

# Consideration of reinforced concrete crushing through cohesive models

## Consideração do esmagamento no concreto armado através de modelos coesivos

T. B. EVANGELHO<sup>a</sup>  
tiagoevangelho@yahoo.com.br

E. BITTENCOURT<sup>a</sup>  
eduardo.bittencourt@ufrgs.br

### Abstract

In this work, the overlapping crack mode is considered. It permits the modeling of concrete crushing through cohesive surfaces, in a similar way used to simulate fracture. The material is considered in damage when the surfaces interpenetrate each other. Besides simplicity, the big advantage of the methodology is the fact that constitutive relations are independent of the material scale. A generalization is here introduced to consider mixed crushing. Exploratory applications are made considering super-reinforced beams. The effects of the height of the beams, compressive rebars and stirrups are investigated. A good fitting with experiments is obtained.

**Keywords:** reinforced concrete, crushing, cohesive models, finite elements.

### Resumo

Neste trabalho é empregado o modelo de trincas sobrepostas, que permite modelar o comportamento em esmagamento do concreto através de superfícies coesivas, de forma similar à empregada na simulação de fraturas. O material entra em dano de compressão quando há interpenetração das superfícies. Além da simplicidade, a grande vantagem da metodologia é estar baseada em relações constitutivas independentes da escala do material. Uma generalização é introduzida de modo a considerar o modo misto de esmagamento. Aplicações exploratórias são realizadas considerando vigas super-armadas de concreto. Investigou-se o efeito da altura das vigas, das armaduras de compressão e dos estribos. Um bom ajuste com dados experimentais é obtido.

**Palavras-chave:** concreto armado, esmagamento, modelos coesivos, elementos finitos.

<sup>a</sup> Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Engenharia, Porto Alegre, Brasil.

### 1. Introdução

O comportamento pós-pico do concreto em compressão tem fundamental importância na avaliação da ductilidade do mesmo, o que afeta por exemplo a capacidade última de vigas de concreto armado. Uma dificuldade que surge neste caso é o fato das relações tensão-deformação pós-pico do concreto serem fortemente dependentes da escala [1], tornando a objetividade deste tipo de análise bastante questionável. Outro aspecto do comportamento pós-pico é o fato de experimentos indicarem uma forte localização da deformação. Isto indica que o processo de dissipação de energia neste regime na verdade ocorre em superfícies internas e não no volume [2].

Em função destes dois aspectos, Carpinteri et al. [3,4] e Corrado [5], propuseram uma metodologia para o modelamento do esmagamento do concreto usando uma abordagem similar à dos modelos coesivos da Mecânica da Fratura [6,7]. Nos modelos coesivos a fissuração é representada discretamente por superfícies que se abrem representando desta forma a abertura das fissuras. No modelo de esmagamento estas superfícies se interpenetram quando há compressão. Tal metodologia foi denominada pelos autores como “overlapping crack model” (será aqui denominada modelo de trincas sobrepostas) e tem seus fundamentos também baseados na Mecânica da Fratura. Assim a relação constitutiva do modelo é definida por uma relação tensão-deslocamento. Esta relação representará o comportamento pós-pico do concreto em compressão. Esta forma de colocar a relação constitutiva (relação tensão-deslocamento) tem a grande vantagem de ser independente da escala, como confirmam experimentos feitos por van Vliet e van Mier [8] e por Jansen e Shah [9], eliminando desta forma os problemas de objetividade relativos ao comportamento pós-pico. No presente trabalho será empregado o modelo de trincas sobrepostas [3-5] juntamente com o modelo de trincas coesivas [7] de modo a simular completamente o processo de colapso de

diferentes vigas de concreto armado. Apenas as chamadas vigas “super-armadas” serão consideradas de modo que o concreto entre em esmagamento nos estágios finais do colapso. O modelo das trincas sobrepostas é aqui também generalizado de modo a considerar o modo misto de fratura (efeitos de corte), embora tais situações não sejam aqui testadas. No capítulo 2 é inicialmente descrito o modelo de trincas sobrepostas somente considerando tensões normais e posteriormente as modificações introduzidas para a consideração do modo misto. No capítulo 3 são feitas experimentações numéricas. Vigas de diferentes tamanhos e tipos de estribos são consideradas. O efeito de armaduras de compressão é também investigado. Finalmente no capítulo 4 são feitas considerações finais.

