

# The strut-and-tie models in reinforced concrete structures analysed by a numerical technique

## *Análise de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto armado via uma técnica numérica*

V. S. ALMEIDA <sup>a</sup>  
valerio.almeida@usp.br

H. L. SIMONETTI <sup>b</sup>  
heliosimonetti@ig.com.br

L. OLIVEIRA NETO <sup>c</sup>  
lutt@feb.unesp.br

### Abstract

The strut-and-tie models are appropriate to design and to detail certain types of structural elements in reinforced concrete and in regions of stress concentrations, called "D" regions. This is a good model representation of the structural behavior and mechanism. The numerical techniques presented herein are used to identify stress regions which represent the strut-and-tie elements and to quantify their respective efforts. Elastic linear plane problems are analyzed using strut-and-tie models by coupling the classical evolutionary structural optimization, ESO, and a new variant called SESO - Smoothing ESO, for finite element formulation. The SESO method is based on the procedure of gradual reduction of stiffness contribution of the inefficient elements at lower stress until it no longer has any influence. Optimal topologies of strut-and-tie models are presented in several instances with good settings comparing with other pioneer works allowing the design of reinforcement for structural elements.

**Keywords:** strut and tie models, topology optimization, reinforced concrete structures.

### Resumo

Os modelos de bielas e tirantes são procedimentos de análise apropriados para projetar elementos de concreto armado em casos de regiões onde há alterações geométricas ou concentrações de tensões, denominadas regiões "D". Trata-se de bons modelos de representação da estrutura para avaliar melhor o seu comportamento estrutural e seu mecanismo resistente. O presente artigo aplica a técnica da otimização topológica para identificar o fluxo de tensões nas estruturas, definindo a configuração dos membros de bielas e tirantes, e quantifica seus valores para dimensionamento. Utilizam-se o método ESO, e uma variante desse, o SESO (Smoothing ESO) com o método dos elementos finitos em elasticidade plana. A filosofia do SESO baseia-se na observação de que se o elemento não for necessário à estrutura, sua contribuição de rigidez vai diminuindo progressivamente. Isto é, sua remoção é atenuada nos valores da matriz constitutiva, como se este estivesse em processo de danificação. Para validar a presente formulação, apresentam-se alguns exemplos numéricos onde se comparam suas respostas com as advindas de trabalhos científicos pioneiros sobre o assunto.

**Palavras-chave:** modelo de bielas e tirantes, otimização topológica, concreto armado.

<sup>a</sup> Department of Structural and Geotechnical Engineering, University of São Paulo, São Paulo, Brazil, valerio.almeida@usp.br

<sup>b</sup> Department of Civil Engineering, Federal University of Ouro Preto, Minas Gerais, Brazil, heliosimonetti@ig.com.br

<sup>c</sup> Department of Civil Engineering, Faculdade de Engenharia, UNESP, Bauru, São Paulo, Brazil, lutt@feb.unesp.br

## 1. Introdução

### 1.1 Problema analisado

Na engenharia estrutural a maioria dos elementos lineares de concreto armado é dimensionada de maneira simplificada, usando-se a Hipótese de Bernoulli. Entretanto, a aplicação dessa hipótese para todo o elemento estrutural pode levar ao super ou sub-dimensionamento de certas partes da estrutura. Essa hipótese é válida para trechos da peça onde não há interferências de regiões mais rígidas (como trechos próximos aos pilares) ou onde a influência das deformações devido ao esforço cortante é desprezível. Ou ainda nas regiões onde não há aberturas próximas.

Assim, há elementos estruturais ou regiões onde as Hipóteses de Bernoulli de flexão não representam adequadamente o comportamento estrutural ou a distribuição de tensões. Como exemplos, citam-se os elementos estruturais como vigas-parede, consolos, sapatas, blocos de fundação e regiões especiais como ligação viga-pilar, aberturas em vigas ou regiões com descontinuidades geométricas.

Estas regiões, denominadas "Regiões D" de descontinuidade, se limitam a distâncias da ordem das dimensões dos elementos estruturais adjacentes (Princípio de Saint Venant); nelas as tensões de cisalhamento são significativas e a distribuição das deformações na seção transversal não é linear.

Para a análise mais realista do comportamento físico dessas regiões, é comum empregar o modelo de bielas e tirantes, que é uma generalização da analogia clássica do modelo de treliça para vigas. Essa analogia - apresentada por Ritter e Morsch no início do século XX - associa a viga em concreto armado a uma estrutura treliçada equivalente. Os elementos discretos (barras) representam os campos de tensões de tração (denominados tirantes) e de compressão (denominados bielas) que surgem no elemento estrutural. Esta analogia foi melhorada e é ainda utilizada pelas normas técnicas no dimensionamento de vigas em concreto armado devido à flexão e à força cortante, estabelecendo critérios diversos para a determinação dos limites de segurança nos seus procedimentos.

A partir da década de 80, pesquisadores da Universidade de Stuttgart apresentaram diversos trabalhos que buscam avaliar de forma mais adequada essas regiões. O trabalho pioneiro de Schlaich *et al.* [1] descreve o modelo de bielas e tirantes de maneira mais generalizada, inclusive abrangendo o modelo de treliça de flexão, que abarca estas regiões e elementos estruturais especiais.

A analogia utilizada no modelo de bielas e tirantes utiliza a mesma ideia da teoria clássica de definir barras representando o fluxo de tensões, procurando assim criar o menor caminho das cargas e o mais lógico. Por se tratar de um procedimento simples, é necessária a experiência e sensibilidade do projetista para escolher e distribuir os elementos de maneira a melhor representar este fluxo de tensões, sendo isso realizado de forma manual, sem automação para tal procedimento. Muitas vezes, para estruturas mais complexas, o engenheiro projetista pode não ter a experiência suficiente para definir o fluxo de tensões de forma adequada, por exemplo, para estruturas que contêm muitas aberturas previstas em projetos. Seguindo a tendência tecnológica de desenvolver ferramentas mais confiáveis e automáticas para ajudar o projetista na definição dessa configuração geométrica/estrutural ótima,

a análise numérica vem há anos fornecendo subsídios para esse fim, com novas teorias, formulações, cada vez com maior rapidez de processamento e fácil interpretação gráfica para posterior dimensionamento.

