256	4 ϕ 16,0	1,68	72,44
VC-G411	9,48	–	3 ϕ 10,0	0,295	4 ϕ 10,0	0,39	6,60
VC-G412	13,48	–	4 ϕ 10,0	0,393	4 ϕ 12,5	0,62	38,40
VC-G413	17,48	–	3 ϕ 12,5	0,461	4 ϕ 16,0	1,01	57,20
VC-G414	21,48	–	4 ϕ 12,5	0,615	5 ϕ 16,0	1,26	66,60
VC-G511	10,93	–	3 ϕ 10,0	0,235	4 ϕ 12,5	0,49	7,50
VC-G512	16,55	–	3 ϕ 12,5	0,369	4 ϕ 16,0	0,80	48,83
VC-G513	22,17	–	3 ϕ 16,0	0,603	5 ϕ 16,0	1,01	64,50
VC-G514	27,79	–	4 ϕ 16,0	0,804	7 ϕ 16,0	1,41	72,50
VC-G521	2,50	18,17	3 ϕ 10,0	0,246	4 ϕ 10,0	0,31	0,00
VC-G522	2,50	45,43	4 ϕ 12,5	0,492	5 ϕ 12,5	0,62	40,17
VC-G523	2,50	72,68	4 ϕ 16,0	0,804	5 ϕ 16,0	1,01	60,67
VC-G524	2,50	109,02	6 ϕ 16,0	1,207	7 ϕ 16,0	1,41	72,83
VC-G611	12,00	–	4 ϕ 10,0	0,262	3 ϕ 16,0	0,50	6,14
VC-G612	21,00	–	3 ϕ 16,0	0,503	6 ϕ 16,0	1,01	53,00
VC-G613	27,00	–	4 ϕ 16,0	0,670	8 ϕ 16,0	1,34	65,29
VC-G614	36,00	–	6 ϕ 16,0	1,006	7 ϕ 20,0	1,83	75,00

Tabela 5

Dados do carregamento e armação longitudinal das vigas dos grupos VCA-G1 e VCA-G2

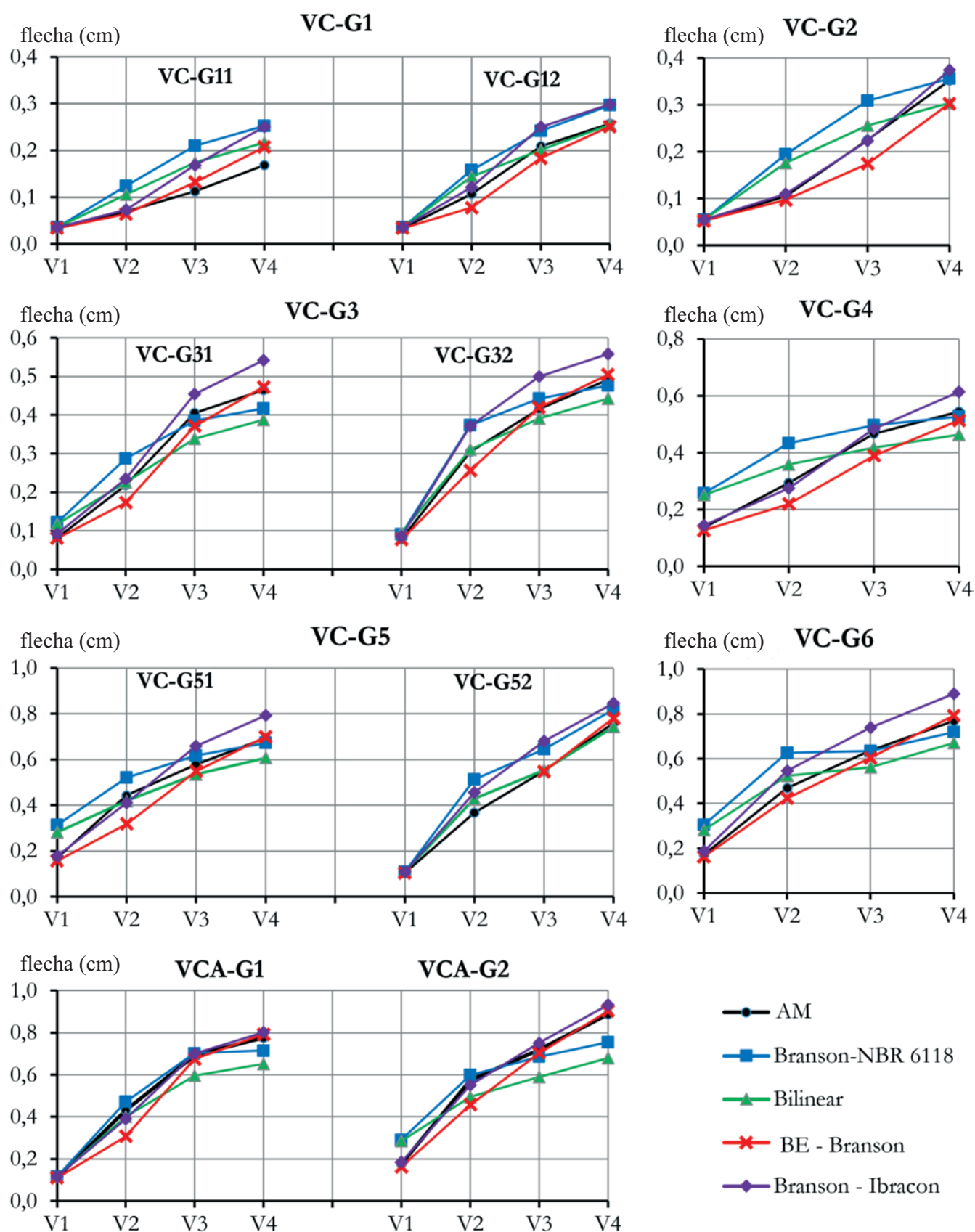
Viga	P_{QPC} (kN/m)	$A_s (M_{máx,1})$		$A_s (M_{mín})$		$A_s (M_{máx,2})$		$M_{QPC} > M_r$ (% vão)
		barras	ρ (%)	barras	ρ (%)	barras	ρ (%)	
VCA-G11	4,28	2 ϕ 8,0	0,281	2 ϕ 10	0,44	2 ϕ 6,3	0,172	0,00
VCA-G12	7,65	2 ϕ 10	0,436	3 ϕ 10,0	0,66	2 ϕ 6,3	0,172	50,75
VCA-G13	12,15	4 ϕ 10,0	0,872	3 ϕ 12,5	1,03	2 ϕ 8,0	0,281	71,25
VCA-G14	16,65	4 ϕ 12,5	1,367	3 ϕ 16,0	1,68	2 ϕ 10	0,436	79,25
VCA-G21	7,25	2 ϕ 10	0,280	3 ϕ 10,0	0,42	2 ϕ 8,0	0,180	4,40
VCA-G22	11,40	3 ϕ 10,0	0,420	3 ϕ 12,5	0,66	2 ϕ 10	0,280	56,60
VCA-G23	15,55	3 ϕ 12,5	0,659	3 ϕ 16,0	1,08	2 ϕ 10	0,280	69,80
VCA-G24	19,70	4 ϕ 12,5	0,879	4 ϕ 16,0	1,44	2 ϕ 12,5	0,439	76,60