### 2. O modelo das trincas sobrepostas

Neste capítulo será descrito o modelo de trincas sobrepostas para duas situações. Primeiro, considera-se um caso no qual a superfície coesiva está submetida apenas à tensões normais e posteriormente um caso misto, no qual a superfície é submetida a tensões normal e de corte. Implementação do modelo num contexto de elementos finitos também é descrita.

#### 2.1 Consideração de tensões normais

Duas superfícies internas ao corpo são consideradas nas quais a separação normal entre elas é definida como  $w$ . Se as superfícies se abrem (fissuração) a abertura é positiva e será aqui denominada  $w^f$ . Uma tensão  $\sigma$ , que tende a se opor à abertura, surge e por esta razão é denominada tensão coesiva [6,7]. Se as superfícies se sobrepoem (esmagamento) a abertura é negativa e será aqui denominada  $w^c$ . Tensões  $\sigma$  também surgem neste caso e se opõem a interpenetração. A relação constitutiva tensão  $\sigma$  versus  $w^c$  constitui a relação constitutiva de esmagamento. Diferentemente do modelo de trincas sobrepostas original [3-5], no presente trabalho tal relação constitutiva é separada em duas partes. Uma de pré-pico e outra de pós-pico.

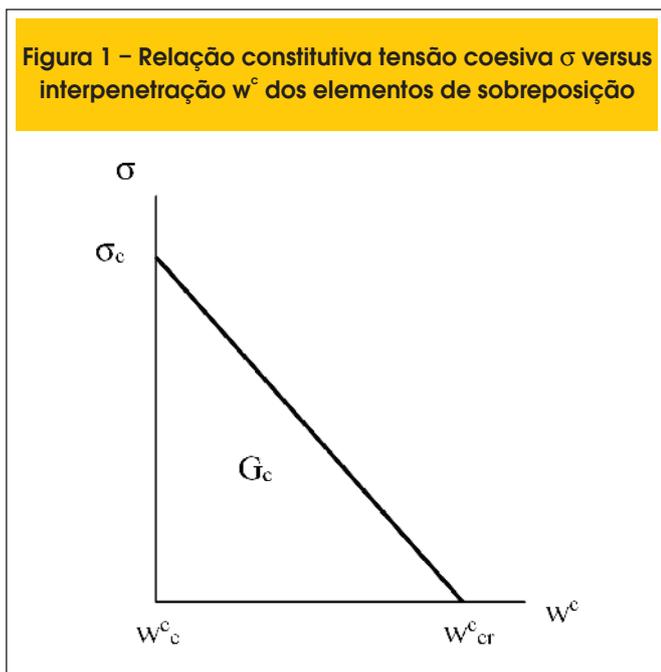
A relação pré-pico é uma relação elástica-linear e é válida até que as tensões atinjam a tensão de ruptura à compressão ( $\sigma_c$ ). A interpenetração correspondente a este caso é denominada  $w_c^c$  e deve ser mínima [10]. A relação pré-pico inexistente no modelo de trincas sobrepostas original.

A relação pós-pico é definida na Figura 1.