Nesse contexto, o emprego de técnicas de otimização topológica (OT) vem sendo empregado há alguns anos para subsidiar o projetista na identificação dessas regiões, destacando os trabalhos de Ali [2], Liang e Steven [3], Liang *et al.* [4], Liang *et al.* [5], Liang *et al.* [6], Liang [7], Reineck [8] e Brugge [9].

A OT é um tema recente no campo da otimização estrutural. Entretanto, os conceitos básicos que dão suporte teórico ao método foram estabelecidos há mais de um século, conforme descreve Rozvany *et al.* [10]. A sua grande vantagem em contraste com os métodos tradicionais de otimização, como a otimização de forma ou a otimização paramétrica, é que esses métodos não são capazes de alterar o leiaute da estrutura original; sendo assim, não auxiliam o projeto conceitual da estrutura para a concepção do fluxo adequado de tensões.

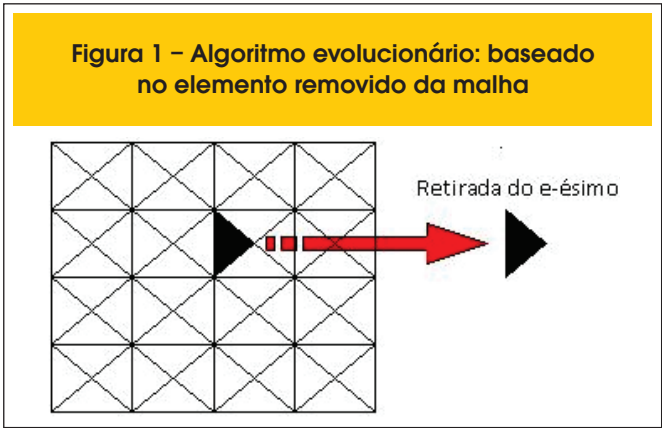
Na OT, duas metodologias vêm se destacando. A abordagem micro, que trata da existência de uma microestrutura porosa, define as relações constitutivas do material em função da sua geometria e da densidade volumétrica de uma célula unitária representativa do material; por sua vez, é equacionada por variáveis contínuas sucessivamente distribuídas no espaço do domínio fixo estendido, que consiste numa região onde pode existir a estrutura, Stump [11]. Um exemplo para este grupo é o método SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization), descrito em Bendsoe [12], Rozvany *et al.* [13] e [10]. Na abordagem macro, a topologia da estrutura é modificada mediante a inserção de furos no domínio. Como exemplos deste grupo de OT citam-se o ESO (Evolutionary Structural Optimization), que é baseado no cálculo da função objetiva quando um elemento é removido da malha de elementos finitos, e a TSA (Topological Sensitivity Analysis), baseado em uma função escalar, denominada Derivada Topológica, que fornece para cada ponto do domínio de definição do problema a sensibilidade da função custo quando um pequeno furo é criado, Labanowski *et al.* [14].

Com o objetivo de propor uma ferramenta eficaz para o desenvolvimento do modelo de bielas e tirantes, será usada neste trabalho a técnica de otimização topológica SESO - Smoothing ESO, desenvolvido em Simonetti *et al.* [15]. Trata-se de uma variante do método ESO, cuja filosofia baseia-se na observação de que se o elemento não for realmente necessário à estrutura, naturalmente sua contribuição de rigidez diminui progressivamente, até que ele não tenha mais influência. Isto é, sua remoção é feita de forma suave, atenuando os valores da matriz constitutiva do elemento, como se este estivesse em processo de danificação, sendo capaz de gerar os membros ideais de bielas e tirantes.

## 2. Otimização estrutural evolucionária (ESO)

Xie e Steven [16] desenvolveram uma maneira bem simples de impor modificações na topologia da estrutura, feita mediante heurística de remoção gradual e sistemática de elementos finitos da malha, correspondentes a regiões que não contribuem efetivamente na estrutura.

Define-se inicialmente uma malha de elementos finitos que circunscreva toda a estrutura, ou domínio estendido do projeto, de



forma a incluir as condições de contorno em forças e deslocamentos, cavidades e demais condições iniciais. Em um processo iterativo, avaliam-se os parâmetros de interesse de otimização; neste artigo em especial é feita a diminuição da massa mediante um critério de tensão máxima da estrutura. Assim, avaliam-se as tensões de cada elemento conforme o uso da inequação:

$$\sigma_e^{vm} < RR \cdot \sigma_{max}^{vm} \tag{1a}$$

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i = 1,2,3,\dots \tag{1b}$$

com  $\sigma_e^{vm}$  e  $\sigma_{max}^{vm}$  sendo, respectivamente, as tensão principais de Von Mises do elemento “e” e máxima da estrutura na iteração efetiva “i”; RR é um fator denominado de razão de rejeição. Em cada iteração, os elementos que satisfaçam a inequação (1a) são retirados da estrutura, figura 1. O fator RR é aplicado para controlar o processo da remoção da estrutura ( $0,0 \leq RR \leq 1,0$ ). O mesmo ciclo de remoção dos elementos usados pela desigualdade (1a) é repetido até que não haja mais elementos que satisfaçam esta inequação (1a). Quando esta situação ocorre, um estado de equilíbrio é alcançado. O processo evolucionário é definido adicionando a RR uma razão de evolução (RE). Assim, um novo ciclo de evolução inicia-se até que não existam mais elementos a serem eliminados com esta nova RR. A RR será atualizada conforme a equação (1b) até a obtenção de uma configuração otimizada, alcançada pelo controle de um parâmetro de desempenho, denominado de índice de performance (IP). Este procedimento também é conhecido como um método “hard-kill” e pode ser interpretado como segue:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_+ & \text{if } j \in \Gamma \\ 0 & \text{if } j \in \bar{\Gamma} \end{cases} \tag{2}$$

onde  $D_i(j)$  é a matriz constitutiva do elemento  $j \in \Omega$  na i-ésima iteração,  $D_0$  é a matriz constitutiva inicial do projeto,

a qual é definida pra cada elemento finito,  $\Omega = \Gamma_i + \bar{\Gamma}_i$  é o domínio da estrutura, tal que  $\Gamma_i = \{\Omega / (\sigma_e / \sigma_{VM}^{MAX}(\Omega)) \geq RR_i\}$  é o conjunto dos elementos que não serão removidos, e  $\bar{\Gamma}_i = \Omega - \Gamma_i = \{\Omega / (\sigma_e / \sigma_{VM}^{MAX}(\Omega)) < RR_i\}$  é o conjunto dos elementos que serão removidos da estrutura (criação do vazio), todos na i-ésima iteração.

