

# Analytical model for assessing of strengthening the flexural beams with T and rectangular section

## *Modelo analítico para avaliação do reforço à flexão de vigas com seção retangular e T*



I. ANDREOLLI<sup>a,b</sup>  
andreolli@petrobras.com.br  
ivandreolli@gmail.com

### Abstract

This study presents an analytical model for evaluation of the reinforced beams under simple bending based on recommendations of the Brazilian Concrete Code (NBR-6118) and a study published by the International Federation of Concrete (fib). In this paper are considered two different section types, rectangular and "T" sections and the beam's deformation are analyzed considering the moment-curvature diagram taking into consideration the limits of deformation of materials. The results obtained by both Codes are confronted each other, showing great similarity. Additionally, destructive tests of reinforced beams have been made in the laboratory and were compared to results obtained by the analytical model, showing excellent performance of the proposed model. The objective of this publication is to present the analytical model. Analysis comparing the field results and the analytical model were presented in another publication mentioned in this study.

**Keywords:** CFRP, analytical model, reinforced beams, fib, NBR-6118.

### Resumo

Este estudo apresenta um modelo analítico para avaliação do reforço de vigas sobre flexão simples com base nas recomendações da Norma Brasileira de Concreto (NBR-6118) e de um estudo publicado pela Federação Internacional do Concreto (Federation International of Beton-fib). São consideradas no estudo seções do tipo retangular e T e as deformações das vigas são analisadas considerando o diagrama momento - curvatura respeitando os limites de deformação dos materiais no estado limite último. Os resultados obtidos por ambas as normas são confrontados entre si, mostrando grande similaridade. Além disso, ensaios destrutivos de vigas reforçadas realizados em laboratório foram confrontados com os obtidos pelo modelo analítico, mostrando excelente desempenho do modelo proposto. O foco dessa publicação está na apresentação do modelo analítico. As análises confrontando os resultados de campo com o modelo analítico foram apresentadas em outra publicação citada nesse estudo.

**Palavras-chave:** PRFC, modelo analítico, vigas reforçadas, fib, NBR-6118.

<sup>a</sup> Petróleo Brasileiro S.A. - PETROBRAS, Santos, SP, Brasil;  
<sup>b</sup> Universidade Santa Cecília - UNISANTA, Santos, SP, Brasil.

## 1. Introdução

A avaliação do estado de conservação e a reparação ou reforço das construções existentes adquiriu uma importância econômica crescente, dado o interesse em preservar e reabilitar o patrimônio construído. A inovação tecnológica e o desenvolvimento de novos materiais têm tido nesta área um domínio de contínuos desafios e possibilidades. As estruturas civis ao longo do tempo sofrem deteriorações o que implica, normalmente, em uma redução da sua capacidade estrutural e o reforço estrutural pode ser uma solução técnica e econômica interessante (Spagnolo, et al. [1]). Um exemplo típico de redução da capacidade portante da estrutura ocorre devido à oxidação das armaduras da mesma (Saadatmanesh e Ehsani [2]; An, et al. [3]). O próprio reforço pode contribuir para a corrosão. Estudos sobre técnicas recentes de reforço que adicionam, por exemplo, fibras de carbono na matriz de concreto tem mostrado que pode aumentar a porosidade da estrutura e a corrosão da armadura (Garcés, et al. [4]).

Também em certas circunstâncias as estruturas são submetidas a carregamentos distintos dos carregamentos projetados na fase de projeto, sejam por erros executivos ou até mesmo de projeto sejam por mudanças da concepção da estrutura oriundas da necessidade de modificação do uso da mesma e uma análise criteriosa do projeto pode resultar na necessidade de reforçar a estrutura para torná-la segura e confortável para o uso (Beber, et al. [5] e Beber [6]). Para efetuar o reforço da estrutura devem-se avaliar além da segurança a ruptura, as deformações limites de utilização. No caso particular das estruturas do tipo viga sabe-se que muitos parâmetros geométricos e físicos influenciam no seu comportamento e consequentemente no desempenho do reforço, tais como: espessura das “chapas” de reforço, resistência do reforço, tipos de reforço, local de aplicação, técnicas de aplicação, entre outros como mostrados em (An, et al. [3]; Garcez, et al. [7]; Ferrari e Hanai [8]). Os avanços na área têm permitido evolução das técnicas de aplicação como mostrado em (Tian, et al. [9] e Santos, et al. [10]). Também a combinação do reforço com novos materiais estruturais tem permitido novas aplicações do reforço de estruturas em concreto armado tais como: o reforço à punção de lajes (Santos, et al. [10]), reforço ao cisalhamento (Gamino, et al. [11]), o reforço protendido (Garcez, et al. [12]) e o reforço através da adição de fibras de carbono na mistura do concreto (Garcés, et al. [4]).

Na utilização de novas técnicas e de novos materiais para reforço estrutural é também importante considerar o comportamento da estrutura reforçada à medida que incrementos de cargas são aplicados, para avaliar o desempenho estrutural. Para o concreto armado, ou para o aço utilizado na forma de barras longitudinais e transversais nas vigas, são conhecidos os diagramas tensão deformação e as suas deformações últimas admissíveis. Para tais estruturas, existem padrões normalizados para projeto. A depender da taxa de armadura a estrutura pode estar em certos domínios que são ou não recomendados projetar por motivos econômicos e de segurança (Beber e Campos [13]). No caso do reforço existem ainda poucas recomendações nas normas, principalmente quando considerados reforços com tecnologias desenvolvidas mais recentemente como os polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC) e de técnicas recentes de novas aplicações e análises como mostrado em (Santos et al. [10] e Yaqub e Bailey [14]).

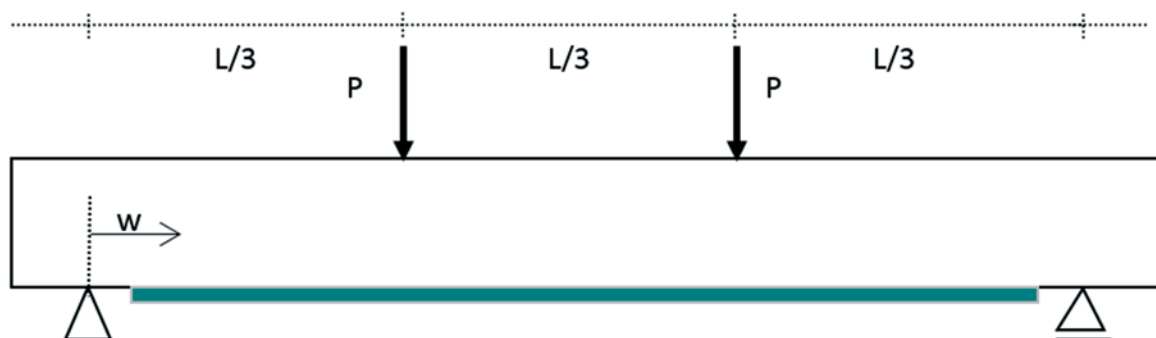
Projetar um sistema de reforço implica na adoção de modelos teóricos adequados, que permitam simular com precisão o comportamento dos elementos reforçados como mostrado por (Swamy, et al. [15]; Bono, et al. [16]; Gamino, et al. [17]). Experimentalmente, verificou-se que o comportamento de vigas de concreto armado, reforçadas com compósitos de fibra de carbono, apresenta peculiaridades cuja observância é de vital importância para o adequado funcionamento do reforço (Beber [6]; Andreolli, et al. [18], Spagnolo, et al. [1]). Para simular e compreender a natureza deste comportamento, a metodologia empregada consistiu em traçar diagramas momento- curvatura, gerados a partir dos dados obtidos através de um modelo numérico, metodologia semelhante a utilizada por (El-Refaie, et al. [19]; An, et al. [3] e Al-Saidy, et al. [20]), cujos modelos completos não foram apresentados. O modelo proposto nesse estudo leva em consideração vigas de concreto armado com seção transversal retangular e “T”, submetidas à flexão simples. Os diagramas obtidos através desse modelo permitem analisar o comportamento da viga como uma estrutura monolítica à medida que novos incrementos de carregamentos são impostos e permitem avaliar a rigidez da estrutura com ou sem reforço. Um estudo paramétrico variando-se, por exemplo, a taxa de reforço poderá mostrar as taxas de ganhos de rigidez com o aumento do reforço. Dessa forma poder-se-á concluir qual a maneira mais eficiente de se reforçar as vigas e prever o comportamento da mesma. Estes diagramas se constituem em ferramentas para avaliar o desempenho dos materiais que compõem estes tipos de vigas, prevenindo os possíveis modos de falha desses materiais antes da ruptura brusca, (El-Refaie, et al. [19]; Hollaway e Leeming [21]; Al-Saidy, et al. [20] e Agbossou, et al. [22]).