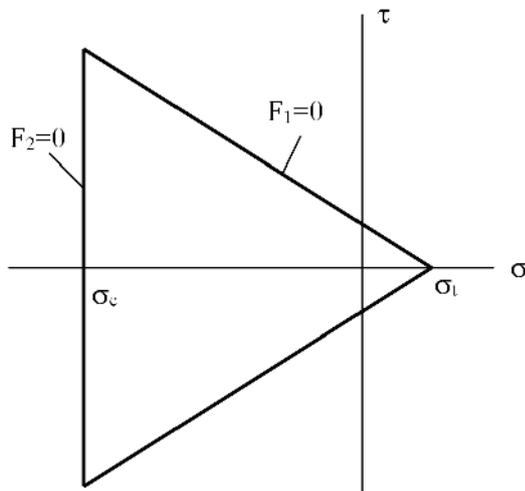
A área sob a curva tensão-interpenetração é denominada de energia específica de esmagamento ( $G_c$ ), numa analogia com a energia específica de fratura ( $G_f$ ) que corresponde a área abaixo da curva tensão-abertura. O modelo de trincas sobrepostas considera, de forma simplificada, processos complexos que ocorrem no esmagamento como fragmentação e propagação de trincas em corte. Assim  $G_c$  pode ser interpretado como a soma da energia de fratura dissipada por micro-trincas durante o fenômeno de esmagamento mais efeitos friccionais [11]. Por esta razão em geral  $G_c$  é de duas a três ordens de magnitude maiores que  $G_f$ . Para concretos com  $\sigma_c$  variando de 20 a 90 MPa,  $G_c$  varia de 30 até 58 N/mm [12,13]. No entanto, o aspecto mais fundamental a ser considerado aqui é que tanto  $G_c$  como a forma da relação tensão-interpenetração são uma propriedade do concreto e independem da escala.

Suzuki et al. [13] formularam modelos para levar em consideração o confinamento do concreto induzido por estribos. Os autores es-

Figura 1 – Relação constitutiva tensão coesiva  $\sigma$  versus interpenetração  $w^c$  dos elementos de sobreposição



**Figura 2 – Superfície elástica limite dos elementos coesivos, no espaço  $\sigma$  versus  $\tau$**



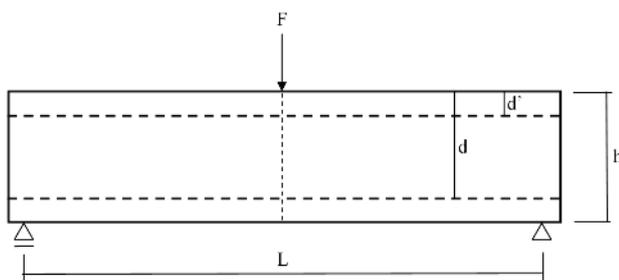
tabelecem relações de  $G_c$  com a tensão de escoamento e fração volumétrica dos estribos. Importante a ser ressaltado aqui é que a presença dos estribos aumenta consideravelmente tanto  $G_c$  como a interpenetração crítica  $w_{cr}^c$ . Por exemplo, valores na ordem de até 500 N/mm são reportados para  $G_c$  no caso de elevados níveis de fração volumétrica de estribos.

## 2.2 Consideração do modo misto

Os modelos originais de trincas sobrepostas [3-5] admitem que a superfície coesiva esteja submetida somente a tensões normais. Neste trabalho uma generalização é proposta de modo a considerar o efeito das tensões de corte  $\tau$ .

Considera-se que o efeito de corte é desprezível até que o limite definido pela relação de Mohr-Coulomb é atingida. Esta condição pode ser visualizada na Figura 2.  $F_1=0$  representa o limite de tensões conforme o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, enquanto  $F_2=0$  representa o limite de tensões causado pelo esmagamento.

**Figura 3 – Geometria das vigas empregadas nas simulações**



$F_1$  e  $F_2$  são definidos abaixo, onde  $\phi$  é o ângulo de atrito do concreto e  $\sigma_t$  é sua resistência à tração.

$$F_1 = |\tau| - (\sigma - \sigma_t) \tan \phi ; F_2 = \sigma - \sigma_c \quad (1)$$

Se  $F_1$  e  $F_2$  são menores que zero, o comportamento é elástico e corresponde à zona interna do triângulo mostrado na Figura 2. Estados de tensões fora do triângulo ( $F_1$  e/ou  $F_2 > 0$ ) são proibidos e devem retornar para sobre a superfície. Neste processo de retorno se desenvolvem deslocamentos irreversíveis (ou "plásticos") que danificam o material. Por exemplo, se  $F_2 > 0$  o processo de retorno desenvolve valores irreversíveis de  $w^c$  que farão com que a resistência à compressão  $\sigma_c$  diminua conforme a relação mostrada na Figura 1. Graficamente esta situação pode ser visualizada na Figura 2 com a reta  $F_2=0$  se movendo para a direita. O processo se completa quando  $\sigma_c = 0$ , ou seja o material está completamente danificado sem mais resistência alguma. Detalhes quanto ao processo de retorno podem ser encontrados em Evangelho [10] e Lens et al. [7].