Na sua heurística de remoção, quando o elemento é removido do domínio de projeto durante o processo evolucionário, os elementos que permanecem na estrutura representam uma solução básica: os termos do vetor gradiente têm valores nulos. Pois, conforme relatado por Tanskanen [17], pode-se minimizar a função objetiva escrita em termos da espessura como:  $f = \ln[W^{ext}(\{t\})] + \ln[V(\{t\})]$ , com  $W^{ext}$  sendo o trabalho das forças externas e V o volume total desta. A derivada parcial da função objetiva em relação à espessura  $t$  do elemento  $j$  fica expressa por:

$$\frac{\partial f^*}{\partial t_j} = \frac{1}{V^*} \cdot A_j \cdot \left[ 1 - \frac{W_j^{0*}}{W^{0*}} \right] \quad \text{onde } j=1,2,\dots,m \tag{3}$$

onde  $A_j$  é a área,  $W_j^{0*}$  é a energia média de deformação, todos do elemento  $j$ , no total de  $m$  elementos, e  $W^{0*}$  é a energia média de deformação da estrutura, onde “\*” representa o ponto de minimização ou uma solução básica viável. Em suma, a cada iteração tem-se uma nova solução básica dentro de uma região viável para o problema linearizado de OT. Em vista da eq. (3), pode-se afirmar que o elemento que possui energia média de deformação próxima da energia de deformação da estrutura tem sua derivada parcial igual a zero, indicando que um ponto estacionário fora alcançado.

### 3. Suavização da otimização estrutural evolucionária (SESO)

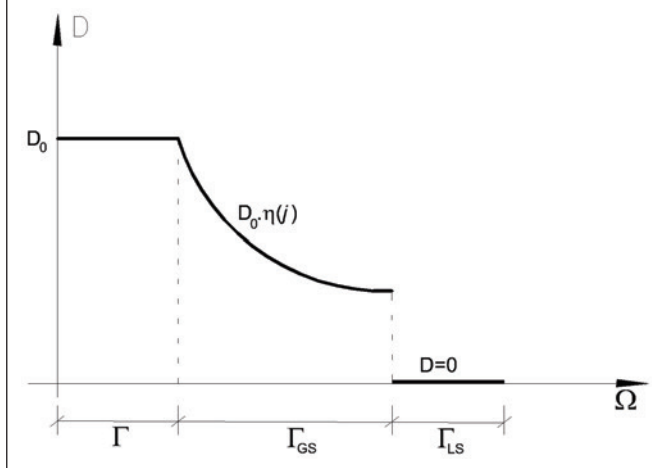
Aplica-se sobre o método ESO uma condição de relaxação, ou de suavização do ESO, apresentando assim um procedimento “soft-kill”, de modo que o material, ou seja, os elementos que deveriam ser removidos pelo critério ESO - seguindo a inequação (1a) - são organizados em n grupos e alocados em ordem crescente de tensões sendo ponderados segundo uma função  $0 \leq \eta(j) \leq 1$ .

Assim, p% destes n grupos são removidos; os grupos que contêm os elementos com menores tensões (domínio  $\Gamma_{LS}$ ), e os grupos (1-p%) são devolvidos à estrutura (domínio  $\Gamma_{GS}$ ). Este processo de remoção e devolução de elementos à estrutura pode ser orientado por uma função, linear ou hiperbólica, que pondera a razão  $\sigma_e^{VM} / \sigma_{VM}^{MAX}$  dentro do domínio  $\bar{\Gamma}$ , isto é, permite que elementos que tenham suas tensões próximas e abaixo da tensão máxima,  $\sigma_{VM}^{MAX}$ , sejam reintegrados à estrutura a cada iteração.

A minimização da função objetiva é atingida mediante o encontro de uma região estacionária, momento em que é alcançado quando todos os termos do vetor gradiente têm valores nulos, isto é, se a energia média de deformação do elemento  $j$  ( $W_j^{0*}$ ) tende para a energia média de deformação da estrutura ( $W^{0*}$ ); assim,

o termo  $\left( 1 - \frac{W_j^{0*}}{W^{0*}} \right)$  da equação três (3) tende para zero. Deste modo, entende-se que cada termo do vetor representa um elemento discretizado da estrutura. Tanskanem [17] destaca o fato

**Figura 2 – Ilustração da suavização do volume dos elementos removidos na iteração  $i$**



de que a retirada de um elemento pode afetar a convergência do procedimento de otimização, pois o critério de retirada no ESO é indicado pelo atendimento da inequação (1a), que muitas vezes pode ser radical. Podem existir elementos que estão na vizinhança da esquerda dessa condição que numericamente são excluídos, mas têm uma energia de deformação equivalente a da estrutura e deveriam compor o vetor gradiente que define ponto estacionário citado por Tanskanem [17]. A retirada de um elemento indevidamente pode afetar o caminho do ótimo. Uma forma de corrigir esse desvio seria a possibilidade de inserção do elemento na estrutura novamente, destacando que nesse sentido tem-se uma variante do ESO, o BESO - Bidirectional ESO, Querin [18], que possibilita a entrada e remoção de elementos no domínio de projeto. O SESO vem dessa filosofia e, de forma consistente matematicamente, pondera a matriz constitutiva fazendo a energia de deformação deste elemento aumentar e tendendo para a energia de deformação da estrutura; em seguida, o gradiente tende a zero e a direção do mínimo é restaurada.

Os elementos que estão próximos ao limite pela esquerda desta tensão máxima são mantidos na estrutura, definindo assim um procedimento de retirada “não radical” e de forma suave. O procedimento “soft-kill” usado no SESO pode ser interpretado assim:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma_i \\ D_0 \cdot \eta_j(\bar{\Gamma}) & \text{se } j \in \Gamma_{GS} \\ 0 & \text{se } j \in \Gamma_{LS} \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\bar{\Gamma} = \Gamma_{LS} + \Gamma_{GS}$  é o domínio dos elementos que atendem à inequação (1a),  $\Gamma_{LS_i}$  é o domínio dos elementos que devem ser excluídos efetivamente,  $\Gamma_{GS_i}$  o domínio dos elementos que são devolvidos à estrutura,  $0 \leq \eta(\bar{\Gamma}) \leq 1$  é uma função reguladora que pondera o valor da razão  $\sigma_e^{VM} / \sigma_{VM}^{MAX}$  dentro do domínio  $\bar{\Gamma}$ .

