

# Numerical analysis of waffle slabs in flexure considering the effects of concrete cracking

## *Análise numérica de flexão em lajes nervuradas com a consideração dos efeitos de fissuração no concreto*



B. R. B. RECALDE <sup>a</sup>  
ing.brunoblanc@gmail.com

F. P. S. L. GASTAL <sup>a</sup>  
francisco.gastal@gmail.com

V. R. D'A BESSA <sup>a</sup>  
vichy@ufrgs.br

P. F. SCHWETZ <sup>b</sup>  
paulete.schwetz@ufrgs.br

### Abstract

Waffle slab structures simulated by computational model are generally analyzed by simplified methods, for both the section geometry (converting into solid slabs or grids) and for the material mechanical properties (linear elastic regime). Results obtained by those studies show large differences when compared with test results, even at low loading levels. This is mainly due to lack of consideration of the eccentricity between the axis of the ribs and the cover, as well as the simplification of the mechanical behavior of concrete tensile strength. The so called more realistic numerical models do consider the effect of the eccentricity between the axis of the cover and ribs. One may also introduce physical nonlinearity of reinforced concrete in these models, obtaining results closer to tests.

The objective of this work is to establish a numerical model for the typical section of waffle slabs given the recommendations listed above. Such model considers the eccentricity between the axis of the ribs and the cover, the physical nonlinearity of concrete in compression and the concrete contribution between cracks (tension stiffening) through a smeared crack model.

The finite element program SAP2000 version 16 is used for the non-linear analysis. The area element discretization uses the Shell Layered element along the thickness of layers, allowing for the heterogeneous material behavior of the reinforced concrete. The numerical model was validated comparing results with tests in slabs and, eventually, used to evaluate some waffle slabs subjected to excessive loading.

**Keywords:** waffle slab, reinforced concrete, numerical model, non-linear analysis.

### Resumo

As estruturas de lajes nervuradas simuladas por modelo computacional geralmente são analisadas por metodologias simplificadas, tanto para a geometria da seção (convertendo em lajes maciças ou grelhas) como para as propriedades mecânicas dos materiais (regime elástico-linear). Os resultados obtidos por estes estudos teóricos apresentam grandes diferenças quando comparados com os valores dos ensaios experimentais, mesmo para baixos níveis de carregamento. Isto se deve principalmente pela não consideração da excentricidade entre os eixos da nervura e da capa como também a simplificação do comportamento mecânico do concreto à tração. Modelos numéricos chamados realísticos consideram o efeito da excentricidade entre os eixos da capa e da nervura da seção transversal. Pode-se, ainda, introduzir a não-linearidade física do concreto armado nestes modelos, obtendo resultados próximos do experimental.

O objetivo deste trabalho é estabelecer um modelo numérico para a seção típica de laje nervurada que leve em consideração a excentricidade entre os eixos da capa e da nervura, a não-linearidade física do concreto em compressão e a colaboração do concreto tracionado entre fissuras, através de um modelo de fissuração distribuída.

Utilizou-se o programa computacional de elementos finitos SAP2000 versão 16 para as análises não-lineares. O elemento de área denominado Shell Layered permite considerar a heterogeneidade do concreto armado por discretização ao longo da espessura em camadas.

O modelo numérico foi validado a partir de análises de lajes ensaiadas experimentalmente, comparando os resultados numéricos com os dos ensaios. Também, este modelo foi utilizado para avaliar o comportamento pós-fissuração de algumas lajes nervuradas submetidas a carregamentos excessivos.

**Palavras-chave:** laje nervurada; concreto armado; modelo numérico; análise não-linear.

<sup>a</sup> Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil;

<sup>b</sup> Departamento de Design e Expressão Gráfica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

## 1. Introdução

Lajes nervuradas de concreto armado são definidas como elementos estruturais formados por placas sobrepostas e unidas a um conjunto de vigas, denominadas nervuras, procurando otimizar o uso dos materiais concreto e aço.

Processos clássicos utilizados para lajes maciças, considerando apenas alterações geométricas que objetivam a obtenção de um comportamento equivalente, continuam sendo empregados na análise de lajes nervuradas. Existem, entretanto, significativas diferenças nas rigidezes, à flexão e à torção, entre estas duas estruturas que não podem ser menosprezadas. Devido a estas diferenças, lajes nervuradas têm sido estudadas sob um enfoque experimental, analítico e numérico ao longo dos últimos anos.

Estudos recentes apresentam programas experimentais suficientemente precisos, que fornecem dados tecnicamente confiáveis, servindo de suporte para a validação de modelos numéricos em desenvolvimento, como é o caso de Borges [1] e Schwetz [2]. Estes dois trabalhos foram utilizados na validação do modelo proposto.

Em relação aos modelos numéricos, muitos deles não contemplam o comportamento do concreto no estado fissurado, desenvolvendo somente análises em regime elástico-linear (Dias [3], Stramandinoli [4], Araújo [5] e Donin [6]). Outros consideram um regime não linear, mas vêem o concreto como um material homogêneo sem considerar o caráter discreto das armaduras (Rebêlo&Duarte Filho [7], Oliveira et al [8]). Nestes modelos, devido à metodologia aplicada, existem grandes diferenças nas rigidezes quando comparados com resultados experimentais. Para solucionar este tipo de limitação, alguns autores propõem alterar valores da inércia, à flexão ou à torção, até obter resultados próximos aos ensaios.

O presente trabalho tem como objetivo estabelecer um modelo numérico que possa analisar de maneira realística o comportamento mecânico de lajes nervuradas utilizadas em sistemas estruturais de diferentes condições geométricas e níveis de carregamentos estáticos. O modelo proposto leva em consideração a excentricidade entre os eixos da capa e da nervura, a não

linearidade física do concreto em compressão e a colaboração do concreto tracionado entre fissuras, além de considerar a armadura separadamente. O programa computacional empregado foi o SAP2000 versão 16. O elemento finito usado na análise foi o elemento de área denominado *Shell Layered*, pois ele permite considerar a heterogeneidade do concreto armado por discretização ao longo da espessura em camadas.

## 2. Métodos utilizados na análise de laje nervurada

Os métodos utilizados para análise de lajes nervuradas podem ser classificados em simplificados e realísticos. Os métodos simplificados consistem na redução da laje nervurada em uma laje maciça equivalente ou em uma grelha equivalente, enquanto os métodos realísticos consideram os efeitos de excentricidade existente entre a capa e a nervura.

Segundo Dias [3], na análise via métodos simplificados, a excentricidade entre a capa e a nervura é considerada de forma implícita: consideração de uma inércia de seção "T" para obtenção de uma espessura equivalente de laje maciça ou em grelha, onde a mesa e alma trabalham juntas.

Existem diversos modelos numéricos do tipo realístico, como os apresentados por Dias [3] e Schwetz [2], os quais mostraram melhor desempenho nas análises se comparados com os simplificados. Nestes dois casos, os autores concluíram que o modelo de áreas, ilustrado na Figura 1, composto de elementos finitos de área independentes para a capa e a nervura, é um modelo com bom desempenho para a análise numérica de lajes nervuradas. Ambos autores validaram este modelo numérico no regime elástico-linear a partir de ensaios experimentais. Mostraram resultados próximos aos ensaios no comportamento à flexão para cargas no regime linear, mas valores diferentes no regime não linear.

Com suporte nestes resultados, o modelo numérico proposto é baseado no modelo de áreas e as análises numéricas se realizam utilizando o programa SAP2000 versão 16 (*Software Integrates for Structural Analysis & Design*).