A análise dos diagramas momento- curvatura também foi feito por Andreolli et al. [18] mostrando excelente concordância entre dados experimentais e teóricos, onde também foram confrontadas as recomendações da NBR-6118 [23] e *fib* [24]. O estudo atual apresenta o modelo matemático utilizado por Andreolli, et al. [18] e desenvolvido para analisar o comportamento de vigas de concreto armado reforçadas com fibras de carbono ou chapas de aço, através das recomendações do *fib* [24] e NBR-6118 [23]. É apresentado o conjunto de equações na forma analítica para determinar a posição da linha neutra como função da deformação específica dos materiais que compõem a seção submetida ao momento fletor, variável fundamental para a obtenção dos diagramas momento - curvatura. Além disso, são apresentadas equações correlatas que constituem o modelo numérico.

## 2. Metodologia

Para avaliar o comportamento do reforço, um modelo matemático foi desenvolvido levando-se em consideração os diagramas tensão-deformação do concreto ( $\sigma_c \times \epsilon(y)$ ) das normas NBR-6118 e *fib* e aplicável a qualquer domínio de deformação para concretos de classe até C50. O modelo foi desenvolvido para seções de viga do tipo retangulares e tipo “T”. O modelo foi baseado nas seguintes hipóteses: (i) até a ruptura as seções permanecem planas (hipótese de Bernoulli), (ii) o encurtamento máximo específico do concreto é de 0,0035, (iii) o alongamento máximo específico para a armadura de tração é de 0,01, (iv) o alongamento máximo específico do reforço é de 0,0148, (v) a tensão-deformação do aço

Figura 1 - Tipo de estrutura em que foi desenvolvido o modelo numérico



e fibra é linear até o valor de deformação dado pela razão entre a tensão limite de escoamento e o módulo de elasticidade linear do material. Acima dessa deformação a tensão é constante, (vi) a viga a ser reforçada é isenta de deformação, (vii) a viga não sofreu plastificação, ou dano anterior ao reforço.

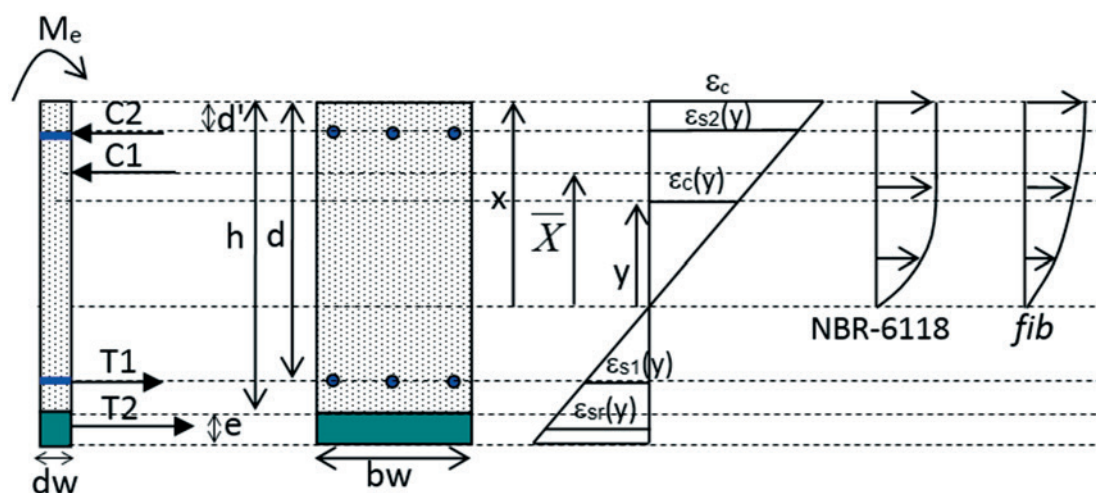
Na metodologia proposta busca-se avaliar o comportamento da viga em função da curvatura ( $\varphi$ ) da mesma, conforme equação 1, utilizando-se os diagramas completos de tensão-deformação do concreto de acordo com as recomendações da NBR-6118 e *fib* e das recomendações da NBR-7480 [25]. Esta análise foi feita realizando-se o caminho inverso das situações de projeto. Considera-se como caminho inverso a determinação do momento externo arbitrando-se uma deformação específica para a fibra mais comprimida do concreto ( $\varepsilon_c$ ). Nesse processo, considerando-se válida a compatibilidade de deformações (deformações lineares), as deformações das armaduras, aço e fibra são determinadas como função

da linha neutra ( $x$ ), variável apresentada na figura 2 e, consequentemente as forças de tração e compressão pela equação de equilíbrio de forças.

$$\varphi = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad (1)$$

O modelo é apresentado em resultados e discussões e consiste primordialmente na determinação da posição da linha neutra partindo de uma deformação específica do concreto ( $\varepsilon_c$ ). Esta variável é necessária para avaliar o momento aplicado na viga para uma determinada deformação da mesma. Para a determinação da linha neutra, utilizou-se a equação de equilíbrio de forças de tração e de compressão na seção solicitada ao momento fletor puro. A figura 1 apresenta o tipo de viga

Figura 2 - Seção transversal característica de uma viga tipo com seção transversal tipo retangular



reforçada cujo modelo numérico foi desenvolvido. O reforço é avaliado na seção mais solicitada a flexão (seção central onde o esforço cortante é nulo). A figura 2 apresenta uma seção transversal característica da viga reforçada à tração (viga originalmente sub-armada). C1 e C2 são componentes de compressão respectivamente do aço e do concreto comprimido. T1 e T2 são componentes de tração respectivamente do aço e do reforço. Na mesma figura apresenta-se o diagrama tensão-deformação da NBR-6118 para o concreto comprimido e da *fib*. No item 3 as equações dos dois modelos são detalhadas bem como são apresentadas curvas tensão-deformação para alguns concretos.

Na figura 2,  $\epsilon_c$  representa a deformação específica da fibra mais comprimida de concreto,  $\epsilon(y)$  a deformação específica em função da distância da linha neutra e  $x$  a altura da linha neutra. A equação de equilíbrio de forças (equação 2) pode ser utilizada para determinação da posição da linha neutra. Nesta situação a variável de interesse fica implícita na equação de única incógnita (a posição da linha neutra). A solução da equação é determinada por métodos numéricos. Para obtenção de outros pontos para o traçado da curva "momento-curvatura", arbitra-se outras deformações específicas do concreto, respeitando-se o intervalo de [0; 0.0035]. Nesse processo também deve-se respeitar as deformações específicas limites para o aço e o reforço estrutural que foi considerado, respectivamente, 0,01 e 0,0148. Determinada a posição da linha neutra, ficam também determinadas as tensões e deformações de cada material que compõe a seção transversal e pode-se determinar o momento aplicado à estrutura que resultou na deformação específica do concreto ( $\epsilon_c$ ) adotada.

A equação para determinação da linha neutra surge da solução da equação 2 que está escrita na forma geral onde C1 é a força de compressão do concreto, C2 a força de compressão do aço comprimido, T1 a força de tração do aço tracionado e T2 a força de tração do reforço.

