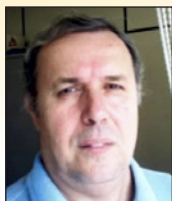


# Automatic procedure for analysis and geometry definition of axisymmetric domes by the membrane theory with constant normal stress

## *Processo automático para análise e definição de geometria de cúpulas axissimétricas pela teoria de membrana com tensões normais constantes*



F. T. RABELLO <sup>a</sup>  
fernando.rabello@ifsc.edu.br

N. A. MARCELLINO <sup>b</sup>  
narbal.marcellino@ecv.ufsc.br

D. D. LORIGGIO <sup>b</sup>  
daniel.loriggio@ufsc.br

### Abstract

This paper presents an automatic procedure using the membrane theory of shells to analyse and define geometries for axisymmetric domes subjected to its own weight, varying its thickness and bend radius, to obtain constant normal stresses along the structure. The procedure offers a great advantage over the analytic solution of the problem and usual shell numerical methods when one wants to determine the dome geometry with constant stresses, since the presented procedure has the goal stress as input value for obtaining the geometry, as opposed to the usual numerical methods, where the reverse occurs. An example clarifies the differences between a spherical dome with constant thickness and a dome subjected to constant stress. The convergence of the method for a specific material weight and stress for a dome are also presented.

**Keywords:** domes, thin shells, membrane theory, meridional stress, tangential stress.

### Resumo

Este artigo apresenta um processo automático para análise e definição de geometria pela teoria de membrana para cúpulas de revolução axissimétricas submetidas ao peso próprio, com variação de espessura e raios de curvatura, de modo a obter tensões normais tangenciais e meridionais constantes em qualquer ponto da estrutura. O processo apresenta grande vantagem sobre a solução analítica do problema e a por métodos numéricos usuais de casca quando se deseja determinar a geometria da cúpula em função de apenas uma tensão solicitante constante, uma vez que o processo tem como dado de entrada a própria tensão inicial para obtenção da geometria, diferente dos métodos numéricos usuais, onde ocorre o inverso. Um exemplo explicita as diferenças entre uma cúpula esférica com espessura constante e uma cúpula com tensões constantes submetida ao peso próprio. A verificação da convergência do método para uma tensão solicitante e peso específico do material de uma cúpula também são apresentados.

**Palavras-chave:** cúpulas, cascas finas, teoria de membrana, tensões meridionais, tensões tangenciais.

<sup>a</sup> Instituto Federal de Santa Catarina, Departamento de Construção Civil, Florianópolis, SC, Brasil;

<sup>b</sup> Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Civil, Florianópolis, SC, Brasil.

## 1. Introdução

Cascas finas são peças laminares curvas cuja espessura é pequena em relação às suas outras dimensões. Estes elementos podem estar sujeitos a esforços de membrana e flexão, dependendo dos vínculos nos apoios e do seu carregamento. Estruturas com carregamento axissimétrico e com adequada configuração de apoios podem apresentar apenas esforços de membrana que atuam paralelamente a um plano tangente à superfície média da casca em um dado ponto, onde se podem considerar as tensões distribuídas uniformemente ao longo de sua espessura.

As cascas constituem um tipo de estrutura que possui uma vasta quantidade de aplicações, incluindo, por exemplo, fuselagens de aviões e submarinos, silos metálicos, coberturas de hangares, estruturas de prédios, componentes automotivos e aeroespaciais, vasos de pressão, reservatórios de líquidos, mísseis e, entre outros, as cúpulas.

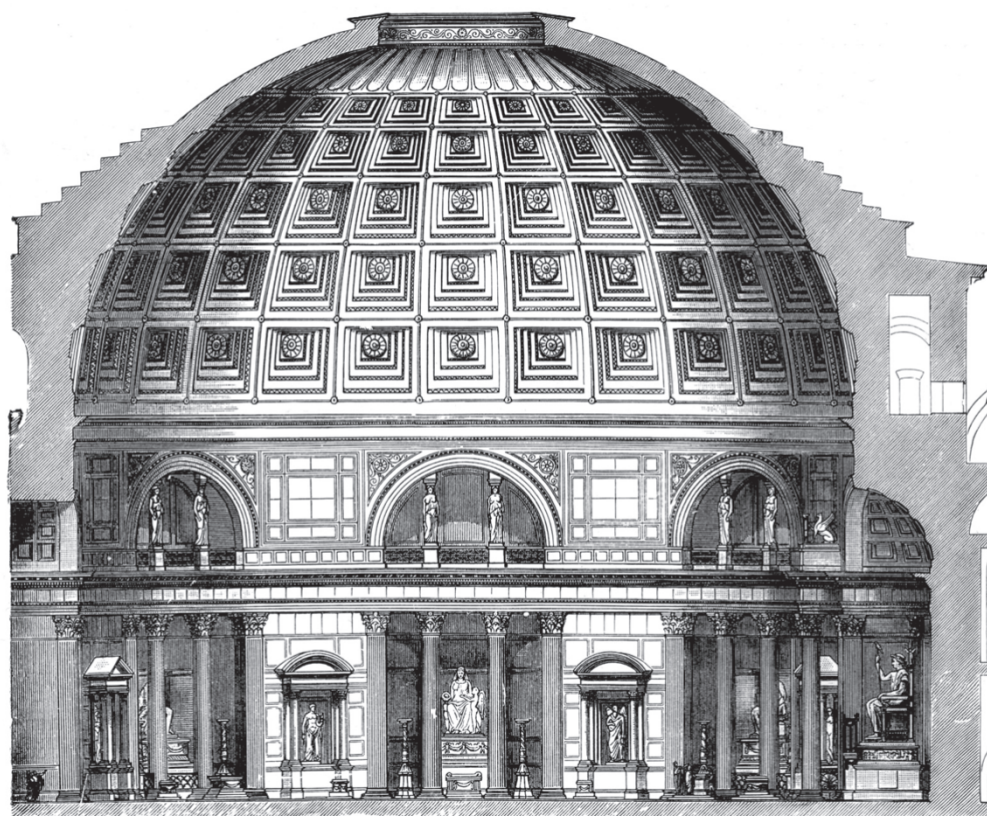
Cúpulas são cascas com formato semi-esférico ou similar, cuja estrutura pode ser constituída de diversos materiais e seus variados usos e concepções arquitetônicas remetem à pré-história. Entre as vantagens do uso de cúpulas, podem-se citar os grandes vãos possíveis de serem cobertos, baixo peso, alta rigidez e possibilidade de manipulação geométrica na sua concepção, o que,

em muitos casos, as tornam arquitetonicamente belas. Podem-se mencionar como desvantagens as dificuldades construtivas e o custo muitas vezes elevado [8].

A construção das primeiras cúpulas tecnicamente avançadas começou na Europa, com a Revolução Arquitetônica Romana, quando tal sistema estrutural era freqüentemente utilizado para moldar grandes espaços interiores de templos e edifícios públicos [12]. Naquelas cúpulas, normalmente o material usado na construção não tinha grande resistência à tração e, para se reduzir o peso próprio, variava-se a espessura e o material agregado à medida que se aumentava a altura, sendo que deste modo reduziam-se as tensões normais na direção dos meridianos na estrutura concluída. Um exemplo é o Panteão de Roma (Figura 1), construído originalmente em 27 a.C.. Tendo 43,4 metros de vão, o Panteão de Roma permaneceu como a maior cúpula do mundo por mais de um milênio e atualmente é a maior cúpula do mundo feita de concreto não-armado.

A geometria das cúpulas influencia diretamente o seu desempenho estrutural. Portanto, para dado material com certas características, a eficiência estrutural está diretamente ligada à eficiência da sua forma, incluindo sua espessura e raios de curvatura. Existe uma tendência de pesquisas na busca da otimização da geometria deste tipo de estrutura, conforme pode se observar em [1], [2], [3], [4] e [7]. Um dos principais fatores para esse interesse são os avanços e a

Figura 1 – Corte da cúpula do Panteão de Roma (6)



acessibilidade dos computadores e o desenvolvimento de modelos numéricos e algoritmos de otimização para resolução de tais problemas [1]. As soluções por métodos numéricos com algoritmos de otimização são adequadas para casos mais gerais de geometrias e carregamentos, enquanto que ainda exista um conflito entre o custo computacional, a precisão dos resultados obtidos e a complexidade matemática das soluções [3]. O enfoque ainda pode apresentar certos problemas de convergência, onde algumas análises apresentam valores de tensões ou deslocamentos que não se encontram sequer no domínio dos números reais [3].

