

Numerical analysis of symmetrical and asymmetrical reinforced concrete flat slabs – an integrated slab/column analysis

Análise numérica de lajes planas simétricas e assimétricas em concreto armado – análise integrada laje/pilar



A. PUEL^a
puel@ifsc.edu.br

D. D. LORIGGIO^b
daniel.loriggio@ufsc.br

Abstract

This paper studies the modeling of symmetric and asymmetric flat slabs, presenting alternatives to the problem of singularity encountered when the slab is modeled considering columns as local support. A model that includes the integrated slab x column analysis was proposed, distributing the column reactions under the slab. The procedure used transforms the bending moment and column axial force in a distributed load, which will be applied to the slab in the opposite direction of gravitational loads. Thus, the bending moment diagram gets smooth in the punching region with a considerable reduction of values, being very little sensible to the variation of used mesh. About the column, it was not seen any significant difference in the axial force, although the same haven't occurred with the bending moments results. The final part of the work uses geoprocessing programs for a three-dimensional view of bending moments, allowing a new comprehension the behavior of these internal forces in the entire slab.

Keywords: flat slabs, reinforced concrete, FEM, singularity.

Resumo

Este trabalho estuda a modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas, apresentando alternativas para o problema da singularidade ocorrido quando se modela a laje considerando os pilares como apoio pontual. Foi proposto um modelo que contempla a análise integrada Laje x Pilar, distribuindo a reação do pilar na laje. O procedimento utilizado consiste em transformar o momento fletor e o esforço normal do pilar em um carregamento distribuído, que será adicionado na laje como carregamento no sentido contrário à ação das cargas gravitacionais. Com isso, tem-se um arredondamento do diagrama de momento fletor da laje na região do pilar puncionado com uma considerável redução dos valores, sendo pouco sensível à variação da malha utilizada. Em relação ao pilar, o esforço normal não apresentou diferenças significativas, porém o mesmo não ocorreu com o momento fletor. A parte final do artigo utiliza programas de geoprocessamento para uma visualização tridimensional dos momentos fletores, permitindo uma nova compreensão do comportamento desses esforços ao longo de toda a laje.

Palavras-chave: lajes planas, concreto armado, método dos elementos finitos, singularidade

^a Instituto Federal de Santa Catarina, Departamento Acadêmico da Construção Civil, Florianópolis, Brasil;
^b Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Civil, Florianópolis, Brasil.

1. Introdução

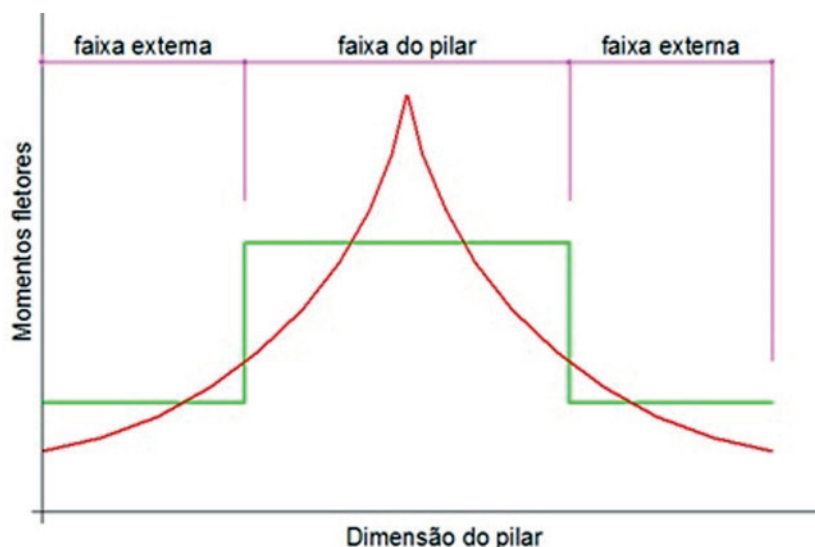
As lajes planas constituem um sistema estrutural interessante para aplicações em projetos, propiciando alterações de *lay-out* em ambientes internos, pois dispensam o uso de vigas. As análises desse tipo de laje são complexas e geralmente projetadas utilizando *softwares* desenvolvidos para análises lineares, baseadas na Teoria das Placas em regime elástico, utilizando métodos numéricos (SKORPEN ET AL [1]). Cita-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) ou a Analogia de Grelha, ambos

os procedimentos largamente utilizados pelo meio técnico. A utilização de modelos numéricos que simulam a ligação das lajes com os pilares como sendo pontuais, fornecem resultados com grandes concentrações de esforços nessas regiões, conduzindo a valores elevados para os momentos fletores na laje e distorções dos valores de momentos fletores nos pilares. Resultados desse tipo necessitam de uma análise mais minuciosa para serem utilizados em projetos estruturais. Segundo CHOI ET AL [2], o comportamento estrutural da ligação laje/pilar das lajes planas é muito complicado, pois são compostos por dois tipos diferentes de

Figura 1 - Distribuição dos momentos fletores em uma laje plana sobre apoios pontuais adaptado de SKORPEN ET AL (1)

Código	Faixa de distribuição	Faixa do pilar	Faixa externa
TMH 7 1989, Código de boas práticas para a elaboração de estradas e pontes na África do Sul - Parte 3	$b_{col} + 3d$ (se largura da sapata > 1,5 ($b_{col} + 3d$))	66,67%	33,33%
SANS 10100 2000, O uso do concreto estrutural, Parte 1	B	$\left[\frac{2}{D/B+1} \right] \times 100$	$\left[\frac{D/B-1}{D/B+1} \right] \times 100$
Eurocode 2, Projeto de estruturas de concreto. EN 1992-1-1:2003	$b_{col} + 3d$ (se largura da sapata > 1,5 ($b_{col} + 3d$))	66,67%	33,33%
BS 8110:1997 Uso do concreto estrutural, Parte 1	$b_{col} + 3d$ (se largura da sapata > 1,5 ($b_{col} + 3d$))	66,67%	33,33%

b_{col} = dimensão do pilar na direção do comprimento; d = profundidade da laje; D =maior dimensão da sapata; B = menor dimensão da sapata



elementos: barra (pilar) e elementos de placa (laje).

Sabe-se que a ligação entre a laje e o pilar não é um ponto, mas sim regiões de comportamento complexo. Os modelos numéricos que utilizam os pilares como apoios pontuais desprezam o efeito favorável da região de interação com o pilar. Esse efeito deveria ser levado em consideração, propiciando uma análise mais adequada para a laje e para o pilar. Torna-se necessário então melhorar os modelos para a obtenção dos esforços solicitantes envolvidos nessas regiões.

Existem vários modelamentos possíveis para se levar em conta esses efeitos, que podem variar muito em complexidade, sendo que muitos deles não são adequados para a utilização corrente em projetos estruturais. MURRAY ET AL [3] comenta: a forma como se modela o comportamento da ligação pilar/laje é o ponto crítico da análise de lajes planas.

Este trabalho pretende contribuir para o desenvolvimento de modelos para a análise estrutural que possam ser usados em projetos de estruturas de concreto armado, estudando, em regime elástico linear, as lajes planas de edificações integradas aos pilares, utilizando o Método dos Elementos Finitos. E, de modo a facilitar a análise dos resultados na região de encontro da laje com o pilar e a obtenção de resultados para o dimensionamento das lajes, procurou-se contribuir na visualização gráfica dos resultados utilizando recursos disponíveis em outras áreas da engenharia, permitindo visualizações 3D e traçando cortes em regiões de interesse.

O programa computacional SAP2000 [4], ArcGis/ArcMap [5] e Global Mapper [6] foram adotados como ferramentas auxiliares para o desenvolvimento do trabalho.

2. Alternativas de modelagem na ligação Laje x Pilar

Teoricamente, quando uma carga concentrada é aplicada em uma laje, ela provoca momentos fletores que tendem ao infinito em seu ponto de aplicação, gerando pontos de singularidade. Consequen-

temente, em um método numérico, quando um pilar para apoio de lajes é modelado como um ponto isolado, provoca o efeito de uma carga concentrada de sentido contrário, resultando em momentos fletores muito elevados no ponto de aplicação da carga e no entorno dela. Estudos realizados por PUEL [7] mostraram que esses momentos serão tanto maiores quanto mais refinada for a malha. Segundo SKORPEN ET AL [1], os fundamentos da análise de lajes planas pelo MEF estão difundidos no meio técnico. Porém, a forma como se modela a ligação laje/pilar ainda abre margem para inúmeras formas de interpretações entre os projetistas.

A NBR 6118:2014 [8] e mesmo o Eurocode 2 [9], que é um código respeitado pelo meio técnico, não prescrevem um tipo de análise ou modelagem para interpretar os resultados obtidos em uma análise numérica para os efeitos de cargas concentradas. Isso naturalmente conduz a inúmeras formas de interpretação, que depende da forma como se modela o pilar na ligação laje plana/pilar, ficando a cargo da experiência e *feeling* dos projetistas.

Outro enfoque para o projeto de lajes planas é a utilização do processo dos pórticos equivalentes, que corresponde a um dimensionamento que leva em conta o comportamento plástico das seções transversais de concreto armado da laje, ou seja, um dimensionamento com redistribuição de esforços. Segundo MURRAY ET AL [3], o projeto de lajes planas com esse enfoque baseia-se em normas cujas prescrições são desenvolvidas com base em pesquisas empíricas.

Alguns códigos internacionais prescrevem critérios para distribuir o pico de momentos fletores sobre apoios pontuais para o cálculo de sapatas, conforme apresentado na Figura 1.

A NBR 6118:2014 [8] em seu item 14.7.8 permite a análise estrutural de lajes planas pelo Método dos Pórticos Equivalentes (MPE). Trata-se de um processo baseado em uma análise elástica aproximada, com redistribuição, que consiste em adotar em cada direção pórticos múltiplos, para obtenção dos esforços solicitantes, cujas inércias serão iguais às da laje limitada pela metade da distância entre duas linhas de pilares conforme Figura 2.

Figura 2 – Faixas de distribuição dos momentos fletores segundo a NBR 6118:2014 (8)

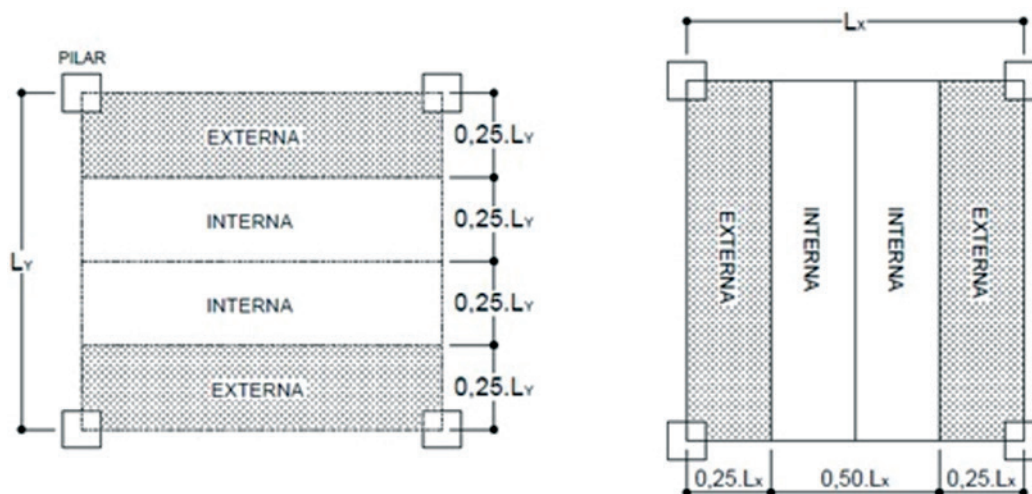
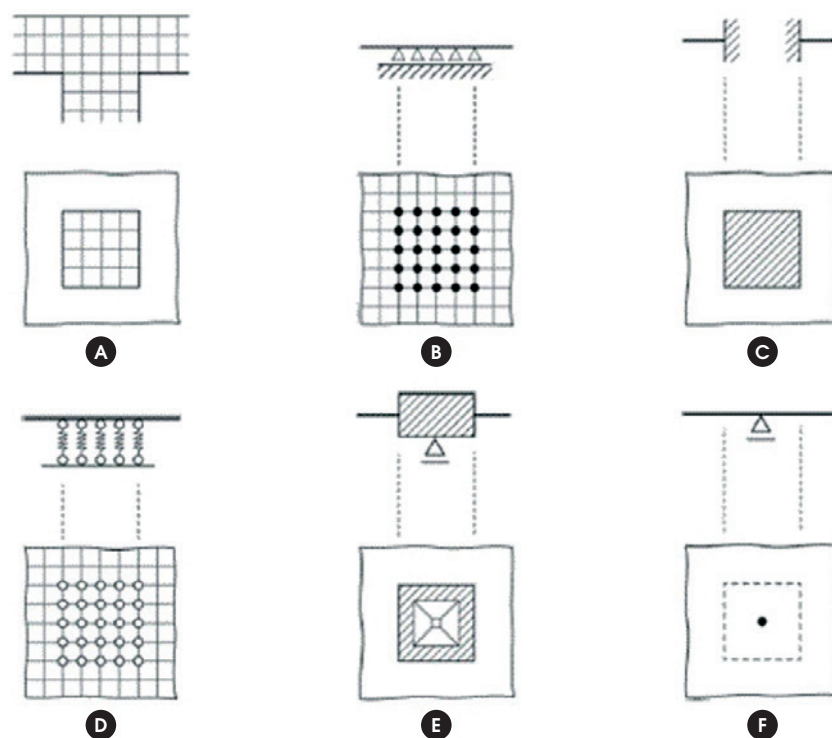


Figura 3 – Formas de modelagem da ligação pilar/laje plana (ROMBACH (10))



Para cada pórtico deve ser considerada a carga total. A distribuição dos momentos obtida em cada direção, segundo a NBR 6118:2014 [8], item 14.7.8, deve ser feita da seguinte maneira:

- 45,0 % dos momentos positivos para as duas faixas internas;
- 27,5 % dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- 25,0 % dos momentos negativos para as duas faixas internas;
- 37,5 % dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

O processo dos pórticos equivalentes fornece resultados mais econômicos que o projeto baseado em análises elásticas lineares, mas deve ser usado apenas nas verificações de Estados Limites Últimos. Para verificações de Estados Limites de Serviço, uma Análise Elástica Linear ou uma Análise Não-Linear continua sendo necessária. E, portanto, deve ser feita uma modelagem adequada da região da ligação da laje com o pilar. Também é importante notar que o processo dos pórticos equivalentes não pode ser usado em lajes com grandes assimetrias principalmente no posicionamento dos pilares.

ROMBACH [10] listou algumas maneiras de modelar os pilares de apoio de lajes planas, apresentadas na Figura 3.

- a) Modelo 3D contínuo: conduz a bons resultados, porém demanda um tempo considerável para elaboração e processamento;
- b) Apoios pontuais ao longo da seção transversal do pilar: não é adequado, pois não representa adequadamente a rigidez do pilar;
- c) Apoios do 3º gênero nas faces do pilar: não é adequado, pois não representa adequadamente a rigidez do pilar;

- d) Apoios elásticos na área da seção transversal do pilar: indicado, sem restrições;
- e) Região rígida da seção transversal do pilar: permite modelar adequadamente a rigidez do pilar;
- f) Apoio pontual: esta é a forma mais equivocada para modelar a ligação laje plana x pilar mas, provavelmente, a mais utilizada.