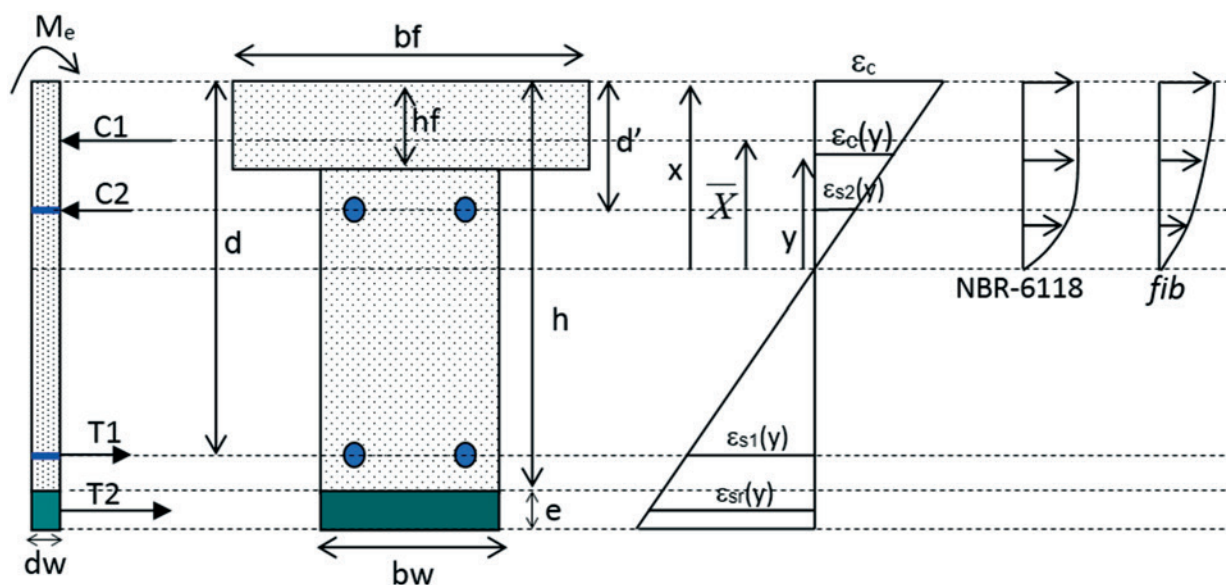
$$C1 + C2 - T1 - T2 = 0 \tag{2}$$

A equação 2 também pode ser escrita na forma de tensões e área resultando na equação 3. A solução da equação 3, conforme abordado no desenvolvimento, é de forma iterativa em função da deformação específica do concreto arbitrada. Na equação 3 tem-se: ( $\sigma_c$  e  $A_c$ ), respectivamente tensão e área do concreto comprimido; ( $\sigma_{s2}$  e  $A_{s2}$ ), respectivamente tensão e área da armadura superior; ( $\sigma_{s1}$  e  $A_{s1}$ ), respectivamente tensão e área da armadura inferior; ( $\sigma_{sr}$  e  $A_{sr}$ ), respectivamente tensão e área do reforço.

$$\sigma_c A_c + \sigma_{s2} A_{s2} = \sigma_{s1} A_{s1} + \sigma_{sr} A_{sr} \tag{3}$$

Encontrada a posição da linha neutra ( $x$ ), e como se conhece  $\epsilon_c$  (valor adotado), todas as demais deformações são determinadas e, conseqüentemente as forças C1, C2, T1 e T2. Com base nessas forças pode-se calcular o momento externo que ocasionou a

Figura 3 - Seção transversal característica de uma viga tipo com seção transversal tipo "T".





deformação  $\varepsilon_c$  através da equação 4, onde o momento é calculado com relação à base da seção. Na equação 4  $\bar{X}$  é o baricentro da área comprimida do concreto.

$$M_e = C1 \cdot (\bar{X} + h - x + e) + C2 \cdot (h - d' + e) - T1 \cdot (h - d + e) - T2 \cdot \left(\frac{e}{2}\right) \quad (4)$$

No cenário de viga com seção tipo "T" o processo é análogo à viga com seção retangular. A figura 3 apresenta uma seção tipo "T" com determinado carregamento característico e as principais variáveis utilizadas no modelo. As equações para a determinação da linha neutra e, posteriormente a equação para a determinação do momento externo aplicado é dado pelas mesmas equações 2 e 4 da seção retangular, mas aqui adotando-se a nomenclatura da figura 3, ou seja:

$$\begin{cases} C1 + C2 - T1 - T2 = 0 \\ M_e = C1 \cdot (\bar{X} + h - x + e) + C2 \cdot (h - d' + e) - T1 \cdot (h - d + e) - T2 \cdot \left(\frac{e}{2}\right) \end{cases}$$

### 3. Resultados e discussões

São apresentadas as equações que compõem os modelos para determinação da função momento - curvatura considerando vigas de seção do tipo retangular e "T" e as normas NBR-6118 e *fib*.

Na equação de equilíbrio de forças (equação 3), tem-se que a tensão no aço (compressão e tração) e a tensão no reforço são funções lineares da deformação até uma determinada deformação e dependem apenas da deformação específica do concreto arbitrada em cada passo (ou em cada deformação específica do concreto da fibra mais comprimida,  $\varepsilon_c$ ). Foi considerado que o aço e o reforço possuem comportamento linear de deformação até o patamar de deformação ( $\varepsilon_k$ ) dado pela equação 5, onde  $f_k$  designa a tensão e  $E_k$  o módulo de elasticidade. As variáveis ( $\varepsilon_k$ ,  $f_k$  e  $E_k$ ) assumem respectivamente ( $\varepsilon_{s1}$ ,  $f_{s1}$  e  $E_s$ ), para o aço tracionado, ( $\varepsilon_{s2}$ ,  $f_{s2}$  e  $E_s$ ), para o aço comprimido e ( $\varepsilon_{cr}$ ,  $f_{cr}$  e  $E_r$ ), para o reforço. Os valores de tensão e módulo de elasticidade utilizados no estudo,

estão apresentados na figura 8. A deformação específica máxima considerada para esses materiais (aço e reforço) foram respectivamente 0,01 e 0,0148 segundo as recomendações das normas técnicas. Além disso, para aço ( $\varepsilon_k < \varepsilon < 0,01$ ) e reforço ( $\varepsilon_k < \varepsilon < 0,0148$ ), considerou-se a tensão  $f_k$ .

$$\varepsilon_k = \frac{f_k}{E_k} \quad (5)$$

A equação 6 apresenta as deformações específicas do: aço armadura superior, aço armadura inferior e reforço, todas em função da distância da linha neutra, conforme figuras 2 e 3. As equações apresentadas mostram o caso da compressão da armadura superior e tração na inferior. Existe casos (função da posição da linha neutra) em que ambas as armaduras são de tração e ambas de compressão, sendo apenas necessário multiplicar por (-1) a respectiva equação.

$$\begin{cases} \varepsilon_{s2}(x) = \frac{\varepsilon_c(x-d')}{x} \text{ compressão} \\ \varepsilon_{s1}(x) = \frac{\varepsilon_c(d-x)}{x} \text{ tração} \\ \varepsilon_{cr}(x) = \frac{\varepsilon_c\left(h-x+\frac{e}{2}\right)}{x} \text{ tração} \end{cases} \quad (6)$$

A partir das deformações específicas de cada material, as tensões são obtidas pela equação 7 e as componentes de cada força são obtidas pela multiplicação pela respectiva área da seção transversal.