—●— MA —■— Branson - NBR 6118 —▲— Bilinear —×— MEV-Branson —-— Branson - Ibracon

Figura 7

Gráficos carga aplicada versus flecha máxima das vigas VC-G312, VC-G314, VC-G322 e VC-G324 do grupo VC-G3

**Figura 8**

Resultados das flechas finais obtidas pelos métodos/modelos estudados para as vigas simétricas de dois vãos

Tabela 6

Propriedades do concreto, momento de fissuração e dados da geometria dos grupos de vigas de três vãos

Grupo	f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ε_0	M_{cr} (kN.m)	L_e (m)	L_c (m)	b (m)	h (m)
VC3V-G1	25	31,60	2,56	23800,00	0,002	15,39	4,50	4,50	0,15	0,40
VC3V-G2	25	31,60	2,56	23800,00	0,002	32,06	5,50	5,50	0,20	0,50
VC3V-G3	25	31,60	2,56	23800,00	0,002	27,16	4,50	6,00	0,14	0,55
VC3V-G4	25	31,60	2,56	23800,00	0,002	15,58	3,00	5,00	0,12	0,45

de flecha máxima. Alguns destes gráficos estão apresentados a seguir.

Na Figura [7] mostram-se os gráficos de quatro vigas do grupo VC-G3, em que se podem observar as diferenças de resultados entre os diferentes modelos/métodos estudados. O MEV-Branson apresentou a curva “carga-flecha” mais próxima da do modelo de referência (MA), apresentando rigidez bastante similar no trecho da curva após o início da fissuração do concreto (estádio II) e também valor bem próximo da carga de mudança do estágio I para estágio II da seção analisada, resultando assim em valores similares de flecha final, correspondente à carga final aplicada. Os métodos simplificados Bilinear, Branson-NBR e Branson-Ibracon apresentaram na curva “carga-flecha” um valor de carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II, na seção analisada, inferior aos demais modelos, resultando em maiores valores de flecha final. Observa-se ainda que, em geral, a rigidez da viga pelos métodos Branson-Ibracon e Branson-NBR no trecho pós-fissuração (estádio II) mostrou-se próxima do modelo de referência MA, apenas o Método Bilinear-CEB mostrou um comportamento mais rígido do modelo no trecho da curva após a fissuração do concreto, levando a valores mais baixos de flecha final.

De forma a avaliar os valores das flechas obtidas em todas as vigas, os valores de flecha máximas em cada viga foram traçados em gráficos separados por grupos e subgrupos de forma a visualizar a variação da flecha máxima de uma viga para outra, e também de um método para outro. Na Figura [8] estão os gráficos para os grupos de vigas de dois vãos de geometria

simétrica. Pode-se observar que, em geral, o método Branson-Ibracon apresentou os maiores valores de flecha para as vigas 3 e 4 dentro dos grupos, ou seja, as vigas com maior taxa de armadura e extensão de vão fissurado, enquanto que o método Bilinear apresentou os menores valores para estas vigas. Já para as vigas com menores taxas de armadura, o método Branson-NBR apresentou os maiores valores de flecha. Em geral o MEV-Branson seguido do Branson-Ibracon mostraram flechas finais mais próximas do modelo não linear de elementos finitos do ANEST/CA, tomado neste trabalho como referência (MA).