Neste trabalho é proposto um processo automático para análise e definição de geometria de segmentos de cascas finas de revolução (cúpulas) submetidas ao peso próprio pela teoria de membrana, com variação de espessura e raios de curvatura, de modo a obter tensões meridionais e tangenciais constantes por um processo de simples implementação e com baixo custo computacional. O processo apresenta vantagem sobre métodos numéricos usuais de casca, como o Método dos Elementos Finitos, quando se deseja determinar a geometria da cúpula em função de apenas uma tensão solicitante constante, uma vez que o processo tem como dado de entrada a própria tensão inicial para obtenção da geometria, diferente dos métodos numéricos usuais, onde ocorre o inverso. Além disso, a solução analítica exata do problema é extremamente difícil, como é mostrado na metodologia, o que torna o processo apresentado bastante interessante para solução de tais estruturas. Uma cúpula com tensões meridionais e tangenciais constantes tende a fornecer um projeto com um bom aproveitamento do material em toda a cúpula e diminuir os momentos fletores e cortantes que podem ser significativos em outros tipos de geometria.

Segundo a teoria de membrana, as rigidezes à flexão e à torção na casca não devem ser consideradas, o que faz com que os momentos fletores e de torção resultem nulos. Nestas condições, anulam-se também as forças cortantes e a casca estará solicitada unicamente por forças normais e tangenciais. Para que esta teoria seja válida, deve-se atender às seguintes condições:

- A lei de variação das curvaturas da superfície média é contínua;
- A lei de variação da espessura da casca é contínua;
- A distribuição das cargas aplicadas na superfície é contínua;
- As forças aplicadas aos bordos livres atuam nos planos correspondentes tangentes à superfície média;
- As reações de apoio estão contidas em planos tangentes à superfície média.

A solução geral do problema de revolução axissimétrica usando cilindros de paredes grossas foi originalmente resolvido em 1833 por Lamé, engenheiro francês, cuja solução por vezes também é chamada de problema de Lamé. A solução inicial era baseada em um cilindro submetido à pressão interna, onde se fazia uso das relações lineares da Lei de Hooke. A formulação apresentada neste trabalho considera apenas as equações de equilíbrio das cúpulas. Assim, nenhuma propriedade do material é utilizada nas relações e seu uso não está restrito aos materiais elásticos. No entanto, estas equações são válidas para situações onde a espessura da cúpula não ultrapassa 10% do raio interno, mantendo-se o erro pequeno [15]. Usando as equações de Lamé e as apresentadas neste trabalho, pode-se verificar, pela Figura 2, a variação nas tensões tangenciais  $\sigma_\theta$  das paredes das cascas de revolução submetidas à pressão interna  $p_i$ , quando se têm cascas de revolução com espessura igual a 10% do raio interno e quando a espessura do cilindro é igual a 400% do raio interno.

### 1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é apresentar um processo pela teoria de membrana para análise e definição de geometria de uma cúpula axissimétrica submetida ao peso próprio, com variação de espessura e raios de curvatura, de modo a obter tensões normais e tangenciais constantes.

## 2. Método

### 2.1 Equações de equilíbrio

Nos casos de cúpulas estudados neste trabalho, apresentam-se

**Figura 2 – Variação nas tensões tangenciais nas paredes de cascas de revolução submetidas a pressão interna em função de sua espessura (11)**

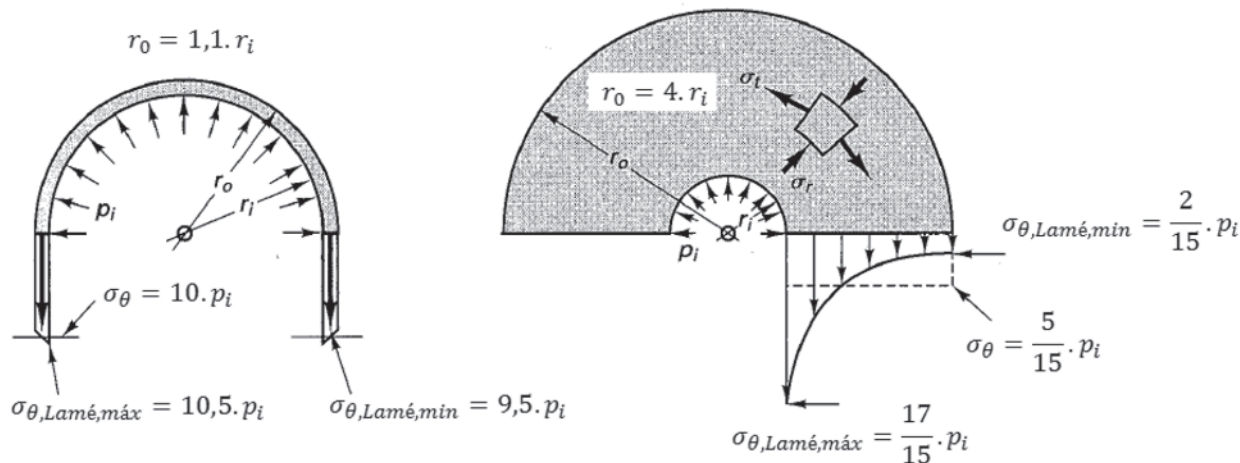
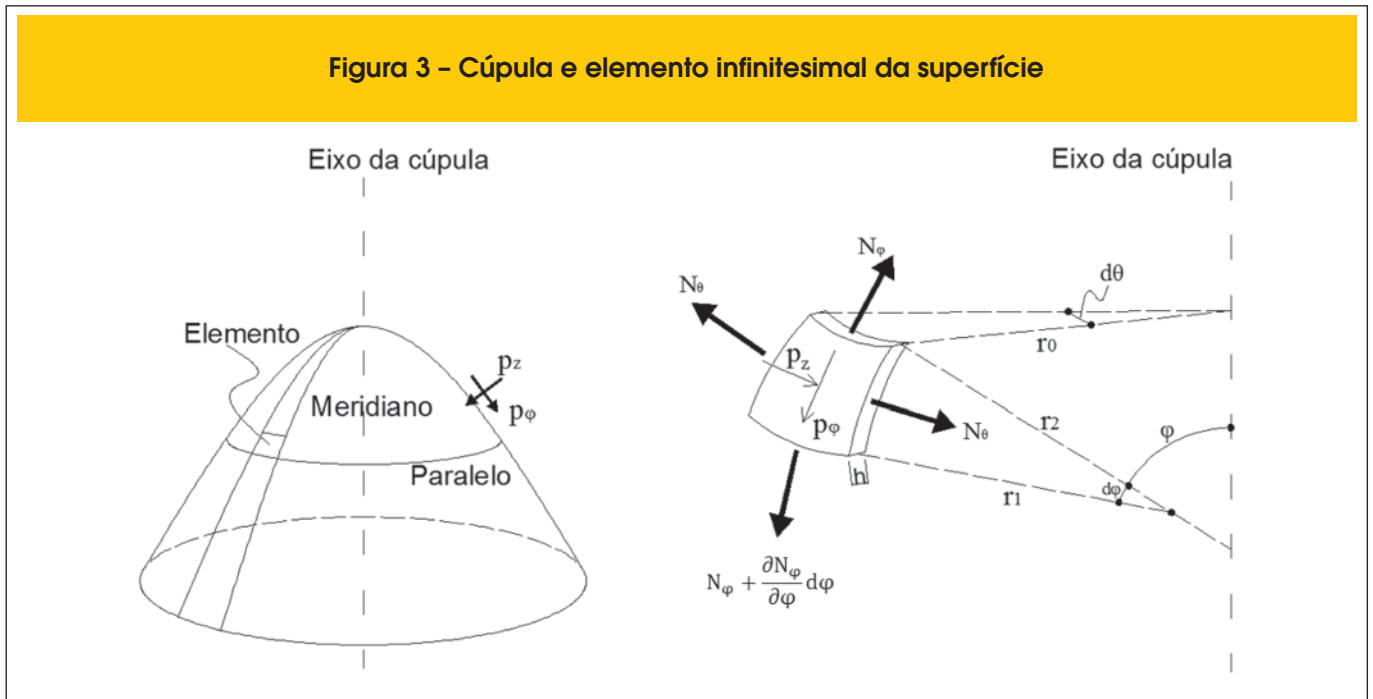


Figura 3 – Cúpula e elemento infinitesimal da superfície



as equações de equilíbrio da teoria de membrana para cascas finas submetidas a carregamentos com simetria de revolução. Para tais estruturas, devido à sua simetria, têm-se as seguintes características:

- $N_\varphi = N_\varphi(\varphi)$  ;
- $N_\theta = N_\theta(\theta)$  ;
- $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = 0$  ;
- $p_\varphi = p_\varphi(\varphi)$  ;
- $p_\theta = 0$  ;
- $p_z = p_z(\varphi)$  .