Figura 1 - Representação esquemática de modelo de áreas de DIAS (3)

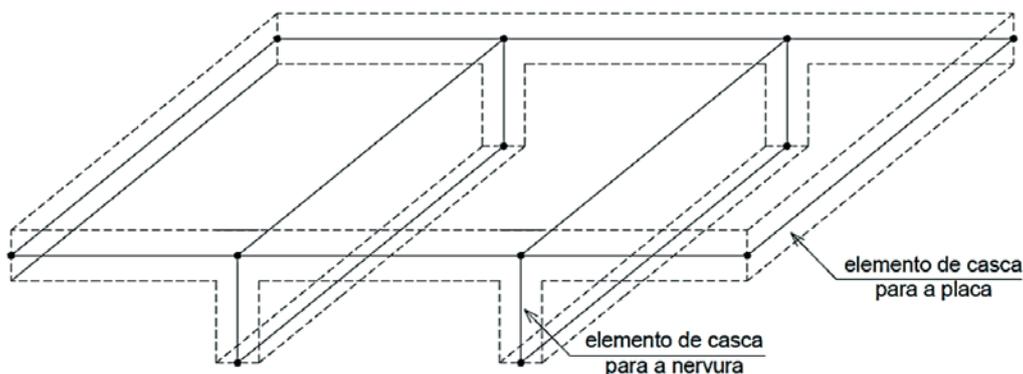
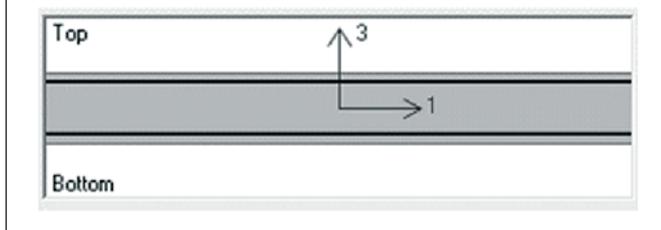


Figura 2 –Elemento shell-layered



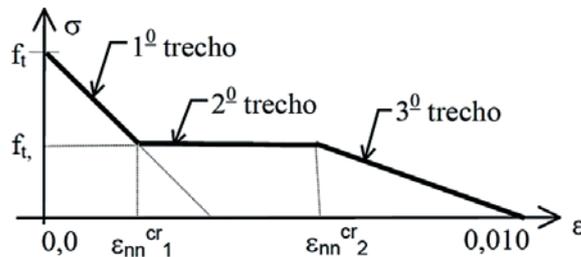
2.1 Construção do modelo numérico no programa SAP2000

Tanto a capa como as nervuras de concreto armado são representadas por elemento finito de área, denominado pelo software como *Shell-Layered*. Este elemento modela o concreto armado em camadas ao longo da espessura, o que permite discretizar os materiais concreto e aço. Os esforços para estes elementos, por uma opção do usuário, estão baseadas na teoria de Mindlin [9], que considera os efeitos da deformação cisalhante, indispensável para a consideração dos efeitos de corte nas nervuras. O elemento *Shell-Layered* empregado possui quatro nós, cinco graus de liberdade por nó (deslocamentos nas três direções e giros nas direções do plano do elemento) e três camadas: duas camadas de concreto e uma camada de armadura, situada no meio das camadas de concreto, ver Figura 2.

A geometria básica de uma seção transversal da laje nervurada é representada por elementos dispostos na horizontal para a capa e na vertical para as nervuras.

O procedimento de análise não linear, para a consideração realística que se pretende, é realizado por intermédio do método da rigidez inicial e pelo método de Newton-Raphson quando não houver convergência com o primeiro.

Figura 3 – Modelo de fissuração distribuída proposto por d'Avila (10)



As propriedades físicas não lineares dos materiais são definidas a partir de seus respectivos modelos constitutivos: curvas tensão-deformação do aço (elasto-plástico), do concreto em compressão (Drucker-Prager) e em tração (elástico linear antes de fissurar). Para a consideração dos efeitos da fissuração do concreto foi escolhido o modelo de fissuração distribuída proposto por d'Avila [10], como ilustrado no item seguinte.

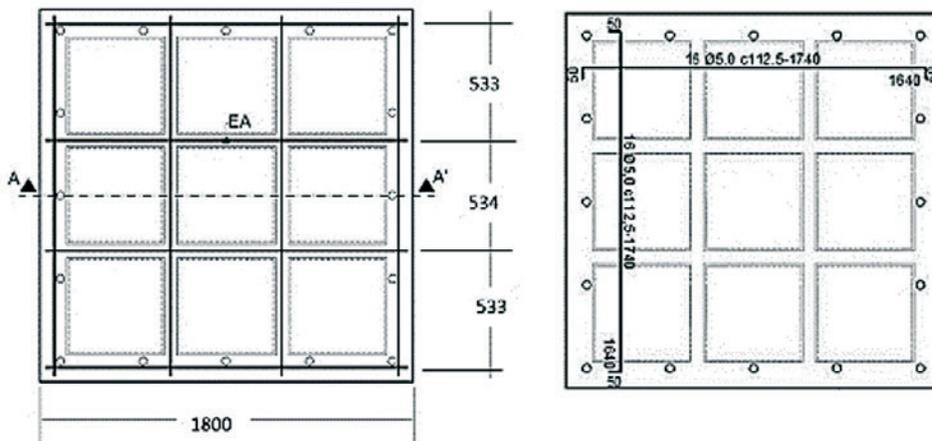
2.2 Modelo de fissuração distribuída proposto por d'Avila [10]

Para o comportamento do concreto à tração, foi empregado o modelo de fissuração distribuída proposto por d'Avila [10] baseado no Código Modelo CEB-FIP-90 [11]. Este modelo apresenta um diagrama tensão-deformação do concreto armado que leva em consideração a contribuição de concreto intacto entre fissuras, em inglês conhecido por *Tension-Stiffening*.

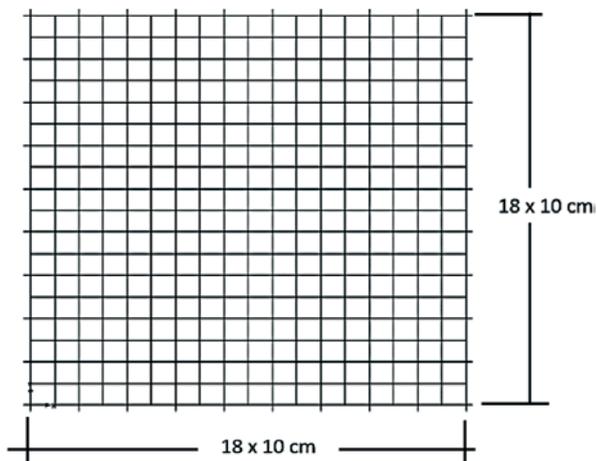
O diagrama de tensão-deformação do concreto armado pós-fissura é representado por amolecimento multilinear com três trechos para a fissuração do concreto, como se mostra na Figura 3.

A determinação dos parâmetros  $f_{t,i}$  e  $\epsilon_{nn,i}^{cr}$  para cada trecho do

Figura 4 – (a) Dimensões da laje REF em mm (b) Detalhamento das armaduras da placa



**Figura 5 –Discretização adotada para a capa**



**Figura 6 –Discretização adotada para cada uma das 8 nervuras**

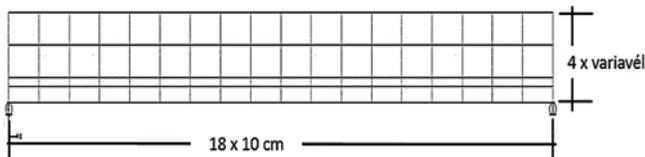


diagrama na Figura 3, é feita através da análise de tirantes de concreto armado com taxas de armaduras iguais às taxas de armaduras nas zonas tracionadas.