5.2 Vigas de três vãos

Foram estudadas também vigas contínuas de três vãos, por serem muito utilizadas nas edificações de concreto armado, e por não ter sido encontrado nenhum estudo sobre flecha imediata para vigas com esta geometria. Outro motivo é para a melhor avaliação do método simplificado Branson-Ibracon, o qual, para o vão central destas vigas, irá utilizar três valores de rigidez, devido à configuração do diagrama de momento fletor. Foram estudadas 16 vigas contínuas de 3 vãos, todas submetidas a carga uniformemente distribuída, separadas em quatro grupos. Na Figura [9] estão ilustradas a geometria das vigas e as duas configurações de carregamento uniformemente distribuído utilizados.

Na Tabela [7] encontram-se os dados de cada viga, a carga uniformemente distribuída aplicada (p_{cop}), a área da armadura longitudinal da seção de momento positivo máximo nos vãos ex-

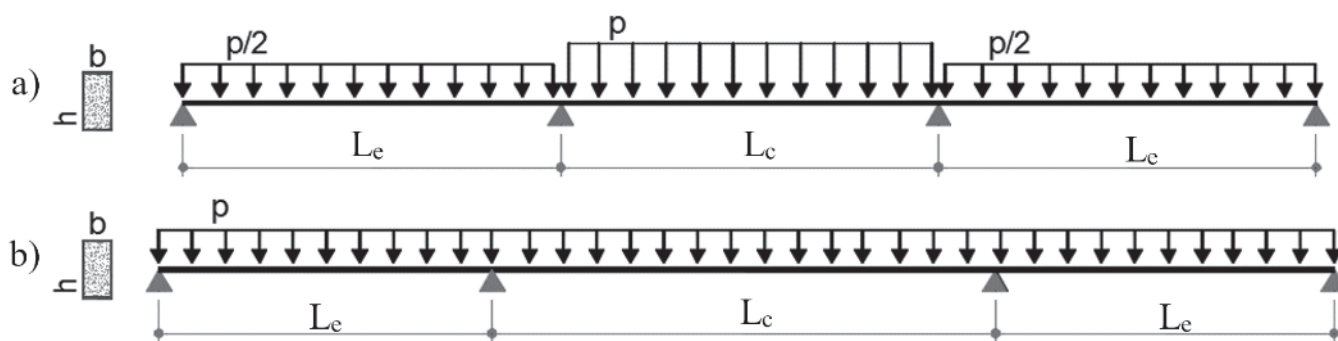
**Figura 9**

Ilustração dos tipos de carregamento e especificação das variáveis referentes à geometria: a) grupos VC3V-G1 e VC3V-G2; b) grupos VC3V-G3 e VC3V-G4

tremos, $A_s (M_{\max,le})$, e na seção central do vão central, $A_s (M_{\max,lc})$, e a área da armadura da seção dos apoios internos, $A_s (M_{\min})$. Mostram-se na Figura [10] alguns gráficos “carga aplicada *versus* flecha máxima”. Para estas vigas foi observado um comportamento similar ao das vigas contínuas de dois vãos, com a diferença que para as vigas de três vãos notou-se que o valor da carga de mudança do estágio I para o estágio II das seções analisadas apresentou menor diferença entre os métodos simplificados e os modelos de EF (MEV-Branson e MA) do que a diferença observada para as vigas de dois vãos.

Na Figura [11] estão os gráficos com as flechas máximas calculadas para a carga total para cada viga e para cada modelo/método. As mesmas observações feitas para as vigas de dois vãos podem ser feitas para as de três vãos.

5.3 Análise dos resultados

Para analisar os resultados foram calculadas as diferenças percentuais da flecha imediata máxima encontrada pelos diferentes métodos e modelos estudados em relação à obtida pelo

modelo de referência do ANEST/CA (MA), considerando-se os valores de flecha obtidos para a carga total de serviço (denominadas flechas finais). Na Tabela [8] encontram-se as médias dessas diferenças percentuais separadas por método/modelo englobando as 60 vigas contínuas estudadas. A tabela contém a média das vigas com diferença percentual negativa (Média (-)), ou seja, vigas que apresentaram flechas menores que as do MA, a média das vigas com diferença percentual positiva (Média (+)), a média total (Média) e, na última coluna, o desvio padrão das diferenças percentuais. Na Figura [12] podem-se visualizar as médias obtidas para cada modelo.