Onde:

Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano;

$N_\theta$  - Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo;

$N_{\varphi\theta}$  ,  $N_{\theta\varphi}$  - Forças de cisalhamento por unidade de comprimento;

$p_\varphi$  - Carregamento tangente à superfície da casca na direção do meridiano;

$p_\theta$  - Carregamento tangente à superfície da casca na direção do paralelo;

$p_z$  - Carregamento perpendicular à superfície da casca.

Pode-se definir completamente a geometria de uma cúpula pela sua espessura  $h$  e pelos raios de curvatura  $r_1$  e  $r_2$ , arbitrariamente variáveis (Figura 3). O raio  $r_2$  tem seu centro de curvatura localizado no eixo da casca e ele gera a superfície da casca na direção perpendicular à direção tangente ao meridiano. Na geometria das cascas, pode-se definir também o raio, que reside em um plano perpendicular ao eixo da casca e tem uma relação com  $r_2$  igual a  $r_0 = r_2 \cdot \text{sen}\varphi$ . Admite-se que a espessura  $h$  é muito pequena em relação a  $r_1$  e  $r_2$ , portanto não se faz distinção entre os raios interno, médio e externo da cúpula.

Em virtude da simetria das cúpulas, há uma condição de carregamento axissimétrico. Esta situação leva a estrutura a ter forças

tangenciais  $N_\theta$  constantes em cada lado do elemento infinitesimal da superfície da cúpula, o que não ocorre com a força meridional  $N_\varphi$ . As forças de cisalhamento  $N_{\varphi\theta}$  e  $N_{\theta\varphi}$  se anulam devido à simetria do problema.

Considere-se o elemento infinitesimal da superfície da cúpula da Figura 2. O elemento está submetido a forças externas de superfície na direção do meridiano ( $p_\varphi$ ) e na direção normal à superfície ( $p_z$  positiva entrando na cúpula).

Sendo a equação:

$$r_0 = r_2 \cdot \text{sen}\varphi \tag{1}$$

tem-se no lado superior do elemento:

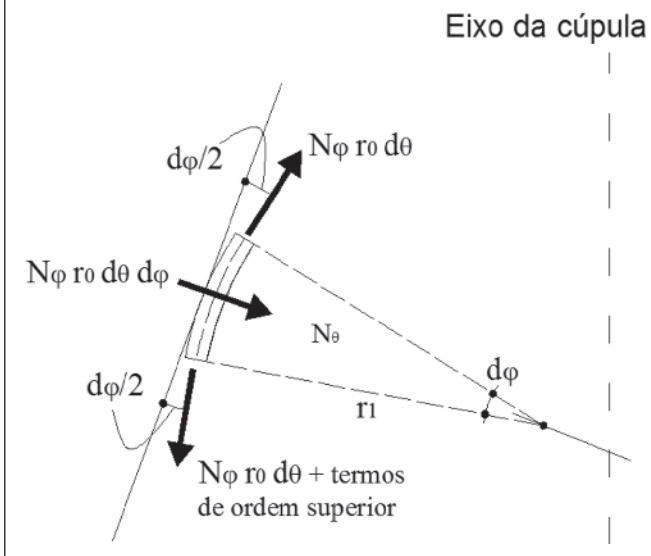
$$N_\varphi r_0 d\varphi = N_\varphi r_2 \cdot \text{sen}\varphi d\varphi \tag{2}$$

e no lado inferior:

$$\left(N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi\right) \left(r_0 + \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta \tag{3}$$



Figura 4 - Componente normal da força meridional  $N_\varphi$



Como estas forças não são colineares (Figura 4), surge uma componente na direção z igual a:

$$N_\varphi r_0 d\theta d\varphi \quad (4)$$

Na direção do paralelo, as forças no lado direito e esquerdo do elemento também não são colineares (Figura 5), portanto surge uma componente de força.

$$N_\theta r_1 d\varphi d\theta \quad (5)$$

Esta força está projetada no sentido horizontal no plano médio da cúpula. Projetando-se esta força na direção tangente ao meridiano, tem-se:

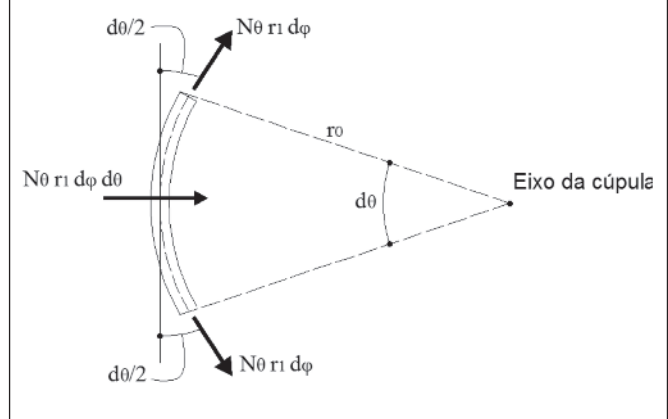
$$N_\theta r_1 d\varphi d\theta \cos \varphi \quad (6)$$

e na direção normal à superfície média:

$$N_\theta r_1 d\varphi d\theta \sin \varphi \quad (7)$$

Fazendo-se o somatório de forças na direção tangente ao meridia-

Figura 5 - Componente normal da força tangencial  $N_\theta$



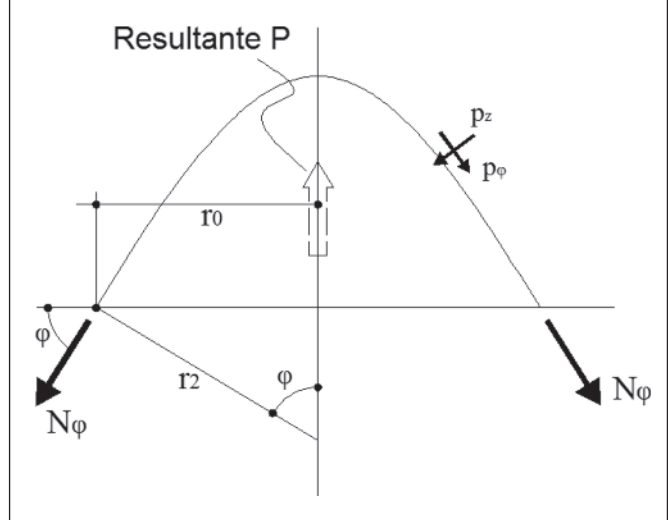
no nas equações (2), (3) e (6) igual a zero, desprezando termos de segunda ordem e dividindo a equação por  $d\varphi d\theta$ , tem-se a equação (8):

$$\frac{d(N_\varphi r_0)}{d\varphi} - N_\theta r_1 \cos \varphi + p_\varphi r_0 r_1 = 0 \quad (8)$$

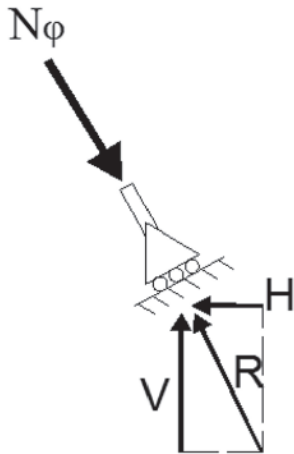
Fazendo-se o somatório de forças na direção normal à superfície nas equações (4) e (7) igual a zero e dividindo a equação por  $d\varphi d\theta$  e por  $r_1 r_2 \sin \varphi$ , tem-se:

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -p_z \quad (9)$$

Figura 6 - Diagrama de equilíbrio do segmento de uma casca



**Figura 7 - Diagrama de equilíbrio da força de compressão em um contorno**



Podem-se determinar as forças desconhecidas na membrana por meio da análise do corpo livre da casca toda, acima de um círculo paralelo. A partir da equação (9) escreve-se a equação (10):

$$N_{\theta} = -p_z r_2 - \frac{N_{\varphi}}{r_1} r_2 \quad (10)$$

e substituindo (10) em (8), obtém-se:

$$\frac{d(N_{\varphi} r_0)}{d\varphi} - \left( -p_z r_2 - \frac{N_{\varphi}}{r_1} r_2 \right) r_1 \cos \varphi = -p_{\varphi} r_0 r_1 \quad (11)$$

Substituindo (1) em (11) e multiplicando por , chega-se a:

$$\frac{d(N_{\varphi} r_0)}{d\varphi} \sin \varphi + N_{\varphi} r_0 \cos \varphi = -p_z r_1 r_2 \sin \varphi \cos \varphi - p_{\varphi} r_1 r_2 \sin^2 \varphi \quad (12)$$

onde

$$\frac{d(N_{\varphi} r_0)}{d\varphi} \sin \varphi + N_{\varphi} r_0 \cos \varphi = \frac{d}{d\varphi} [(N_{\varphi} r_0) \sin \varphi]$$

tem-se portanto:

$$\frac{d}{d\varphi} [(N_{\varphi} r_0) \sin \varphi] = -r_1 r_2 \sin \varphi (p_z \cos \varphi + p_{\varphi} \sin \varphi) \quad (13)$$