A deformação última na fissura para cada trecho é função da taxa de armadura na zona tracionada. Segundo o Código Modelo CEB-FIP-90 [11] a altura efetiva da zona tracionada é dada por:

$$h_{cf} = 2,5(h - d) < (h - x) / 3 \quad (1)$$

sendo “h” a altura total, “d” a altura útil e “x” a altura da zona comprimida do elemento estrutural.

Cada trecho do modelo representa uma etapa do comportamento no concreto armado fissurado. A seguir coloca-se a função de cada trecho definido por d’Avila [10]:

- 1° trecho: relativo ao período de formação de fissuras, ocorrendo uma redução gradual da tensão com o aumento da deformação;
- 2° trecho: relativo ao período de fissuração estabilizada, caracterizado pelo aumento de deformação com tensão constante;
- 3° trecho: relativo ao período de pós-escoamento da armadura, novamente com diminuição da tensão com o aumento da deformação.

A deformação última do primeiro trecho,  $\epsilon_{ult}^{cr(1)}$ , e a tensão  $f_{t,i}$  correspondem ao final do período de formação de fissuras. No segundo trecho, fissuração estabilizada, a tensão permanece constante enquanto a deformação cresce até a valor último de  $\epsilon_{ult}^{cr(2)}$ , correspondente ao escoamento da armadura. Por fim a deformação última do terceiro trecho, correspondente ao período pós-escoamento da armadura, cujo valor é de 10%.

As equações para a determinação dos parâmetros da curva tri-linear do modelo podem ser encontradas em d’Avila [10].

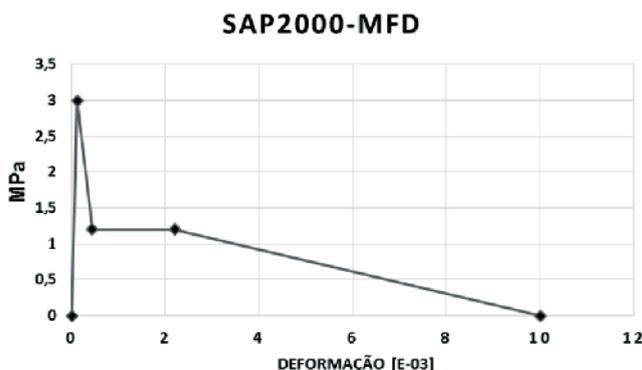
### 3. Análises numéricas de lajes ensaiadas experimentalmente

Para validar o modelo numérico proposto, resultados obtidos pela simulação numérica empregando o modelo proposto são comparados com resultados experimentais obtidos por outros autores.

#### 3.1 Análise numérica da laje testada experimentalmente por Borges [1]

Uma análise numérica da laje experimental de referência (REF) ensaiada por Borges [1] foi realizada a fim de comparar os resultados numéricos com os dos ensaios.

**Figura 7 – Diagrama tensão-deformação do MFD para a nervura – REF**



**Tabela 1 – Valores de tensão-deformação para o concreto fissurado**

| Valores do MFD para a nervura | Valores do MFD para a nervura | Tensão | Trecho |
|-------------------------------|-------------------------------|--------|--------|
| 1,15E-04                      | 1,15E-04                      | 3,00   | -      |
| 4,35E-04                      | 7,83E-04                      | 1,20   | 1      |
| 2,19E-03                      | 2,04E-03                      | 1,20   | 2      |
| 1,00E-02                      | 1,00E-02                      | 0      | 3      |

Figura 8 - Curvas Carga aplicada-Deslocamento no centro da laje - REF

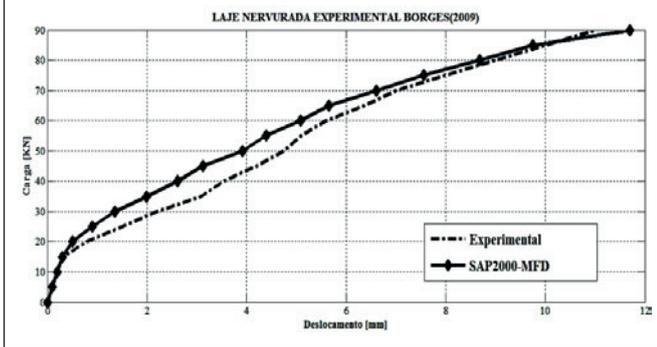
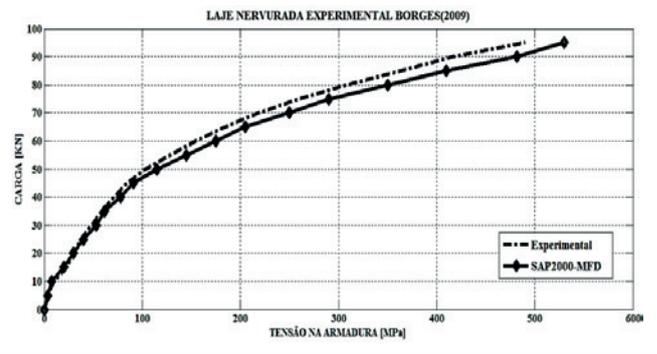


Figura 9 - Curvas Carga-Tensão na armadura da nervura no ponto EA - REF



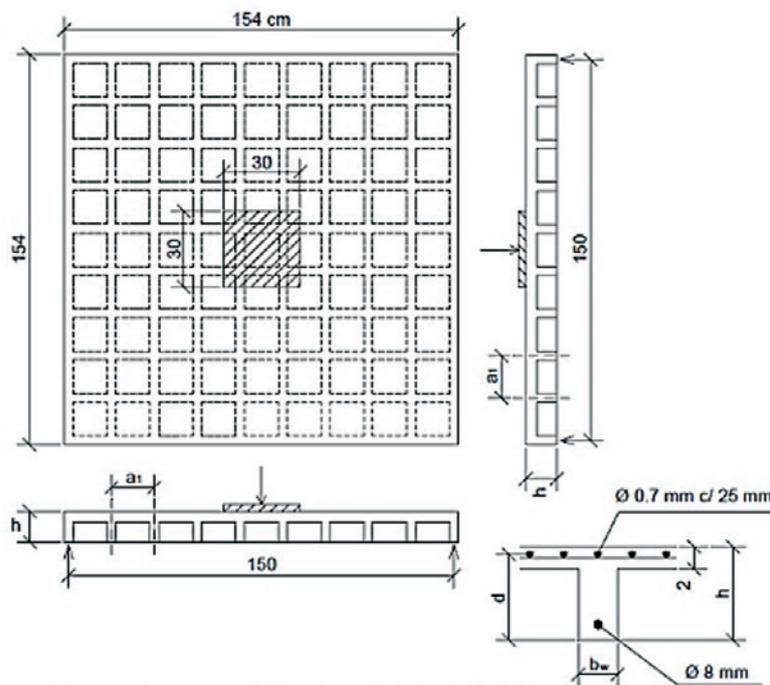
Esta é uma laje quadrada de 1800 mm de lado, com quatro nervuras em cada direção, distanciadas de 533 mm, como mostra a Figura 4 (a). A capa da laje tem espessura de 40 mm. As nervuras têm de largura média 70 mm e 150 mm de altura. Embora esta laje tenha dimensões menores que as utilizadas em projetos usuais de engenharia, a relação entre as alturas da capa e da laje, igual a 0,27, está dentro da faixa comercial de 0,19 a 0,38. Também a relação entre a distância entre os eixos e a largura das nervuras, igual a 7,61 neste caso, fica dentro da faixa de uso comercial que é de 5,29 a 8,02. As armaduras da laje são: na capa existe uma malha de armadura para a flexão, de aço CA 60 de Ø5 mm, espaçados a cada 150 mm, em ambas direções como mostra a Figura 4 (b); para as nervuras, as armaduras são de aço CA 50 de Ø10 mm, com uma barra na parte inferior de cada nervura. O sistema de ensaio consistiu em uma laje apoiada em todos os bordos, através de quatro vigas metálicas fixadas em uma laje