A proposta da suavização pode ser desempenhada por uma função linear do tipo  $\eta(\bar{\Gamma}) = \alpha + \beta$  ou uma função trigonométrica

do tipo  $\eta(\bar{\Gamma}) = \text{sen}(\alpha j)$ , porque as duas funções são contínuas e podem ser diferenciadas em todo o domínio  $\bar{\Gamma}$  e têm sua imagem variando de 0 a 1, Figura 2.

#### 4. Índice de performance para a formulação SESO

O índice de performance (IP) é um parâmetro adimensional que mede a eficiência da performance da estrutura. O problema consiste na minimização da função objetiva em termos do peso, sujeito a uma restrição de tensão admissível ( $\sigma^{project}$ ), que é definida como:

$$\begin{aligned} \text{minimize } W &= \sum_{e=1}^{b_9} w_e(t_e) \\ \text{sujeito a } \sigma_{j,max}^{vm} - \sigma^{project} &\leq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $NE$  é o número total de elementos finitos.

O IP foi proposto por Liang *et al.* [5] como:

$$IP = \left( \frac{\sigma_{0,max}^{vm}}{\sigma_{i,max}^{vm}} \right) \cdot \frac{W_0}{W_i} = \left( \frac{\sigma_{0,max}^{vm}}{\sigma_{i,max}^{vm}} \right) \cdot \frac{\rho_0 \cdot V_0}{\rho_i \cdot V_i} = \left( \frac{\sigma_{0,max}^{vm}}{\sigma_{i,max}^{vm}} \right) \cdot \frac{V_0}{V_i} \quad (6)$$

onde  $V_0$  and  $V_i$  são o volume inicial e o volume da  $i$ -ésima iteração,  $\sigma_{0,max}^{vm}$  and  $\sigma_{i,max}^{vm}$  são a tensão inicial e a tensão máxima de Mises na  $i$ -ésima iteração,  $\rho_0$  e  $\rho_i$  são o peso específico inicial e o peso específico na  $i$ -ésima iteração, como são iguais para um material incompressível. A suavização gerada devido à equação (4) em termos da matriz constitutiva pode ser escrita em termos de espessura, devido à relação de dependência linear entre elas. Neste contexto, o IP é representado pela equação (7), que leva em conta a expressão (4) em termos de espessura e cada função reguladora do procedimento SESO:

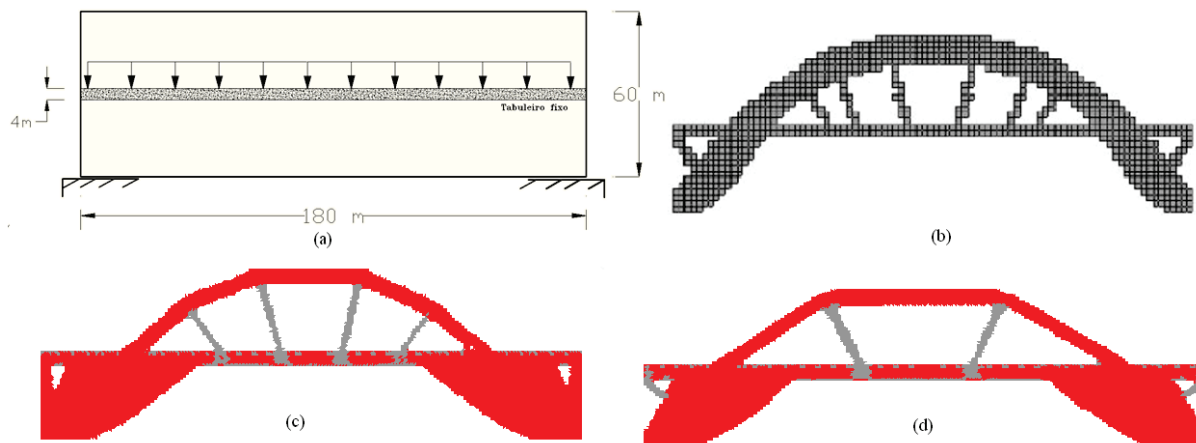
$$IP = \left( \frac{\sigma_{0,max}^{vm}}{\sigma_{i,max}^{vm}} \right) \cdot \frac{A_0 \cdot t_0}{\sum_{j=1}^{NE} A_j \cdot t_j} = \left( \frac{\sigma_{0,max}^{vm}}{\sigma_{i,max}^{vm}} \right) \cdot \frac{A_0 \cdot t_0}{\sum_{j=1}^{NE} A_j \cdot t_j \cdot \eta(j)} \quad (7)$$

onde  $t_0$  é a espessura inicial e  $t_j$  é a espessura do elemento na iteração  $j$ . O controle do ótimo é feito por este fator IP, fator de “monitoramento” da região ótima de projeto. O controle da maximização deste parâmetro refere-se ao controle de minimização do volume; assim, caso este índice mude de forma acentuada é uma forte indicação que passou por uma configuração ótima ou um ótimo estacionário foi alcançado; no entanto, não se pode garantir que este ótimo é um ótimo global, mas sim uma configuração ótima de projeto de engenharia.

#### 5. Exemplos numéricos

De posse da formulação descrita nos itens anteriores, desenvolveu-se um sistema computacional aplicando o SESO em conjunto com o método dos elementos finitos, usando uma formulação

Figura 3 – (a) Domínio de projeto da ponte (b), Topologia ótima proposta por [3], (c) e (d) Topologias ótimas obtidas com a presente formulação (SESO)



elástica-linear em estado plano de tensões, com o elemento finito advindo da formulação livre, baseado em Bergan e Felippa [19]. Assim, apresentam-se resultados numéricos para a avaliação e comparação das configurações obtidas pelo modelo clássico de bielas e tirantes. Nos desenhos, as regiões mais escuras representam os trechos de bielas e as mais claras de tirantes. Os parâmetros de otimização RR e RE, quando não citados, são iguais a 1% e a função reguladora definida como  $\eta(\Gamma) = 10^{-4}$ .