Integrando-se os dois lados da equação (13), chega-se a:

$$N_{\varphi} r_0 \sin \varphi - F(\varphi) - C = 0 \quad (14)$$

onde:

$$F(\varphi) = \int -r_1 r_2 \sin \varphi (p_z \cos \varphi + p_{\varphi} \sin \varphi) d\varphi$$

No caso das cúpulas sem abertura no topo, a constante C será igual a zero. Então, multiplicando-se (14) por 2π, tem-se:

$$2\pi r_0 N_{\varphi} \sin \varphi - 2\pi F(\varphi) = 0 \quad (15)$$

A resultante vertical R devida ao carregamento p\_z e p\_{\varphi} é mantida em equilíbrio pela componente vertical da força N\_{\varphi}. A resultante P (Figura 6) para cúpulas sem aberturas no topo é dada por:

$$P = 2\pi \int_0^{\varphi} r_1 r_2 \sin \varphi (p_z \cos \varphi + p_{\varphi} \sin \varphi) d\varphi \quad (16)$$

Substituindo a (16) em (15) e isolando N\_{\varphi}, tem-se:

$$N_{\varphi} = \frac{P}{2\pi r_0(\varphi) \sin \varphi} \quad (17)$$

Pode-se assim determinar as forças de membrana em cascas de revolução axissimétricas.

As condições de suporte das cúpulas deverão ser sempre tangenciais à força Figura 7.

Pela Figura 7 percebe-se que apenas uma componente vertical V não preenche a condição de equilíbrio. Pode-se equilibrar a componente horizontal H com a adição de um anel resistente por exemplo. No entanto, a adoção de tal artifício causa tensões locais de flexão significativas, o que não será abordado neste trabalho.

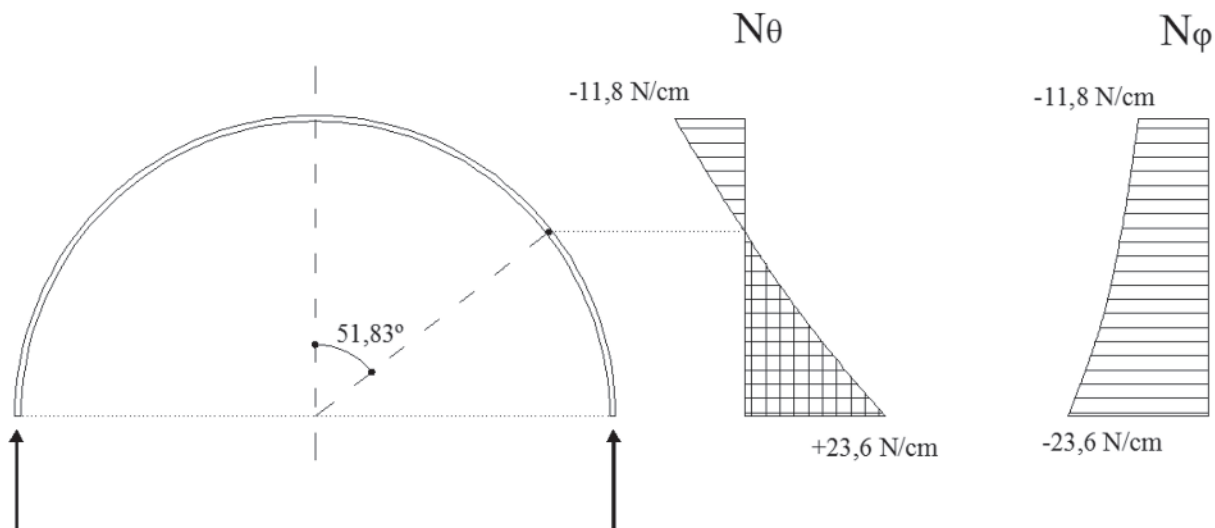
## 2.2 Cúpula esférica

Para a análise de uma cúpula esférica submetida ao peso próprio, considera-se a espessura h constante e o raio de curvatura r\_1 = r\_2. Considere-se, portanto, uma cúpula esférica de raio r\_1 = r\_2 = a e espessura h constante submetida ao peso próprio, com \varphi variando de 0° a 90°. A resultante P é dada por p (peso próprio, força por unidade de área) multiplicado por A (área da seção infinitesimal), onde A é dado por:

$$A = \int dA \Rightarrow dA = 2\pi r_0 ds$$

$$A = \int_0^{\varphi} 2\pi a \sin \varphi a d\varphi \Rightarrow A = 2\pi a^2 \int_0^{\varphi} \sin \varphi d\varphi$$

Figura 8 – Forças tangencial  $N_\theta$  e meridional  $N_\phi$  em função do ângulo  $\phi$  na cúpula esférica



Sendo a resultante  $P=p \cdot A$ , pode-se obter a expressão (18):

$$P = p \cdot 2\pi a^2 \int_0^\phi \sin \phi \, d\phi \Rightarrow P = -2\pi p a^2 (1 - \cos \phi) \quad (18)$$

substituindo as equações (18) e (1) em (17), tem-se a força ou a tensão meridional:

$$N_\phi = \frac{-2\pi p a^2 (1 - \cos \phi)}{2\pi a \sin^2 \phi}$$

$$\therefore N_\phi = -\frac{ap}{(1 + \cos \phi)} \quad \text{ou} \quad \sigma_\phi = -\frac{ap}{h(1 + \cos \phi)}$$

Figura 9 – Tensões tangenciais  $\sigma_\theta$  e tensões meridionais  $\sigma_\phi$ , respectivamente (N/cm<sup>2</sup>)

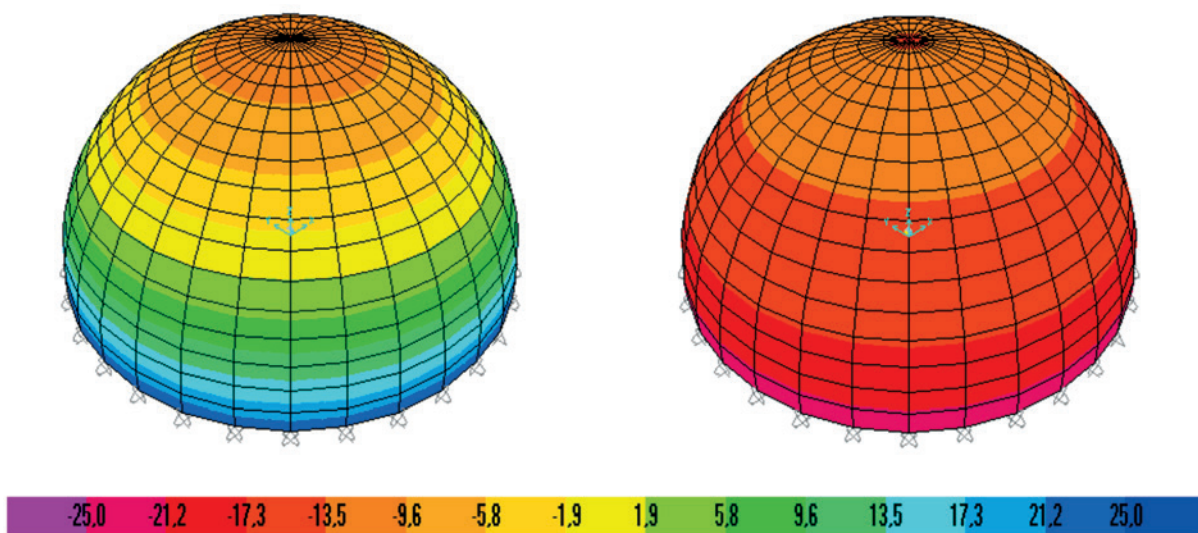
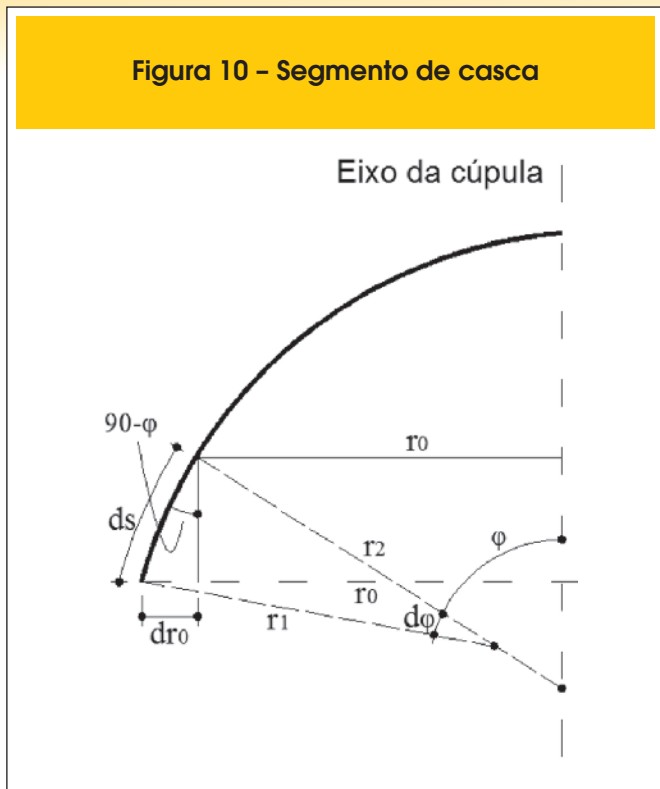