de reação. A carga foi aplicada por um sistema hidráulico, de forma incremental e dividida em quatro partes iguais, aplicadas nos quatro pontos de interseção das nervuras. O esquema do ensaio realizado encontra-se em Borges [1].

Tabela 2 - Dimensões das lajes nervuradas de Abdul-Wahab & Khalil (12)

| Laje | Largura da nervura bw (mm) | Altura total da laje h (mm) |
|------|----------------------------|-----------------------------|
| S2   | 52                         | 95                          |
| S5   | 57                         | 125                         |
| S6   | 47                         | 65                          |

Figura 10 - Detalhamento das lajes nervuradas



Na simulação numérica foi usada uma malha de 324 (18x18) elementos finitos de dimensão 10x10 cm para a capa (Figura 5). Para as oito nervuras, foram empregadas oito malhas de 72 (18x4) elementos com 10 cm de largura e altura variável, ver Figura 6.

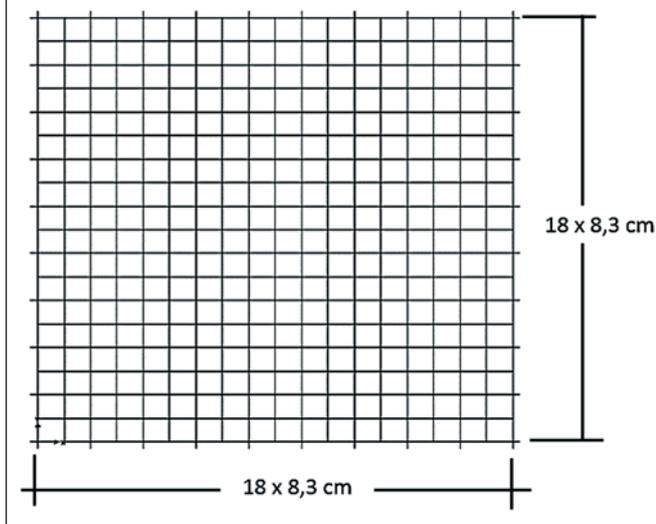
As propriedades mecânicas dos materiais, utilizadas no programa SAP2000, foram obtidas em Borges [1] e estão relacionadas a seguir.

Para o concreto comprimido: resistência à compressão  $f_c=33,8$  MPa; e, Módulo de elasticidade  $E_c=26100$  MPa.

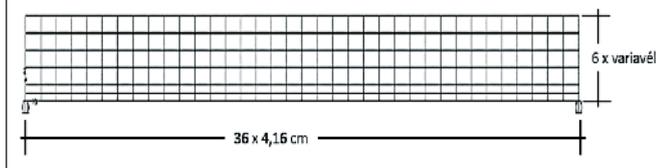
Para a armadura de 5 mm de diâmetro: Módulo de elasticidade  $E_s= 261000$  MPa; Tensão de escoamento  $f_{y,s}=548$  MPa; e Tensão última:  $f_u=685$  MPa.

Para a armadura de 10 mm de diâmetro: Módulo de elasticidade  $E_s= 256000$  MPa; Tensão de escoamento  $f_{y,s}=579,2$  MPa; e Tensão última:  $f_u=726,2$  MPa.

**Figura 11 - Discretização adotada para a capa, lajes S2, S5 e S6**



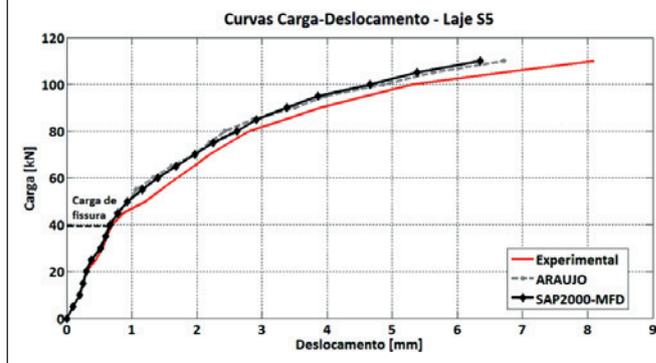
**Figura 12 - Discretização adotada para as nervuras, lajes S2, S5 e S6**



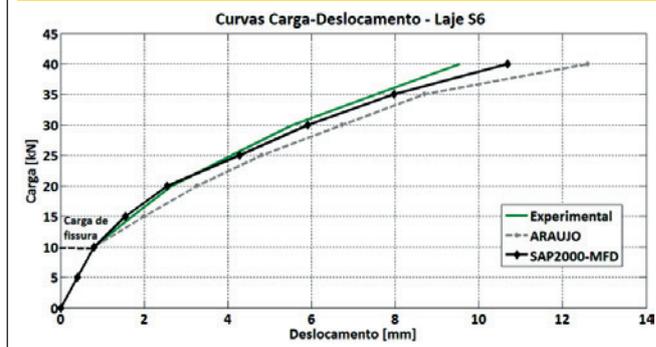
**Figura 13 - Curvas Carga aplicada-Deslocamento máximo vertical da laje S2**



**Figura 14 - Curvas carga aplicada-Deslocamento máximo vertical da laje S5**



**Figura 15 - Curvas carga aplicada-Deslocamento máximo vertical da laje S6**



**Figura 16 a - Geometria da laje do CE1, em cm**

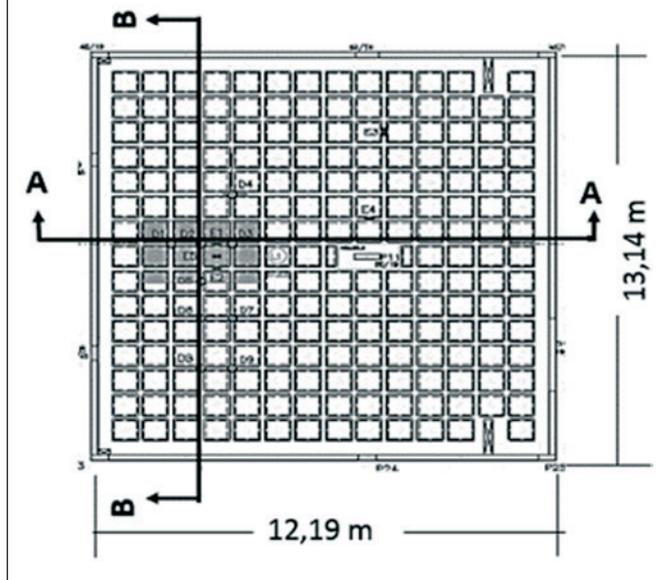


Tabela 3 – Parâmetros dos elementos de área *Shell Layered* utilizados

|         | Número de malhas | Número de elementos | Nome da camada | Espesura (mm) | Tipo  | Pontos de Gauss | Material | Ângulo |
|---------|------------------|---------------------|----------------|---------------|-------|-----------------|----------|--------|
| Capa    | 1                | 324                 | ConcretoC      | 20            | Shell | 3               | Concreto | 0      |
|         |                  |                     | Rebar1C        | 0,0145        | Shell | 2               | Aço      | 0      |
|         |                  |                     | Rebar2C        | 0,0145        | Shell | 2               | Aço      | 90     |
| Nervura | 20               | 216                 | ConcretoN1     | *             | Shell | 3               | Concreto | 0      |
|         |                  |                     | RebarN         | **            | Shell | 2               | Aço      | 0      |