### 5.1 Exemplo 1

Neste exemplo discutido por [3], a técnica SESO é usada para encontrar a topologia ótima de uma estrutura de ponte com tabuleiro central e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído. O domínio de projeto e as condições de contorno estão ilustrados na Figura 3a. O tabuleiro da ponte é central e representa uma região que não pode ser retirada, de dimensões de 180 metros de comprimento por 4 metros de altura, restringindo-se os elementos contidos no tabuleiro e aplicando o carregamento uniformemente distribuído como forças concentradas de 500 kN por nó. Os cantos inferiores do domínio são restringidos no plano, figura 3a. O módulo de elasticidade do material é  $E = 200\text{GPa}$ , o coeficiente de Poisson de 0,30 e espessura de 300 mm. A Figura 3b mostra a topologia ótima obtida por [3], usando elementos finitos quadrangulares, indica um conhecido “tie-arc” comumente utilizados nos projetos de engenharia de pontes. As Figuras 3c e 3d mostram a topologia ótima obtida com a presente formulação usando uma malha refinada de 180x60 elementos, onde os trechos mais claros são os tracionados, tirantes. No projeto de estrutura de pontes o projetista deve considerar uma série de aspectos importantes, tais como: estruturais, desempenho, econômico, estético e a constructibilidade.

A topologia ótima encontrada na Figura 3c foi devido a condições de contorno aplicada no comprimento das arestas do não-domínio de projeto, que determina o tabuleiro da ponte, enquanto as condições de contorno impostas para conseguir a configuração ótima é mostrada na Figura 3d, que também inclui uma restrição na largura do não-domínio de projeto que representa o tabuleiro da ponte.

As topologias ótimas mostradas nas Figuras 3c e 3d foram obtidas com um volume final de 37,8% e 33,0%, onde as regiões escuras e claras, indicam, respectivamente, as bielas e os tirantes. As configurações ótimas mostradas nas Figuras 3c e 3d, respectivamente, foram determinadas com iguais parâmetros de otimização iguais exceto para a razão de rejeição e a razão evolucionária, definidas respectivamente como  $RR = 1\%$  e  $RE = 1,05\%$  (Figura 3c) e  $RR = 1,1\%$  e  $RE = 0,9\%$  (Figura 3d). Nota-se que o algoritmo proposto é sensível à variação destes parâmetros, das condições de contorno e da geometria do elemento (Simonetti *et al.* [20]).

### 5.2 Exemplo 2

A Figura 4 mostra um pilar de ponte projetado para suportar quatro cargas concentradas de 2,75 MN transferidas por quatro vigas de aço-concreto. O pilar de ponte é fixado na fundação. Uma espessura 1,5m é assumida para este pilar de ponte. O módulo de elasticidade é de  $E = 28600\text{MPa}$ , o coeficiente de Poisson de 0,15. A melhor topologia obtida é o modelo de bielas e tirantes propostos por Liang *et al.* [6], que usou um método denominado PBO

Figura 4 – Domínio de projeto da ponte, (6), medidas em mm

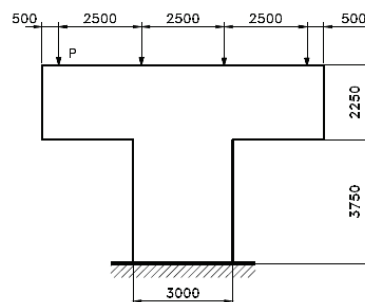
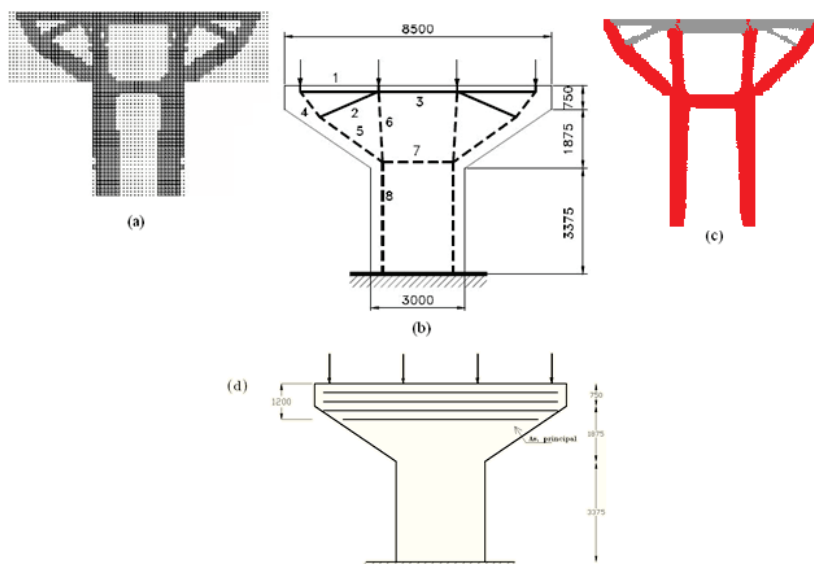


Figura 5 – (a) Topologia ótima e (b) modelo de bielas e tirantes, propostos por [6], mm; (c) Topologia ótima obtida; (d) Arranjo de armadura principal proposto, com o presente trabalho (mm)



(Performance-Based Optimization) com elementos de  $125 \text{ mm}^2$  e quatro nós. A Figura 5a mostra a topologia ótima obtida por [6] e a Figura 5c a topologia obtida com a presente formulação, usando uma malha refinada de  $170 \times 90$ , totalizando 18064 elementos finitos triangulares, com os trechos mais claros indicando os tirantes. A Figura 5b mostra o modelo de bielas e tirantes proposto por [6], decorrente de sua configuração ótima obtida. A Tabela 1 mostra os esforços obtidos por [6] e pela presente formulação para todos os membros mostrados nesta figura. Nota-se uma grande similaridade nas respostas obtidas, tanto para a disposição das barras originadas do modelo de bielas e tirantes, como também nas forças obtidas em cada membro do pilar de ponte, que podem ser dimensionadas e detalhadas seguindo procedimentos normativos. Na Figura 5d é proposto um arranjo de armaduras principais, estendida essa armadura horizontal até os extremos do balanços

em uma faixa de 120 cm. Nota-se que a soma dos esforços dos tirantes 2 e 1 é praticamente igual ao do tirante 3. As componentes verticais advindas dos tirantes inclinados são compensadas pelas barras verticais (estribos) que, assim como as armaduras auxiliares, não foram indicadas.