Figura 10 - Segmento de casca



Da (9) tem-se que:

$$N_{\theta} = -p_2 a - N_{\phi}$$

$$\therefore N_{\theta} = -p \cos \varphi a + \frac{ap}{(1 + \cos \varphi)}$$

Solucionando obtém-se a força ou tensão tangencial da cúpula esférica:

$$N_{\theta} = ap \left( \frac{1}{(1 + \cos \varphi)} - \cos \varphi \right) \text{ ou } \sigma_{\theta} = \frac{ap}{h} \left( \frac{1}{(1 + \cos \varphi)} - \cos \varphi \right)$$

Supondo uma espessura  $h=1 \text{ cm}$ ,  $a=10 \text{ m}$  e  $p=0,0236 \text{ N/cm}^2$ , traça-se os diagramas de forças meridional e tangencial em função de  $\varphi$ . Os resultados são apresentados na Figura 8.

Nota-se que de  $\varphi=0$  até  $\varphi=51.827^{\circ}$ , nenhuma força de tração se desenvolve na cúpula, apenas forças de compressão.

Solucionando o problema usando o método dos elementos finitos, obtém-se uma força máxima de compressão igual a  $11,983 \text{ N/cm}^2$  e de tração igual a  $26,243 \text{ N/cm}^2$ . O ângulo  $\varphi$  em que não há tensão tangencial se desenvolve na cúpula na direção do paralelo é de aproximadamente  $52^{\circ}$ . O diagrama de tensões é apresentado na Figura 9.

### 2.3 Cúpula com tensões constantes

Na análise da cúpula com tensões constantes, considera-se uma cúpula com espessura variável submetida ao peso próprio  $p$ .

Tais cúpulas devem não apenas variar sua espessura ao longo da altura, mas também seus raios de curvatura, de modo que as tensões tangenciais e meridionais sejam iguais e constantes.

O peso por unidade de área no plano médio destas cúpulas é dado por:

$$p = \gamma h$$

(19)

Portanto, as componentes  $p_z$  e  $p_{\varphi}$  são dadas por:

$$p_z = \gamma h \cos \varphi \quad p_{\varphi} = \gamma h \sin \varphi$$

(20)

No caso de cúpulas com tensões constantes, a geometria dos meridianos é determinada de tal forma que as tensões meridionais de compressão sejam constantes e iguais a  $\sigma$  em todas as direções em seu plano médio, sendo:

$$N_{\varphi} = N_{\theta} = -\sigma h$$

Substituindo em (9), tem-se:

$$\sigma h \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \gamma h \cos \varphi$$

(21)

Substituindo (1) e isolando  $r_1$ , obtém-se:

$$r_1 = \frac{r_0}{\frac{\gamma}{\sigma} r_0 \cos \varphi - \sin \varphi}$$

(22)

Da Figura 10 é possível deduzir a seguinte relação:

$$ds = r_1 d\varphi \quad r_1 d\varphi = \frac{dr_0}{\cos \varphi}$$

(23)

Substituindo a (23) em (22), obtém-se:

$$\frac{dr_0}{d\varphi} = \frac{r_0 \cos \varphi}{\frac{\gamma}{\sigma} r_0 \cos \varphi - \sin \varphi}$$

(24)

Integrando-se ambos os lados da equação (24)

$$r_0 = \int_0^{\varphi} \frac{r_0 \cos \varphi}{\frac{\gamma}{\sigma} r_0 \cos \varphi - \sin \varphi} d\varphi$$

obtém-se:

$$r_0 = -r_0 \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + \gamma^2 \cdot r_0^2)} \cdot \ln \left[ \gamma \cdot r_0 \cdot \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) - \gamma \cdot r_0 + 2 \cdot \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sigma \right] + r_0 \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + \gamma^2 \cdot r_0^2)} \cdot \ln \left[ 1 + \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] + 2 \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + \gamma^2 \cdot r_0^2)} \cdot \gamma \cdot r_0^2 \cdot \left( \frac{\varphi}{2} \right)$$

(25)

No topo da cúpula, onde  $\varphi = 0$ , o lado direito da equação (24) se torna indefinido. Para solucionar este problema se usa as equações (21) e (23). Como no topo o raio  $r_1 = r_2$ , conclui-se que:

$$r_1 = r_2 = \frac{2\sigma}{\gamma} \quad dr_0 = r_1 d\varphi = \frac{2\sigma}{\gamma} d\varphi$$



Portanto, no topo da cúpula tem-se:

$$\frac{dr_0}{d\varphi} = \frac{2\sigma}{\gamma} \quad (26)$$

Define-se então a forma do meridiano da cúpula com tensões constantes pelas equações (24) e (26).

A variação da espessura da cúpula pode ser determinada pelas equações (8) e (20), onde se obtém, dividindo a equação por  $\sigma$  :

$$-\frac{d}{d\varphi}(hr_0) + hr_1 \cos \varphi + \frac{\gamma}{\sigma} hr_1 r_0 \sin \varphi = 0 \quad (27)$$

Para  $\varphi=0$ , obtém-se pela equação (27):

$$\frac{d}{d\varphi}(hr_0)_{\varphi=0} = h \frac{dr_0}{d\varphi}$$

Substituindo (22) em (27), obtém-se:

$$\frac{d}{d\varphi}(hr_0) = hr_0 \frac{\cos \varphi + \frac{\gamma}{\sigma} r_0 \sin \varphi}{\frac{\gamma}{\sigma} r_0 \cos \varphi - \sin \varphi} \quad (28)$$

e integrando nos dois lados de 0 a  $\varphi$ , chega-se a:

$$h.r_0 = h.r_0 \cdot \ln \left[ 1 + \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right] - h.r_0 \cdot \ln \left[ \gamma.r_0 \cdot \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) - \gamma.r_0 + 2 \cdot \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sigma \right] \quad (29)$$

Figura 11 - Determinação gráfica da geometria da cúpula com tensões constantes (5)

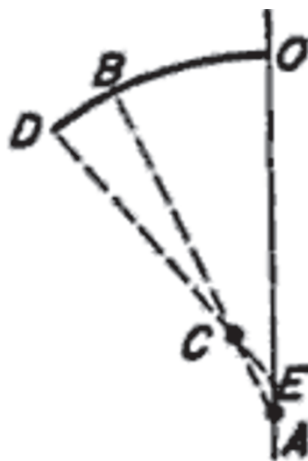
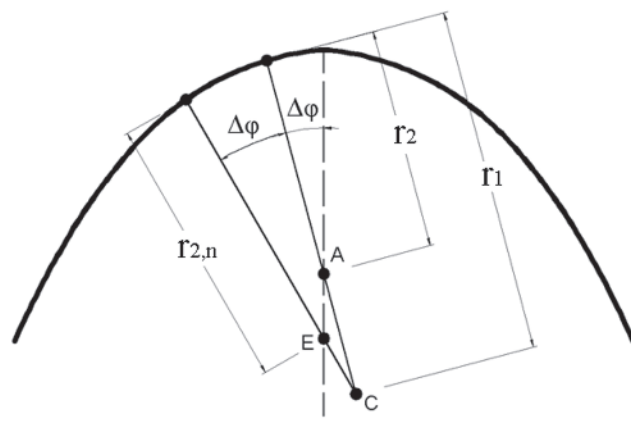


Figura 12 - Geometria do meridiano da cúpula



Pode-se então definir a espessura da cúpula com tensões constantes pelas equações (27) e (28).

As equações (25) e (29) foram obtidas por programa computacional MathCAD. No entanto, por se tratar de funções cujas integrais não são fáceis de obter uma solução analítica, é possível usar a integração numérica para sua determinação, de modo a calcular o valor aproximado das integrais definidas - uma vez que não se tem conhecimento da expressão analítica para a sua primitiva usando, por exemplo, a Regra dos Trapézios e a Regra de Simpson [10]. Pode-se obter os raios de curvatura  $r_1$  e  $r_2$  por processo iterativo mais simples, apresentado por [5].