SKORPEN ET AL [1], apresentou um comparativo entre os métodos tradicionais de análise de lajes planas (apresentados na Figura 1) com o método dos elementos finitos e também com resultados experimentais. A Figura 4 apresenta o comparativo de momentos fletores na ligação laje plana X pilar, comparando os métodos apresentados na Figura 1 (chamados de SD) com a análise pelo MEF considerando a modelagem da ligação laje plana x pilar idealizada por ROMBACH [10].

Os casos (a) e (g) foram os que apresentaram os melhores resultados desse comparativo. Segundo os Autores, o caso (i) deve ser evitado, pois não leva em consideração a rigidez do pilar. O comparativo com os ensaios experimentais ratificam os resultados apresentados pelos casos (a) e (g) e também com os critérios apresentados na Figura 1.

HENNRICHS [12] estudou, a partir de uma laje de referencia, com dimensões de 10 x 10 metros e um pilar central, os deslocamentos, momentos fletores positivos e negativos e a reação no pilar central utilizando a Teoria das placas em regime elástico. Os resultados mostraram que, ao considerar o pilar central como apoio pontual ou como carregamento distribuído na área da seção transversal do pilar, pouca diferença ocorreu nos momentos

Figura 4 – Comparativo momentos fletores sobre o pilar (SKORPEN ET AL (1))

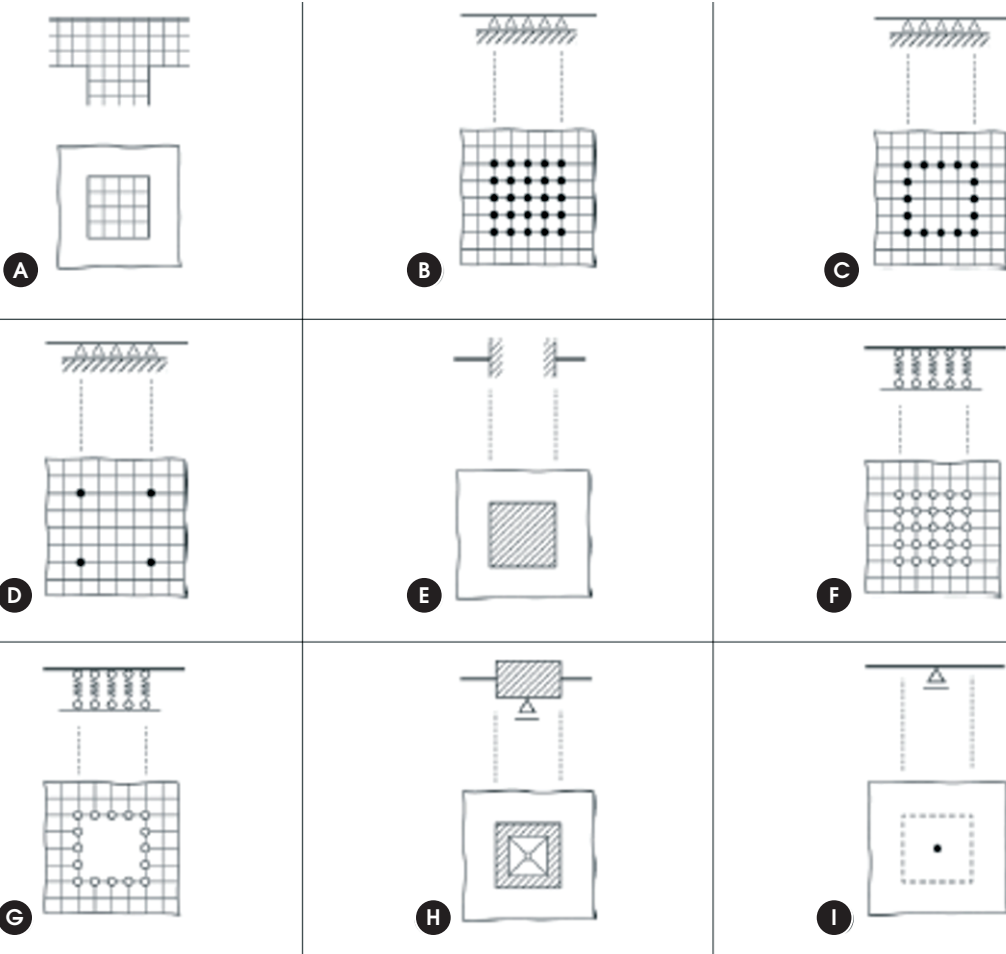
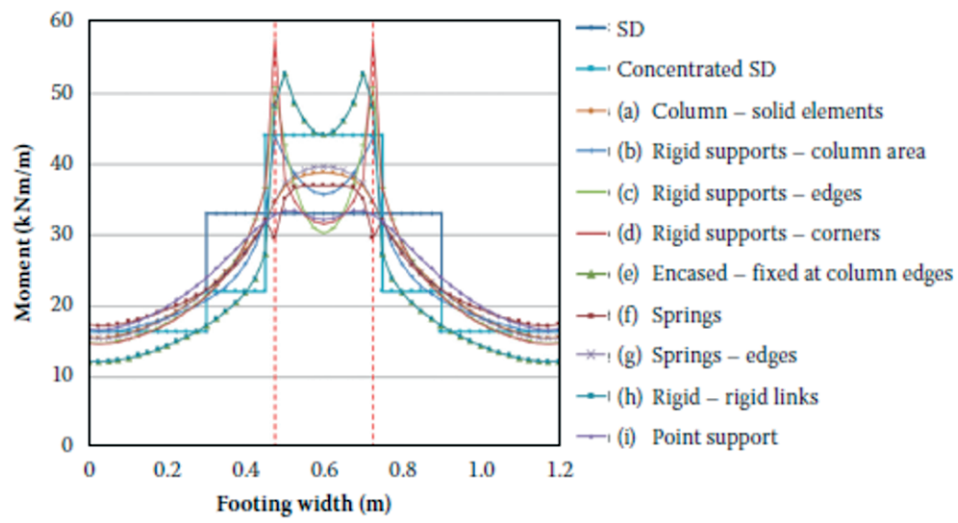


Figura 5 – Modelo com pilar definido como elemento sólido (HENNRICHS (12))

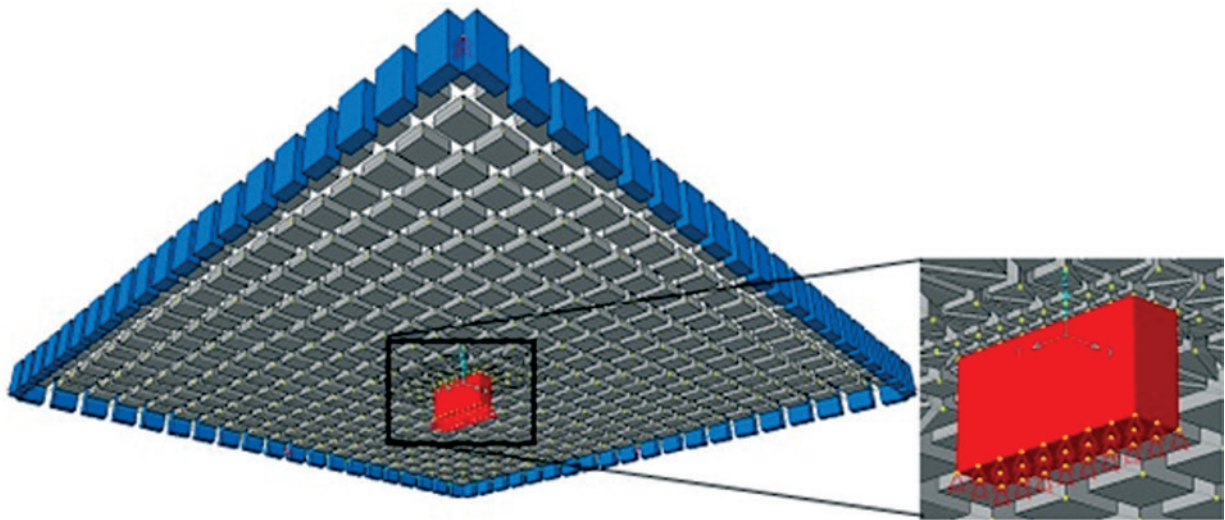
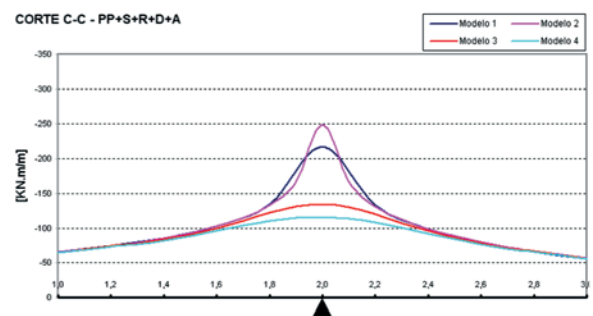
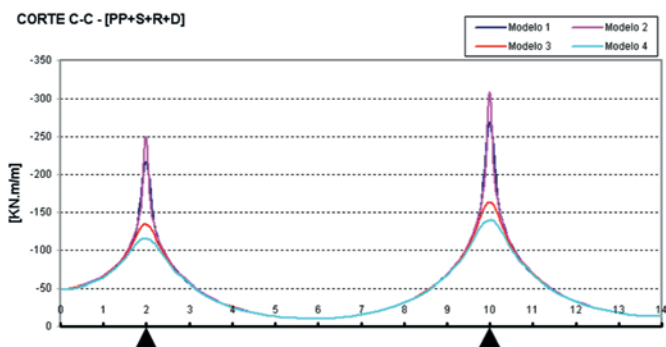
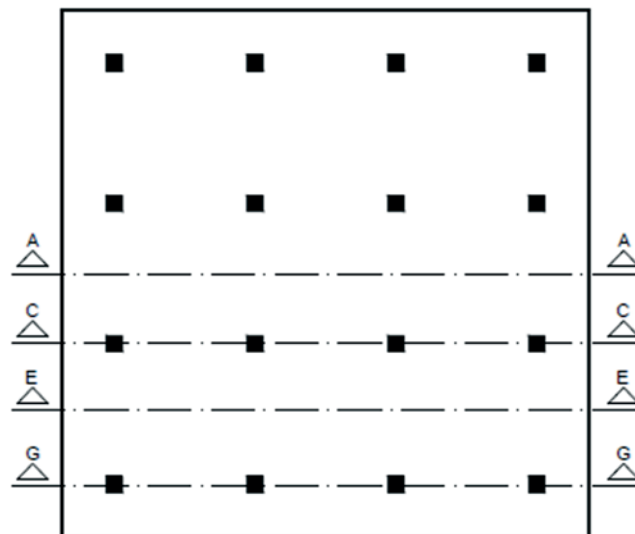
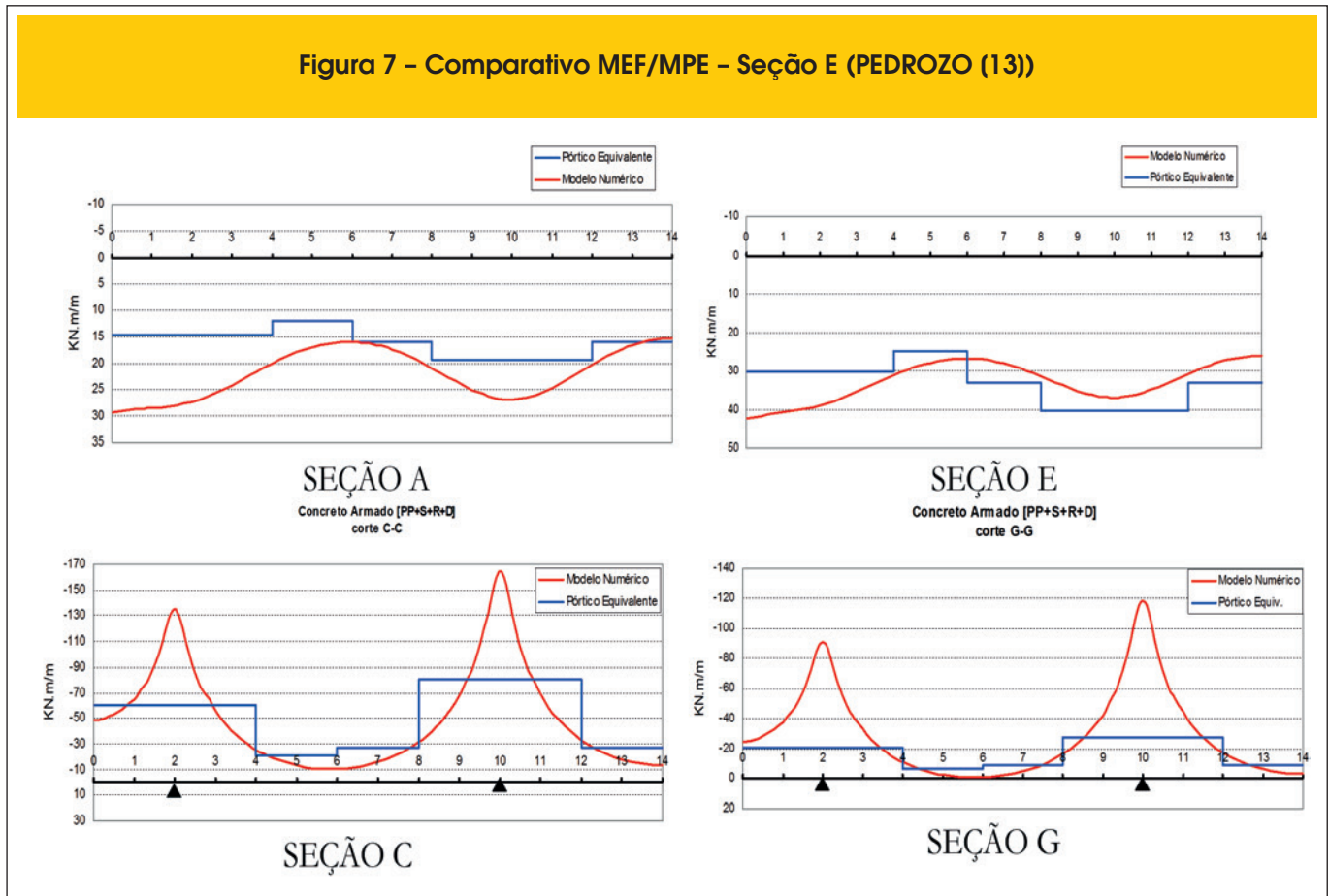


Figura 6 – Momentos fletores na Seção C – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO (13))



Ampliação momentos fletores sobre o apoio da esquerda

Figura 7 – Comparativo MEF/MPE – Seção E (PEDROZO (13))



positivos, deslocamentos e reação no pilar central. Porém, o momento negativo máximo diminui, sendo que o diagrama de momentos sofreu um arredondamento na região do pilar central. Esses resultados foram comparados com métodos numéricos, entre eles, Método dos Elementos Finitos e Analogia de Grelha. Os valores foram parecidos para malhas finas, havendo diferenças significativas para malhas grosseiras. HENNRICHS [12] também idealizou um modelo analisado pelo MEF que considera o pilar central com elementos Sólidos, procurando simular as dimensões reais do elemento (Figura 5).

Os resultados em termos de momento fletor positivo, carga no pilar e deslocamentos máximos apresentaram bastante semelhança com os resultados obtidos pela Teoria das Placas em Regime Elástico. Porém, com relação aos momentos negativos na região do pilar central, houve picos de valores nas bordas do pilar. Tais picos foram maiores em pilares com uma dimensão bem inferior a outra (pilares alongados).