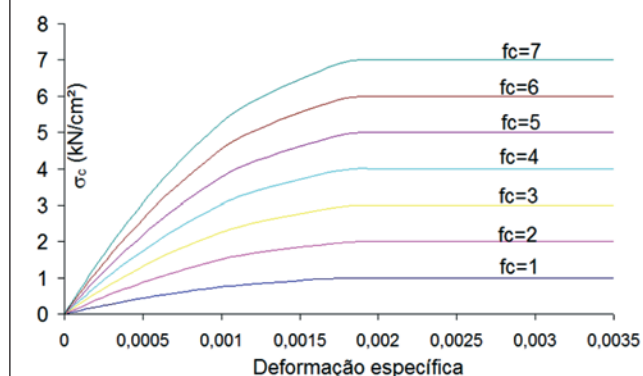
$$\sigma_k(x) = E_k \varepsilon_k(x) \quad (7)$$

Já a tensão no concreto depende de uma função não linear da deformação conforme recomendações da NBR-6118 e *fib*. O diagrama tensão deformação proposto pela NBR-6118 é apresentado pela equação 8 que considera dois trechos conforme a deformação específica do concreto da fibra mais comprimida ( $\varepsilon_c$ ), sendo um trecho curvo dado pela equação 8 e um trecho de tensão constante para o intervalo de deformação específica  $0,002 < \varepsilon_c \leq 0,0035$  e exatamente igual à tensão  $f_c$  (tensão de compressão simples do concreto). A figura 4 apresenta curvas tensão - deformação para o concreto, obtidas através da equação 8.

$$\sigma_c = f_c \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right] \quad (8)$$

Considerando a modelagem através das recomendações da *fib*, tem-se as equações 9, 10, 11 e 12 que compõem o diagrama tensão-deformação das recomendações do *fib*.

Figura 4 - Diagrama ( $\sigma - \varepsilon$ ) concreto (NBR-6118)



$$\sigma_c = \frac{\frac{E_{ci}\varepsilon_c}{E_{c,sec}\varepsilon_{co}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c,sec}} - 2\right)\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}}} f_{cm} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{co} = 0,0017 + 0,0010 \left( \frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right) \quad (10)$$

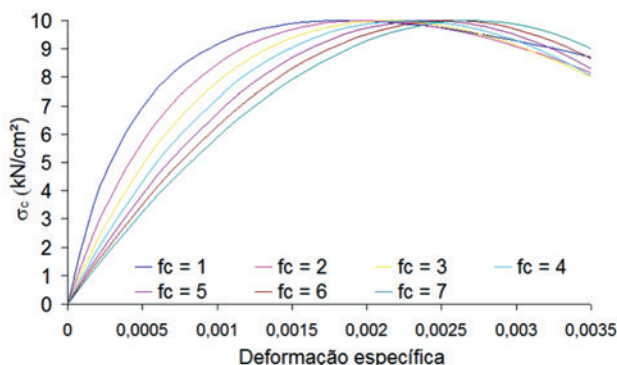
$$E_{ci} = \alpha_E E_{co} \left( \frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

$$E_{c,sec} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{co}} \quad (12)$$

Nas equações 9, 10, 11 e 12 tem-se:  $E_{ci}$ , tangente do módulo de elasticidade em  $\sigma_c=0$  [MPa] e para a idade do concreto de 28 dias;  $E_{co}=2,15 \cdot 10^4$  MPa;  $f_{cm}$ , média da tensão de compressão [MPa];  $f_{cmo} = 10$  MPa;  $\alpha_E$  coeficiente que depende do tipo de agregado do concreto, assumido basalto,  $\alpha_E=1,2$ .

A figura 5 apresenta o diagrama tensão- deformação das recomendações do *fib* para alguns valores de resistência característica do concreto. Nota-se que o diagrama é constituído por curva contínua para todo o intervalo de deformação específica do concreto  $0 \leq \varepsilon_c \leq 0,0035$ . No modelo analítico proposto a determinação da componente de compressão do concreto é feita considerando o diagrama tensão-deformação na NBR-6118 e *fib* sem simplificações o que implica

Figura 5 - Diagrama ( $\sigma - \varepsilon$ ) concreto (*fib*)



da necessidade de um método numérico de convergência da equação 2 ou 3 em cada passo (cada  $\varepsilon_c$  adotada). Após determinada a posição da linha neutra é preciso determinar o baricentro da área comprimida de concreto para o cálculo do momento resistente, o qual, analiticamente, acarretou a deformação arbitrada inicialmente. As dificuldades da formulação do algoritmo são fortemente influenciadas pelo comportamento não linear do concreto. Para uma viga genérica de seção transversal com largura  $b_w$ , as equações 13 e 14 mostram respectivamente e de maneira generalizada, como é obtida a componente de compressão do concreto (um dos termos da equação 2) e o baricentro da região comprimida de concreto, variável da equação 4, sendo  $F_{cc}$  a componente de compressão do concreto e  $dy$  o elemento de integração. A equação 15 mostra a deformação do concreto de uma fibra qualquer em função da posição dessa fibra conforme nomenclatura adotada nas figuras 2 e 3.

$$C1 = F_{cc} = \left[ \int_0^x (\sigma_c b_w) dy \right] \quad (13)$$

$$\bar{X} = \frac{\int_0^x (\sigma_c b_w y) dy}{\int_0^x (\sigma_c b_w) dy} \quad (14)$$

$$\varepsilon_c(y) = \frac{\varepsilon_c y}{x} \quad (15)$$

O modelo considerado para prever a tensão limite quanto à aderência do reforço ao concreto foi baseado no modelo proposto por (Chen e Teng [26]), sendo o mesmo adaptado por (Beber [6]). A equação 16 apresenta o modelo utilizado, onde "e" é a espessura do reforço e  $\sigma_{r,max}$  a tensão limite à aderência do reforço ao concreto.

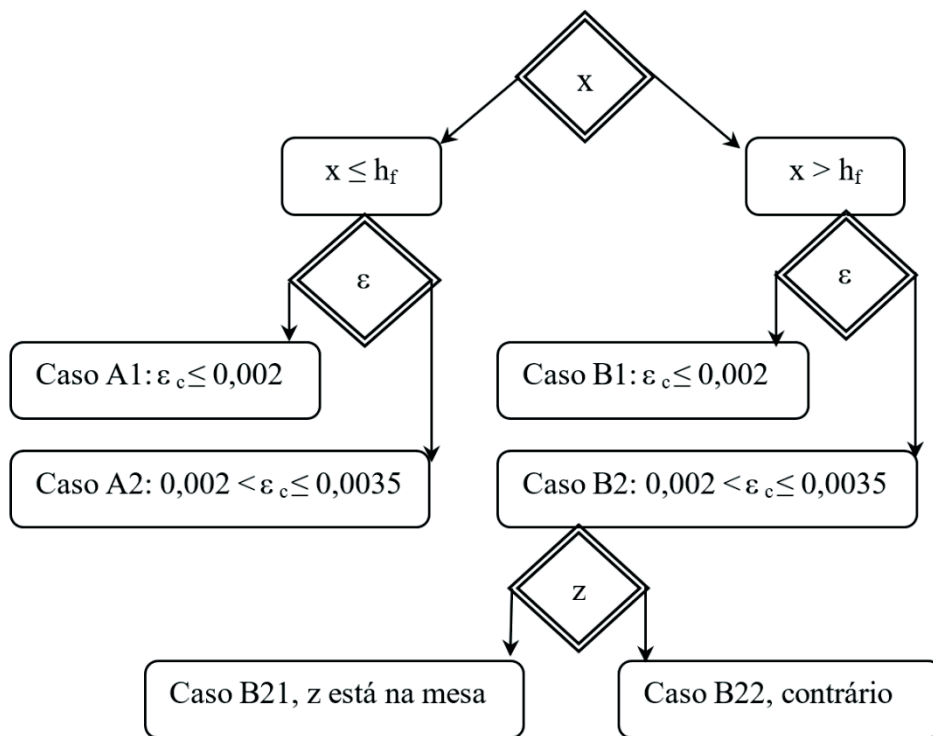
$$\sigma_{r,max} = 0,1956 \sqrt{\frac{E_r \sqrt{f_c}}{e}} \quad [\text{kN/cm}^2] \quad (16)$$