Da equação (26) se determina o raio no topo da cúpula, onde:

$$r_{\text{topo}} = r_1 = r_2 = \frac{2\sigma}{\gamma}$$

Rearranjando (21), chega-se a:

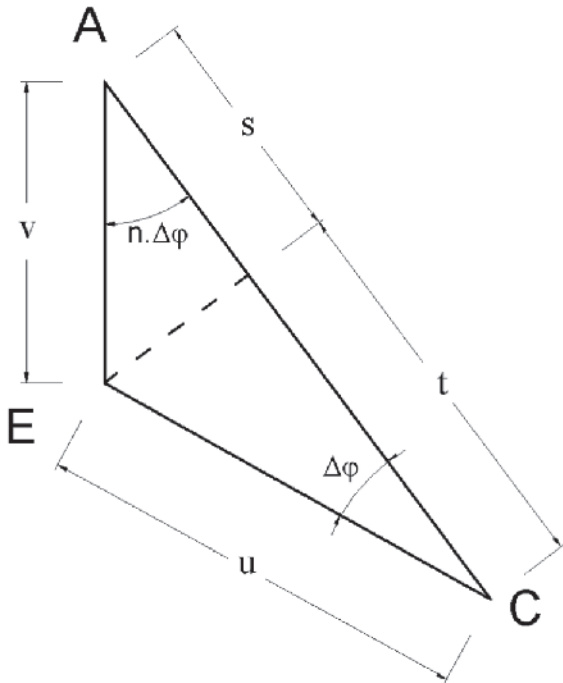
$$r_1 = \left( \frac{\gamma \cos \varphi}{\sigma} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \quad (30)$$

Conhecendo-se o raio de curvatura no topo, pode-se iniciar a determinação da geometria da cúpula com tensões constantes, conforme mostra a Figura 11.

Faz-se uma construção gráfica gradativa usando a equação (30) a partir do raio do topo  $r_{\text{topo}}$  - então seguindo os pontos A, B, C, etc. Inicialmente, traça-se o arco do ponto O ao B. No ponto B se calcula o novo raio  $r_2$  pela equação (30) e sendo  $r_2 = AB$ , é possível determinar um novo raio de curvatura  $r_1$  anterior. O prolongamento do novo  $r_1$ , que resulta maior que o raio de  $r_1$  no raio  $r_2$  tem um novo centro C, que tem uma nova curvatura, maior que a anterior. A elaboração da geometria deve ser feita com  $\Delta\varphi$  aproximadamente iguais. Quanto menor o  $\Delta\varphi$ , mais próximos serão os valores obtidos em relação à solução exata.

Percebe-se pela equação (30) que a forma do meridiano é determinada unicamente pela tensão que se deseja estabelecer como constante e pelo peso específico do material empregado.

**Figura 13 – Triângulo ACE para automatização do processo**



A Figura 12 apresenta o eixo da superfície de uma cúpula submetida ao peso próprio, com tensão constante  $\sigma=20 \text{ N/cm}^2$  e peso específico do material  $\gamma=0,0236 \text{ N/cm}^2$ , com  $\varphi$  até  $70^\circ$ .

A automatização proposta, baseada no processo iterativo apresentada por [5], é feita tomando-se o triângulo ACE da Figura 12, apresentado na Figura 13. Uma vez calculado o  $\Delta\varphi$  para a determinação dos raios  $r_2$ ,  $r_{\text{topo}}$ ,  $r_1$ ,  $r_{2,n}$ , e assim por diante. O raio  $r_{2,n}$  será dado por:

$$r_{2,n} = r_1 - u \tag{31}$$

onde

$$u = \sec(\Delta\varphi) \left\{ [s + t] \div \left[ \frac{\tan(\Delta\varphi)}{\tan(n\Delta\varphi)} + 1 \right] \right\}$$

O valor de  $n$

refere-se à iteração em que se está determinando o valor de  $r_2$ . A geometria do meridiano pode ser obtida sem haver dependência da espessura  $h$ , usando apenas a equação (30). No entanto, diferentemente de outras cascas finas de revolução como o cilindro ou reservatórios fechados, o uso apenas desta equação não é suficiente para estabelecer uma condição de tensões constantes em toda a cúpula. Para se determinar a variação da espessura  $h$  ao longo da altura da cúpula, deve-se tomar um elemento infinitesimal da superfície média da casca de lado  $ds$ , conforme a Figura 14.

Observa-se pela Figura 14 que a presença de uma componente

do carregamento na direção do meridiano necessita de uma força para equilibrá-lo, portanto deve-se ter um incremento  $dh$  no lado inferior do elemento infinitesimal.

A equação de equilíbrio aproximada das forças no meridiano da cúpula pode ser obtida da Figura 14 e é dada por:

$$\sigma h ds + \gamma h ds^2 \sin\varphi - \sigma (h + dh) ds = 0$$

Ou dividindo a equação por  $ds$ :

$$\sigma dh = \gamma h ds \sin\varphi$$

Pela Figura 14 é possível observar que  $ds \sin\varphi = dl$ , onde  $dl$  é a variação da altura vertical da cúpula, a contar do seu topo. Chega-se então a:

$$\frac{dh}{h} = \frac{\gamma}{\sigma} dl \tag{32}$$

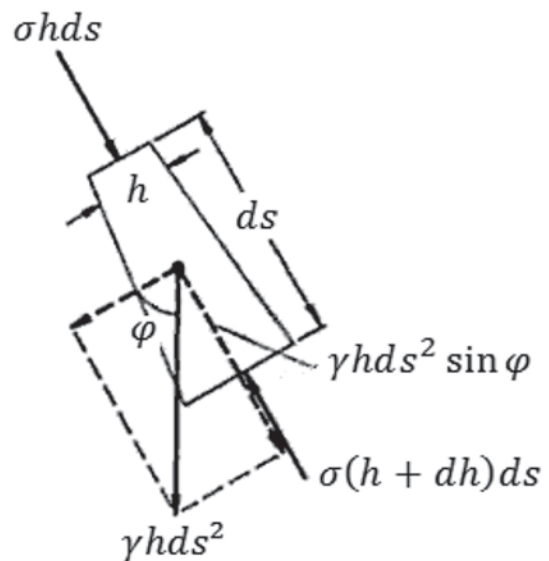
Integrando (32), obtém-se:

$$\ln h = \frac{\gamma}{\sigma} l + C \tag{33a}$$

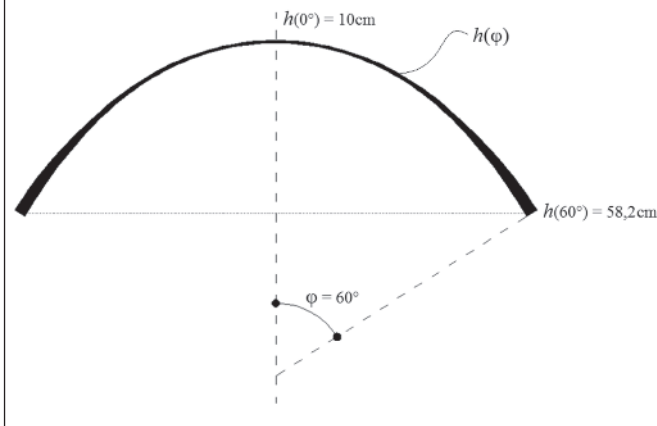
ou

$$h = C e^{\gamma l / \sigma} = h_0 e^{\gamma l / \sigma} \tag{33b}$$

**Figura 14 – Equilíbrio meridional de um elemento infinitesimal da cúpula (5)**



**Figura 15 - Variação de espessura  $h$  ( $h_{\text{topo}} < h_{\text{base}}$ ) em uma cúpula com tensões constantes**



Sendo  $h_0$  a espessura da cúpula no seu topo, onde  $l = 0$ . A Figura 15 apresenta uma cúpula submetida ao peso próprio com tensões constantes. Pelas equações (27) e (33), observa-se que a espessura no topo da cúpula não depende de nenhum fator externo, portanto pode ter qualquer valor  $h_0$  inicial, uma vez que depende apenas do peso próprio.

A automatização do cálculo de  $h$  pode ser feita usando novamente a Figura 13, em que o valor de  $l$  para cada  $j$  pode ser obtido por:

$$l_n = r_{\text{topo}} + \sum_{n=1}^i v_n \cdot r_{2,n} \cdot \cos(n \cdot \Delta\varphi) \quad (34)$$

onde  $n$  é o número da iteração em que se está obtendo o valor de  $l$  para o  $\Delta\varphi$  acumulado.

### 3. Resultados

#### 3.1 Cúpula com tensões constantes

Para explicitar as diferenças entre cúpulas esféricas com espessura constante e cúpulas com tensões constantes submetidas ao peso próprio, apresenta-se um exemplo para comparação.