PEDROZO [13], estudou critérios de projeto de lajes lisas protendidas, sendo realizados exemplos de dimensionamento de pavimentos com e sem balanços, comparando os resultados pelo processo do pórtico equivalente e pelo MEF, utilizando o *software* SAP 2000 [4]. Na análise feita pelo MEF, foram estudados exemplos modelando o pilar como apoio pontual e como reação distribuída na laje na área da seção transversal do pilar, com sentido contrário a aplicação do carregamento na laje.

Os modelos 01 e 02, apresentados em PEDROZO [13], conside-

ram o pilar como apoio pontual, sendo a malha 20x20 e 10x10, respectivamente. Os modelos 03 e 04 distribuem a reação do pilar na laje, sendo esse último considerando a área do pilar projetada no centro geométrico da laje. Como consequência do modelo que distribui a reação do pilar na laje, houve um arredondamento do diagrama de momentos fletores, sendo o arredondamento dos momentos fletores do Modelo 04 mais acentuado (Figura 6).

Houve também o comparativo dos momentos fletores obtidos na laje pelo Modelo 04 (que considera a análise pelo MEF) com o MPE. Esse tipo de comparação pode servir para fornecer critérios para o dimensionamento da laje baseados em análises elásticas lineares (Figura 7).

As conclusões desse comparativo mostraram que os momentos positivos tiveram uma diferença acentuada nos pilares de extremidade. O mesmo ocorreu com os momentos negativos, sendo numericamente superiores os momentos obtidos pelo MEF.

PUEL [7], estudou em lajes planas simétricas e assimétricas o comportamento dos momentos fletores na laje e no pilar ao modelar um pilar como apoio pontual, como reação distribuída na laje na região do pilar e também como reação distribuída na região do pilar projetada no centro geométrico da laje (critério análogo ao efeito de uma roda sobre o tabuleiro de uma ponte), conforme mostrado na Figura 8.

PUEL [7] estudou também a existência de um núcleo rígido na região da seção transversal do pilar, conforme prescrito na NBR 6118:2014 [1], item 14.6.2.1: "Os trechos de elementos lineares

pertencentes à região comum ao cruzamento de dois ou mais elementos podem ser considerados como rígidos (nós de dimensões finitas)". (Figura 9).

A ideia central do modelo proposto neste trabalho consiste em distribuir a reação do pilar em uma determinada área, como sendo um carregamento de baixo para cima aplicado na laje, simulando as dimensões do pilar e sua interação com a laje. Este procedimento é similar ao procedimento usado no arredondamento dos momentos negativos em cima dos apoios em vigas contínuas de Concreto Armado, preconizado pela NBR 6118:2014 [8] e como pode ser visto em GLÓRIA [11]. Esse modelo, como vai ser demonstrado mais adiante, elimina a singularidade, arredonda os momentos negativos em ambas as direções, e torna o modelo muito menos dependente da malha adotada para a análise. E, além

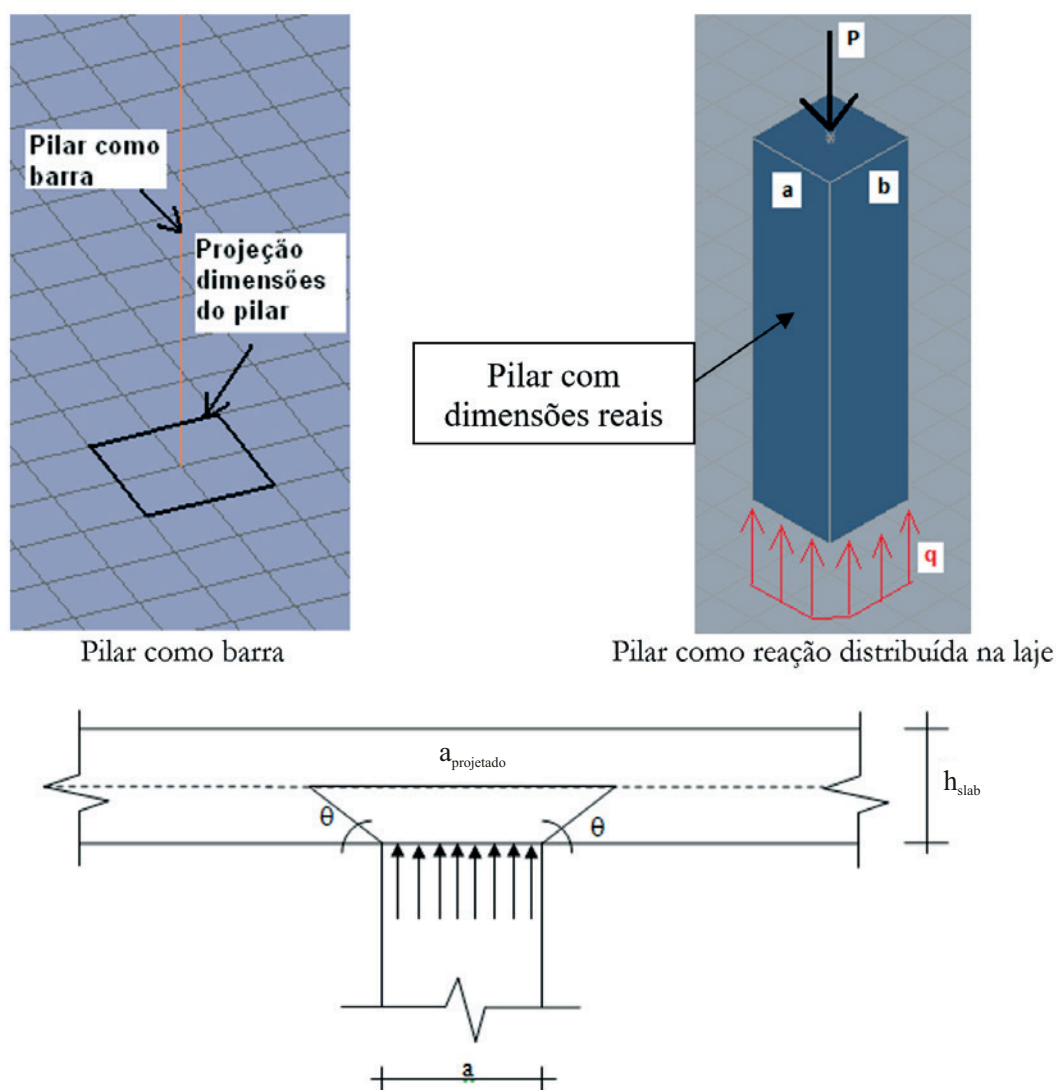
de fornecer bons resultados para o dimensionamento, é um modelo muito mais simples que outros modelos encontrados na bibliografia.

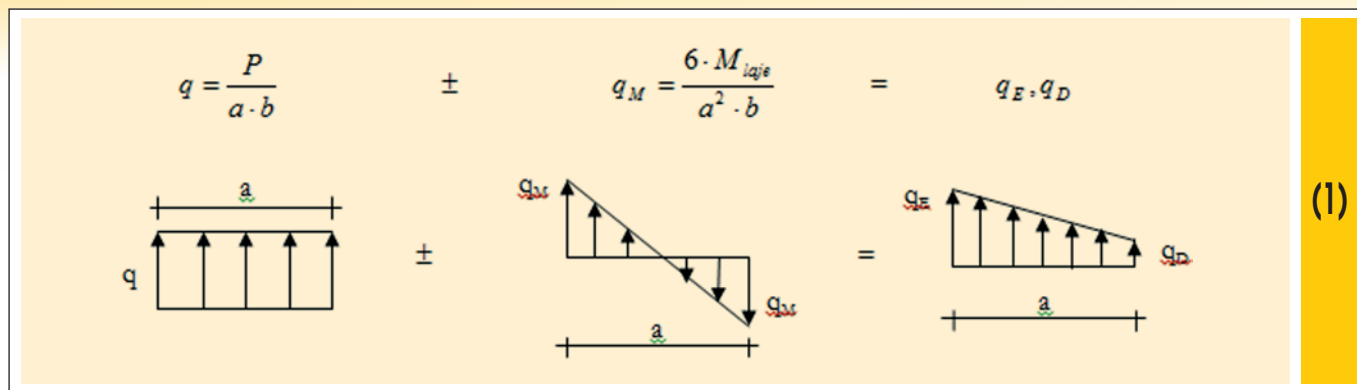
3. Metodologia para distribuição da reação do pilar na laje

Quando há uma assimetria do posicionamento do pilar em relação à laje, ou o carregamento é assimétrico ou existem forças horizontais, além do esforço normal surgem esforços de flexão no pilar. A aplicação do carregamento como reação distribuída na laje na região do pilar deve levar em consideração binários de forças, calculados a partir da soma dos momentos fletores aplicados na laje, pelos trechos superior e inferior do pilar.

A solidariedade do pilar com a laje é obtida através do modelo

Figura 8 – Alternativas de representar o pilar como apoio para laje plana (PUEL (7))





análogo ao de viga contínua, em que se modela metade do pilar para cima e metade do pilar para baixo. Com isso, quando existe uma assimetria no carregamento e/ou na geometria entre a laje e o pilar causador da punção, tem-se uma rotação do nó na junção do pilar com a laje, o que causa flexão no elemento, conforme mostrado na Figura 10.

A metodologia para simular os esforços axiais e de flexão do pilar como reação aplicada na laje consiste em um processo iterativo, mostrado resumidamente na Figura 11.

As etapas necessárias nesse processo, são apresentadas de maneira detalhada à seguir:

- 1) Analisa-se inicialmente a estrutura modelando o pilar como apoio pontual, obtendo-se os diagramas de esforço normal e momentos fletores do pilar;
- 2) Encontra-se o valor de “q” e de “q_M”. Faz-se a sobreposição dos efeitos normais (q) e de flexão (q_M) do pilar, obtendo-se um diagrama de carregamento final com valores q_E e q_D, adicionando-o na laje.

Onde:

q = Valor do carregamento aplicado como reação na laje devido ao esforço normal no pilar

a = dimensão do pilar no plano de atuação do momento;

b = outra dimensão do pilar;

P = Esforço normal no pilar;

M_{laje} = Momento fletor atuante na laje obtido através do somatório do momento do pilar superior e do momento do pilar inferior

q_M = Valor da extremidade do carregamento aplicado como reação na laje;

q_E = carregamento na face esquerda do pilar;

q_D = carregamento na face direita do pilar.

- 3) Substituem-se as barras dos pilares (modelado metade para cima e metade para baixo), por um apoio do segundo gênero, conforme mostrado na Figura 12;
- 4) Analisa-se novamente a estrutura, obtendo-se no nó do vínculo do pilar (circulado em vermelho na Figura 12);
- 5) A reação de apoio deve ser nula ou praticamente nula. Caso não for, deve-se corrigir o esforço axial inicial a partir da diferença encontrada nessa iteração;
- 6) Através da rotação do nó, verifica-se qual é o novo momento atuante, multiplicando-se a rotação do nó pela rigidez de uma mola que simula a rigidez da barra do pilar, modelado metade para cima e metade para baixo da laje, conforme mostrado na Figura 13.

A rigidez da mola (k_{mola}) é calculada da seguinte forma:

$$k_{mola} = k_{sup} + k_{inf}$$

$$k_{mola} = \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{sup}}{L_{sup} / 2} + \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{inf}}{L_{inf} / 2}$$

Figura 9 - Trechos rígidos adaptados da NBR 6118:2014 (8)

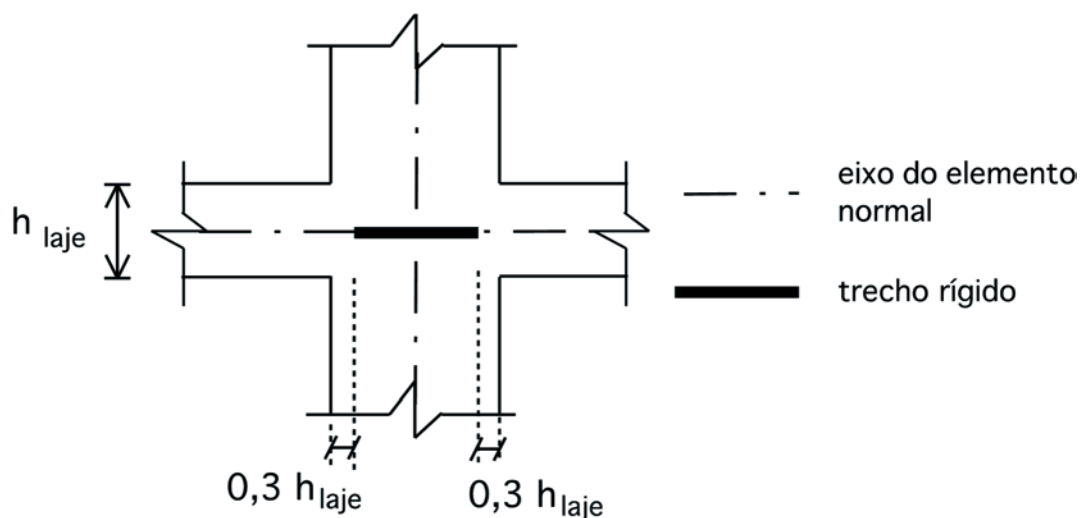


Figura 10 – Pilar modelado analogamente a uma viga contínua (PUEL (7))

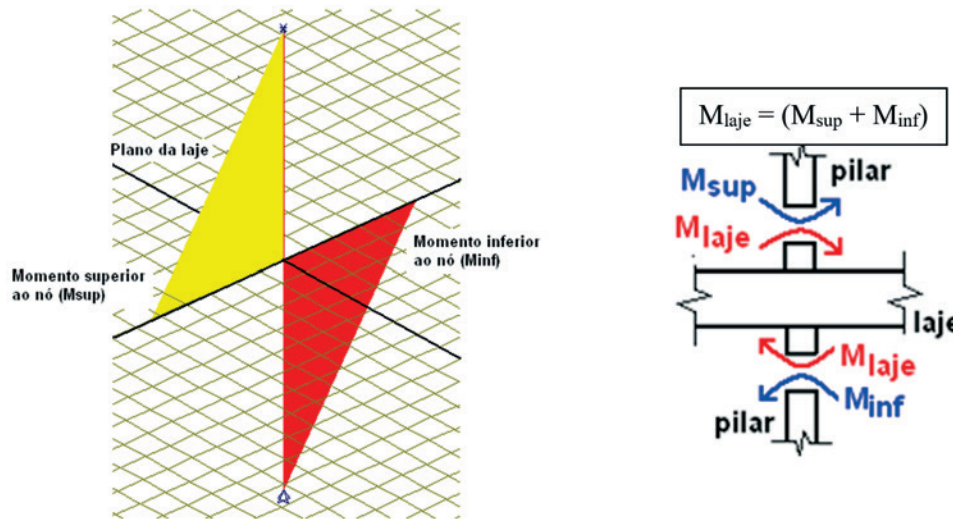


Figura 11 – Esquema do método simulando o pilar como reação na laje (PUEL (7))

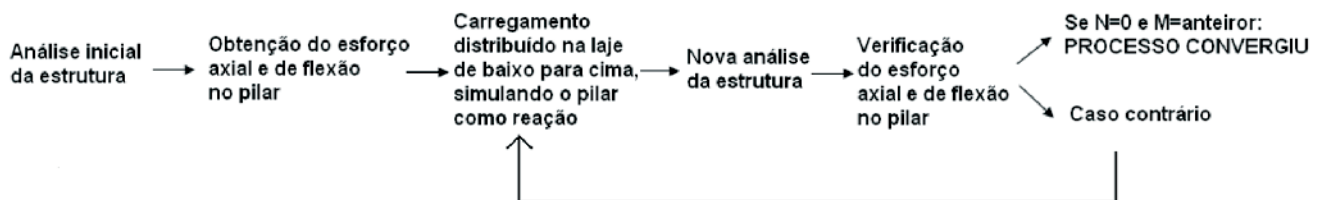
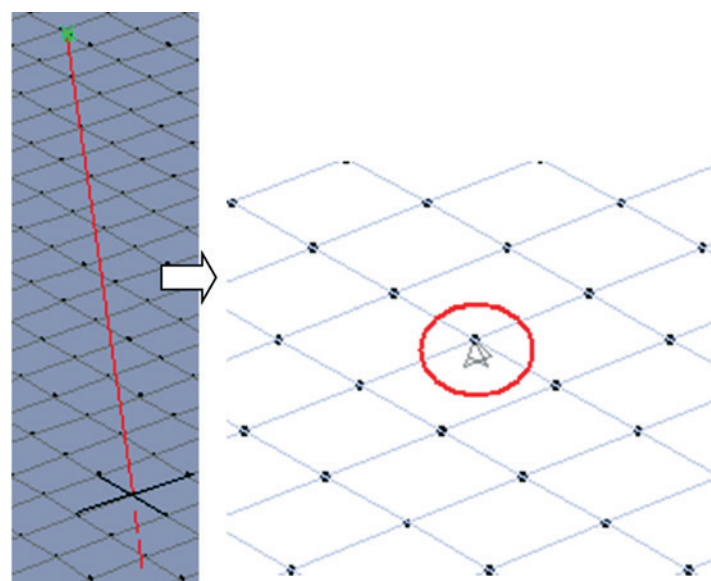


Figura 12 – Pilar modelado como barra substituído por um apoio do segundo gênero (PUEL (7))



Onde:

k_{mola} = rigidez da mola, que corresponde à soma das rigidezes dos trechos superior e inferior do pilar ;

E_{cs} = Módulo de elasticidade secante do concreto;

I_{sup} = Inércia do pilar superior;

I_{inf} = Inércia do pilar inferior;

L_{sup} = Comprimento do pilar superior;

L_{inf} = Comprimento do pilar inferior.