Pela média calculada com todas as vigas, o MEV-Branson foi o modelo que teve seus resultados mais próximos do MA (-5,49%) e com a menor dispersão dos resultados, tendo a maioria dos valores das flechas menores que os obtidos pelo MA. O modelo apresentou na curva carga-flecha não apenas o ponto de mudança do estágio I para estágio II geralmente coincidente com o modelo de referência MA, mas também a rigidez após a fissuração bastante semelhante, explicando-se assim a proximidade nos valores finais das flechas. Nota-se que o total de vigas na

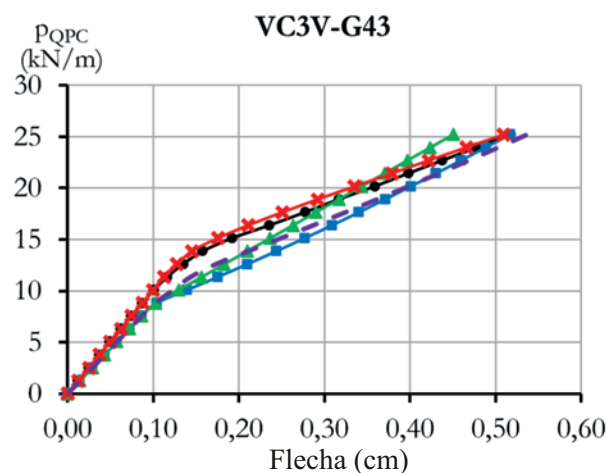
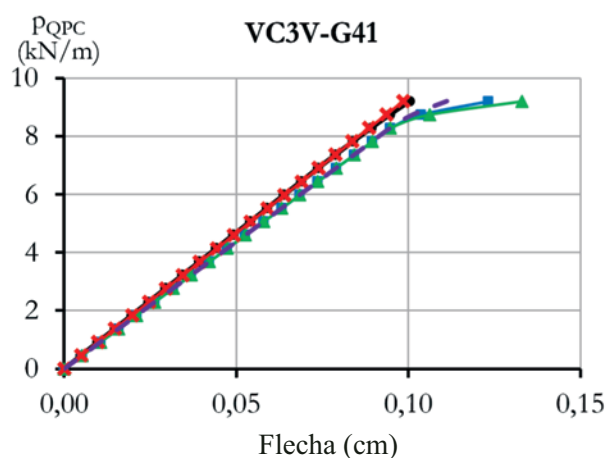
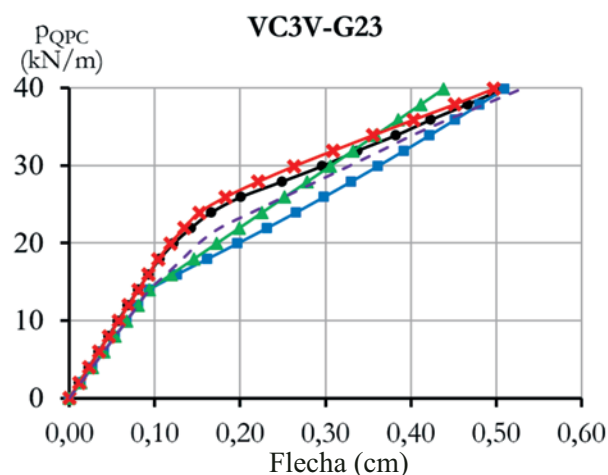
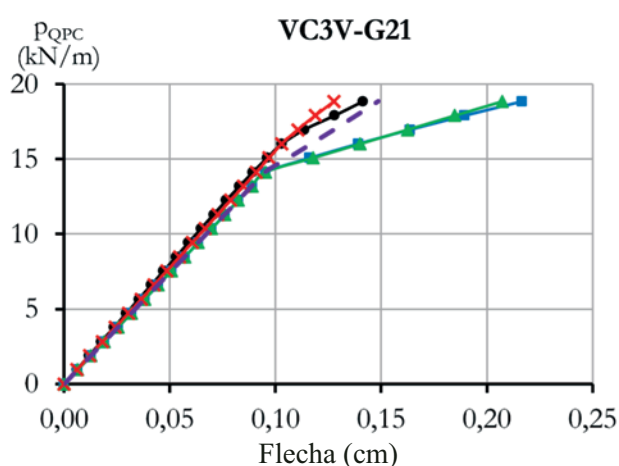


Figura 10

Gráficos carga aplicada *versus* flecha máxima para as vigas VC3V-G21, VC3V-G23, VC3V-G41 e VC3V-G43