## 2.3 Implementação em elementos finitos

No caso de implementação em elementos finitos, as superfícies internas são criadas gerando nós duplos na malha. Ou seja, a ligação entre elementos passa a ser feita via tensões coesivas e não mais através da conectividade como nos métodos usuais. Definidas as superfícies, pode-se calcular deslocamentos e tensões coesivas, estas obtidas dos processos descritos acima. Finalmente é necessário integrar espacialmente as tensões coesivas, o que fornecerá forças internas que se somarão às forças internas normalmente computadas em problemas usuais de elementos finitos.

Deve-se ressaltar aqui que toda a não linearidade do comportamento do concreto é restrita às superfícies coesivas. Isto se dá devido a natureza do processo de dano do concreto, que tanto em tração como em compressão é restrito às superfícies, permanecendo o volume do material elástico-linear.

Devido a não-linearidade, o método de Newton-Raphson é empregado como método de solução. Os elementos finitos empregados são isoparamétricos quadriláteros lineares com função de interpolação de Lagrange.

## 3. Experimentação numérica

Neste capítulo simulam-se vigas isostáticas de concreto armado

**Tabela 1 – Características das vigas ensaiadas (14)**

Viga	$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_{esc}$ (MPa)	h (mm)	d (mm)
J1	34	330	305	255
J2	28	330	305	255
J10/J19	25	310	405	355

em flexão de três pontos, dois apoios e um ponto de aplicação de carga no centro da borda superior da estrutura, como exemplifica a Figura 3. Estado plano de deformação é considerado. Na modelagem numérica, as barras de armadura são substituídas por uma camada de altura equivalente de aço, obtida dividindo a área da seção transversal total da armadura pela largura da viga. O centro de gravidade da camada de altura equivalente de aço coincide com o centro de gravidade da armadura.

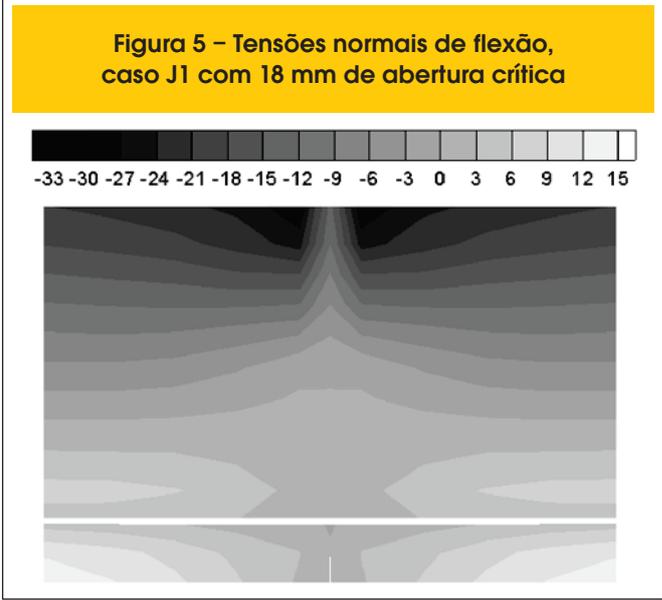
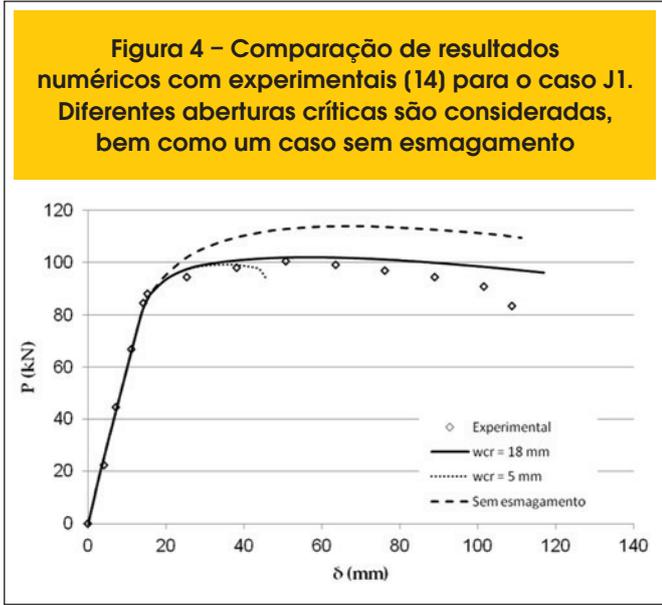
A linha horizontal pontilhada inferior na Figura 3 indica a posição da armadura de tração e a linha horizontal pontilhada superior a armadura de compressão. Assume-se que todo o processo de esmagamento é totalmente localizado na seção transversal central, o que é consistente com as constatações físicas quanto ao esmagamento. A fissuração também é considerada localizada na mesma seção, de modo que todos os elementos coesivos são considerados numa linha central, perpendicular ao comprimento da viga, conforme indica a linha pontilhada vertical na Figura 3.