Por fim, o momento será calculado da seguinte forma:

$$M_{laje} = k_{mola} \cdot \varphi \quad (3)$$

Onde:

M_{laje} = Momento fletor atuante na laje;

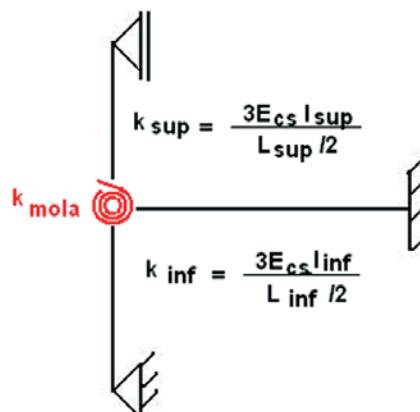
k_{mola} = rigidez da mola;

φ = rotação no nó do vínculo do pilar (circulado em vermelho na Figura 12), oriundo do diagrama de carregamento obtido por q_E e q_D , aplicado como reação na laje, conforme mostrado na Figura 14.

Caso o momento fletor atuante no nó do vínculo do pilar nessa iteração não seja igual ao momento anterior, utilizado para encontrar q_E e q_D , torna-se necessário repetir o processo. A convergência se dá quando o momento obtido na iteração atual é igual ou praticamente igual ao utilizado na iteração anterior. É necessário que se estipule um limite mínimo de convergência dos momentos na mola.

7) Dessa forma, quando o processo não converge, é necessário ajustar os valores de “q” e “ q_M ” a partir dos novos valores de esforço normal e momento fletor, compondo um novo diagrama de carregamentos a partir dos valores de q_E e q_D . Esse novo diagrama será mais uma vez aplicado na laje até que

Figura 13 – Rigidez da mola: metade do pilar para cima e metade do pilar para baixo (PUEL (7))



se tenha a convergência do esforço normal e momento fletor, dentro de uma tolerância mínima adotada pelo projetista.

4. Pilar como reação na laje

Ao representar o pilar como reação na laje plana distribuída na área da seção transversal, é necessário que a geometria da malha a ser utilizada na modelagem em MEF coincida com essas dimensões. O mesmo ocorre para a situação em que há trecho rígido e quando se distribui a reação na região do pilar projetada no centro geométrico da laje (critério análogo ao efeito de uma roda sobre o tabuleiro de uma ponte – $a_{projetado}$ Figura 8).

Figura 14 – Rotação do nó do vínculo do pilar (PUEL (7))

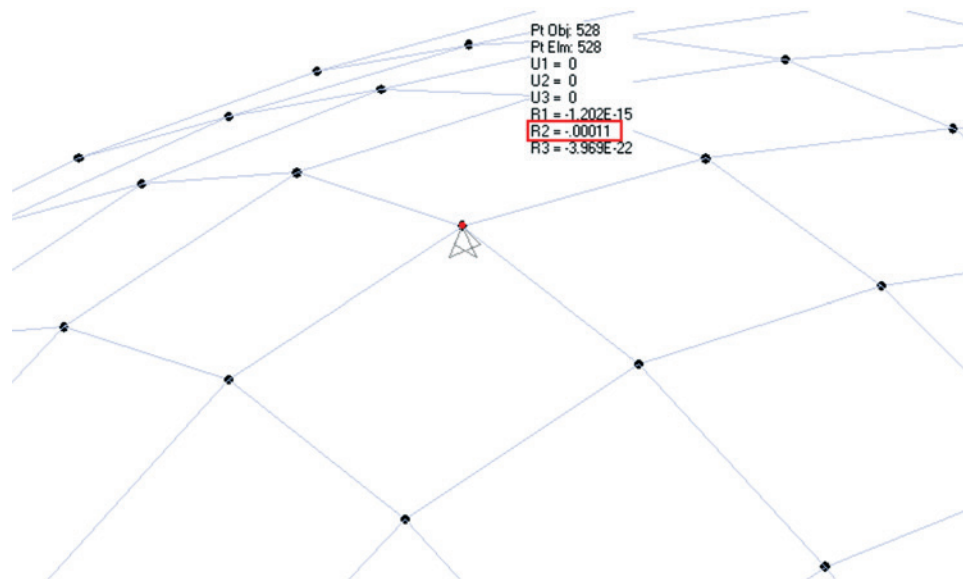


Figura 15 – Região rígida do pilar

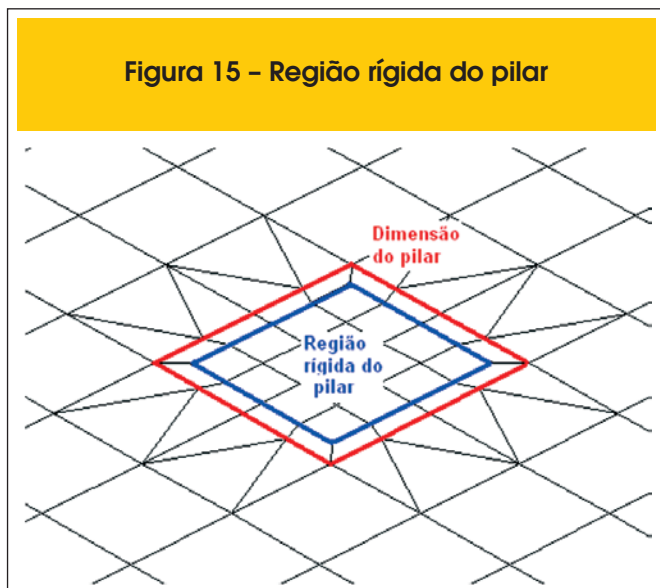


Figura 16 – Região do pilar projetada no centro de gravidade da laje



Dessa forma, é necessário criar transições na malha para realizar esse ajuste geométrico, conforme mostrado na Figura 15 e Figura 16. A adoção dos trechos rígidos na seção do pilar seguiu as prescrições da NBR 6118:2014 [8], item 14.6.2.1. Essa modelagem também foi sugerida por ROMBACH [10] Caso “e” da Figura 3.

5. Descrição dos modelos

As análises numéricas realizadas modelaram o pilar de diferentes

maneiras. A primeira delas foi como um elemento de barra ligado diretamente nos elementos de placa da laje. Esse modelamento foi usado apenas para comparação com os resultados de modelos mais adequados. Foram feitos modelos que substituem a reação do pilar como carga aplicada de baixo para cima tanto na dimensão do pilar quanto na área da dimensão do pilar projetada no centro geométrico da laje. Finalmente foram feitos modelos com trechos rígidos para simular a dimensão do pilar, com ou sem reações distribuídas.

Figura 17 – Descrição do modelo adotado (PUEL (7))

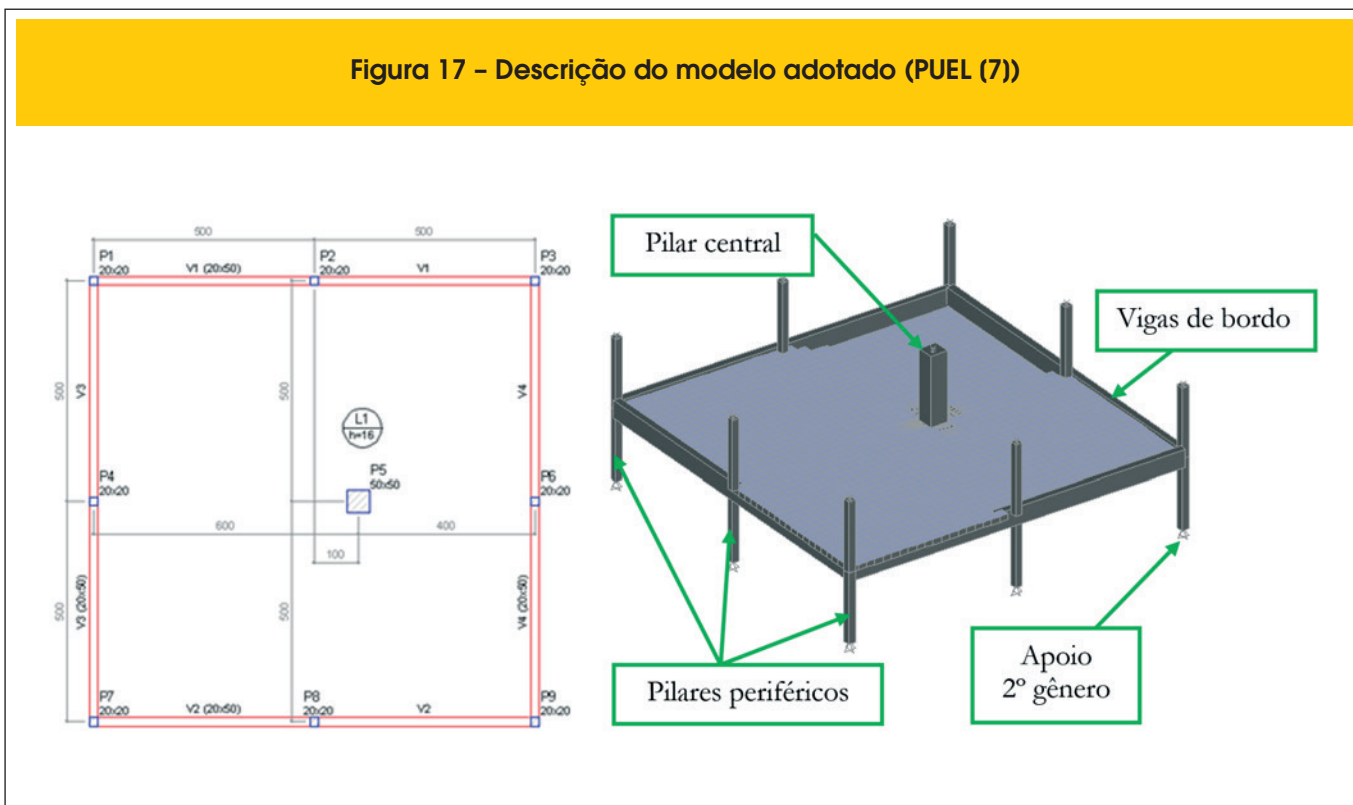


Tabela 1 – Resumo dos modelos utilizados

Caso	Assimetria pilar central	Núcleo rígido pilar central	Subcasos
1	Não tem	Não	1.1 – Pilar como apoio pontual 1.2 – Pilar como reação distribuída 1.3 – Pilar como reação distribuída no centro de gravidade da laje
2	Não tem	Sim	2.1 – Pilar como apoio pontual 2.2 – Pilar como reação distribuída 2.3 – Pilar como reação distribuída no centro de gravidade da laje
3	1 m	Não	3.1 – Pilar como apoio pontual 3.2 – Pilar como reação distribuída 3.3 – Pilar como reação distribuída no centro de gravidade da laje
4	1 m	Sim	4.1 – Pilar como apoio pontual 4.2 – Pilar como reação distribuída 4.3 – Pilar como reação distribuída no centro de gravidade da laje

Foram estudadas duas estruturas, uma com pilar simetricamente posicionado em relação às vigas de contorno e outra com uma assimetria na posição desse pilar. Os modelos realizados para cada estruturas foram chamados de casos e são apresentados no item a seguir.

A Figura 17 mostra a estrutura com pilar assimétrico, que possui uma excentricidade no pilar de 1m em relação ao eixo vertical quando comparado com a estrutura simétrica.

Dados:

- $F_{ck} = 25 \text{ MPa}$;
- $E_{cs} = 2,38 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$;
- Sobrecarga = $2,0 \text{ kN/m}^2$;
- Revestimento = $1,0 \text{ kN/m}^2$;
- Peso próprio = $0,16 \times 25 = 4,0 \text{ kN/m}^2$;
- Espessura da laje maciça = 16,0 cm
- Carregamento total aplicado na laje = $7,0 \text{ kN/m}^2$;
- Vigas de bordo seção 20 x 50 cm;
- Pilares periféricos seção 20 x 20 cm;
- Pilar central seção 50 x 50 cm;
- $k_{mola} = 371875 \text{ kNm}$;
- Dimensão trecho rígido = 40,4 cm;
- Dimensão pilar projetado = 66 cm.
- Rigidez trecho rígido = 100 vezes a rigidez da espessura da laje.

Como condição de contorno restringiram-se os nós das extremidades superior e inferior dos pilares com apoios do primeiro e segundo gênero, respectivamente. Idealizou-se, portanto, o modelo análogo ao de viga contínua prescrito na NBR 6118:2014 [8].

A laje foi modelada com elementos do tipo "PLATE THIN", adequadamente estudadas pela Teoria das Placas Delgadas, baseado nas teorias de Kirchhoff (DKQ – *discrete Kirchhoff quadrilateral*), onde se desprezam as deformações por esforço cortante. Os pilares e vigas foram modelados com elementos do tipo "FRAMES".

6. Resumo dos modelos analisados no software SAP 2000 [4]

Apresentam-se resumidamente na Tabela 1 os modelos que serão analisados nesse artigo.

Observação:

- Os diversos casos citados foram modelados com malhas diferentes, cujas dimensões são citadas nos resultados.

7. Análise dos resultados

Modelamentos com lajes planas simétricas (Caso 1.1) são mostrados na Figura 18. Os resultados (Figura 19) mostraram que os momentos positivos da laje pouco são influenciados pelo fato de representar o pilar como barra ou pela malha adotada. Porém, o mesmo não se pode afirmar com relação aos momentos negativos na laje.