\* Variável em função as dimensões da Tabela 2 - \*\* Valor em função a taxa da armadura

Os valores do diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado encontram-se na Figura 7. Salienta-se que neste diagrama também está representado o trecho relativo ao concreto não fissurado (trecho inicial com tensão variando entre zero e a resistência à tração média:  $f_{tm}=3,0$  MPa), além dos três trechos relativos ao concreto fissurado (Figura 3).

Os valores relativos ao início e final de cada trecho para o concreto fissurado, obtidos empregando o modelo proposto por d’Avila [10], estão mostrados na Tabela 1.

Na integração numérica, foram empregados 3x3 pontos de Gauss para a camada de concreto e 2x2 para as camadas de armadura. A comparação dos resultados numéricos com os experimentais é mostrada a seguir.

Na Figura 8 é apresentada a evolução do deslocamento no centro da laje com o aumento da carga aplicada. Pode-se afirmar que o modelo numérico conseguiu simular satisfatoriamente o comportamento da laje durante o ensaio, já que a maior diferença entre os deslocamentos numérico e experimental foi menor que 20%.

Durante o ensaio da laje, também foi medida a tensão na armadura de uma das nervuras – ponto EA da Figura 4 (a). Como mostra a Figura 9, o modelo numérico conseguiu simular bem o aumento

da tensão na armadura com o aumento do carregamento aplicado, sendo a máxima diferença encontrada entre as tensões de 8%.

### 3.2 Análise numérica das lajes de Abdul-Wahab & Khalil [12]

Abdul-Wahab & Khalil [12] apresentam estudos experimentais de lajes nervuradas de concreto armado, dentre os quais foram escolhidos três modelos, denominados S2, S5 e S6, com o objetivo de avaliar numericamente.

As três lajes são quadradas com 154 cm de lado, simplesmente apoiadas nos quatro bordos, com oito nervuras internas por direção e com separação entre nervuras de  $a_1 = 16,7$  cm, como mostra a Figura 10. As lajes diferem apenas nas dimensões das nervuras, que são mostradas na Tabela 2.

A Figura 10 mostra, também, uma placa rígida com dimensões 30x30 cm colocada no centro da laje, que serve para a transmissão da carga. No canto inferior direito desta figura, tem-se o detalhamento das armaduras. A seção transversal da nervura contém uma barra de aço de 8mm de diâmetro e recobrimento de 8 mm da superfície inferior. Armadura da capa é formada por barras de 0,7 mm de diâmetro separadas cada 25 mm em ambas direções. Na simulação numérica, foi usada uma malha de 324 (18x18) elementos para a capa e vinte malhas de 216 (36x6) elementos para as nervuras, como está delhado nas Figuras 11 e 12 e na Tabela 3.

Tabela 4 – Valores de tensão-deformação para o concreto fissurado

| Valores do MFD S2 (Deformação) | Valores do MFDS5 (Deformação) | Valores do MFDS6 (Deformação) | Tensão (Mpa) | Trecho |
|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------|--------|
| 1,15E-04                       | 1,15E-04                      | 1,15E-04                      | 2,9          | -      |
| 4,35E-04                       | 7,83E-04                      | 7,83E-04                      | 1,16         | 1      |
| 2,19E-03                       | 2,04E-03                      | 2,04E-03                      | 1,16         | 2      |
| 1,00E-02                       | 1,00E-02                      | 1,00E-02                      | 0            | 3      |

Figura 16 b – Detalhe da seção típica do CE1, em cm

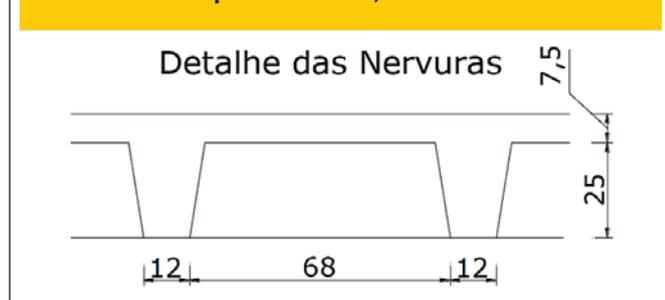
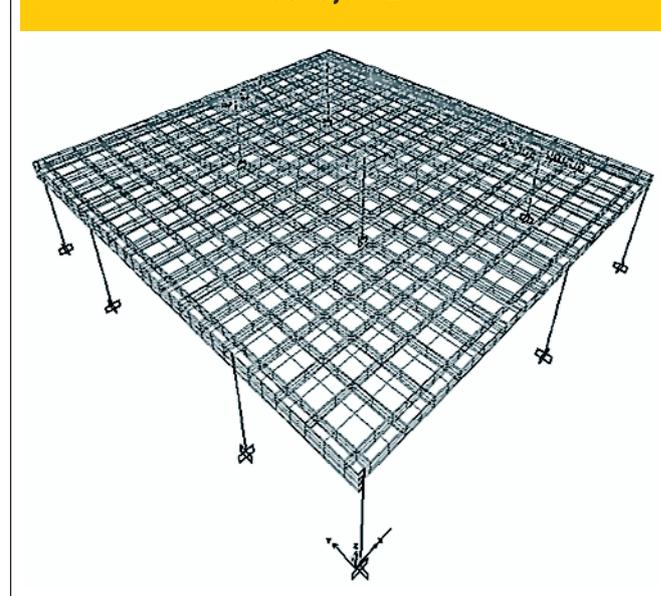


Figura 17 – Malha em elementos finitos da laje CE1



As propriedades mecânicas dos materiais, utilizadas no programa SAP2000, foram obtidas em Abdul-Wahab & Khalil [12] ou calculadas segundo as prescrições da NBR6118 [13], e estão relacionadas a seguir.

Para o concreto comprimido: resistência à compressão  $f_{ck}=30$  MPa ; e, Módulo de elasticidade  $E_c=26071,6$  MPa.