### 5.3 Exemplo 3

Este exemplo foi apresentado por Schlaich *et al.* [1] que é uma viga biapoiada com uma abertura, onde a geometria e a carga de cálculo ( $F_d$ ) são apresentadas na Figura 6, a qual é usada como domínio estendido para o processo de otimização. Os parâmetros dos materiais utilizados são módulo de Young  $E = 20820 \text{ MPa}$

Tabela 1 – Esforços (kN) para os elementos de bielas e tirantes do pilar de ponte

Elemento	Esforço [6]	Esforço (presente formulação)
1	2.114	2.192
2	1.162	1.195
3	3.363	3.454
4	-3.470	-3.589
5	-3.919	-4.083
6	-3.219	-3.482
7	-3.363	-3.569
8	-5.500	-5.964

Figura 6 – Domínio estendido do projeto (mm), (7)

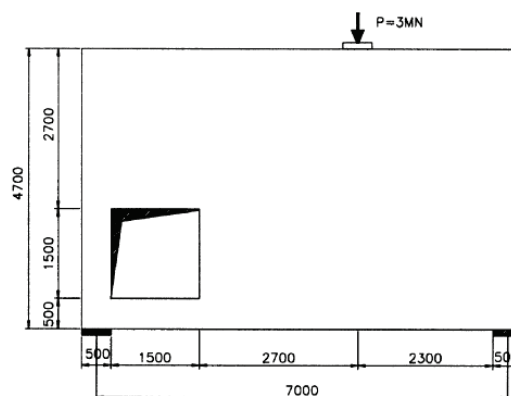
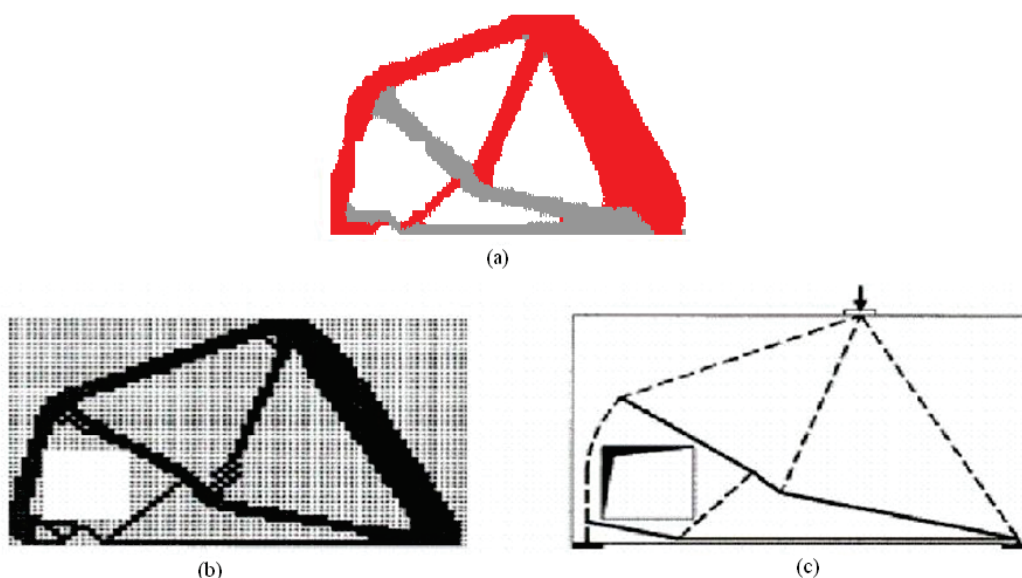


Figura 7 – Topologia ótima obtida, a) presente formulação e b) Liang (7), c) modelo de bielas e tirantes proposto por Schlaich et al. (1)



, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$  e espessura igual a 0,4m. As resistências de cálculo do aço e do concreto são tomadas com valores, respectivamente, de  $f_{yd} = 434 \text{ MPa}$  e  $f_{cd} = 25 \text{ MPa}$ . Essa estrutura possui uma região “D” em virtude da descontinuidade geométrica devido a presença de uma abertura imposta por projeto. Nesse caso, essa região deve ser avaliada usando modelo de bielas e tirantes.

Para a modelagem com a presente formulação, utilizou-se uma malha com 13200 elementos triangulares (150x47). Na Figura 7ac é mostrado o projeto ótimo obtido pela presente formulação SESO e comparado com os desenvolvidos nos trabalhos de Liang [7], Figura 7b, e Schlaich et al. [1], Figura 7c. A topologia ótima do proje-

to mostrada na Figura 7a foi obtida com um volume final de 30,3%, onde os trechos escuros e claros indicam, respectivamente, as bielas e os tirantes. A Figura 7b, de [7], obtém o projeto ótimo com um volume final de 33%. Esse autor usa o método de otimização do ESO. Na Figura 7c, apresenta-se o modelo de bielas e tirantes proposto por [1]. O gráfico da Figura 8 mostra o monitoramento feito pela presente formulação para determinar o ótimo topológico. O crescimento dos valores do IP (índice de performance) é plotado para cada iteração e onde o IP cai bruscamente indica que a iteração anterior representa assim a região de ótimo do projeto. Schlaich et al. [1] apresentam uma proposta de reforço para essa estrutura, obtida com o emprego de um modelo de bielas e tirantes aplicados nas regiões “D”. De forma que na Figura 12 é apresen-

Figura 8 – IP por número de iterações para o procedimento SESO (19)