### 3.1 Modelo para viga seção tipo retangular NBR-6118

Na obtenção da equação resultante da força de compressão e do baricentro da região comprimida do concreto utilizou-se a equação 17 que é originada da equação 8, mas transformada para considerar a variável de integração  $y$  conforme equação 15.

$$\sigma_c = f_c \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c \cdot y}{0,002x} \right)^2 \right] \quad (17)$$

Figura 6 - Fluxograma do conjunto possível de equações para a determinação do par momento - curvatura, de acordo com a deformação específica do concreto da fibra mais comprimida e da posição da linha neutra



Devido aos dois trechos existentes no diagrama, dois casos são possíveis:

**Caso 1: para  $\varepsilon_c \leq 0,002$**

Esse caso é limitado pela deformação específica máxima da fibra mais comprimida do concreto em 0,002, ou seja, as deformações do concreto em toda região comprimida se situam no trecho curvo. As equações 18 e 19 mostram respectivamente a força resultante de compressão e do baricentro do concreto obtidas das equações 13 e 14.

$$F_{cc} = b_w f_c x \left[ 500 \varepsilon_c - \frac{250000}{3} \varepsilon_c^2 \right] \quad (18)$$

$$\bar{X} = \frac{x(10 - 1875 \varepsilon_c)}{15 - 2500 \varepsilon_c} \quad (19)$$

**Caso 2: para  $\varepsilon_c > 0,002$**

Esse caso é limitado pela deformação específica da fibra mais comprimida do concreto como sendo superior a 0,002, ou seja, as defor-

mações do concreto podem se situar tanto no trecho curvo como no trecho constante. As equações 20 e 21 mostram respectivamente a força resultante de compressão e do baricentro do concreto.

$$F_{cc} = \left[ \int_0^{\varepsilon_c} (\sigma_c b_w) dy \right] + x b_w f_c \left( 1 - \frac{0,002}{\varepsilon_c} \right) = b_w f_c x \left[ 1 - \frac{1}{1500 \varepsilon_c} \right] \quad (20)$$

$$\bar{X} = \frac{x \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3000000 \varepsilon_c^2} \right]}{\left[ 1 - \frac{2}{3000 \varepsilon_c} \right]} \quad (21)$$

**3.2 Modelo para viga de seção tipo "T" e NBR-6118**

No caso da sessão "T", por ser uma seção composta, vários casos são possíveis combinando com as deformações  $\varepsilon_c$  acima e abaixo

de 0,002. A figura 6 apresenta um fluxograma dos diversos casos possíveis. Na sequência estão descritas as equações da área comprimida de concreto e também do respectivo baricentro para cada caso. A distância da linha neutra até a deformação específica do concreto de 0,002 é designada de  $z$ .

**Caso A1: para  $x \leq h_f$  e  $\varepsilon_c \leq 0,002$**

Esse é o cenário em que a posição da linha neutra está na mesa e a deformação do concreto da fibra mais comprimida é menor que 0,002. As equações da componente de compressão do concreto e do baricentro, para esse cenário, são respectivamente as equações 22 e 23 obtidas a partir das equações 13 e 14.

$$F_{cc} = b_f f_c x \left[ 500 \varepsilon_c - \frac{250000}{3} \varepsilon_c^2 \right] \quad (22)$$

$$\bar{X} = \frac{x(10 - 1875 \varepsilon_c)}{15 - 2500 \varepsilon_c} \quad (23)$$

**Caso A2: para  $x \leq h_f$  e  $0,002 < \varepsilon_c \leq 0,0035$**

Esse é o cenário em que a posição da linha neutra está na mesa e a deformação do concreto da fibra mais comprimida está entre 0,002 e 0,0035. As equações da componente de compressão do concreto e do baricentro, para esse cenário, são respectivamente as equações 24 e 25.

$$F_{cc} = \left[ \int_0^{\frac{0,002}{\varepsilon_c}} (\sigma_c b_f) dy \right] + b_f f_c \left( \frac{0,002}{\varepsilon_c} x \right) \rightarrow F_{cc} = b_f f_c x \left[ 1 - \frac{1}{1500 \varepsilon_c} \right] \quad (24)$$

$$\bar{X} = \frac{x \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3000000 \varepsilon_c^2} \right]}{\left[ 1 - \frac{2}{3000 \varepsilon_c} \right]} \quad (25)$$

**Caso B1: para  $x > h_f$  e  $\varepsilon_c \leq 0,002$**

Esse é o cenário em que a posição da linha neutra está abaixo da mesa e a deformação do concreto da fibra mais comprimida é menor ou igual a 0,002. As equações da componente de compressão do concreto e do baricentro, para esse cenário, são respectivamente as equações 26 e 27.

$$F_{cc} = b_w \int_0^x \sigma_c dy + (b_f - b_w) \int_{x-h_f}^x \sigma_c dy$$

$$F_{cc} = b_w f_c x \left[ 500 \varepsilon_c - \frac{250000}{3} \varepsilon_c^2 \right] + (b_f - b_w) f_c \alpha \quad (26)$$

$$\alpha = \left[ 500 \varepsilon_c x - \frac{250000}{3} \varepsilon_c^2 x - \frac{500 \varepsilon_c (x-h_f)^2}{x} + \frac{250000}{3x^2} \varepsilon_c^2 (x-h_f)^3 \right]$$

$$\bar{X} = \frac{x(10 - 1875 \varepsilon_c)}{15 - 2500 \varepsilon_c} \quad (27)$$

**Caso B21: para  $x > h_f$  e  $0,002 < \varepsilon_c < 0,0035$  e  $z$  está na mesa**

Esse cenário é constituído de 3 (três) condições necessárias, sendo a posição da linha neutra abaixo da mesa, a deformação específica do concreto da fibra mais comprimida situada entre 0,002 e 0,0035 e, além disso, a distância da linha neutra até a deformação de 0,002, designada de  $z$ , está situada na mesa. As equações da componente de compressão do concreto e do baricentro, para esse cenário, são respectivamente as equações 28 e 29.

$$F_{cc} = b_w \int_0^z \sigma_c dy + b_w f_c (x-z) + (b_f - b_w) \int_{x-h_f}^z \sigma_c dy + (b_f - b_w) f_c (x-z)$$

$$F_{cc} = b_w f_c \beta + (b_f - b_w) f_c \delta \quad (28)$$

$$\beta = \left[ 500 \varepsilon_c \frac{z^2}{x} - \frac{250000 \varepsilon_c^2 z^3}{3x^2} + x - z \right]$$

$$\delta = \left[ \frac{500 \varepsilon_c z^2}{x} - \frac{250000 \varepsilon_c^2 z^3}{3x^2} - \frac{500 \varepsilon_c (x-h_f)^2}{x} + \frac{250000 \varepsilon_c^2 (x-h_f)^3}{3x^2} + x - z \right]$$

$$\bar{X} = \frac{x \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3000000 \varepsilon_c^2} \right]}{\left[ 1 - \frac{2}{3000 \varepsilon_c} \right]} \quad (29)$$



**Caso B22: para  $x > h_f$  e  $0,002 < \varepsilon_c \leq 0,0035$  e  $z$  está não está na mesa**

Esse cenário é constituído de 3 (três) condições necessárias, sendo a posição da linha neutra abaixo da mesa, a deformação específica do concreto da fibra mais comprimida situada entre 0,002 e 0,0035 e, além disso, a distância da linha neutra até a deformação de 0,002, designada de  $z$ , está situada abaixo da mesa. As equações da componente de compressão do concreto e do baricentro, para esse cenário, são respectivamente as equações 30 e 31.

$$F_{cc} = b_w \int_0^z \sigma_c dy + b_w f_c (x-z) + (b_f - b_w) f_c h_f \quad (30)$$

$$F_{cc} = b_w f_c \left[ 500 \varepsilon_c \frac{z^2}{x} - \frac{250000 \cdot \varepsilon_c^2 z^3}{3x^2} + x - z \right] + (b_f - b_w) f_c h_f$$

$$\bar{X} = \frac{x \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3000000 \varepsilon_c^2} \right]}{\left[ 1 - \frac{2}{3000 \varepsilon_c} \right]} \quad (31)$$