Para a armadura: Módulo de elasticidade  $E_s= 210000$  MPa;

Figura 18 – Curvas elásticas do plano de corte A-A referente à Figura 14

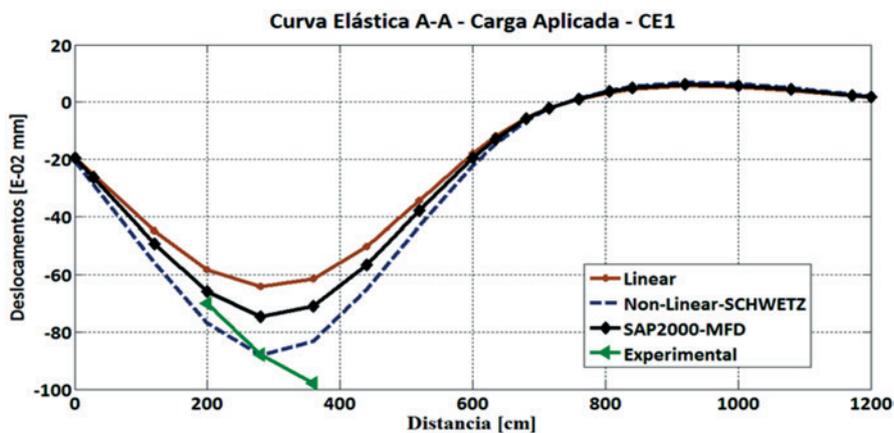


Figura 19 – Curvas elásticas do plano de corte B-B referente à Figura 14

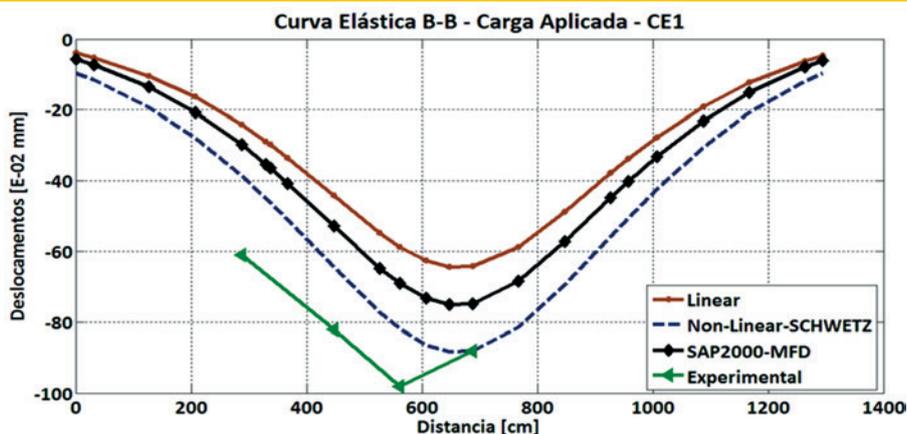


Figura 20 – Curvas de Carga-Deslocamento máximo vertical para a laje S2

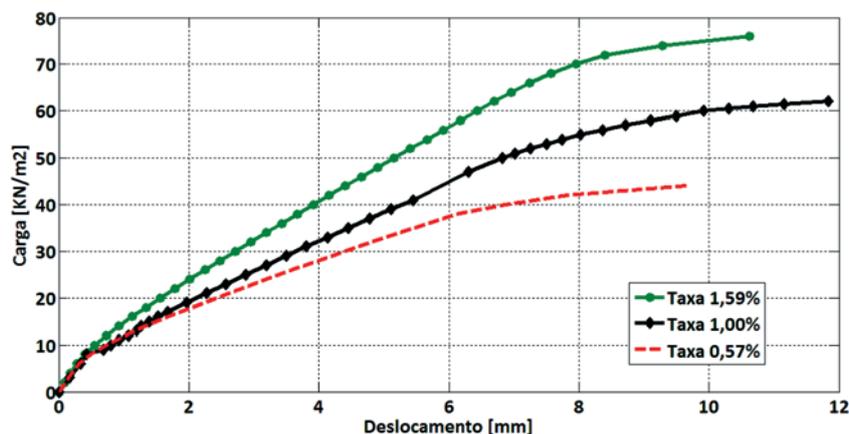
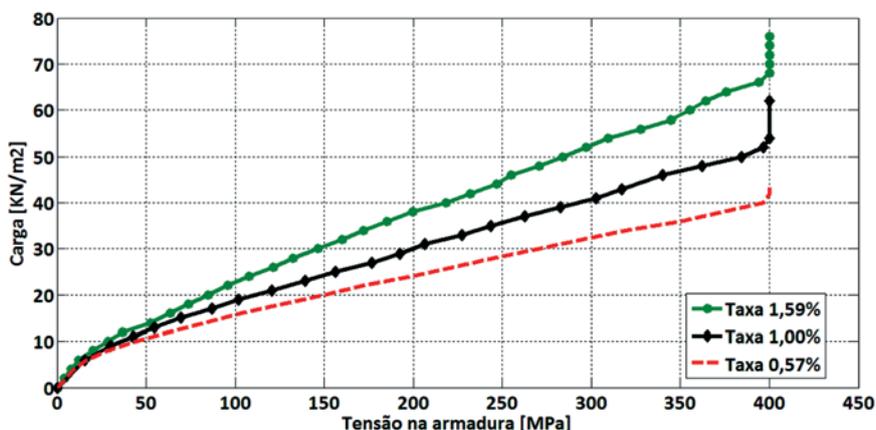


Figura 21 – Curvas de Carga-Tensão na armadura tracionada para a laje S2



Tensão de escoamento  $f_{ys}$ =400 MPa; e Tensão última:  $f_u$ =420 MPa. Os valores do diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado encontram-se na Tabela 4.

A aplicação da carga foi feita por etapas, com incremento de 5 kN por etapa, distribuída pela placa rígida centrada na laje.

A comparação dos resultados numéricos obtidos pelo modelo proposto neste trabalho com os experimentais é mostrada a seguir, nas Figuras 13 a 15. Para estas lajes, também são apresentados os resultados numéricos obtidos por Araújo [14], que utiliza um modelo de elementos finitos divididos em camadas e considerando o comportamento não linear do concreto fissurado através de um modelo de fissuração distribuída. O modelo de Araújo considera o elemento finito isoparamétrico quadrático de 8 nós, cada nó apresentando 5 graus de liberdade, para representar a capa e a nervura.

Em todos os resultados mostrados acima observa-se que os valores obtidos pelo modelo proposto, SAP2000-MFD, tem com-

portamento muito próximo daqueles medidos nos ensaios experimentais e dos obtidos por Araújo [14]. Para a carga de fissura, a diferença dos deslocamentos foi menor que 4%. Para a carga próxima à carga última, a diferença é menor que 12%. Talvez a diferença maior encontrada para a carga última se deva ao fato que a resistência à tração e o módulo de elasticidade do concreto foram determinados segunda as expressões da NBR6118, já que não foram determinados durante os ensaios. Estes valores influenciam diretamente na convergência dos últimos incrementos de carga.

### 3.3 Análise numérica da laje nervurada CE1 de Schwetz [2]

Schwetz [2] avaliou experimentalmente várias lajes nervuradas em tamanho real, dentre as quais a laje do Caso de Estudo 1 (CE1) mostrada na Figura 13. Trata-se de uma laje retangular apoiada em vigas de contorno e em um pilar no seu interior. Esta laje foi