A Figura 19 mostra também que o momento máximo negativo sobre o pilar P5 é fortemente influenciado pela malha adotada e que tem a tendência de sempre aumentar com o refinamento dessa malha. Esse momento não é adequado para a utilização em análises estruturais, mostrando que a modelagem de pilar como uma barra diretamente ligada nos elementos que representam a laje deve ser evitada se o objetivo da análise é a obtenção de momentos fletores na região da ligação da laje como pilar.

Apresenta-se na Figura 20 os momentos fletores na região do pilar P5 para a malha 12,5 no corte 1 indicado na Figura 18.

Os diagramas de momentos fletores fornecidos pelos casos 1.2 e 1.3 apresentaram um arredondamento no diagrama de momento fletor sobre o pilar P5 em relação ao caso 1.1, em que o apoio é considerado pontual, pois consideram a reação do pilar como reação distribuída na laje. Resultados análogos foram obtidos por PEDROZO [13]. As demais malhas estudadas também apresentaram resultados parecidos aos mostrados na Figura 20, evidenciando

que os Casos 1.2 e 1.3 são pouco sensíveis à malha utilizada. Portanto, modelar a reação do pilar como um carregamento distribuído resolve o problema da singularidade, fornecendo momentos mais adequados para a análise estrutural. A distribuição desse carregamento sobre a área do pilar ou sobre a projeção dessa área no centro geométrico da laje altera ligeiramente o valor do momento máximo. A Figura 21, que apresenta os momentos máximos sobre o pilar P5 para os Casos 1.1, 1.2 e 1.3 para as várias malhas estudadas, ratifica essas conclusões parciais.

Além disso, pode-se notar que o Caso 1.1 evidencia claramente o problema da singularidade, pois os momentos negativos sobre o pilar aumentam na medida em que se utilizam malhas mais refinadas.

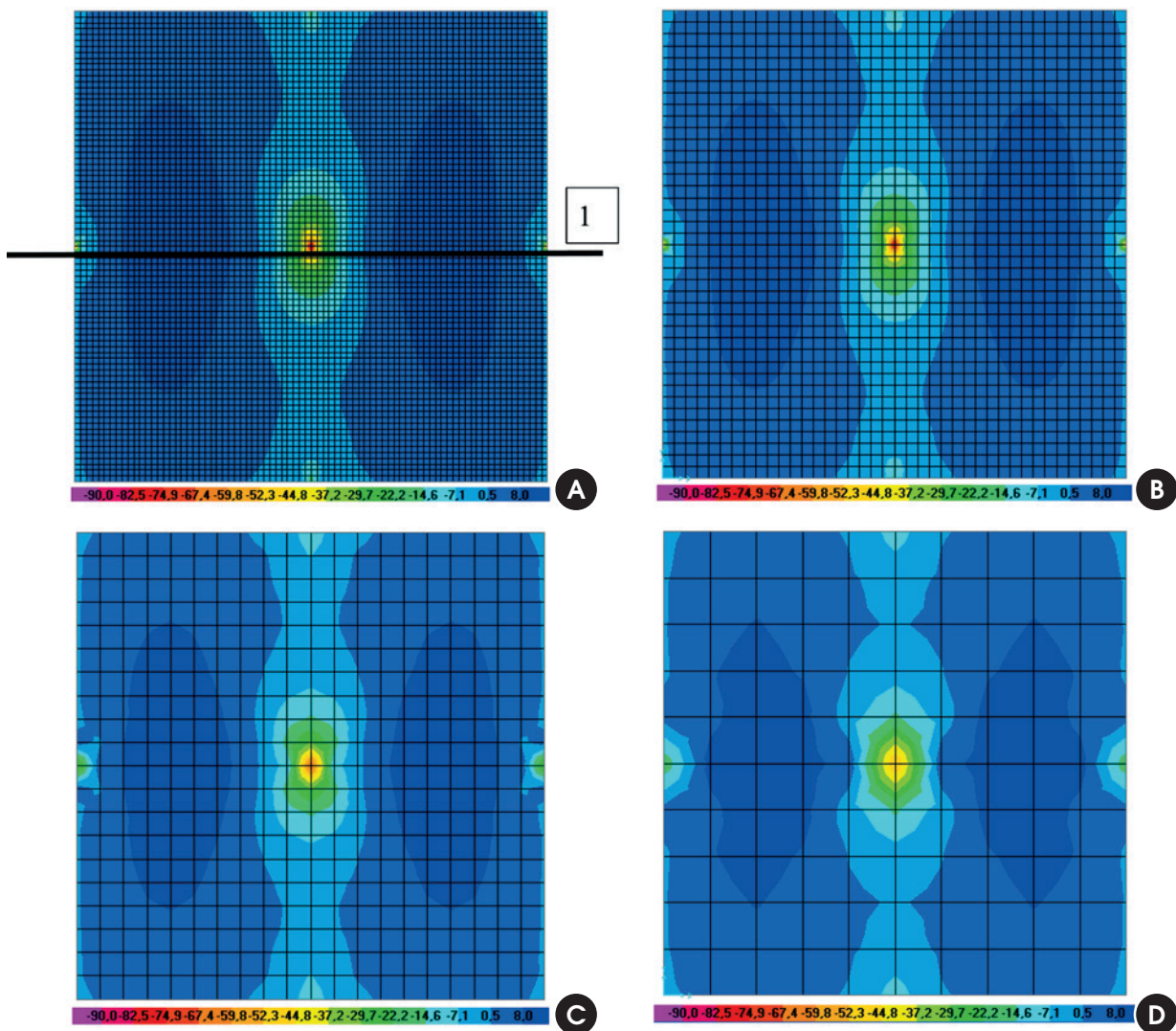
A utilização de um trecho rígido para simular a dimensão do pilar também fornece um modelamento adequado. A utilização de

carregamentos distribuídos em conjunto com os trechos rígidos suavizam os momentos dentro do trecho do pilar, mas existe uma certa perturbação dos momentos dentro da região do pilar. Porém os momentos obtidos na face do pilar tem valores muito similares entre si, sendo uma opção adequada para representar os momentos da região.

A Figura 22 apresenta a variação dos momentos fletores na face do pilar P5 para os Casos 2.1, 2.2 e 2.3.

Pode-se notar que os valores são praticamente os mesmos para os casos 1.2 e 1.3 obtidos na face do Pilar P5, independente da malha utilizada. No caso 2.1, os momentos na face para a malha 12,5x12,5cm foram praticamente os mesmos dos casos 1.2, 1.3, 2.2 e 2.3. O núcleo rígido permite modelar adequadamente a rigidez do pilar, também constatado por ROMBACH [10] (caso “e” Figura 3).

Figura 18 – Resultados Laje Plana Simétrica – Pilar como barra - a - malha 12,5x12,5; b - malha 25x25; c-malha 50x50; d-malha 100x100 - (PUEL (7))



Quando é introduzida uma assimetria na posição do pilar, o comportamento estrutural muda significativamente. A reação distribuída precisa incluir os momentos fletores mobilizados no pilar.

Apresenta-se na Figura 23 os momentos fletores na laje plana havendo assimetria no pilar central. Por conveniência, utilizou-

-se malha 25 x 25cm, realizando-se refinamentos na região do pilar, passando-se para as malhas 12,5 x 12,5cm, 6,25 x 6,25cm e 3,125 x 3,125cm.

Os resultados estão apresentados em forma de gráfico, utilizando o corte 1 como referência. A Figura 24 apresenta os

Figura 19 - Momentos fletores - Corte 1 - laje plana simétrica

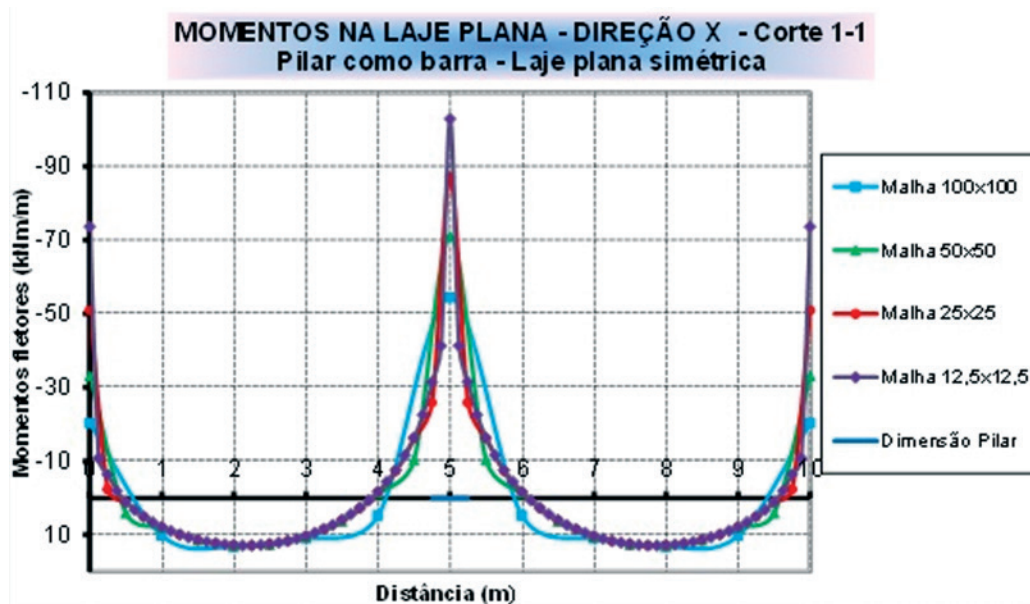
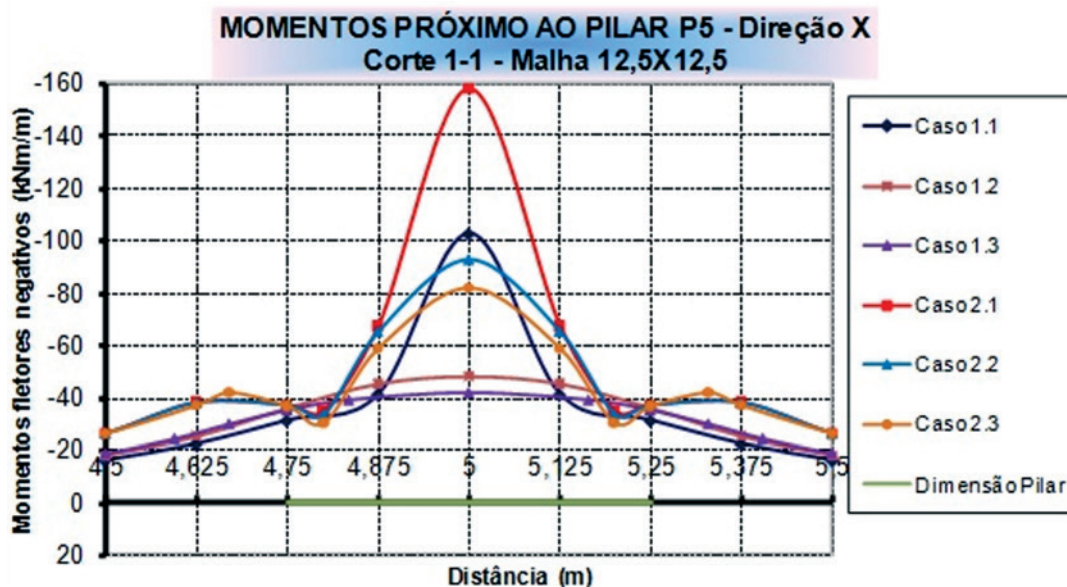


Figura 20 - Momentos fletores - Região Pilar P5 - Casos 1.1/1.2/1.3/2.1/ 2.2/ 2.3



momentos fletores para os Casos 3.1/3.2/3.3. A Figura 25 apresenta os momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5 para os Casos 3.1/3.2/3.3.

Verifica-se claramente que modelar o pilar como barra diretamente ligado aos elementos de placa não é um modelo adequa-

do. Já a modelagem distribuindo a reação do pilar fornece um arredondamento dos momentos naquela região. Os resultados qualitativos desse modelo são análogos aos do arredondamento dos momentos negativos em cima dos apoios de vigas contínuas. Além disso os resultados quantitativos são pouco dependentes

Figura 21 – Momentos fletores máximos sobre o pilar P5 – Casos 1.1/1.2/1.3

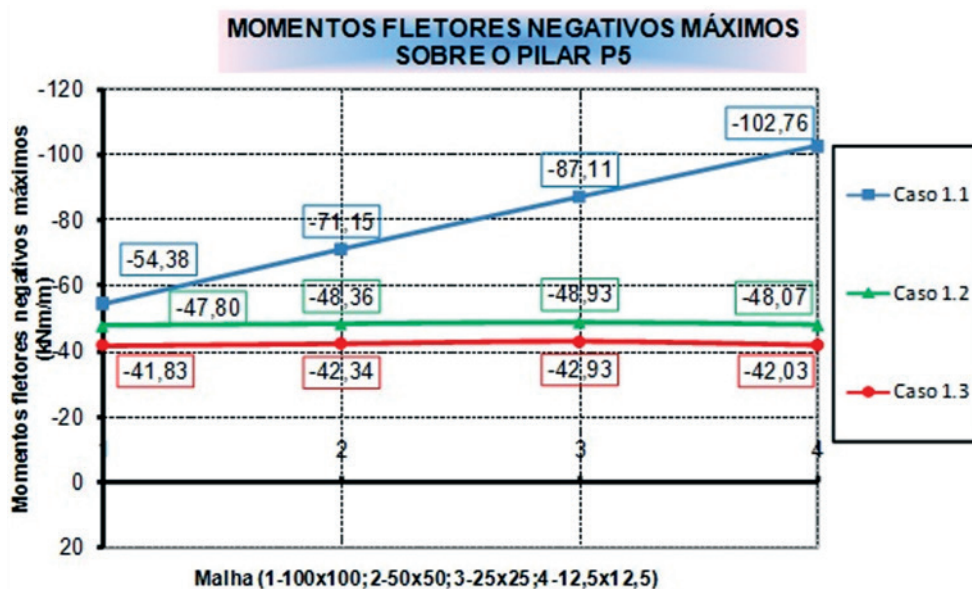
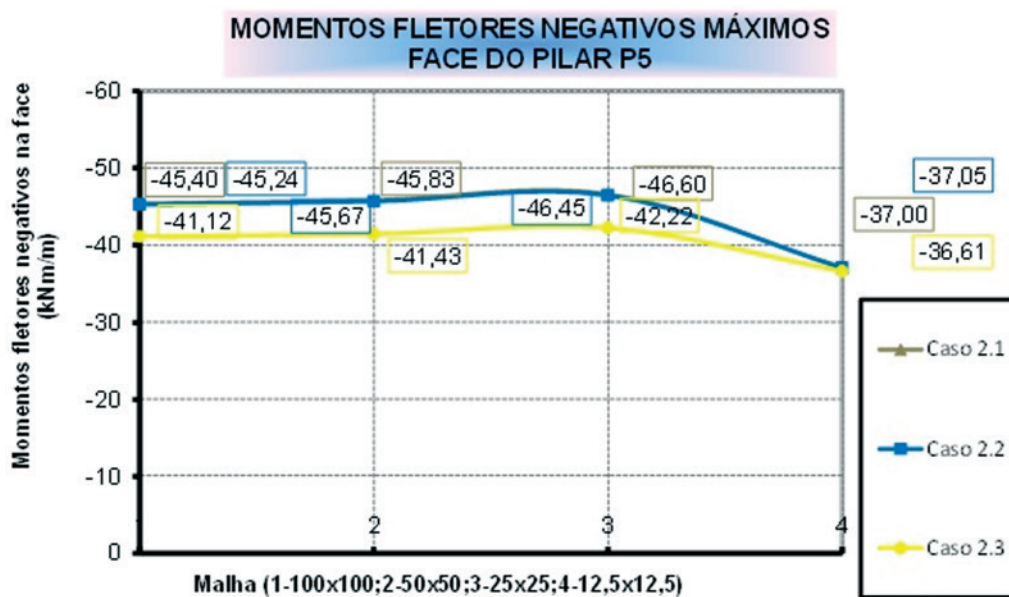


Figura 22 – Momentos fletores face do pilar P5 - Casos 2.1/2.2/2.3



da malha utilizada, resolvendo o problema da singularidade.