Tabela 7

Dados do carregamento e armação longitudinal das vigas de três vãos

Viga	P_{GPC} (kN/m)	$A_s (M_{máx_e})$		$A_s (M_{mín})$		$A_s (M_{máx_c})$		$M_{GPC} > M_r$ (% vão)
		barras	ρ (%)	barras	ρ (%)	barras	ρ (%)	
VC3V-G11	9,00	2 ϕ 8,0	0,168	2 ϕ 10,0	0,262	2 ϕ 8,0	0,168	0,00
VC3V-G12	19,00	2 ϕ 10	0,262	3 ϕ 12,5	0,615	3 ϕ 10,0	0,393	43,56
VC3V-G13	29,00	3 ϕ 10,0	0,393	3 ϕ 16,0	1,005	3 ϕ 12,5	0,615	65,33
VC3V-G14	39,00	4 ϕ 10,0	0,523	5 ϕ 16,0	1,675	3 ϕ 16,0	1,005	74,67
VC3V-G21	18,85	2 ϕ 10	0,157	3 ϕ 12,5	0,369	2 ϕ 12,5	0,246	8,00
VC3V-G22	34,60	4 ϕ 10,0	0,314	4 ϕ 16,0	0,804	4 ϕ 12,5	0,492	59,27
VC3V-G23	39,85	3 ϕ 12,5	0,369	5 ϕ 16,0	1,006	3 ϕ 16,0	0,603	64,73
VC3V-G24	50,35	4 ϕ 12,5	0,492	7 ϕ 16,0	1,408	4 ϕ 16,0	0,804	72,73
VC3V-G31	11,90	2 ϕ 10	0,204	4 ϕ 10,0	0,408	3 ϕ 10,0	0,306	6,67
VC3V-G32	18,55	3 ϕ 10,0	0,306	3 ϕ 16,0	0,783	4 ϕ 10,0	0,408	36,67
VC3V-G33	25,20	3 ϕ 12,5	0,479	4 ϕ 16,0	1,044	4 ϕ 12,5	0,639	58,00
VC3V-G34	35,18	4 ϕ 12,5	0,639	6 ϕ 16,0	1,568	3 ϕ 16,0	0,783	71,00
VC3V-G41	9,20	2 ϕ 8,0	0,187	2 ϕ 10,0	0,291	2 ϕ 10,0	0,291	2,00
VC3V-G42	17,20	2 ϕ 8,0	0,187	4 ϕ 10,0	0,581	3 ϕ 10,0	0,437	48,00
VC3V-G43	25,20	2 ϕ 8,0	0,187	3 ϕ 16,0	1,117	3 ϕ 12,5	0,683	70,40
VC3V-G44	33,20	2 ϕ 10	0,291	4 ϕ 16,0	1,489	3 ϕ 16,0	1,117	72,40

Tabela [8] analisadas por este modelo é 58 e não 60, devido ao fato que, para as vigas VC3VG42 e VCG522, o cálculo pelo MEV-Branson ter apresentado problemas de convergência no processo iterativo de solução do sistema de equações não lineares, os quais não serão aqui discutidos (ver detalhes em Junges [2]).

Da Tabela [8] percebe-se que todos os métodos simplificados apresentaram em média valores de flecha superiores aos obtidos pelo modelo de referência MA, sendo que, entre esses, o método simplificado Bilinear foi o que forneceu melhores resultados, apresentando a segunda menor diferença média (7,98%) em relação ao modelo MA, mas, porém, com uma dispersão alta dos resultados (27,03 de desvio padrão). O método Branson-Ibracon, apesar de ter obtido uma diferen-

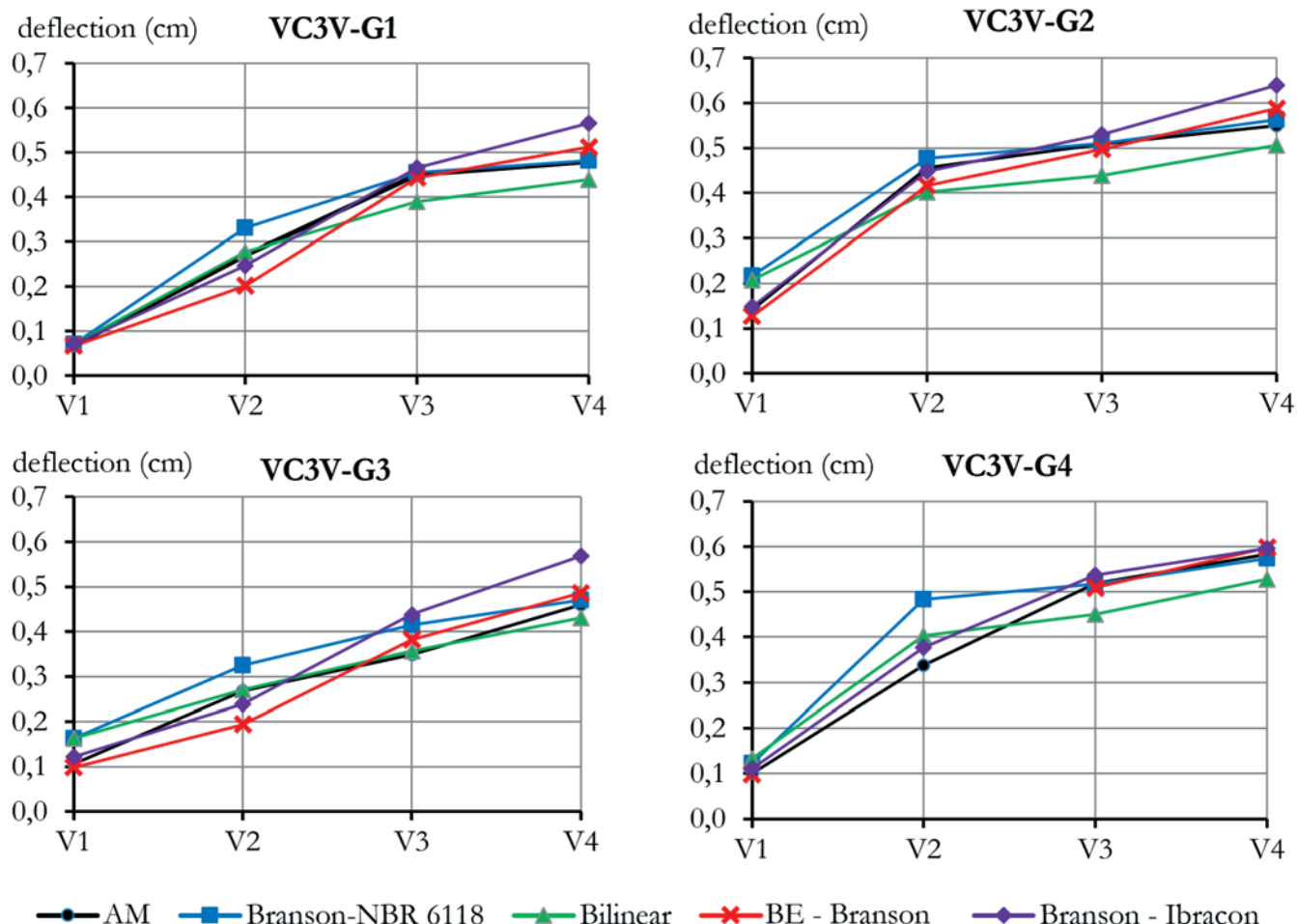
ça média um pouco maior que do método Bilinear (9,68%), o desvio padrão correspondente foi consideravelmente menor, sendo assim um método com menor dispersão de resultados. Já o Branson-NBR foi o método com maior diferença média, e com a maioria dos valores acima dos calculados pelo MA (48 vigas). Como o Branson-Ibracon considera até três seções para o cálculo da rigidez equivalente de um vão, este método se aproximou mais do MA e do MEV-Branson do que o Branson-NBR, o qual adota somente uma seção para o cálculo da rigidez.