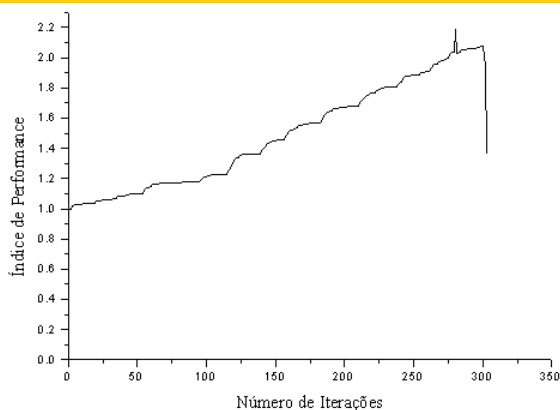


Figura 9 – Proposta do modelo de bielas e tirantes via SESO

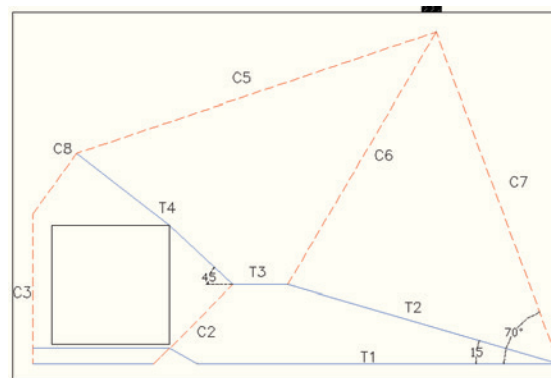


Tabela 2 – Dimensionamento das armaduras dos tirantes

Tirantes	Esforços (MN)	$A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	Esforços nos tirantes (MN)	Reforço proposto (cm <sup>2</sup> )	Números de barras
T <sub>1</sub>	1,50	34,60	1,50	As <sub>1</sub> = 34,60	2 x 5 Ø 20
T <sub>2</sub>	2,24	51,53	0,966.T <sub>2</sub>	As <sub>2</sub> = 49,75	2 x 7 Ø 20
T <sub>4</sub> auxiliar	–	–	0,01	As <sub>4</sub>	2 x 2 Ø 20
T <sub>4</sub>	2,20	50,70	0,707.T <sub>4</sub>	As <sub>3</sub> = 35,85	2 x 5 Ø 20
–	–	–	0,707.T <sub>4</sub>	As <sub>3</sub> = 35,85	2 x 5 Ø 20

tada a disposição das armaduras propostas por [1] para reforço da viga com abertura.

Com a indicação da topologia obtida pela presente formulação é possível definir uma proposta de modelo de bielas e tirantes de maneira direta. Conhecendo-se as tensões principais obtidas numericamente nos centros de gravidade dos elementos finitos, definem-se os membros onde o fluxo de tensões se destaca, identificando-se os elementos finitos por cores relacionadas às tensões. Observe-se a proposta esquematizada na Figura 9 onde as semi-retas tracejadas e contínuas indicam, respectivamente, os membros comprimidos (C), bielas, e os tracionados (T), tirantes. Determinam-se inicialmente os valores médios das tensões principais distribuídas na largura média da região do fluxo. Os esforços em cada membro são obtidos pelo produto das tensões médias correspondentes com sua respectiva área de seção transversal, esta obtida pelo produto da espessura do elemento estrutural com a largura média. Cabe observar que as tensões principais ocorrem preponderantemente na direção perpendicular da seção transversal do membro definido pela região do fluxo. E as seções transversais onde as tensões principais são máximas localizam-se nos extremos dos membros e em seções de estreitamento da largura. Deste modo se calculam automaticamente no presente trabalho as áreas das armaduras necessárias na região de tirantes e verifica-se a resistência do concreto em cada biela. Na Tabela 2 são

apresentados os valores das forças médias obtidas nos tirantes. Os tirantes T2 e T4 estão inclinados a 15 e 45 graus, respectivamente, da horizontal. O tirante T2 é indicado pela parcela de força decomposta para as barras longitudinais, obtendo-se assim a área necessária de armadura As<sub>2</sub>. O tirante T4 tem sua representação na malha ortogonal, As<sub>3</sub>, que cobre o trecho junto à borda da abertura e os encontros de bielas C3 e C8 na extremidade esquerda e na armadura complementar As<sub>4</sub>, a 45 graus, cobrindo os encontros de bielas C2, C5 e C8.

Conforme os procedimentos de cálculo admitidos para as armaduras representativas dos tirantes, tabela 2 e Figura 10, apresenta-se o detalhamento destas armaduras na Figura 11, onde nota-se a extensão das armaduras As<sub>3</sub>, procurando abranger áreas de encontros de bielas.

Na Tabela 3 apresenta-se a verificação das tensões atuantes no concreto dos membros de bielas onde pode-se observar a não observância do estado último de compressão do concreto nas bielas C3 e C8.

## 6. Conclusão

O objetivo do artigo é a apresentação de uma formulação numérica para a verificação de um sistema confiável e automatizado para a obtenção do fluxo de tensões e dimensionamento de estruturas em concreto armado sob o enfoque do modelo de bielas e tirantes. Destarte, empregou-se um procedimento de otimização topológi-

Figura 10 – Representação esquemática da armadura e do modelo de bielas e tirantes advindo do SESO