Quatro diferentes vigas foram numericamente simuladas neste trabalho e comparadas com resultados experimentais de Burns e Siess [14]. A Tabela 1 fornece a descrição das vigas analisadas (denominação conforme [14]).

Onde  $\sigma_{esc}^0$  é a tensão de escoamento inicial da armadura. Em todos os casos a mesma armadura de tração é empregada: duas barras de diâmetro 25,4 mm. A viga J2 é a única que possui armadura de compressão e consiste de duas barras de diâmetro 19 mm posicionada em  $d'=50$  mm. O aço da armadura é considerado elasto-plástico com endurecimento não linear definido pela equação 2:

$$\sigma_{esc} = \sigma_{esc}^0 + (\sigma_{esc}^\infty - \sigma_{esc}^0)[1 - \exp(-k \epsilon^{pl})] \quad (2)$$

Onde  $\epsilon^{pl}$  é a deformação plástica. Para as constantes  $\sigma_{esc}^\infty$  e  $k$  foram adotados os valores 500 MPa e 2,5, respectivamente, de modo a ajustar a relação tensão-deformação do aço empregado nos experimentos.



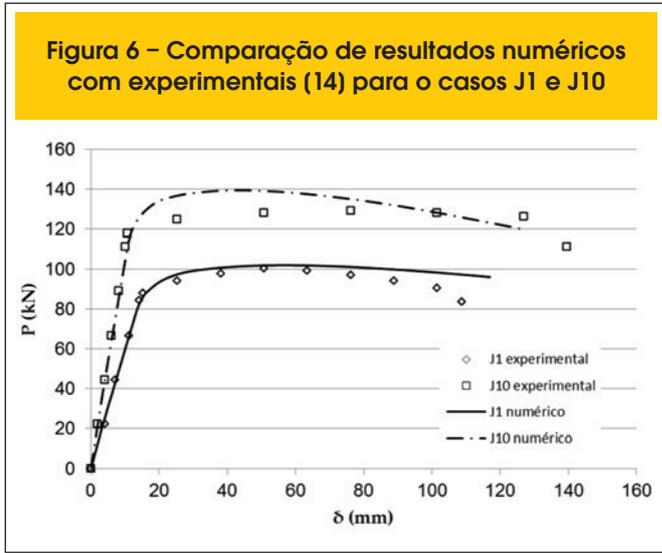
Com exceção do caso J19, as vigas possuem estribos de 9,5 mm de diâmetro. No caso J19 os estribos têm 6,3 mm de diâmetro. Em todos os casos o espaçamento dos mesmos é de 150 mm.

Admite-se neste trabalho um comportamento de aderência entre concreto e armadura conforme o Código Modelo 90 [15]. Devido à presença de estribos a condição confinada foi empregada.