Assim, pode-se afirmar que o modelo MEV-Branson foi o que apresentou resultados mais próximos ao do modelo do ANEST/CA. Esta aproximação é melhor em comparação aos métodos simplificados que também utilizam a fórmula de Branson (Bran-

Tabela 8

Médias das diferenças percentuais (em %) das flechas finais em relação às do modelo de referência, MA

Método	Média (-)	n° vigas	Média (+)	n° vigas	Média	Desvio padrão
Branson-NBR	-5,05	12	27,43	48	20,93	27,95
Branson-Ibracon	-6,16	8	12,11	52	9,68	11,26
Bilinear	-11,71	30	27,63	30	7,96	27,03
MEV - Branson	-9,44	43	5,82	15	-5,49	10,86

**Figura 11**

Resultados das flechas finais obtidas pelos métodos/modelos estudados para as vigas de três vãos

son-NBR e Branson-Ibracon), devido ao fato do MEV-Branson levar em consideração a variação da rigidez ao longo do vão, que ocorre devido à variação do nível de fissuração de acordo com a solicitação atuante e também com a taxa de armadura. Ressalta-se, também, que no modelo MEV-Branson foi adotado o expoente da fórmula de Branson $m=4$ ao invés de $m=3$, de modo a desconsiderar que parte da viga está no estágio I, já que se calcula a rigidez para um elemento de pequena extensão, o qual ou está todo fissurado ou está no estágio I.

Na Tabela [9] apresentam-se a média e o desvio padrão das diferenças percentuais dos valores de flecha, separados em três grupos: vigas de dois vãos com carga uniformemente distribuída, vigas de dois vãos com carga concentrada e vigas de três vãos com carga uniformemente distribuída. Na Figura [13] estão ilustradas as diferenças médias contidas na Tabela [9]. Analisando as diferenças médias separadas por caso, o método MEV-Branson continua sendo o que mais se aproxima do modelo de referência MA, mas observam-se algumas

Tabela 9

Médias das diferenças percentuais das flechas finais em relação às do MA (%) das vigas de dois vãos com carga uniformemente distribuída e com carga concentrada, e vigas de 3 vãos

Método	Vigas de 2 vãos carga distribuída		Vigas de 2 vãos carga concentrada		Vigas de 3 vãos	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
Branson-NBR	25,42	34,39	16,16	14,94	15,55	19,29
Branson-Ibracon	8,67	12,54	15,10	7,11	7,62	10,33
Bilinear	10,57	32,95	5,08	12,97	4,90	21,82
MEV - Branson	-6,62	11,48	-4,77	9,35	-3,61	10,89