A Figura 26 apresenta os momentos fletores para os Casos 4.1/4.2/4.3.

Quando se coloca um trecho rígido para simular as dimensões do pilar verifica-se, para o caso 4.1, que o momento negativo máximo continua dependendo da malha (Figura 26).

Já a modelagem distribuindo a reação do pilar junto com o trecho rígido fornece um arredondamento dos momentos naquela região e com momentos pouco dependentes da malha, conforme já havia acontecido na estrutura simétrica (Figura 27).

O aumento da rigidez dessa região faz com que os momentos fletores aumente em relação aos modelos sem trechos rígidos e também existe uma certa perturbação dos momentos dentro da região do pilar.

A Figura 28 apresenta a distribuição dos momentos fletores

ampliados na região do pilar P5, para os Casos 3.1/3.2/3.3 e 4.1/4.2/4.3.

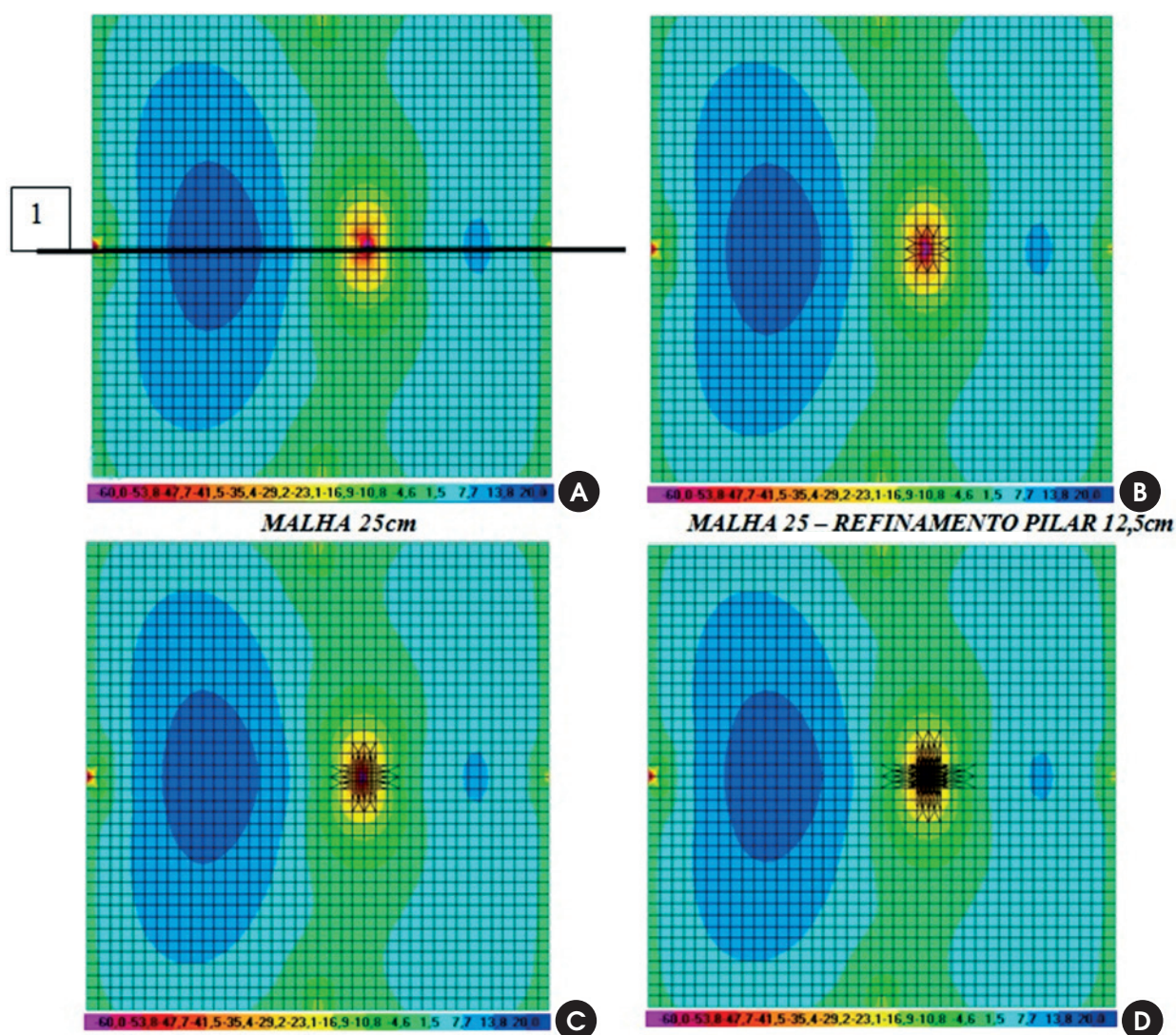
Pode-se perceber, mais uma vez, que no caso da modelagem com trechos rígidos os momentos ficam mais coerentes quando analisados no início do trecho rígido ou na face do pilar. E, mesmo o caso 4.1 apresenta bons resultados nessas regiões.

Quando se tem assimetria do pilar em relação à laje, o diagrama de carregamentos do pilar como reação na laje não é uniforme e, por isso, o momento máximo negativo da laje não ocorre no centro do pilar, como pode ser observado nos Casos 1.2 e 1.3. Tem-se um diagrama de momentos deslocado na direção contrária à rotação do nó do pilar.

A Figura 29 e Figura 30 apresentam os momentos fletores nas faces esquerda e direita do pilar P5, respectivamente.

Com exceção da malha 25x25cm, pode-se notar que os

Figura 23 – Resultados Laje Plana Assimétrica – Caso 3.1 (PUEL (7))



momentos em ambas as faces do pilar P5 são praticamente os mesmos para os Casos 3.2 e 3.3, 4.1 e 4.2. O Caso 4.3 apresentou resultados sensivelmente maiores aos Casos citados anteriormente. Atenta-se para o Caso 4.1 que, apesar de haver o problema da singularidade, os momentos em ambas as faces se mostraram

bem consistentes. Isso não ocorreu no Caso 3.1, em que também se tem o problema da singularidade, porém sem núcleo rígido na região do pilar.

Além das análises dos momentos fletores que atuam na laje, que tem interesse para o dimensionamento das lajes, pode ser de

Figura 24 – Momentos fletores – laje plana assimétrica – Corte 1 – Casos 3.1/ 3.2/ 3.3

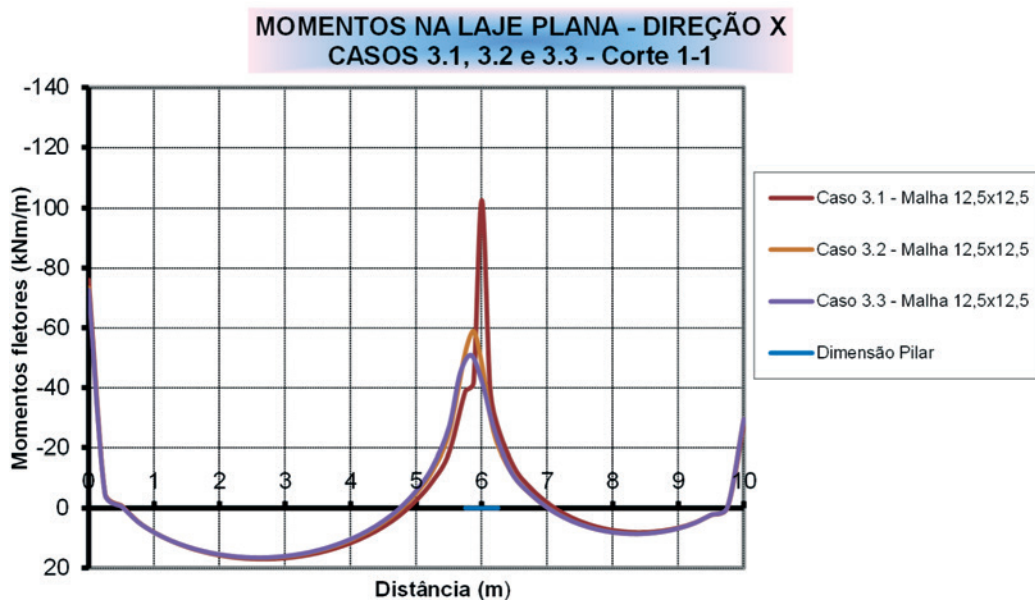
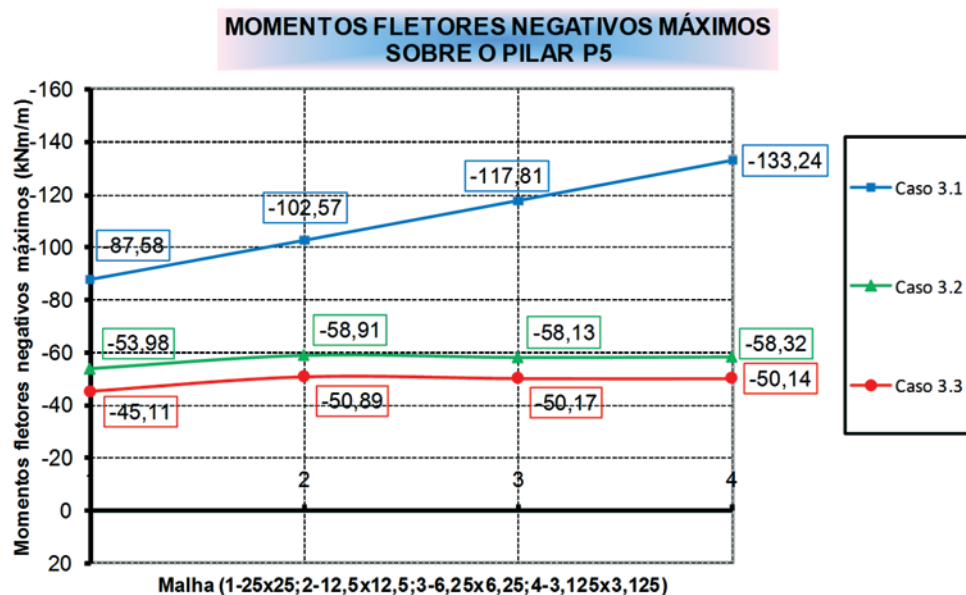


Figura 25 – Momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5



interesse analisar os momentos fletores atuantes no pilar, que serão posteriormente utilizados para a verificação da punção e dimensionamento do próprio pilar.

A Figura 31 apresenta os momentos fletores que atuam na barra do pilar P5 para os Casos 3 e 4.

De um modo geral, os momentos fletores no pilar P5 para o Caso 4 foram superiores aos obtidos pelo Caso 3, em média 10% maiores. Ademais, os Casos 3.3 e 4.3 resultaram em momentos maiores quando comparados com os Casos 3.2 e 4.2, respectivamente. A diferença para a malha 3,125 x 3,125cm foi de 8,0% do

Figura 26 - Momentos fletores - laje plana assimétrica - Corte 1 - Casos 4.1/ 4.2/ 4.3

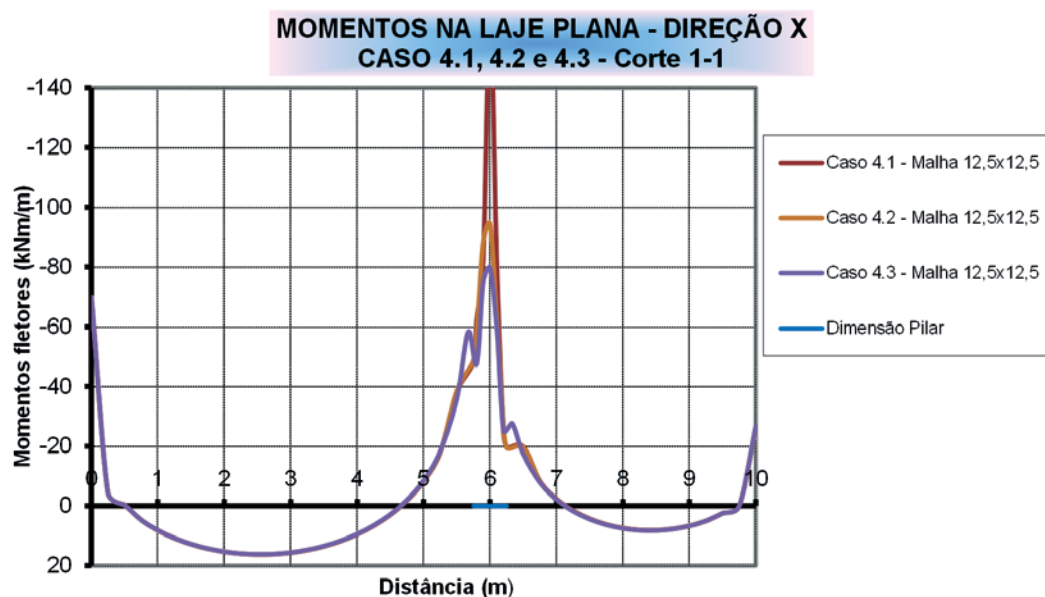
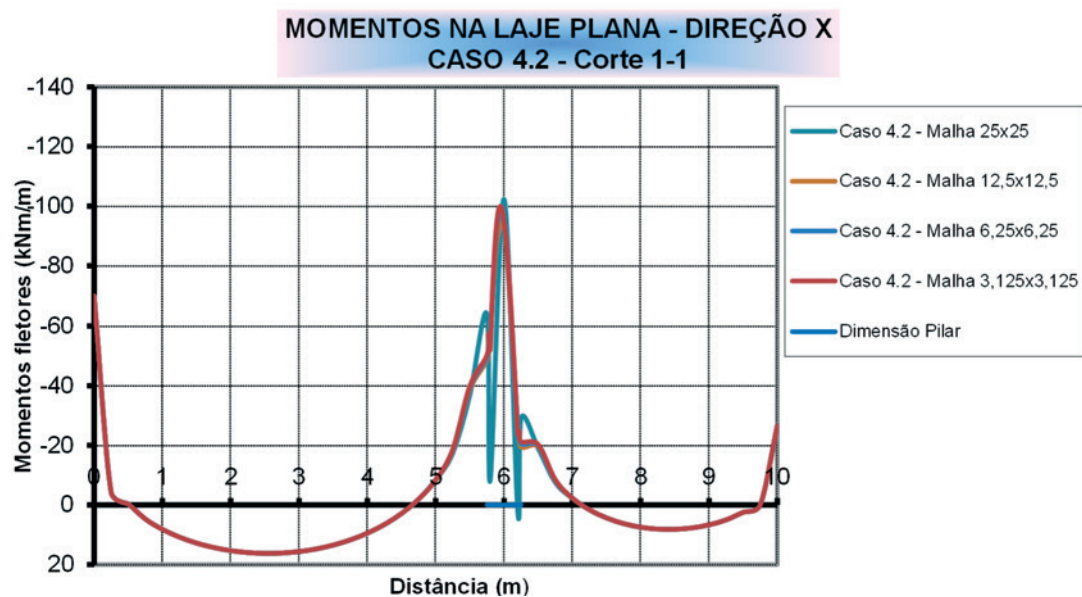


Figura 27 - Momentos fletores - laje plana assimétrica - Corte 1 - Caso 4.2



Caso 3.3 em relação ao Caso 3.2 e de 3,0% do Caso 4.3 em relação ao Caso 4.2. Portanto, os modelos em que o trecho do pilar P5 é rígido conduzem a diferenças menores ao se distribuir a reação do pilar na área da seção transversal em relação à distribuição da reação do pilar na área da seção transversal projetada no centro de gravidade da laje.