O comprimento  $L$  das vigas é o mesmo e vale 3650 mm, bem como a largura, que vale 200 mm.

Para a consideração da fissuração, a resistência à tração é definida como  $\sigma_t = 0,3(\sigma_c)^{2/3}$  e  $G_f = 0,09$  N/mm em todos os casos.

Na Figura 4 são mostrados resultados de simulação carga/deslocamento para três diferentes situações, comparadas com o resultado experimental apresentado por Burns e Siess [14] para o caso J1. Estes autores descrevem a sequência de eventos no ensaio da seguinte forma: o comportamento elástico-linear só ocorre para níveis muito baixos de carga, quando então começa a fissuração do concreto. Para níveis de carga em torno de



80 kN, a não linearidade aumenta e corresponde ao início do escoamento do aço. Logo em seguida tem início o esmagamento do concreto, quando então a relação carga/deflexão tende a se tornar decrescente. Esta sequência de eventos é capturada pelo presente modelo.

Quando o esmagamento não é considerado, valores de carga de pico são superestimados em mais de 10%, como mostra a figura. Já a energia de esmagamento tem efeito somente sobre a ductilidade da viga. Para uma abertura crítica de 5 mm ( $G_c=85$  N/mm) a deflexão máxima não ultrapassa 50 mm. Já para uma abertura de 18 mm ( $G_c=306$  N/mm) a ductilidade é próxima daquela observada nos experimentos, com uma deflexão máxima de 120 mm.

A Figura 5 mostra a distribuição das tensões normais de flexão para o mesmo caso J1, na região central da viga (caso com abertura crítica de 18 mm). Observa-se que as tensões na zona comprimida (parte superior da viga) nunca ultrapassam a resistência a compressão. Também pode-se observar uma zona de alívio das tensões no centro da viga que corresponde à zona que sofreu maior esmagamento, conforme esperado. Tais constatações indicam que o uso de uma única linha com superfícies coesivas é suficiente para capturar os efeitos do esmagamento.

Por outro lado, na zona de tração (parte inferior da viga) observa-se que as tensões ultrapassam as tensões de resistência a tração, estimada aqui em torno de 3 MPa, o que indica que o uso de apenas uma linha com superfícies coesivas não é suficiente para capturar completamente a fissuração no concreto armado.

Na Figura 6 as vigas J1 e J10 são comparadas. A diferença fundamental entre elas é a altura ligeiramente maior do caso J10. Pode-se observar um bom ajuste novamente com os dados experimentais. No caso J1 empregou-se a mesma abertura crítica de 18 mm e no caso J10 de 22 mm.

Existe uma tendência dos casos com maior altura de viga de que a carga obtida numericamente no início do escoamento do aço fique superestimada em relação aos dados experimentais. Conforme comentado por Carpinteri et al. [16], esta região da curva é fortemente influenciada pela fissuração. Como o modelo empregado

fornece uma representação mais pobre da fissuração (Figura 5), esta pode ser uma justificativa para a dificuldade dos resultados numéricos em ajustar os experimentos em vigas mais altas.

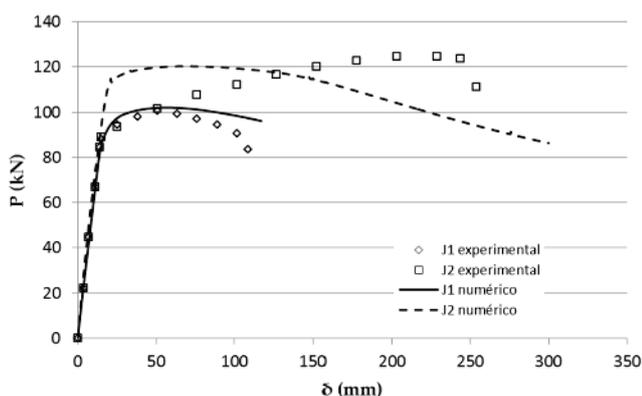
Foi investigado também o efeito da armadura de compressão. Resultados numéricos são comparados com experimentais nos casos J1 e J2 na Figura 7 (caso J2 possui armadura de compressão conforme descrito acima). Em ambos os casos a mesma abertura crítica de 18 mm foi empregada.