A cúpula com tensões constantes  $\sigma = 20 \text{ N/cm}^2$  (compressão nas duas direções) tem espessura no topo  $h_0 = 10 \text{ cm}$ , peso específico  $\gamma = 0,0236 \text{ N/cm}^3$ , o que resulta em um raio de curvatura inicial no topo  $r_1 = r_2 = r_{\text{topo}} = 1.695 \text{ cm}$ . Fez-se o ângulo  $\varphi$  variando até  $60^\circ$ , com  $\Delta\varphi$  igual a  $0,1^\circ$ .

A cúpula esférica tem espessura constante  $h = 10 \text{ cm}$  e seu raio de curvatura é igual ao raio de curvatura do topo da cúpula com tensões constantes ( $r = 1.695 \text{ cm}$ ). O peso específico é de  $\gamma = 0,0236 \text{ N/cm}^3$ , onde também se faz a variação do ângulo  $\varphi$  até  $60^\circ$ .

A Figura 16 mostra o diagrama de tensões desenvolvidas na cúpula esférica. A Figura 17 e a Tabela 1 demonstram a variação da espessura e raios de curvatura  $r_1$  e  $r_2$  ao longo da altura da cúpula com tensões constantes.

O meridiano e a espessura das duas cúpulas (escala 2:1 em relação aos raios de curvatura) são apresentados na Figura 18.

Percebe-se que, no exemplo, a cúpula esférica apresenta tensões de compressão maiores ao longo de  $\varphi$ , além de tensões de tração na direção  $\theta$ . Como a relação  $\gamma/\sigma$  é muito pequena, mesmo quando se considera uma tensão solicitante conservadora, os raios de curvatura da cúpula com tensões constantes sempre aumentam conforme se aumenta  $\varphi$ , o que faz que com que estas cúpulas submetidas ao peso próprio sejam maiores em altura que as equivalentes em raio inicial esféricas quando se considera um mesmo  $\varphi$ , mas menores em altura quando se considera um mesmo  $r_0$ . Isso se repete para praticamente todos os materiais usados em construção civil. Por haverem tensões constantes só de compressão, permite a utilização de materiais não resistentes à tração e melhora as condições necessárias para suporte da cúpula. Além disso, o fato de haver apenas uma tensão solicitante nos dois eixos leva a um aumento do desem-

**Figura 16 - Tensões tangenciais  $\sigma_\theta$  e meridionais**

$\sigma_\varphi$  na cúpula esférica, com raio de curvatura e espessura constantes

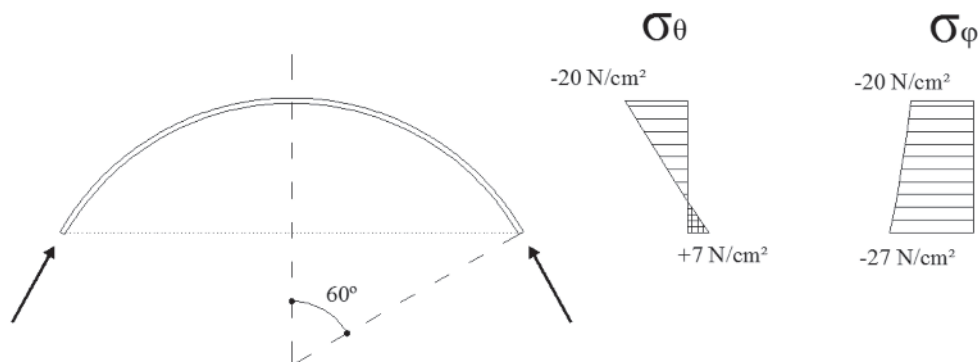
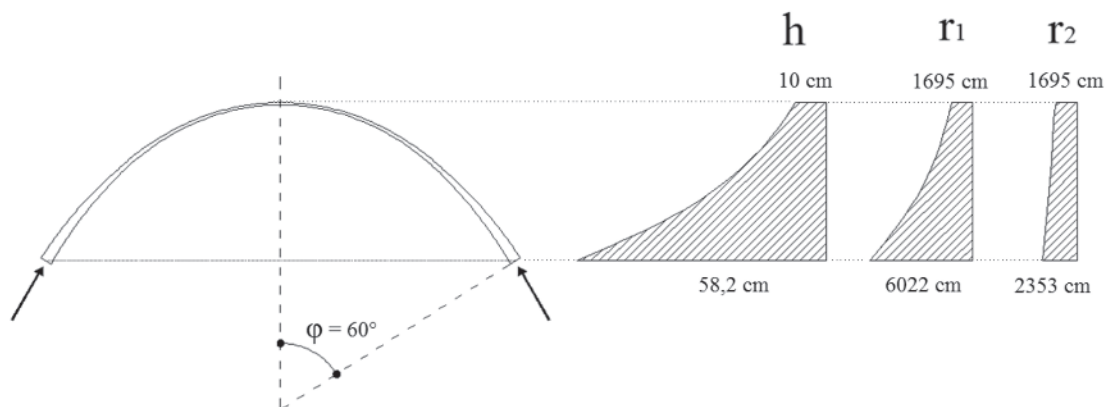


Figura 17 – Raios de curvatura e espessuras da cúpula com tensões constantes



penho estrutural da cúpula em função do melhor aproveitamento do material utilizado.

A espessura inicial da cúpula com tensões constantes  $h_0$  conforme se aumenta  $\varphi$  com o fator é multiplicada pelo exponencial  $e^{\gamma/\sigma}$ . Percebe-se que o inverso da relação  $\gamma/\sigma$  é igual à metade de  $r_{topo}$ . Dessa maneira,  $h_0$  aumenta exponencialmente em função de  $j$  quando  $l$  é maior que  $r_{topo}/2$ , conforme se observa na Tabela 1 com  $\varphi \geq 50^\circ$ .

### 3.2 Convergência do processo e limites da geometria

Os resultados obtidos pelo processo apresentado são dependentes dos dados de entrada tensão inicial  $\sigma$ , peso específico do material  $\gamma$  e do passo de integração  $\Delta\varphi$ . Quanto maior o valor de  $\Delta\varphi$ , menor será a qualidade dos valores obtidos. A Figura 18 apresenta a convergência do raio de curvatura do meridiano com  $\varphi = 60^\circ$ . Pode-se verificar que com  $r_1$  conforme se reduz  $\Delta\varphi$  para a cúpula do exemplo anterior  $\Delta\varphi$  próximo a  $0,1^\circ$ , os resultados do raio de curvatura começam a convergir. O mesmo se observa na Figura 20 para a espessura  $h$ , em que a convergência se dá também

com  $\Delta\varphi$  próximo a  $0,1^\circ$ . Em outras simulações este mesmo valor de  $\Delta\varphi$  pareceu adequado para a convergência dos resultados.

De modo a se fazerem válidas as formulações do modelo de membrana apresentado para cúpulas, devem ser satisfeitas as condições de:

$$h \leq 0,1 \cdot r_0 \tag{35}$$

conforme apresentado na Figura 2. A Figura 21 apresenta a convergência do ângulo máximo de  $\varphi$  em função de  $\Delta\varphi$ , de modo a atender a relação (35). Observa-se que a partir de  $\Delta\varphi=1^\circ$  já há convergência do valor máximo de  $\varphi$  para a validade do modelo de membrana no exemplo apresentado. O valor máximo de  $\varphi$  é dependente da tensão inicial e peso específico do material, portanto variável.

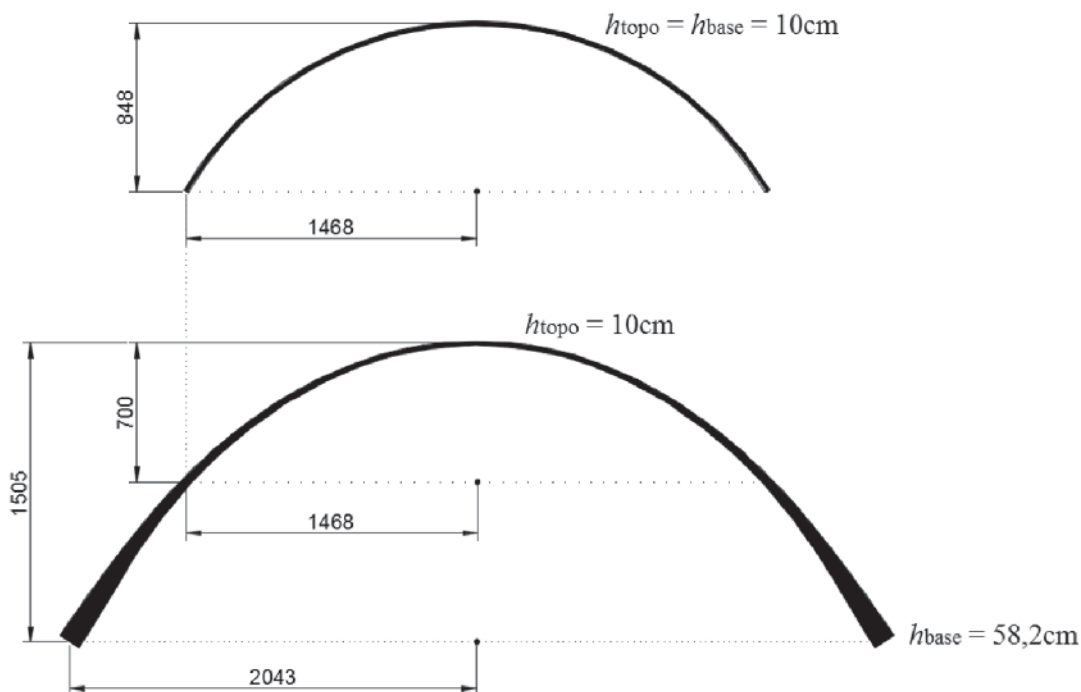
## 4. Conclusões

Este artigo apresentou um processo automático para definição da

Tabela 1 – Geometria da cúpula com tensões constantes em função de  $\varphi$  com  $\Delta\varphi = 0,1^\circ$