Ao comparar os Casos 3.2 e 3.3 com 3.1 e os Casos 4.2 e 4.3 com 4.1, percebe-se que no Caso 4.1, apesar de haver o problema da singularidade, os momentos no pilar P5 não são muito diferentes dos Casos 4.2 e 4.3, fato esse que não acontece no Caso 3. O núcleo rígido permite modelar adequadamente a rigidez do pilar,

Figura 28 – Momentos fletores – Região Pilar P5 – Casos 3.1/3.2/3.3/4.1/4.2/4.3

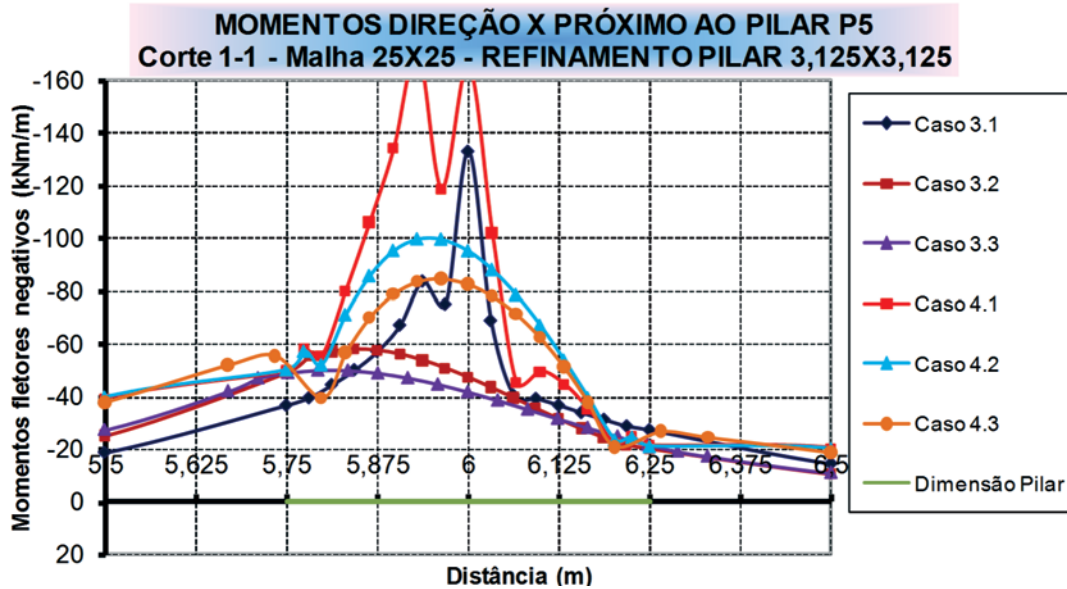
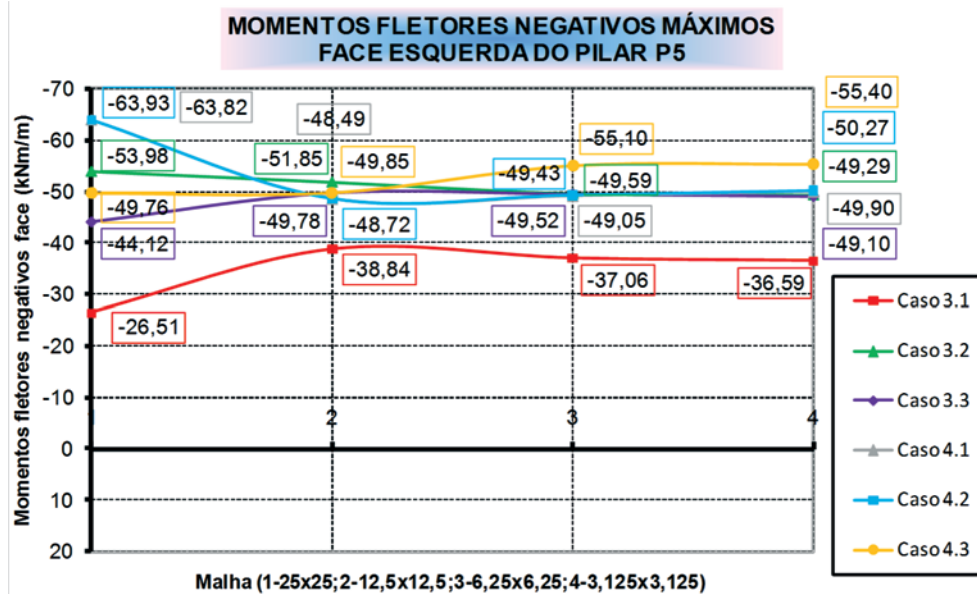


Figura 29 – Momentos fletores negativos máximos – face esquerda Pilar P5



também constatado por ROMBACH [10] (caso “e” Figura 3).

8. Gráficos 3D

Com a computação gráfica em forte expansão, cada vez mais se

pode explorar os recursos 3D na visualização dos resultados. No caso em particular desse artigo, como existem regiões com importantes concentrações de esforços, a utilização de visualizações 3D permitem uma melhor compreensão do comportamento nessas regiões, bem como a utilização de recursos gráficos para a

Figura 30 – Momentos fletores negativos máximos – face direita Pilar P5

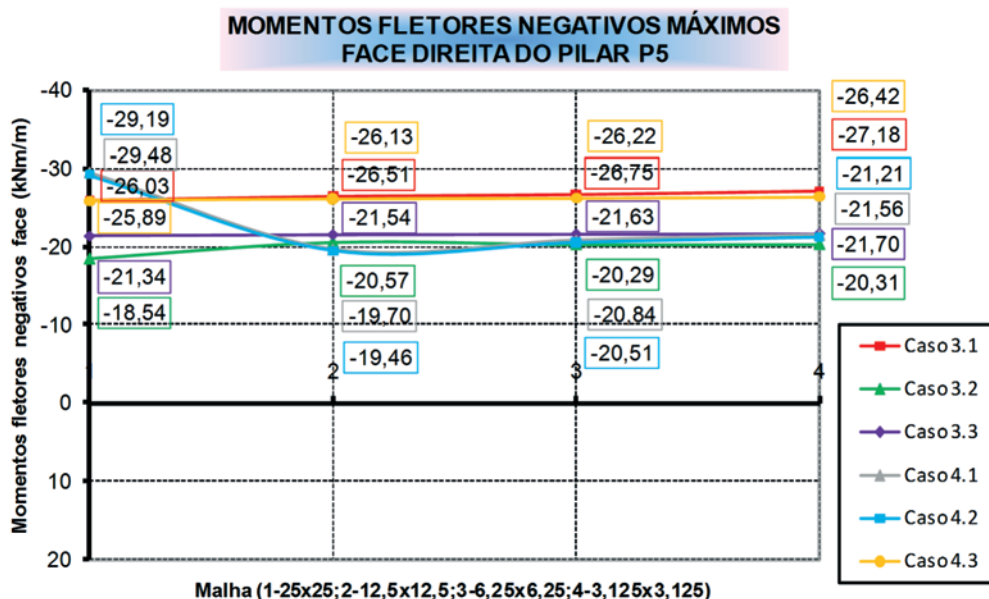
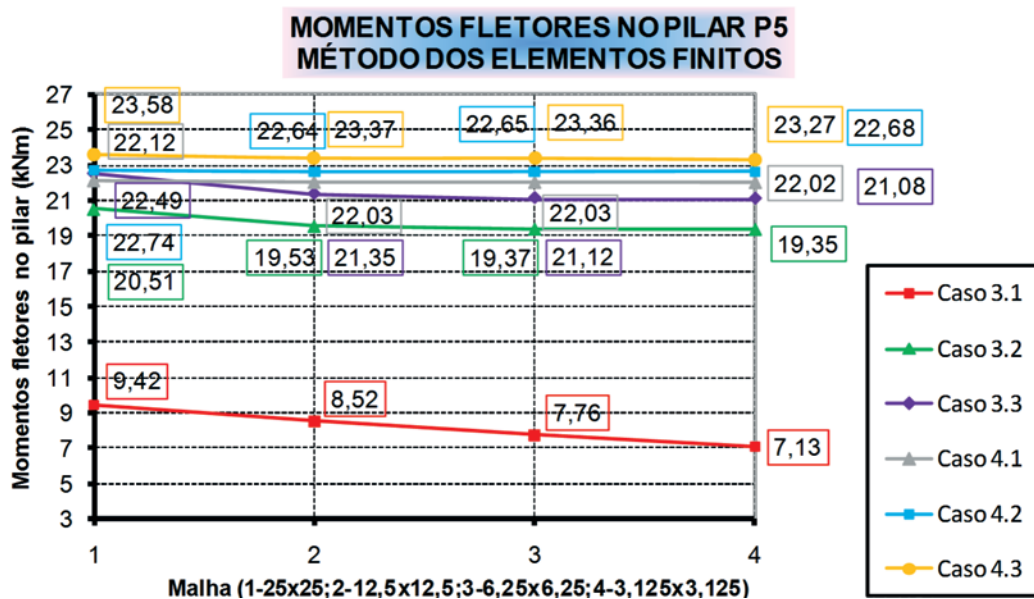


Figura 31 – Momento fletor no Pilar P5 – laje plana assimétrica



obtenção de cortes em seções de interesse.

Esse tipo de visualização, muito usada em geoprocessamento de imagens, é muito superior às visualizações 2D, como curvas de isomomentos.

Desse modo, serão gerados gráficos 3D à partir dos dados obtidos das análises lineares com o auxílio dos seguintes softwares, a citar:

- ArcGis/ArcMap [5]: *software* utilizado para o Geoprocessamento de imagens;
- Global Mapper [6]: *software* utilizado para renderizar a triangulação.

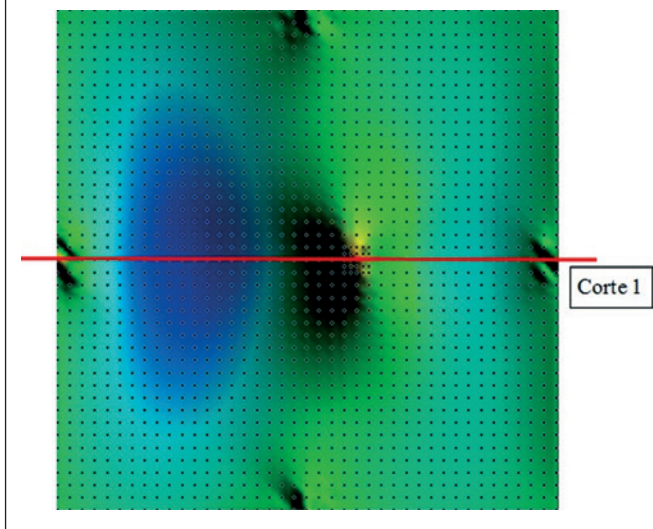
A partir dos modelos gerados no *software* SAP 2000 [4] para o Caso 3, exportam-se as coordenadas X, Y e Z dos nós da malha e importa-se para os softwares ArcGis/ArcMap [5] e Global Mapper [6]. As coordenadas X e Y dão a posição do nó em planta. Já a coordenada Z representa o momento fletor em cada nó da malha. O produto final é uma imagem *Rastes* com Pixeis de 0,04 cm, gerada a partir de pontos ordenados respeitando valores reais.

De forma a facilitar o entendimento na região em que ocorre as concentrações de esforços, apresenta-se a visualização dos momentos fletores em 3D. Os gráficos serão apresentados para os Casos 3.1, 3.2 e 3.3 (região do pilar sem núcleo rígido com assimetria de 1 metro), considerando a malha 25x25 cm, com transição na região do pilar para 12,5x12,5 cm. Em todos os Casos foi realizado um corte na laje (Figura 32), que passa pelo centro do pilar P5 (Corte 1).

Os pontos mostrados na Figura 32 coincidem com os nós da malha utilizada no SAP 2000 [4] para os Casos estudados nesse artigo. No caso específico da Figura 32 refere-se à malha 25x25cm com transição na região do pilar P5 para 12,5x12,5cm.

A Figura 33 apresenta a visualização 3D, dos momentos na direção X, para o Caso 3.1, sendo a Figura 33a sem renderização e a Figura 33b com renderização.

Figura 32 – Indicação dos cortes na visualização 3D – direção X



A Figura 34 mostra o Corte 1 para o Caso 3.1.

A Figura 35 apresenta a visualização 3D para o Caso 3.2, sendo a Figura 35a sem renderização e a Figura 35b com renderização.

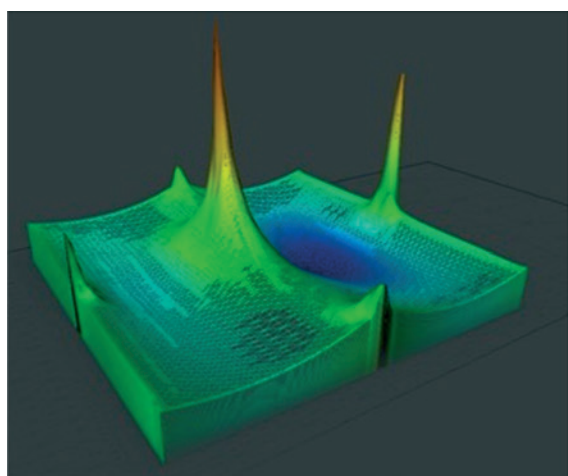
A Figura 36 mostra o Corte 1 o Caso 3.2.

A Figura 37 apresenta a visualização 3D para o Caso 3.3, sendo a Figura 37a sem renderização e a Figura 37b com renderização.

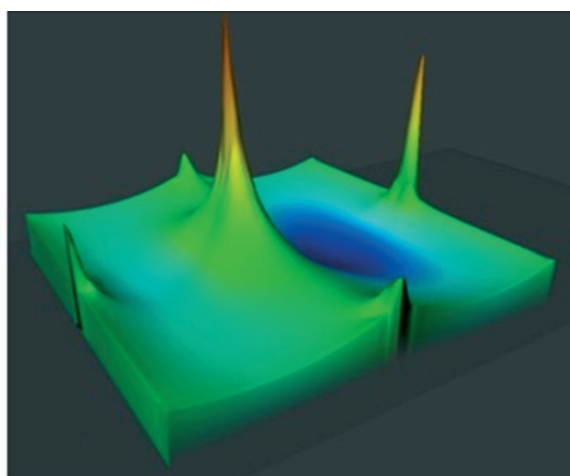
A Figura 38 mostra o Corte 1 para o Caso 3.3.