Figura 22 - Curva de Carga-Momento fletor no vão central para a laje S2

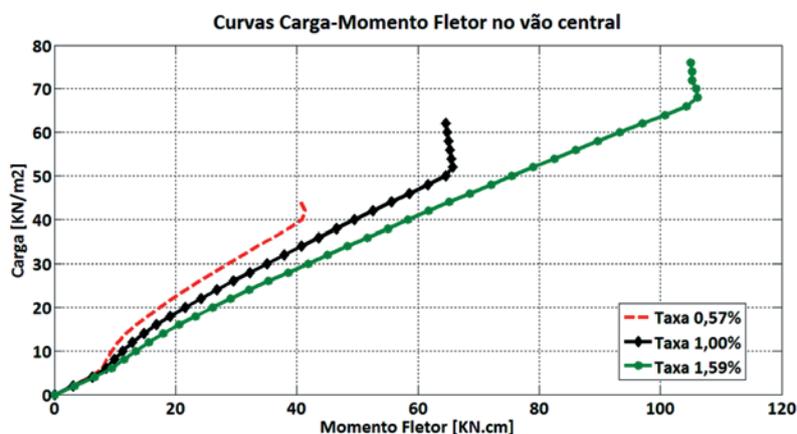
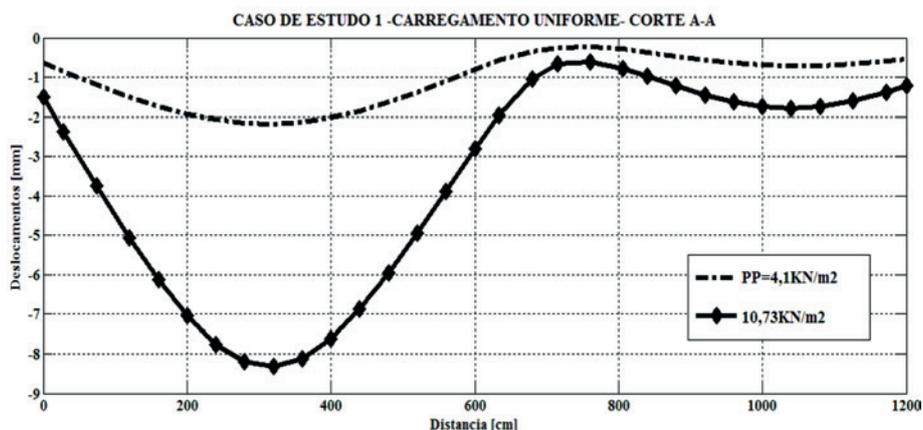


Figura 23 – Curvas elásticas do plano de corte A-A mostrado na Figura 14



testada por um carregamento experimental aplicado na área ilustrada como um retângulo (2x3 m) de cor cinza.

O carregamento do ensaio foi aplicado em quatro etapas de carga, uniformemente distribuída na área definida, atingindo um total de 6,67 kN/m<sup>2</sup>.

As características dos materiais foram determinadas experimentalmente por Schwetz e utilizadas na análise numérica. Os valores determinados para o concreto foram: Módulo de Elasticidade  $E_c = 35740,0$  MPa; Resistência à compressão  $f_c = 35,9$  MPa e Resistência à tração  $f_t = 2,9$  MPa.

A Figura 17 mostra a malha em elementos finitos da laje CE1, com 5661 elementos.

Schwetz [2] também realizou análises numéricas não lineares sobre esta laje, onde considerou a real curva tensão-deformação do concreto em compressão, mas com comportamento à tração simplificado. Neste, um coeficiente de redução do valor máximo de resistência à tração é mantido constante ao longo da análise,

acarretando maiores fissuração e deformação à estrutura.

Nos resultados mostrados a seguir, os valores obtidos pelo modelo proposto são comparados com as curvas experimentais e também com os resultados das análises linear e não linear obtidos por Schwetz [2].

As curvas elásticas que se apresentam nas Figuras 18 e 19 refletem somente os efeitos do carregamento de ensaio.

Algumas considerações podem ser feitas em relação às curvas mostradas nas Figuras 18 e 19.

O monitoramento desta laje foi feito durante sua construção, pois a mesma é parte de uma edificação existente. Desta forma, segundo Schwetz [2], além do carregamento localizado, aplicado em 5 etapas, existiram também outros carregamentos: peso próprio da estrutura e um carregamento correspondente às alvenarias sobre o viga de borda. O resultado numérico referente ao deslocamento vertical devido apenas ao carregamento localizado, mostra-

Figura 24 – Curvas elásticas do plano de corte B-B mostrado na Figura 14

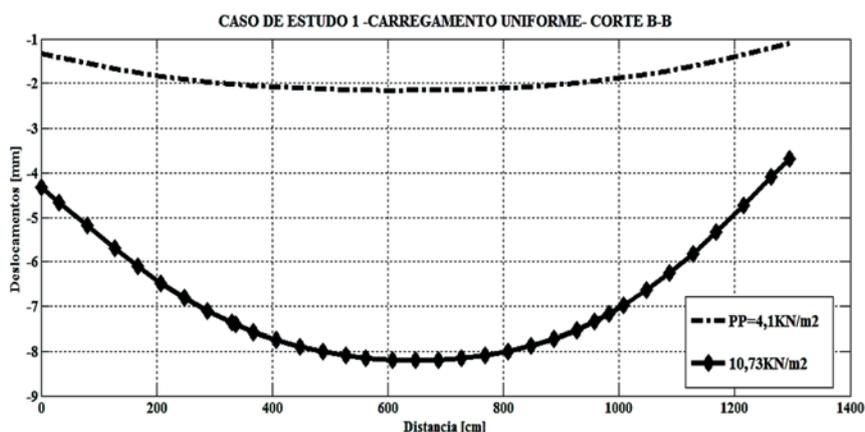
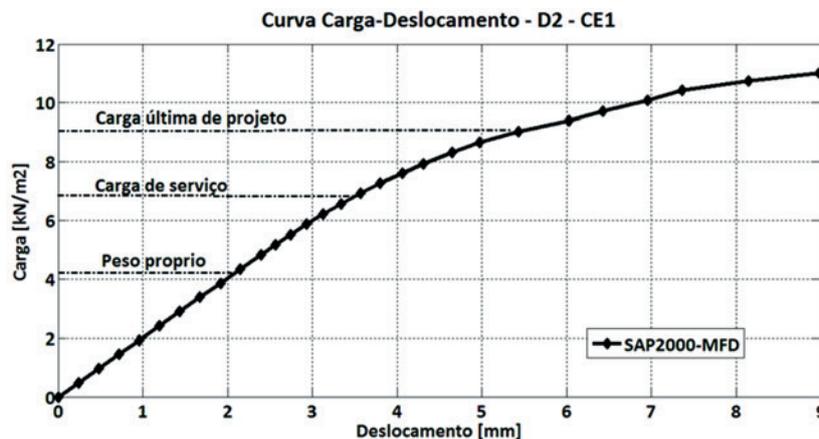


Figura 25 – Curva carga-deslocamento vertical para o ponto D2



do nas Figuras 18 e 19, foi considerado como a diferença dos valores obtidos no início e no final da aplicação da carga localizada. Na curva experimental foram plotados somente os valores lidos nos deflectores durante o ensaio – três pontos na direção A-A e quatro na direção B-B.

As considerações feitas no parágrafo anterior justificam em parte as diferenças entre os valores obtidos pelo modelo proposto neste trabalho e as medições *in loco*. A maior diferença chega perto de 50% para o primeiro ponto da curva experimental B-B. Outro fator que pode ter contribuído para esta diferença é o fato que os apoios não são fixos. A laje é apoiada em vigas de contorno que por sua vez estão apoiadas em pilares, que também se deformam. Este fato, todavia, foi considerado no modelo numérico, onde as vigas de contorno e pilares foram modelados, ver Figura 17.

Finalmente, nestes resultados, ainda que fruto de um carregamento em níveis de serviço, fica evidente a importância da consideração do comportamento não linear dos materiais.

#### 4. Análises de lajes em estado de deformações excessivas

O objetivo deste item é examinar o desempenho do modelo proposto com relação ao comportamento global das lajes, assim como com relação a comportamentos localizados de deslocamentos e tensões nas armaduras. Desta forma, são efetuadas análises de duas lajes já analisadas no item 3, mas agora submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos com valores crescentes de zero até a capacidade última das lajes.