De acordo com Carpinteri et al. [16], há um considerável aumento da deformação última com a incorporação da armadura de compressão, caso capturado neste trabalho, conforme se nota da Figura 7, onde a deformação da viga J2 é aproximadamente três vezes maior que a da viga J1. Ainda segundo estes autores, a fissuração tem pouca influência no comportamento último deste tipo de vigas, sendo este controlado por fenômenos relacionados ao esmagamento. Conforme já comentado anteriormente, a fissuração tem influência no início do patamar da curva força/deflexão, justamente onde o presente modelo apresenta menor precisão.

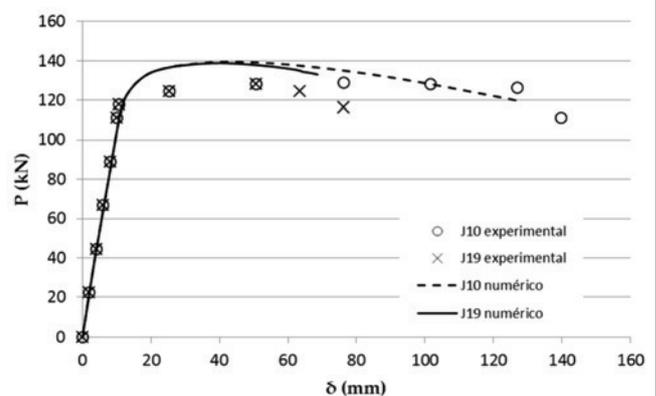
Para resistir aos esforços de cisalhamento, emprega-se as armaduras transversais, os estribos. Nos casos aqui analisados os mesmos possuem formato retangular fechado e são colocados de maneira perpendicular às armaduras. Segundo Carpinteri et al. [12], a diminuição da taxa de estribos determina uma diminuição da sobreposição crítica, caso da viga J19 em relação às demais. Comparou-se aqui o comportamento da viga J19 com a J10. Resultados experimentais também são disponíveis e são mostrados na Figura 8. Buscou-se estabelecer-se uma proporcionalidade com os valores de sobreposição crítica sugeridos por Carpinteri et al. [12], assim este valor para o caso J19 foi de 13,75 mm. (Para o caso J10 o mesmo valor de 22 mm foi empregado).

A partir dos resultados numéricos e experimentais pode-se concluir que o aumento na taxa de armadura transversal implica em um aumento na deflexão última, contudo, sem aumentar de modo significativo o valor da carga máxima suportada pela viga. Isto se deve ao fato de que a presença de estribos influencia basicamente na ductilidade, uma vez que aumenta o confinamento do concreto, com um consequente aumento na deformação última.

**Figura 7 – Comparação de resultados numéricos com experimentais (14) para o casos J1 e J12. (Caso J2 possui armadura de compressão)**



**Figura 8 – Comparação de resultados numéricos com experimentais (14) para o casos J10 e J19. (Caso J19 possui estribos de menor diâmetro)**



## 4. Conclusões

Neste trabalho foi considerado o chamado modelo coesivo de trincas sobrepostas, que permite considerar o esmagamento do concreto através de relações constitutivas do tipo tensão/interpenetração, nas quais o efeito de escala é mínimo. Um estudo exploratório da metodologia foi realizado com o objetivo de observar sua viabilidade, considerando vigas de três pontos submetidas à flexão. Os resultados foram comparados com experimentos [14] com as seguintes conclusões:

- O uso de modelos coesivos (tanto para consideração da fissuração como do esmagamento), juntamente com um modelo discreto para as barras de armadura e aderência concreto/armadura, é capaz de simular todas as etapas de dano no concreto armado, ou seja, pela ordem: fissuração, escoamento do aço e esmagamento.
- Concretos com maior energia de esmagamento, tendem a ter um comportamento mais dúctil. A energia de esmagamento é fortemente aumentada com a densidade e resistência dos estribos, porém é uma propriedade no concreto simples.
- A metodologia é capaz de capturar automaticamente os efeitos da inclusão de armadura de compressão, que tende a aumentar consideravelmente a ductilidade da viga.
- A metodologia também é capaz de, qualitativamente, capturar o efeito dos estribos na ductilidade da viga.
- A metodologia é de fácil implementação em qualquer código não-linear de elementos finitos.