A visualização 3D permite a visualização dos momentos fletores em toda a laje facilitando a análise detalhada do seu comportamento no entorno da região do apoio do pilar. Os resultados

Figura 33 – Gráfico 3D - laje plana assimétrica - Caso 3.1 - direção X



A



B

anteriores permitiram a rápida visualização das grandes concentrações de tensão na região do pilar, bem como se pode ver que a distribuição da reação suaviza muito os momentos.

O uso de programas de geoprocessamento também permite, além da obtenção de cortes em seções transversais pré-determinadas, futuros pós-processamentos para a obtenção de áreas desse cortes, que neste caso corresponderiam a momentos resultantes em faixas de laje. Essas ferramentas podem ser importantes para definição de critérios para o dimensionamento de seções transversais da laje.

9. Conclusões

As análises elástico-lineares das estruturas estudadas mostraram a necessidade de um modelamento adequado da região da ligação da laje com a viga. O procedimento proposto neste trabalho, distribuindo a reação do pilar como uma carga distribuída, mostrou-se eficiente e pode ser realizado com facilidade, mesmo em programa comercial de análise estrutural.

O modelamento adotado resolveu o problema da singularidade,

Figura 34 - Corte 1 - laje plana assimétrica - Caso 3.1 - direção X

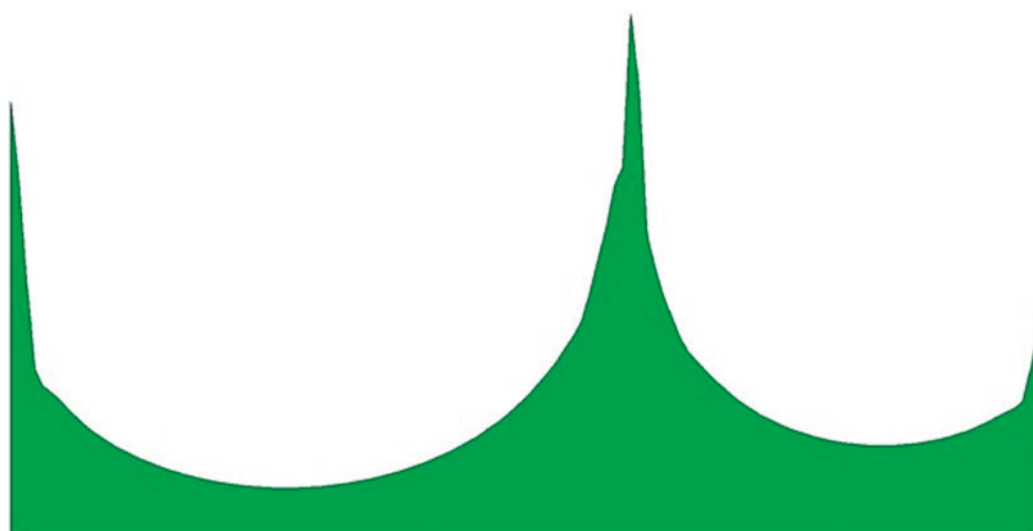
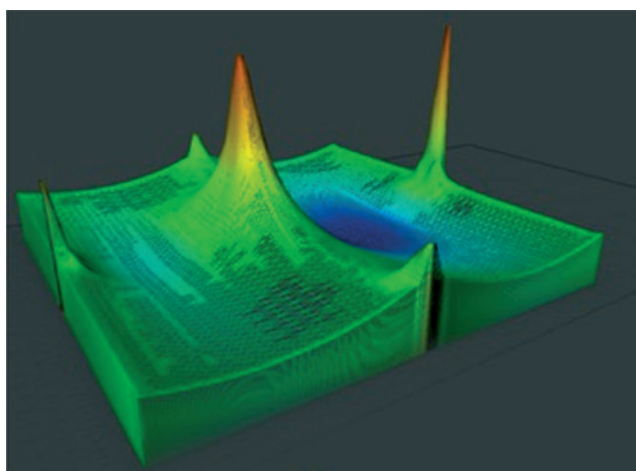
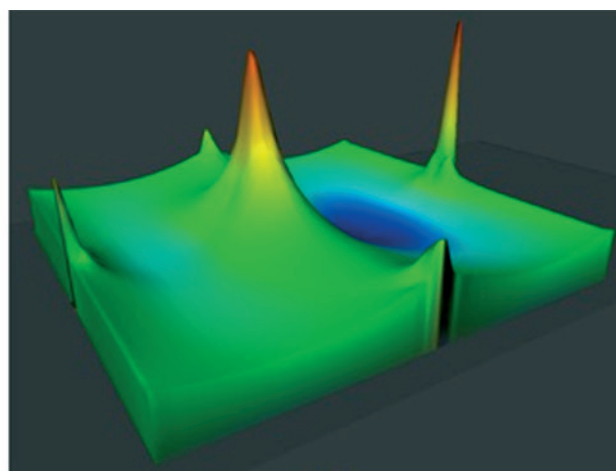


Figura 35 - Gráfico 3D - laje plana assimétrica - Caso 3.2 - direção X



A



B

pode ser aplicado tanto em estruturas simétricas como em assimétricas, e foi pouco sensível à variação da malha após um refinamento adequado da mesma.

Os resultados obtidos com o arredondamento dos momentos fletores sobre pilar permitiu uma fácil compreensão do fenômeno na região de interesse, facilitando a futuras decisões sobre a utilização desses resultados.

A distribuição sobre a projeção do pilar, ou sobre a área projetada no centro da laje, forneceu uma pequena alteração no valor

do momento máximo, sendo que a distribuição no centro da laje aumenta ligeiramente esse valor, indo no sentido dos resultados quando se modela com trechos rígidos.

A utilização dos trechos rígidos conseguiu incluir no modelo, o efeito do aumento da rigidez na região do pilar. A inclusão do carregamento distribuído forneceu resultados qualitativos melhores dentro da região do pilar. Entretanto, percebe-se que os valores mais próximos da face do pilar são mais adequados para representar os esforços na região.

Figura 36 – Corte 1 - laje plana assimétrica - Caso 3.2 - direção X

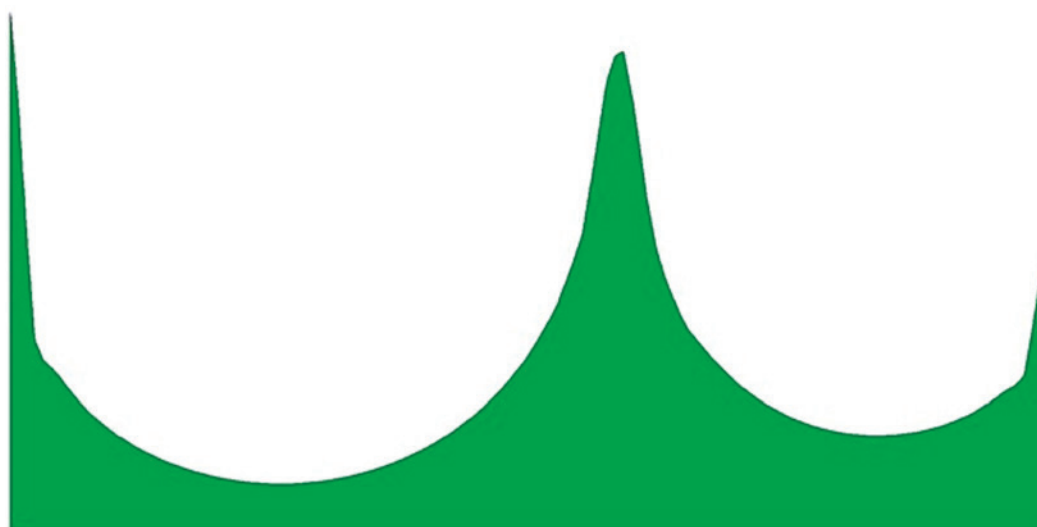


Figura 37 – Gráfico 3D - laje plana assimétrica - Caso 3.3 - direção X

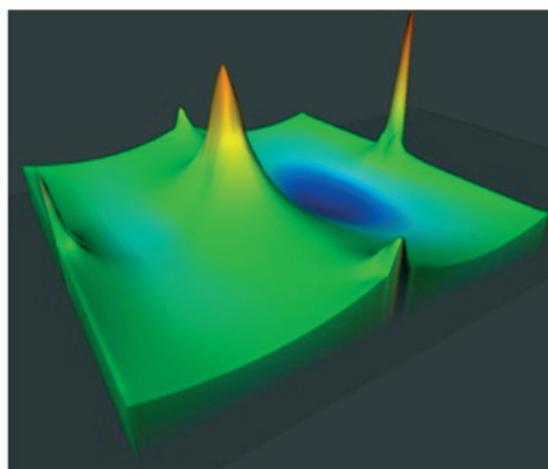
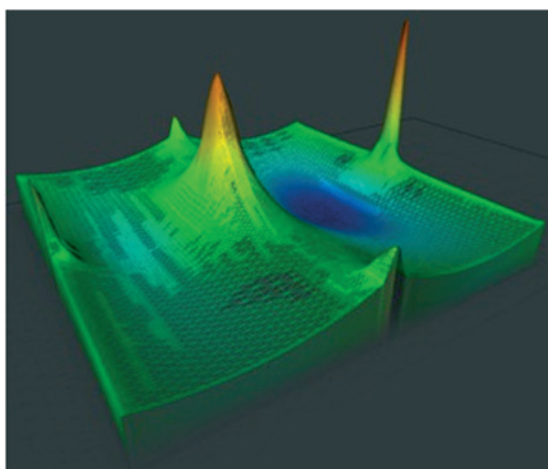
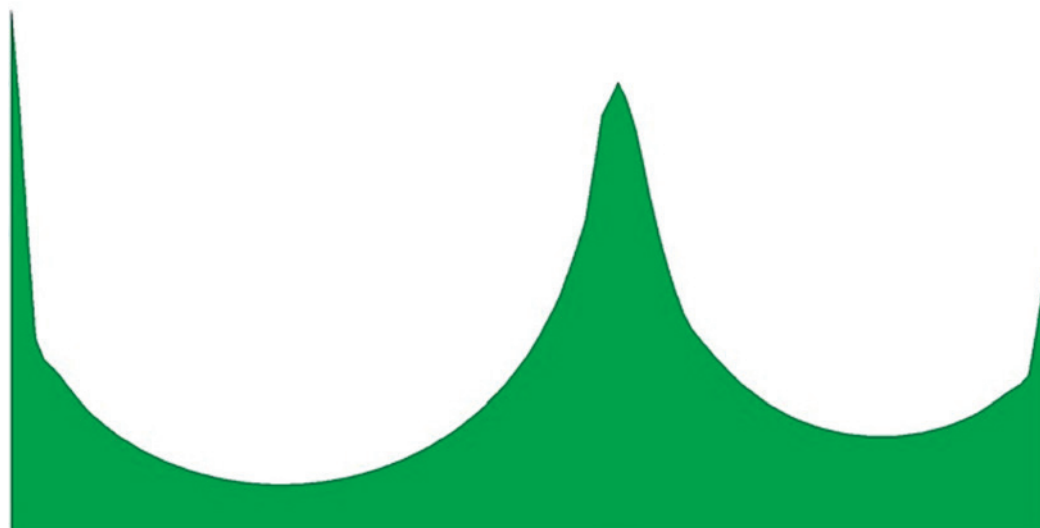


Figura 38 – Corte 1 - laje plana assimétrica - Caso 3.3 - direção X



Ao se analisar um modelo integrando a laje e o pilar, além dos esforços na laje pode ser necessário também estudar os esforços nos pilares, para o dimensionamento dos pilares e verificação da punção.

Enquanto que os esforços normais no pilar P5, em modelos com ou sem trechos rígidos, distribuindo ou não a reação do pilar como carregamento na laje, apresentam resultados com pouca variação entre si, os momentos fletores dependem do modelamento adotado. Quando se modela o pilar como apoio pontual e, não se considera a região do pilar rígida (Caso 3.1), os resultados obtidos foram tanto menores quanto mais refinada for a malha na região do pilar P5. Isso ocorre devido a uma grande quantidade de elementos dentro do pilar com rigidezes pequenas, prejudicando a ligação laje X pilar. Deve-se, portanto, evitar esses modelos. No entanto, ao distribuir a reação do pilar P5 em uma determinada área como carregamento na laje e, mantendo a região do pilar sem elementos rígidos, o momento fletor no pilar P5 foi pouco sensível à malha em ambas as análises e, numericamente muito superior ao valor obtido no Caso 3.1. Ao se enrijecer a região do pilar P5, em todos os subcasos do Caso 4, o momento fletor no pilar foram próximos uns dos outros e, numericamente superiores aos obtidos nos Casos 3.2 e 3.3. Ao adicionar elementos rígidos no pilar P5 fez com que a ligação laje x pilar apresentasse um comportamento que leva em conta o aumento da rigidez na região de ligação, fato esse comprovado no Caso 4.1: mesmo havendo o problema da singularidade, o momento fletor no pilar P5 apresentou bons resultados, mostrando-se também ser uma solução possível.

Por fim, a exibição dos momentos fletores na laje em forma de gráficos 3D com o auxílio de *softwares* especializados em geoprocessamento favorece a análise dos resultados. É possível visualizar os momentos fletores de forma espacial, em todas as direções. Esse tipo de recurso pode vir a ser importante na definição de critérios para o projeto da laje.

10. Agradecimentos

Os autores gostariam de expressar seus sinceros agradecimentos à empresa GeoEnergy Engenharia Ltda pelo fornecimento dos programas computacionais de geoprocessamento necessários ao desenvolvimento desse trabalho.

11. Referências bibliográficas

- [1] SKORPEN S. A. & DEKKER N. W. The application and interpretation of linear finite element analysis results in the design and detailing of hogging moment regions in reinforced concrete flat slabs. Technical Paper. Journal of the South African Institution of Civil Engineering. South African, 2014.
- [2] CHOI K. K. & KIM J.C., Nonlinear model simulating load-deformation relationship of flat plate structures. Technical Paper. Engineering Structures. South Korea, 2014.
- [3] MURRAY K.A. & CLELAND D.J. & GILBERT S. The Development of a non-linear numerical model to simulate the behaviour of reinforced concrete flat slabs in the vicinity of edge columns. Technical Paper. Construction and Building Materials. Belfast, 2005.
- [4] Computers and Structures, Inc. SAP 2000 – Integrated Software for Structural Analysis and Design. Version 11. USA, 2008.
- [5] ArcGis/ArcMap, ESRI - suite of geospatial processing programs, and is used primarily to view, edit, create, and analyze geospatial data. Version , 10.2.2. USA, 2013.
- [6] Global Mapper, Blue Marble Geographics - Handles both vector, raster, and elevation data, and provides viewing, conversion, and other general GIS features. Version 16.1. USA, 2013.
- [7] PUEL, André. Modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas em concreto armado – Análise integrada laje x pi-

- lar. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009. 152 páginas.
- [8] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118:2014 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos. Rio de Janeiro, 2014.
- [9] EUROCODE 2 2003. BS EN 1992-1-1:2003. Design of concrete structures. Part 1-1: General – Rules and rules for buildings. Brussels: European Committee for Standardisation.
- [10] ROMBACH, G A. Finite element design of concrete structures. London: Thomas Telford, 2004.
- [11] GLÓRIA, Rodrigo Luz. Estudo do Dimensionamento de Vigas na Ligação com Pilares em Projeto de Estruturas de Concreto, Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2003. 113 páginas.
- [12] HENNRICHS, Carlos A., Estudo sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado, Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2003.
- [13] PEDROZO, David Guillermo Esteche. Análise Crítica dos Critérios de Projeto de Lajes Protendidas. Dissertação de mestrado. UFSC. Florianópolis, 2008.