### 3.3 Modelo para viga de seção tipo retangular fib

Utilizando-se as equações gerais 13 e 14 e o modelo proposto pelo fib (equações 9, 10, 11 e 12) obtêm-se as equações 32 e 33, sendo a equação 32 a equação da força de compressão e a equação 33 a equação do baricentro da região comprimida do concreto.

$$F_{cc} = b_w f_{cm} \left[ c \left( \frac{x}{d} - \frac{\ln(x.d+1)}{d^2} \right) - e \left( \frac{(x.d+1)^2}{2d^3} - \frac{2(x.d+1)}{d^3} + \frac{\ln(x.d+1)}{d^3} + \frac{3}{2d^3} \right) \right] \quad (32)$$

$$\bar{X} = \frac{\frac{c}{d^3} [\varphi] - \frac{e}{d^4} [\gamma]}{c \left( \frac{x}{d} - \frac{\ln(x.d+1)}{d^2} \right) - e \left( \frac{(x.d+1)^2}{2d^3} - \frac{2(x.d+1)}{d^3} + \frac{\ln(x.d+1)}{d^3} + \frac{3}{2d^3} \right)}$$

$$\varphi = \left[ \frac{(x.d+1)^2}{2} - 2(x.d+1) + \ln(x.d+1) + \frac{3}{2} \right] \quad (33)$$

$$\gamma = \left[ \frac{(x.d+1)^3}{3} - 3 \frac{(x.d+1)^2}{2} + 3(x.d+1) - \ln(x.d+1) - \frac{11}{6} \right]$$

Nas equações 32 e 33 os parâmetros  $a$ ,  $c$ ,  $d$ , e estão descritos abaixo:

$$a = \frac{E_{ci}}{f_{cm}} \quad c = \frac{a \varepsilon_c}{x} \quad d = \frac{1}{x} \left( a \varepsilon_c - \frac{2 \varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right) \quad e = \frac{\varepsilon_c^2}{x^2 \varepsilon_{c0}^2}$$

### 3.4 Modelo para viga de seção tipo "T", fib

Para esse tipo de seção e considerando as recomendações da fib tem-se 2 casos a depender da posição da linha neutra (abaixo ou acima da mesa).

**Caso 1:  $x \leq h_f$  ou seja, linha neutra na mesa**

Esse caso considera que a posição na linha neutra ( $x$ ) está situada na mesa ( $h_f$ ). As equações 34, e 35 apresentam respectivamente a componente da força de compressão do concreto e o baricentro da região comprimida. Os coeficientes ( $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ) são os mesmos do caso 3.3.

$$F_{cc} = b_f f_{cm} \left[ c \left( \frac{x}{d} - \frac{\ln(x.d+1)}{d^2} \right) - e \left( \frac{(x.d+1)^2}{2d^3} - \frac{2(x.d+1)}{d^3} + \frac{\ln(x.d+1)}{d^3} + \frac{3}{2d^3} \right) \right] \quad (34)$$

$$\bar{X} = \frac{\frac{c}{d^3} [\eta] - \frac{e}{d^4} [\lambda]}{c \left( \frac{x}{d} - \frac{\ln(x.d+1)}{d^2} \right) - e \left( \frac{(x.d+1)^2}{2d^3} - \frac{2(x.d+1)}{d^3} + \frac{\ln(x.d+1)}{d^3} + \frac{3}{2d^3} \right)}$$

$$\eta = \left[ \frac{(x.d+1)^2}{2} - 2(x.d+1) + \ln(x.d+1) + \frac{3}{2} \right] \quad (35)$$

$$\lambda = \left[ \frac{(x.d+1)^3}{3} - 3 \frac{(x.d+1)^2}{2} + 3(x.d+1) - \ln(x.d+1) - \frac{11}{6} \right]$$

**Caso 2:  $x > h_f$  ou seja, linha neutra abaixo da mesa**

Esse caso considera que a posição na linha neutra ( $x$ ) está situada abaixo da mesa ( $h_f$ ). A equação 36 representa a componente da força de compressão do concreto, sendo  $a$ ,  $c$ ,  $d$ , e os mesmos coeficientes apresentados no item 3.3 acima.

$$F_{cc} = (A - B) b_w f_{cm} + P (b_f - b_w) f_{cm} - Q (b_f - b_w) f_{cm} \quad (36)$$

Onde:

$$A = c \left( \frac{x}{d} - \frac{\ln(x.d+1)}{d^2} \right)$$

$$B = e \left( \left( \frac{(x.d+1)^2}{2d^3} \right) - \frac{2(x.d+1)}{d^3} + \frac{\ln(x.d+1)}{d^3} + \frac{3}{2d^3} \right)$$

$$P = \left[ -\frac{(x-h_f)}{d} + \frac{\ln((x-h_f)d+1)}{d^2} \right] c + A$$

$$Q = \left[ \frac{-3}{2d^3} - \frac{((x-h_f)+1)^2}{2d^3} + \frac{2((x-h_f)d+1)}{d^3} - \frac{\ln((x-h_f)d+1)}{d^3} \right] e + B$$

A equação do baricentro da região comprimida do concreto é dada pela equação 37, sendo (a, c, d, e) os mesmos parâmetros apresentados no item 3.3.

$$\bar{X} = \frac{\frac{c}{d^2} [\zeta] - \frac{e}{d^4} [\psi]}{c \left( \frac{x}{d} - \frac{\ln(x.d+1)}{d^2} \right) - e \left( \left( \frac{(x.d+1)^2}{2d^3} \right) - \frac{2(x.d+1)}{d^3} + \frac{\ln(x.d+1)}{d^3} + \frac{3}{2d^3} \right)}$$

$$\zeta = \left[ \frac{(x.d+1)^2}{2} - 2(x.d+1) + \ln(x.d+1) + \frac{3}{2} \right]$$

$$\psi = \left[ \frac{(x.d+1)^3}{3} - 3 \frac{(x.d+1)^2}{2d^4} + 3(x.d+1) - \ln(x.d+1) - \frac{11}{6} \right]$$

(37)

### 3.5 Consistência do modelo

Para avaliar a consistência do modelo alguns resultados experimentais foram comparados com os obtidos pelo modelo. Esses resultados foram publicados em (Beber, et al. [5]) e em (Andreolli, et al. [18]). Não é parte desse trabalho a execução desses ensaios, sendo os mesmos obtidos dessas publicações. O programa experimental que geraram esses dados experimentais foi conduzido pelo Laboratório de Ensaios e Modelos Estruturais/LEME do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e consistiu na execução de dez protótipos de vigas de concreto armado conforme o detalhamento apresentado nas figuras 7 e 8 (Beber, et al. [5]).

As deformações específicas no concreto, armadura e lâmina de reforço, na seção central de cada protótipo, foram medidas através de extensômetros elétricos. A determinação das cargas aplicadas foi realizada através de uma célula de carga com capacidade para 200 kN. Os deslocamentos verticais foram determinados através de relógios comparadores, com precisão de 0,01 mm, nos pontos de aplicação das cargas e seção central. Os deslocamentos horizontais foram medidos no apoio rotulado móvel. A figura 8 apresenta um fluxograma da entrada de dados no modelo numérico de acordo com a nomenclatura utilizada no presente estudo. A tabela 1 apresenta uma comparação entre resultados obtidos em ensaios de ruptura e dados teóricos obtidos pelo modelo proposto mostrando ótima concordância.