O objetivo principal deste trabalho foi estudar qualitativamente a viabilidade do uso da metodologia. Pretende-se no futuro estudar de forma mais detalhada como definir a energia de esmagamento como uma função da densidade dos estribos ou do confinamento do concreto, que são os fatores mais importantes na definição desta energia. Outro tema a ser estudado no futuro é o efeito dos termos de corte no comportamento em esmagamento. Tal efeito é fundamental para entender, por exemplo, o processo de arrancamento das armaduras.

## 5. Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

## 6. Referências bibliográficas

- [01] Indelicato, E. e Paggi M. Specimen shape and the problem of contact in the assessment of concrete compressive strength. *Materials and Structures*, v.41, n.2, 2008; p. 431-441.
- [02] Van Mier, J. G. M. Strain softening of concrete under multiaxial compression, Eindhoven, 1984, Tese (doutorado) – Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- [03] Carpinteri, A., Corrado, M., Paggi, M. e Mancini, G. Cohesive versus overlapping crack model for a size effect analysis of RC members in bending. *In: 6<sup>th</sup> International FraMCoS Conference, Catalonia, 2007, Proceedings*, v.2, p.655-63.
- [04] Carpinteri, A., Corrado, M., Paggi, M. e Mancini, G. A numerical approach to modelling size effects on the flexural ductility of RC beams. *Rilem Materials and Structures*. doi: 10.1617/s11527-00809454-y.
- [05] Corrado, M., Effetti di scala sulla capacità di rotazione plastica di travi in calcestruzzo armato, Torino, 2007, Tese (doutorado) – Politecnico di Torino, Itália.
- [06] Hillerborg, A. Moderer, M. e Peterson, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, v.6, n.6, 1976, p.773-782.
- [07] Lens, L. N., Bittencourt, E. e d'Avila, V. M. R. Constitutive models for cohesive zones in mixed-mode fracture of plain concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, v.76, 2009, p.2281-2297.
- [08] van Vliet, M. e van Mier, J. Experimental investigation of concrete fracture under uniaxial compression. *Mechanics of cohesive-frictional material*, v.1, n.1, 1996, p.115-127.
- [09] Jansen, D. C. e Shah, S. P. Effect of length on compressive strain softening of concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, v.123, n.1, 1997, p.25-35.
- [10] Evangelho, T. B. Consideração do esmagamento do concreto através do modelo de trincas sobrepostas. Porto Alegre, 2013, Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [11] Carpinteri, A., Ciola, F. e Pugno, N. Boundary element method for the strain-softening response of quasi-brittle materials in compression. *Computers and Structures*, v.79, n.4, 2001, p.389-401.
- [12] Carpinteri, A., Corrado, M., Mancini, G. e Paggi, M. The overlapping crack model for uniaxial and eccentric concrete compression tests. *Magazine of Concrete Research*, v.61, n.9, 2009, p.745-757.
- [13] Suzuki, M., Akiyama, M., Matsuzaki, H. e Dang, T. H. Concentric loading test of RC columns with normal and high strength materials and averaged stress-strain model for confined concrete considering compressive fracture energy. *In: 2<sup>nd</sup> International Congress Federation Internationale du Beton, Naples, 2006, Proceedings, session 3*, p.1-10.
- [14] Burns, N.H. e Siess, C.P. Plastic hinging in reinforced concrete. *Journal of Structural Division, ASCE*, v.92, 1966, p. 45-61.
- [15] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. *Bulletin d'Information, Lausanne*, n. 213/214, mar. 1993.
- [16] Carpinteri, A., Corrado, M. e Paggi, M. An integrated cohesive/overlapping crack model for the analysis of flexural cracking and crushing in RC beams. *International Journal of Fracture*, v.161, 2010, p.161-173.