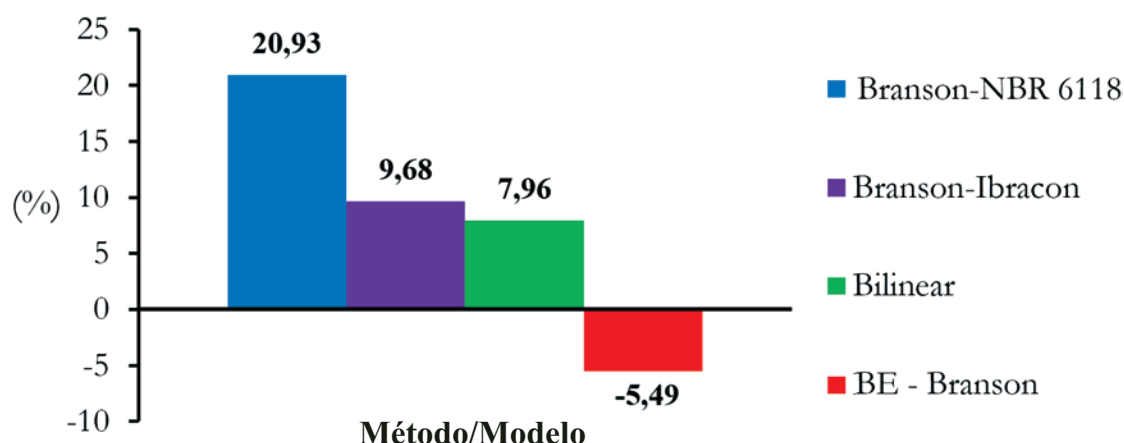


Figura 12

Gráfico com as médias das diferenças percentuais das flechas obtidas pelos diversos métodos em relação ao MA

mudanças nos resultados dos métodos simplificados em relação à análise global. Entre os métodos simplificados o método Bilinear ainda apresenta a menor diferença em relação ao modelo MA para as vigas de dois vãos com carga concentrada e para as vigas de três vãos, mantendo uma alta dispersão dos resultados. No entanto, para o caso de vigas de dois vãos com carga uniformemente distribuída, o método Branson-Ibracon foi o método simplificado que mais se aproximou do modelo MA.

Os resultados das flechas foram analisados também em função da taxa de armadura e extensão do vão fissurado. Observou-se que para vigas com baixa taxa de armadura, que são também as que possuem menor extensão do vão fissurado sob a carga total de serviço, os resultados dos métodos e modelo estudados são bastante dispersos em relação aos do MA, principalmente para os métodos simplificados, que em geral fornecem valores superiores de flecha em relação aos dos modelos refinados de EF. Já para vigas com taxas de armadura mais elevadas, em média acima de 1%, a variabilidade das diferenças percentuais das flechas finais (correspondentes à carga total de serviço) em relação às obtidas pelo modelo de referência MA

diminuem. Isto se deve ao fato de, por estas vigas já estarem bastante fissuradas, a contribuição do concreto entre fissuras na rigidez da viga é pequena, contribuição esta (efeito *tension-stiffening*) que é modelada com mais rigor no MA, logo a diferença entre os resultados dos métodos/modelos em relação ao MA diminui. Mais detalhes deste estudo podem ser encontrados em Junges [2].

6. Conclusões

Este trabalho teve como objetivo realizar um estudo abrangente sobre diferentes métodos simplificados e modelos refinados de cálculo de flecha imediata aplicados a vigas contínuas de concreto armado em situação de serviço, realizando a análise pela comparação entre os resultados obtidos pelos modelos/métodos estudados, tomando como referência o modelo não linear de EF implementado no programa ANEST/CA (denominado MA). Algumas conclusões foram extraídas e estão listadas a seguir separadas por modelo/método.

a) MEV-Branson: obteve em média os resultados mais

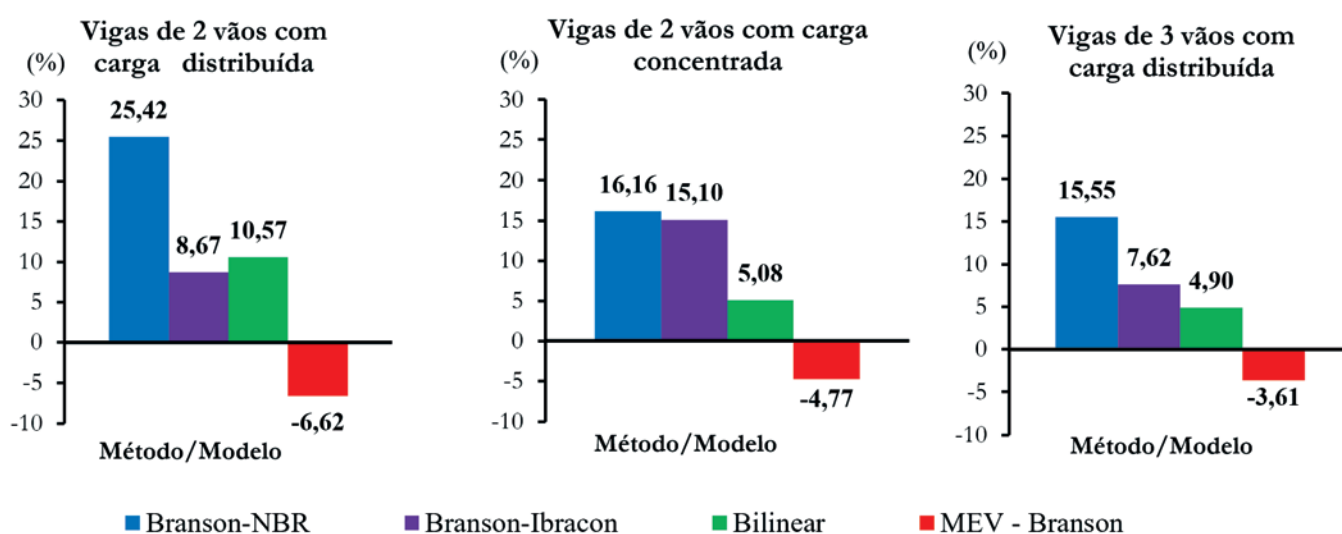


Figura 13

Gráficos com as médias das diferenças percentuais das flechas obtidas pelos diversos métodos em relação ao MA, separados por caso (geometria de viga/carregamento)

próximos aos valores obtidos pelo MA, com menor dispersão de resultados e também curvas “carga-flecha” mais semelhantes às do MA.