##### 4.1 Laje S2 de Abdul-Wahab& Khalil [12]

A laje S2 já foi apresentada no item 3.2, Figura 10, e utilizada para a validação do modelo numérico proposto neste trabalho. Agora, esta laje será utilizada para a análise de seu comportamento frente a cargas excessivas, assim como para avaliar a influência de diferentes taxas de armadura nas nervuras.

Nas análises a seguir o carregamento é aplicado de forma uniformemente distribuída e crescente até que seja atingida a capacidade

de última da laje. Além disso, será variada a taxa de armadura à tração das nervuras, obtendo-se, portanto, diferentes valores dos parâmetros do modelo de fissuração distribuída.

A armadura da laje original é composta por barras de 8mm de diâmetro, correspondendo a uma taxa de armadura de 1,00%. Serão também analisadas as situações de armadura de 6,3mm, correspondendo a uma taxa de armadura de 0,57%, e 10mm de diâmetro, correspondendo a uma taxa de armadura de 1,59%.

As propriedades físicas do concreto permanecem as mesmas:  $E_c = 26,07$  GPa;  $f_{cm} = 32$  MPa; e,  $f_{ct,m} = 2,9$  MPa. Portanto, na entrada de dados para o modelo de fissuração, os três casos apresentam o mesmo valor de tensão de tração para o concreto, diferenciando apenas os valores das deformações.

Como resultados destas análises, apresentam-se as curvas: Carga x Deslocamento, Figura 20, Carga x Tensão na armadura tracionada, Figura 21, e Cargas x Momento Fletor na seção, Figura 22, todos referentes ao centro do vão.

Verifica-se, na Figura 20, que com o aumento da taxa de armadura das nervuras, cresce, correspondentemente, a rigidez da estrutura, assim como sua capacidade de carga. A Figura 21 mostra que a tensão na armadura tracionada cresce na proporção inversa da taxa de armadura, estando, entretanto, esta tensão, limitada à resistência última da armadura de 400 MPa, para todos os casos. Para um mesmo nível de carga, tanto o deslocamento como a tensão na armadura são menores para a laje com maior taxa de armadura.

Já na Figura 22, com relação à capacidade de absorver momento da seção, para um mesmo nível de carga, o momento interno resistente é maior para a laje com maior taxa de armadura.

##### 4.2 Laje CE1 de SCHWETZ (2011)

A laje do caso de estudo 1, CE1, cuja geometria está mostrada na Figura 16, é aqui analisada sob os efeitos de um carregamento estático, uniformemente distribuído e crescente.

A máxima carga desta análise foi de 10,73 kN/m<sup>2</sup>. Tendo em consideração que o peso próprio da laje é de 4,10 kN/m<sup>2</sup>, resulta uma carga adicional de 6,63 kN/m<sup>2</sup>. No projeto real (esta laje foi

construída e hoje faz parte de uma edificação existente), a carga adicional considerada foi de 2,5 kN/m<sup>2</sup>, resultando em uma carga total de 6,6 kN/m<sup>2</sup> e uma carga última de projeto de 9,24 kN/m<sup>2</sup>.

As Figuras 23 e 24 apresentam as curvas elásticas para as cargas do peso próprio e a máxima atingida. Observa-se nitidamente a grande distância que separa estas elásticas, o que denota o forte comportamento não linear da laje quando submetida à cargas superiores às de projeto, como ressaltado na Figura 25.

Para uma análise de comportamento local, é considerado o ponto de maior deslocamento vertical, denominado ponto D2, que encontra-se na interseção dos dois planos de corte. Na Figura 25, apresenta-se a curva Carga-Deslocamento no ponto D2.

Observa-se na Figura 25 que o comportamento da laje é praticamente linear até a carga de serviço. Após esta carga, o comportamento passa a ser não linear.

## 5. Conclusões

Da análise dos resultados mostrados nos itens 3 e 4 pode-se afirmar que o modelo proposto consegue representar o comportamento de lajes nervuradas de concreto armado. A utilização do modelo de fissuração distribuída proposto por d'Avila [10] mostrou-se compatível com a aplicação no programa SAP2000, tendo a vantagem de permitir o estabelecimento dos parâmetros para cada elemento de concreto onde mudam as dimensões da seção e ou a taxa de armadura.

A laje S2 de Abdul-Wahab& Khalil [12] foi utilizada para testar o desempenho do modelo em representar a influência de diferentes características geométricas da estrutura em seu comportamento pós-fissuração. Neste caso, foram consideradas três diferentes taxas de armadura nas nervuras e os parâmetros do modelo de fissuração foram determinados de acordo com as armaduras consideradas. Os resultados demonstraram, claramente, a capacidade do modelo em considerar tais características. Foi possível visualizar seu comportamento global, determinar sua capacidade última e, ainda, observar detalhes como o desenvolvimento da tensão em determinada armadura ou a capacidade de absorver momento fletor em uma determinada seção.

O modelo proposto pode ter inúmeras aplicações, tais como:

A avaliação de lajes nervuradas onde pretenda-se verificar a influência da variação nas taxas de armadura das nervuras mais solicitadas, objetivando verificar o melhor comportamento frente à carga que levem a um estado limite de deformação.

A verificação do comportamento de lajes nervuradas sujeitas à alteração de armaduras por necessidade de reforço estrutural.

A avaliação de lajes nervuradas onde pretenda-se efetuar cortes em planta, proporcionando áreas vazadas para, por exemplo, a colocação de escadas rolantes ou elevadores. Nestas, reforços de armadura podem tornar-se também necessários.

## 6. Agradecimentos

À Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo auxílio financeiro, indispensável para esta pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Rio Grande do Sul.

## 7. Referências bibliográficas

- [01] Borges, A. R.; Análise experimental de lajes de concreto armado nervuradas com mesas pré-fabricadas. Trabalho de Conclusão de Curso, Faculdade de Engenharia Civil, da Universidade Federal do Pará, 2009.
- [02] Schwetz, P.F. Análise Numérico-Experimental de Lajes Nervuradas Sujeitas a Cargas Estáticas de Serviço. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.
- [03] Dias, R. H. Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- [04] Stramandionoli, J.S.B. Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- [05] Araujo, J. M. Considerações sobre a rigidez à torção das lajes nervuradas de concreto armado. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.7, p.1-8, Setembro, 2005.
- [06] Donin, C. Análise numérica de lajes nervuradas por meio do método dos elementos finitos. Dissertação Pós-Graduação em Engenharia Civil, Área de Concentração em Construção Civil, da Universidade Federal de Santa Maria, 2007.
- [07] Rebêllo R.R.; Duarte F<sup>o</sup>L.A. Análise numérica e experimental de laje nervurada bidirecional em concreto armado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO,49. Bento Gonçalves, 2007.
- [08] Oliveira, R. S.; Araújo, D. L.; Ramalho, M. A. Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais. e-Artigo ABECE. São Paulo, 2000.
- [09] Mindlin, R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 18, No. 1, 1951.
- [10] D'Avila, V. M. R. Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finito. (Tese de Doutorado) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.
- [11] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Code Model 1990. Bulletin d'Information n.213/214, Lausanne: CEB, mar. 1993.
- [12] Abdul-Wahab, H.M.S.; Khalil, M.H. Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs. Journal of Structural Engineering, v. 126, n. 2, Feb., p. 219-227, 2000.
- [13] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118:2007: projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, 2007.
- [14] Araujo, J. M. Análise não linear de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n. 52, p.43-52, Lisboa, Setembro, 2003.