Para a obtenção da carga teórica de ruptura na tabela 1 foi utilizada a equação 38 oriunda do diagrama de momento fletor entre as 2 seções de aplicação da carga, sendo  $M_o$  o momento externo resultante na seção, conforme equação 4. Os modos de ruptura classificados em tipo 1, 2 e 3 são: tipo 1, ruptura devido à tração

Figura 7 - Detalhamento do protótipo e esquema de ensaio (Beber, et al. (5))

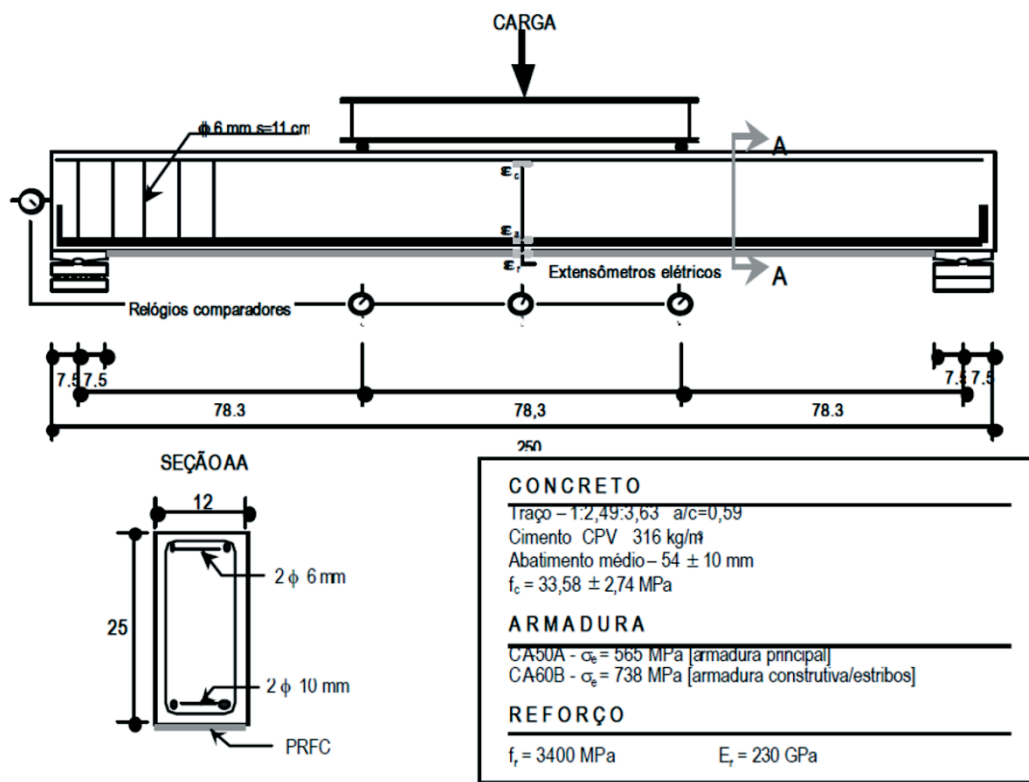
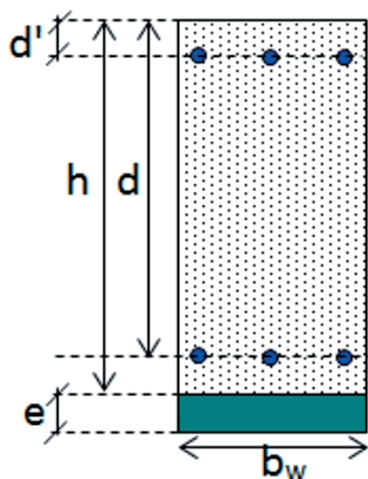


Figura 8 - Dados da viga ensaiada em laboratório



Dados das vigas ensaiadas	
Variável	Valor
$b_w$ [cm]	12
$d$ [cm]	22,4
$d'$ [cm]	2
$f_{cr}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	340 (fibra)
$f_{s2}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	73,8 (aço compressão)
$f_{s1}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	56,5 (aço tração)
$f_c$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	3,36 (concreto)
$A_{s2}$ [cm <sup>2</sup> ]	0,52 (compressão)
$A_{s1}$ [cm <sup>2</sup> ]	1,57 (tração)
$e$ [cm]	0,011 cada camada
$E_r$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	23000 (fibra)
$E_s$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	21000 (aço)
$L$ [cm]	235

excessiva do aço, tipo 2, ruptura devido à tração excessiva do reforço e tipo 3, ruptura devido a falha de aderência entre reforço e concreto.

$$\text{carga} = \frac{6M_e}{L} \quad (38)$$

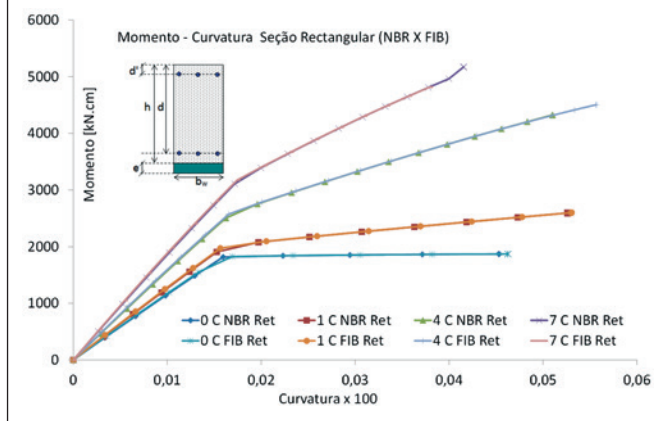
Também foi realizado um estudo paramétrico avaliando o comportamento da função momento - curvatura alterando a quantidade

de reforço, alterando as normas, os tipos de seção e a característica dos materiais que compõe a viga (concreto e aço). Um estudo paramétrico mais abrangente foi contemplado em (Andreolli, et al. [18]). Na figura 9 são apresentados os resultados para seção retangular, enquanto que na figura 10 são apresentados os resultados para a seção T. Ambas as normas foram consideradas mostrando ótima concordância entre elas com as curvas praticamente sobrepostas. No caso da viga de seção tipo T foram considerados os parâmetros da figura 8 incluindo uma mesa de altura  $h_f=5\text{cm}$  e largura  $b_f=20\text{cm}$ .

Tabela 1 - comparações entre os resultados teóricos e experimentais (Adaptado de Beber, et al. (5) e Andreolli, et al. (18))

Viga	Reforço	Resultados experimentais		Resultados teóricos			
		Modo de ruptura*	Carga de ruptura (kN)	Carga de ruptura NBR (kN)	Diferença (%)	Carga de ruptura fib (kN)	Diferença (%)
1	-	tipo 1	47,0	49,18	4,19	49,03	3,88
2	-	tipo 1	47,4	(tipo 1)		(tipo 1)	
3	1 camada	tipo 1	65,2	67,31	5,83	67,47	6,08
4	1 camada	tipo 2	62,0	(tipo 1)		(tipo 1)	
5	4 camadas	tipo 3	102,2	116,18	14,58	116,67	15,06
6	4 camadas	tipo 3	100,6	(tipo 3)		(tipo 3)	
7	7 camadas	tipo 3	124,2	130,76	5,37	123,65	0,36
8	7 camadas	tipo 3	124,0	(tipo 3)		(tipo 3)	
9	10 camadas	tipo 3	129,6	128,94	3,38	124,72	6,88
10	10 camadas	tipo 3	137,0	(tipo 3)		(tipo 3)	

**Figura 9 – Função momento - curvatura para viga seção tipo retangular comparando as normas NBR-6118 e fib. Na nomenclatura, 2 C NBR Ret representa 2 camadas de reforço, norma NBR e seção tipo retangular**