b) Branson-NBR: valores de flecha final bastante dispersos e geralmente maiores que os do MA, principalmente para as vigas contínuas de dois vãos com carga uniformemente distribuída, sendo a carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II consideravelmente menor que a obtida pelo MA.

c) Branson-Ibracon: apresentou resultados das flechas finais razoavelmente próximos aos do MA, com diferença média de 9,68%, apresentando diferença menor para o caso de vigas com carga uniformemente distribuída.

d) Bilinear: apresentou resultados de flecha final próximos aos obtidos pelo MA (diferença média de 7,96%), porém, com resultados bastante dispersos; apresentou também carga correspondente à mudança do estágio I para o estágio II consideravelmente menor que dos outros modelos, similarmente ao método Branson-NBR, mas com rigidez maior no trecho pós-fissuração.

Concluindo, em relação aos modelos refinados estudados, o modelo do ANEST/CA (MA) é o mais completo e mostrou boa aproximação a resultados experimentais, conforme mostrado no item 4, e também já demonstrado para vigas biapoiadas em Stramandinoli [9] e Junges [2], sendo assim recomendada sua utilização para o cálculo mais preciso de flechas imediatas. Opcionalmente pode-se também utilizar o método MEV-Branson (com expoente $m=4$ na equação de Branson), por ter fornecido resultados satisfatórios e ser de fácil implementação computacional, sendo o modelo que apresentou resultados mais próximos aos do MA, tanto para vigas contínuas de concreto armado, conforme visto neste trabalho, como também para vigas biapoiadas, como mostrado em Junges e La Rovere [3]. Dentre os métodos simplificados, o método Branson-NBR, em que se utiliza a fórmula de Branson conforme recomenda a NBR 6118, adotando-se apenas uma seção de referência para cálculo da rigidez equivalente de um vão, levou aos resultados mais dispersos e com a maior diferença média dos valores de flecha em relação ao modelo de referência. Já o método simplificado Branson-Ibracon, em que se aplica a fórmula de Branson indicada na NBR 6118, mas calculando a rigidez equivalente de cada vão conforme indicado nos comentários técnicos da NB-1, publicados pelo Ibracon, apresentou os resultados menos dispersos e com boa aproximação do modelo de referência, sendo este o método simplificado recomendado para estimativa de flecha imediata em vigas contínuas. O método Bilinear, recomendado pelo CEB, apesar de em média ter apresentado resultados mais próximos aos do MA em comparação aos demais métodos simplificados, apresentou maior dispersão nos resultados, sendo indicado somente para o caso de vigas sob carga concentrada, em que apresentou menor dispersão de resultados e menor diferença média em relação ao modelo de referência, MA.

7. Agradecimentos

As autoras agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de

Pessoal de Nível Superior (CAPES), e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelas bolsas de mestrado e doutorado concedidas à primeira autora.

8. Referências bibliográficas

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS ABNT. Projeto e execução de obras de concreto armado - NBR 6118. Rio de Janeiro, 2014.
- [2] JUNGES, E. Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- [3] JUNGES, E.; LA ROVERE, H. L. Comparação entre métodos simplificados e modelos não lineares de elementos finitos para o cálculo de flecha imediata em vigas biapoiadas de concreto armado. 53º Congresso Brasileiro do Concreto. Florianópolis.
- [4] BRANSON, D. E. Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams. HPR Report, Nº 7, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, 1963.
- [5] INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO IBRACON. Comentários técnicos e exemplos de aplicação da NB-1: NBR 6118 projeto de estruturas de concreto-Procedimento. São Paulo, 2007.
- [6] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Design manual on cracking and deformations, Bulletin d'Informtion. No. 185-E. Paris, France, 1985.
- [7] SABNIS, G. M. et al. Deflections of continuous concrete beams. ACI Journal. December, 1973.
- [8] EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. Design of concrete structures: General rules and rules for buildings. Eurocode 2. Brussels-Belgium, 1982.
- [9] STRAMANDINOLI, R. S. B. Modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. 2007. 189 p. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2007.
- [10] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.
- [11] STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. Engineering Structures. V. 30, p. 2069-2080, 2008.
- [12] STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. Finite element model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams and plane frames. Ibracon Structures and Materials Journal. Vol. (to be published), 2016.
- [13] STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation. Engineering Structures. V. 35, p. 244-253, 2012.
- [14] CRUZ, A. C. Capacidade de redistribuição de esforços em viga. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1996.

- [15] SILVA, P. J. C. A. Redistribuição de momentos fletores em estruturas hiperestáticas. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977.
- [16] BAZANT, Z. P.; PAN, J.; CABOT, G. P. Softening in reinforced concrete beams and frames. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*. V. 113, n. 12, p. 2333-2347, 1987.