Ângulo $\varphi$	Altura $l$ (cm)	Espessura $h$ (cm)	Raio de curvatura $r_1$ (cm)	Raio de curvatura $r_2$ (cm)
0°	0	10,0	1695	1695
10°	21	10,3	1728	1704
20°	107	11,6	1866	1745
30°	252	13,5	2123	1815
40°	485	17,7	2601	1925
50°	853	27,4	3566	2092
60°	1492	58,2	6022	2359
69°	2744	254,9	14932	2810

Figura 18 - Cúpula esférica e cúpula com tensões constantes



geometria de cúpulas axissimétricas submetidas ao peso próprio pela teoria de membrana, com variação de espessura e raios de curvatura, com a finalidade de obter tensões meridionais e tangenciais constantes.

Os resultados mostram que cúpulas submetidas ao peso próprio geralmente têm alturas maiores que as equivalentes em raio inicial esféricas para um mesmo  $\varphi$ , mas apresentam alturas menores para um mesmo  $r_0$  devido à relação  $\gamma/\sigma$  ser muito pequena. Portanto, mesmo quando se adota uma tensão inicial conservadora,

os raios de curvatura de cúpula com tensões constantes sempre aumentam conforme se aumenta  $\varphi$ .

Com relação ao processo apresentado, percebe-se que a precisão dos resultados é função do passo  $\Delta\varphi$ . Para diferentes configurações de  $\gamma$  e  $\sigma$ , verificou-se que a convergência dos resultados começa com valores de  $\Delta\varphi$  abaixo de  $0,1^\circ$ . Quanto à validade do modelo de membrana, assegurou-se que a relação (35) fosse atendida de modo a manter o erro da variação da tensão normal constante ao longo da espessura da cúpula. A convergência no exemplo apresentado ficou em torno de  $\varphi = 69^\circ$ , no entanto esse

Figura 19 - Convergência de  $r_1$  em função de  $\Delta\varphi$  para  $\varphi = 60^\circ$

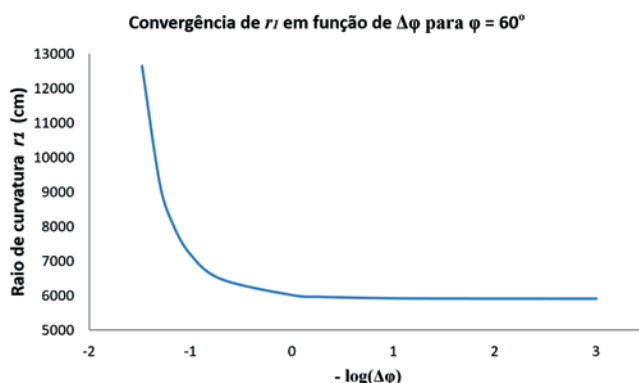
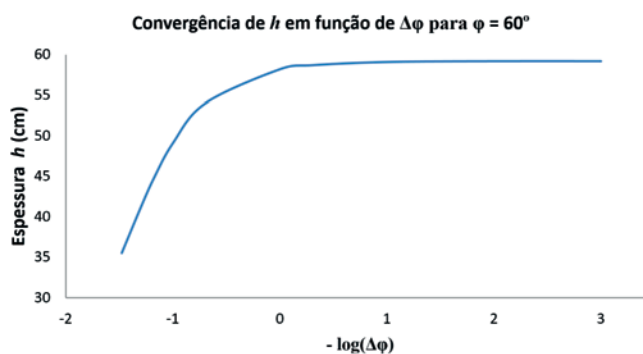
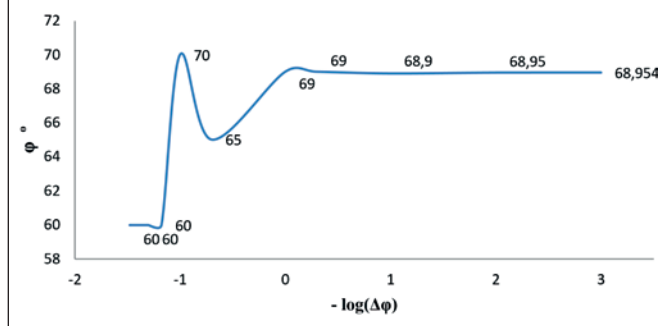


Figura 20 - Convergência de  $h$  em função de  $\Delta\varphi$  para  $\varphi = 60^\circ$





**Figura 21 – Convergência do valor limite de  $\varphi$  para validade do modelo de membrana**



valor varia conforme os valores iniciais usados para a cúpula com tensões constantes.

O processo automático proposto para definição da geometria de cúpulas axissimétricas com tensões constantes submetidas ao peso próprio é de simples aplicação e apresenta grande vantagem sobre métodos numéricos usuais de casca. Como também não são fáceis de se obterem soluções analíticas para o problema, o processo apresentado se torna bastante interessante para solução de tais estruturas. A ferramenta se mostra adequada, portanto, para o lançamento estrutural de cúpulas com tensões constantes para posterior dimensionamento.

## 5. Referências bibliográficas

- [1] ABDESSALEM, J. FAKHREDDINE, D. SAID, A. MOHAMED, H. Shape optimization for a hyperelastic axisymmetric structure. *Journal of Engineering, Design and Technology*, v.12, n.2, 2014; p.177-194.
- [2] BLETZINGER, K.U. WÜCHNER, R. DAOUD, F. CAMPRUBÍ, N. Computational methods for form finding and optimization of shell and membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.194, n.30, 2005; p.3438-3452.
- [3] CAMPRUBÍ, N. BISCHOFF, M. BLETZINGER, K.U. Shape optimization of shells and locking. *Computers and Structures*, n.82, 2004; p.2551-2561.
- [4] ESPATH, L.F.R. LINN, R.V. AWRUCH, A.M. Shape optimization of shell structures based on NURBS description using automatic differentiation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.88, n.7, 2011; p.613-636.
- [5] HARTOG, J. P. D. *Advanced Strength of Materials*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1952, 401 p.
- [6] ITALY'S best, The Pantheon. Disponível em <<http://www.italysbestrome.com/the-pantheon/>> Acesso em 27 de julho de 2015.
- [7] KIENDL, J. SCHMIDT, R. WÜCHNER, R., BLETZINGER, K.U. Isogeometric shape optimization of shells using semi-analytical sensitivity analysis and sensitivity weighting. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.274, 2014; p.148-167.
- [8] LINN, R. V. *Otimização de forma de cascas axissimétricas utilizando diferenciação automática*. Monografia de graduação. UFRG. Porto Alegre, 2010, 92 p.
- [9] MARK, R. HUTCHINSON, P. On the structure of the Roman Pantheon. *College Art Association. The Art Bulletin*. Vol. 68, No. 1, p. 24-34. Março de 1986.
- [10] POPOV, E. P. *Introdução à Mecânica dos Sólidos*. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, 1978, 534 p.
- [11] POPOV, E. P. *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice-Hall. New Jersey, 1999, 891 p.
- [12] Rasch, J. The Dome of the Roman Architecture. *Development, Design, Construction. Architectura* 15; p. 117–139. 1985.
- [13] TIMOSHENKO, S. P. GERE, J. M. *Mecânica dos sólidos*, v.1. LTC. Rio de Janeiro, 1983, 258 p.
- [14] TIMOSHENKO, S. P. GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, Nova York, 1951.
- [15] TIMOSHENKO, S. P. WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Kogakusha LTD., International Student Edition, 1959, 591 p.