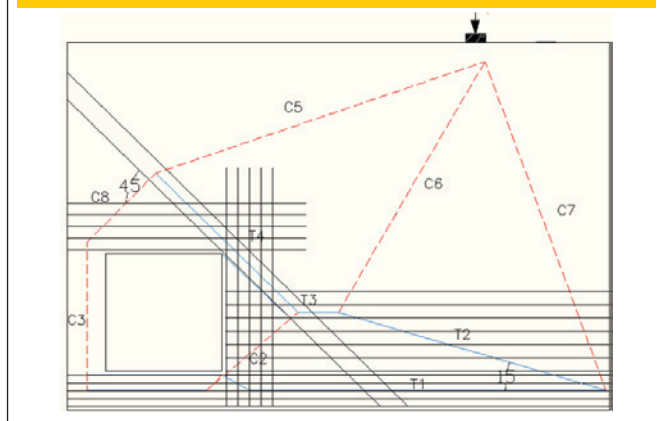


Figura 11 – Proposta de disposição de armaduras com a presente formulação

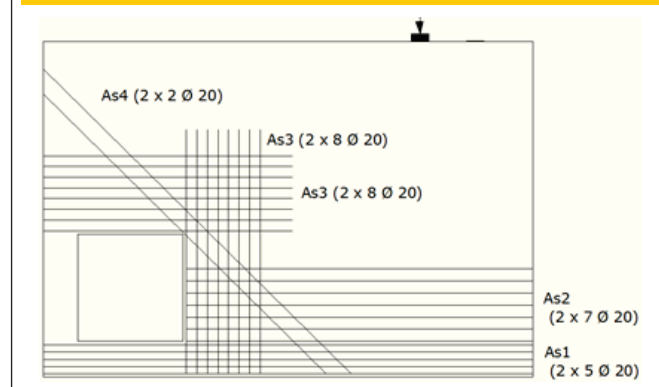
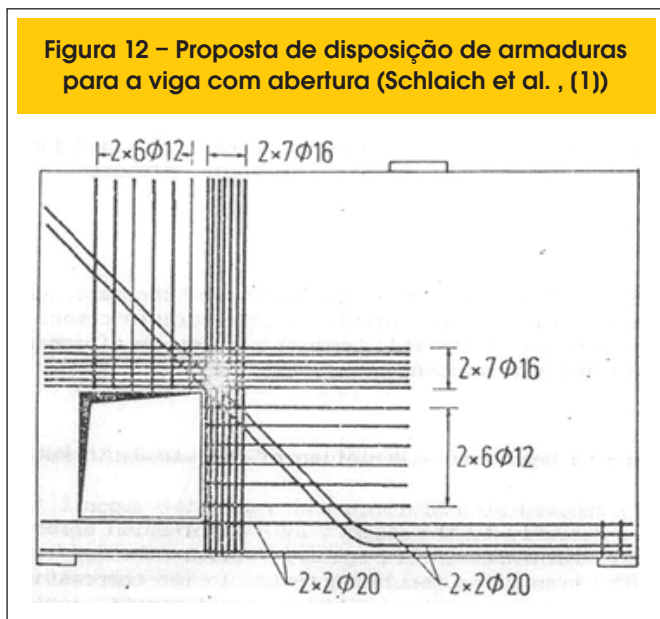




Figura 12 – Proposta de disposição de armaduras para a viga com abertura (Schlaich et al., (1))



ca, denominado Smoothing Evolutionary Structural Optimization (SESO) para este fim. Ele, em síntese, emprega um procedimento evolucionário de retirada “suave” de elementos em conjunto com o método dos elementos finitos na realização da análise elástica. Define-se, a priori, um domínio inicial estendido e, iterativamente, o método busca uma configuração topológica ótima em que naturalmente ficam definidos os membros indicados por bielas e tirantes. Dessa forma, os esforços nos membros podem ser avaliados para possibilitar o dimensionamento e os reforços estruturais necessários para cada trecho ou região. Em contrapartida ao método ESO, [7], a presente formulação apresenta uma configuração mais robusta, sem a presença de efeitos colaterais existentes no ESO como o problema do “tabuleiro de xadrez”, conforme já descritos em [15] e [20]. Os três exemplos apresentados demonstraram boa acurácia com os valores descritos por outros autores. Foram propostas também a quantificação e a disposição de armaduras para um exemplo clássico descrito na literatura sobre o assunto.

### 7. Agradecimentos

Os autores agradecem ao Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), a Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e

a Universidade Estadual Paulista (UNESP) pelo suporte financeiro desta pesquisa.

### 8. Referências

- [01] Schlaich, J; Schafer, K; Jennewe, M. Toward a consistent design of structural concrete. PCI-Journal, vol. 32, nr.3, p. 74 – 150, May/June, 1987.
- [02] ALI, M. Automatic generation of truss model for the optimal design of reinforced concrete structures. Dissertation. Cornell University, Ithaca, NY, USA, 1997.
- [03] Liang, Q.Q; Steven, G.P. A performance-based optimization method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, 13-14, 1471-1489, 2002.
- [04] LIANG, Q.Q.; XIE, Y.M., STEVEN, G.P. On equivalent between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization, Structural Optimization 18,67-13, Springer – Verlag 1999.
- [05] Liang, Q.Q.; Xie, Y.M., Steven, G.P. “Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure”, ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 2, pp. 322-330, 2000.
- [06] Liang, Q.Q; Uy, B.; Steven, G.P. Performance-Based Optimization for Strut-Tie Modeling of Structural Concrete. Journal of Structural Engineering, pp. 815p–823, 2002.
- [07] LIANG, Q.Q. Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications, Spon Press, London, 2005.
- [08] Reineck, Karl-Heinz. Shear and concrete tensile strength in the design concept of strut-and-tie models, Ibracon Structural Journal, vol 3, n.1,p. 1-18, 2007.
- [09] Brugge, M. Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization. Computers and Structures, 87:1483-1495, 2009.
- [10] Rozvany, G.I.N.; Bendoe, M.P.; Kirsch, U. Layout optimization of structures, Applied Mechanics Review, v. 48, p. 41-119, 1995.
- [11] STUMP, F. V. Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional sujeitas a Restrição de Tensão.

Tabela 3 – Verificação das tensões atuantes nas bielas

Tirantes	Esforços (MN)	$\sigma$ (MPa)	$0.8 \cdot f_{cd} = 20$ (MPa)
C <sub>3</sub>	-3,3	-28	Reforço
C <sub>5</sub>	-1,4	-20	Ok
C <sub>6</sub>	-1,7	-18,5	Ok
C <sub>7</sub>	-5,5	-18,5	Ok
C <sub>8</sub>	-2,6	-22	Reforço

- Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2006.
- [12] Bendsøe, M.P. Optimal Shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, v. 1, pp. 193-202, 1989.
- [13] Rozvany, G.I.N.; Zhou, M.; Birker, T. Generalized shape optimization without homogenization, *Structural Optimization*, v. 4, p. 250-252, 1992.
- [14] LABANOWSKI, A. FANCELLO, E. A. e NOVOTNY, A.A. SIMP, ESO e TSA: uma análise comparativa de métodos de otimização topológica para elasticidade 2d; CILAMCE 2004; Recife; 10/11/2004; 12/11/2004; Publicação: Proceedings of the XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. CILAMCE 2004.
- [15] SIMONETTI, H.L., ALMEIDA, V.S., NEVES, F.A Seleção de Topologias Ótimas para Estruturas do Contínuo com minimização de Volume sujeita a restrição de tensão via "Smoothing ESO" (SESO); CILAMCE; Argentina; 2010.
- [16] Xie, Y.M., Steven, G.P. A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Computers & Structures*, Vol. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.
- [17] Tanskanen P., The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects. *Comput Methods Appl Mech Eng* 191:5485–5498, 2002
- [18] QUERIN, O.M., Evolutionary Structural Optimization stress based formulation and implementation. PhD dissertation, University of Sydney, 1997.
- [19] Bergan, P.G. E Felippa, C.A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.*, v.50, p.25-69, 1985.
- [20] SIMONETTI, H.L., ALMEIDA, V.S., NEVES, F.A , The influence of geometry on the structural elements of topology via SESO. CILAMCE; Armação de Búzios, 2009.