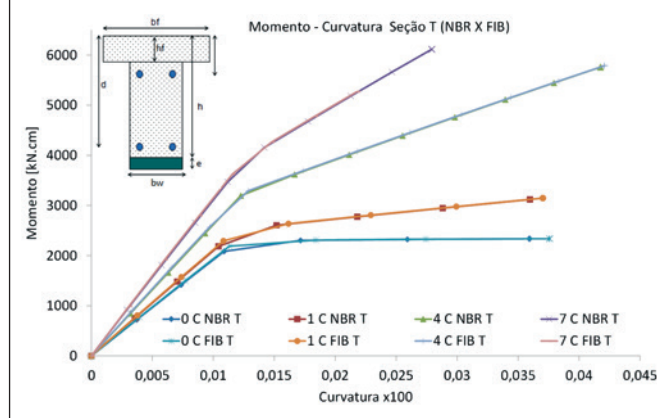
#### 4. Conclusões

O reforço de vigas de concreto armado com compósitos de fibra carbono se constitui em uma alternativa interessante em diversas situações, devido, principalmente, pela praticidade de execução e rapidez. No entanto, para que se possa alcançar eficiência no reforço, é necessário que haja área suficiente de aderência, e que não ocorra a ruptura do concreto à compressão. O modelo teórico se mostrou bastante eficaz em relação aos resultados experimentais, o que corrobora o seu emprego na análise de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos de fibra de carbono ou com chapas de aço. Através do modelo proposto pode-se avaliar a curvatura da viga estrutural em função do momento atuante e avaliar a eficiência da adição de camadas de reforços. O modelo numérico proposto mostrou que as recomendações da NBR-6118 e fib apresentaram resultados muito próximos de momento - curvatura e, para a carga de ruptura. A metodologia proposta se mostrou interessante para avaliar o desempenho do reforço, bem como avaliar a capacidade resistente da estrutura. Recomenda-se o desenvolvimento de modelos e experimentos que incorporem dados desde o início dos carregamentos até a ruptura da viga de forma avaliar o desempenho do modelo em qualquer domínio de deformação.

#### 5. Referências bibliográficas

- [1] SPAGNOLO JR, L. A., SÁNCHEZ FILHO, E. S., VELASCO, M. S. L. RC T beams strengthened to shear with carbon fiber composites, 2013. IBRACON Structural Journal, SP, v. 6, n. 1, p. 1-12, 2013.
- [2] SAADATMANESH, H., EHSANI, M. R. RC beams strengthened with GRFP plates. I: experimental study. Journal of Structural Engineering, New York, ASCE, v.117, n.11, p.3417-3433, 1991.

**Figura 10 – Função momento - curvatura para viga seção tipo T comparando as normas NBR-6118 e fib. Na nomenclatura, 7 C FIB T representa 7 camadas de reforço, norma fib e seção tipo T**



- [3] AN, W., SAADATMANESH, H., EHSANI, M. R. RC beams strengthened with GRFP plates. II: analysis and parametric study. Journal of Structural Engineering, New York, ASCE, v.117, n.11, p.3435-3455, 1991.
- [4] GARCÉS, P., ZORNOZA, E., E. ALCOCEL, G., GALAO, Ó. ANDIÓN, L.G. Mechanical properties and corrosion of CAC mortars with carbon fibers. Construction and Building Materials v. 34, p. 91-96, 2012.
- [5] BEBER, A. J., CAMPOS F. A., CAMPAGNOLO, J. L. Reinforced concrete beam structures with carbon fiber post-impregnated material. Téchne. Revista de Tecnologia da Construção, SP, n. 45, p. 52-55, 2000.
- [6] BEBER, A. J. Structural behavior of reinforced concrete beams with carbon fiber composites. 2003. 317 p. Thesis (Doctorate in Civil Engineering) - UFRGS.
- [7] GARCEZ, M. R., QUININO, U. C. M., SILVA FILHO, L. C. P., MEIER, U. Application of Heat-Activated Films as a new generation of adhesives used for bonding Fiber Reinforced Polymers to concrete., IBRACON Structural Journal, SP, v. 1, n. 4, p. 393-420, 2008.
- [8] FERRARI, V. J., HANAI, J. B. Flexural strengthening of reinforced concrete beams with carbon fibers reinforced polymer (CFRP) sheet bonded to a transition layer of high performance cement-based composite, 2012. IBRACON Structural Journal, SP, v. 5, n. 5, p. 596-626, 2012.
- [9] TIAN, H., ZHANG, Y.X., YE, L., YANG, C. Mechanical behaviours of green hybrid fibre-reinforced cementitious composites. Construction and Building Materials, v. 95 p. 152-163, 2015.
- [10] SANTOS, G. S., NICÁCIO, W. G., LIMA, A. W., MELO, G. S. S. A. Punching strengthening in flat plates of reinforced concrete with carbon fiber reinforced polymer (CFRP). IBRACON Structural Journal, SP, v. 7, n. 4, p.592-695, 2014.
- [11] GAMINO, A. L., SOUSA, J. L. A. O., MANZOLI O. L., BITTENCOURT, T. N. R/C structures strengthened with CFRP

- part II: analysis of shear models. IBRACON Structural Journal, SP, v. 3, n. 1, p. 24-49, 2010.
- [12] GARCEZ, M. R., SILVA FILHO, L. C. P., MEIER, U.R.S. Post-strengthening of reinforced concrete beams with prestressed CFRP strips. Part 1: Analysis under static loading. IBRACON Structural Journal, SP, v. 5, n. 3, p. 343-361, 2012.
- [13] BEBER, A. J., CAMPOS F. A. CFRP Composites on the shear strengthening of reinforced concrete beams. IBRACON Structural Journal, SP, v. 1, n. 2, p. 127-143, 2005.
- [14] YAQUB, M., BAILEY, C.G. Repair of fire damaged circular reinforced concrete columns with FRP composites, Construction and Building Materials v. 25, p. 359-370, 2011.
- [15] SWAMY, R. M., JONES, R., BLOXHAM, J.W. Structural behavior of reinforced concrete beams strengthened by epoxy-bonded steel plates. Journal of Structural Engineering. v. 2, n. 65A, p.59-68, 1987.
- [16] BONO, G. F. F., CAMPOS F. A., PACHECO, A. R. A 3D finite element model for reinforced concrete structures analysis. IBRACON Structural Journal, SP, v. 4, p. 548-560, 2011.
- [17] GAMINO, A. L., BITTENCOURT, T. N., SOUSA, J. L. A. O. R/C structures strengthened with CFRP Part I: analysis of flexural models. IBRACON Structural Journal, SP, v. 2, n. 4, p. 326-355, 2009.
- [18] ANDREOLLI, I., BEBER, A. J., CAMPAGNOLO, J. L. Parametric study of structural strengthening of reinforced concrete beam with carbon fiber composites. DAMSTRUCT, 2000. Third international conference on the behavior of damaged structures. UFF-RJ, 2000.
- [19] EL-REFAIE, S. A., ASHOUR, A. F., GARRITY, S. W. Flexural capacity of reinforced concrete beams strengthened with external plates. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL FAULTS AND REPAIR, 8. London. Proceedings. Edinburgh: Engineering Technics Press, CD-ROM, 1999.
- [20] AL-SAIDY, A.H., KLAIBER, F.W., WIPF, T.J., AL-JABRI, K.S. AL-NUAIMI, A.S. Parametric study on the behavior of short span composite bridge girders strengthened with carbon fiber reinforced polymer plates, Construction and Building Materials v. 22 p. 729-737, 2008.
- [21] HOLLAWAY, L.C., LEEMING, M.B. Strengthening of reinforced concrete structures using externally bonded FRP composites in structural and civil engineering. 1ed. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 327p, 1999.
- [22] AGBOSSOU, A., LAURENT M., LAGACHE, M., HAMELIN, P. Strengthening slabs using externally-bonded strip composites: Analysis of concrete covers on the strengthening, Composites: Part B 39, p. 1125-1135, 2008.
- [23] NBR-6118. Design of concrete structures – procedure. ABNT-Code, Rio de Janeiro, 231 p, 2007.
- [24] FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. Structural concrete: textbook on behaviour, design, and performance. Lausanne, 1999, v.1 (Model Code 1990).
- [25] NBR-7480. Bar and steel wires for reinforced concrete. ABNT-Code, Rio de Janeiro, 1996.
- [26] CHEN, J. F., TENG, J. G. Anchorage strength models for FRP and steel plates bonded to concrete. Journal of Structural Engineering. N.Y, ASCE, v. 127, n. 7, p. 784-791, 2001.