

Punching resistance of internal slab-column connections with double-headed shear studs

Resistência à punção de ligações laje-pilar interno com conectores de cisalhamento



M. H. OLIVEIRA ^a
honorato.eng@gmail.com.br

M. J. M. PEREIRA FILHO ^b

D. R. C. OLIVEIRA ^c
mpina@ufpa.br

M. P. FERREIRA ^d
denio@ufpa.br

G. S. S. A. MELO ^e
melog@unb.br

Abstract

Punching shear is a brittle failure mode that may occur in slab-column connections, which may be prevented by using shear reinforcement in the slab-column connection. This paper presents comparisons between experimental results of 36 tests in internal slab-column connections with double-headed shear studs, which are largely used in North America, Europe and Asia, with theoretical results using recommendations presented by ACI 318, NBR6118, Eurocode 2 and also the Critical Shear Crack Theory (CSCT). Considering the database used it is possible to observe that ACI 318 presents conservative trends, whereas NBR 6118 showed a low coefficient of variation, but with a large number of unsafe results. Both Eurocode 2 and CSCT showed satisfactory results with Eurocode 2 presenting slightly higher performance.

Keywords: flat slabs, punching shear, double-headed studs.

Resumo

A punção é uma forma de ruptura por cisalhamento que pode ocorrer em ligações laje-pilar que pode ser evitada utilizando-se armaduras de cisalhamento na ligação. Este artigo apresenta comparações entre resultados experimentais de 36 ensaios realizados em ligações laje-pilar interno, armadas com conectores de cisalhamento do tipo pino de duas cabeças, populares na América do Norte, Europa e Ásia, com resultados teóricos utilizando as recomendações do ACI 318, NBR 6118, Eurocode 2, além da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC). Para o banco de dados utilizado, o ACI 318 mostrou tendências conservadoras, enquanto que a NBR 6118 mostrou baixo coeficiente de variação, mas um grande número de resultados contra a segurança. Tanto o Eurocode 2, quanto a TFCC apresentaram resultados satisfatórios, com o Eurocode 2 apresentando desempenho ligeiramente superior.

Palavras-chave: lajes lisas, punção, conectores de cisalhamento.

^a Professor, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, honorato.eng@gmail.com.br, Catalão, Goiás, Brasil.

^b Engenheiro Civil, Mestrando em Estruturas, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil.

^c Professor, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, mpina@ufpa.br, Belém, Pará, Brasil.

^d Professor, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, denio@ufpa.br, Belém, Pará, Brasil.

^e Professor, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, melog@unb.br, Brasília, Distrito Federal, Brasil.

1. Introdução

As lajes lisas são estruturas laminares horizontais em concreto armado ou protendido, que se apóiam diretamente nos pilares. Sua utilização é comum em países da América do Norte, Europa e Ásia. E no Brasil este sistema construtivo começa a se destacar no mercado da construção civil, fundamentalmente por sua maior simplicidade na execução das formas e das armaduras, situação esta que pode conduzir a reduções no custo com mão-de-obra e no tempo de construção, além de atribuir maior flexibilidade na utilização dos espaços construídos.

A punção é uma forma de ruptura por cisalhamento que pode ocorrer em elementos de placa submetidos a uma carga ou reação concentrada aplicada transversalmente e caracteriza-se por ocorrer de forma brusca, podendo levar a estrutura à ruína através do colapso progressivo. A resistência à punção da ligação laje-pilar é um dos parâmetros mais importantes no dimensionamento de lajes lisas, sendo possível reduzir a intensidade das tensões de cisalhamento na ligação laje-pilar através do aumento localizado da espessura da laje nessa região com o uso de ábacos (*droppanel*s) ou capitéis. Pode-se ainda, aumentar a capacidade resistente da ligação através do uso de armaduras de cisalhamento.

Dentre os diversos tipos de armadura de cisalhamento disponíveis, os *double-headed studs*, em uma tradução livre para o português, pinos de duas cabeças, são hoje muito populares em construções com lajes lisas, principalmente, devido à sua eficiente ancoragem mecânica proporcionada pelas cabeças, que são forjadas aos vergalhões, sendo estes de fabricação industrializada. Este artigo tem como objetivo principal, discutir e avaliar as recomendações apresentadas por algumas das principais normas de projeto para a estimativa da resistência à punção de lajes maciças em concreto armado. A discussão é voltada para o caso específico de lajes com armaduras de cisalhamento do tipo pino de duas cabeças. Isso é feito através da comparação dos resultados experimentais de ensaios de 36 lajes com os resultados teóricos obtidos de acordo com as recomendações das normas ACI 318M [1], Eurocode 2 [2] e NBR 6118 [3]. Os resultados experimentais são comparados ainda com aqueles obtidos por meio da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC), conforme apresentada por Ruiz e Muttoni [4]. Isso foi feito a fim de avaliar se as expressões apresentadas são adequadas para os casos de lajes com esse tipo de armadura, uma vez que a última versão do ACI e a recente norma *fibModelCode* 2010 [5], que incorporou a TFCC em suas recomendações sobre punção, apresentam tratamento diferenciado para os casos de *studs*.

2. Armaduras de cisalhamento

No dimensionamento de uma ligação laje-pilar, caso seja verificado que esta ligação não atende à segurança quanto à punção, sua resistência pode ser elevada adotando-se algumas medidas, como o aumento da seção do pilar, da espessura da laje, da taxa de armadura de flexão, da resistência à compressão do concreto, ou ainda, utilizando-se ábacos e capitéis. Porém, o aumento da seção dos pilares ou a utilização de ábacos e capitéis costumam gerar problemas do ponto de vista arquitetônico. Já o aumento da espessura da laje pode significar uma elevação considerável dos custos, tanto da estrutura quanto das fundações. Finalmente, tanto o aumento da taxa de armadura de flexão quan-

to o da resistência à compressão do concreto seriam, por si só, pouco eficientes. Assim, quando se deseja aumentar a resistência à punção, umas das soluções mais viáveis pode ser a utilização de armaduras de cisalhamento.

A eficiência das armaduras de cisalhamento no combate à punção está relacionada com diversos aspectos, como o tipo de armadura utilizado, além da quantidade, distribuição, espaçamento e do número de camadas. É fundamental, para que elas apresentem um bom desempenho, que uma ancoragem adequada seja garantida, sendo este normalmente um ponto crítico para a maioria das opções de armaduras disponíveis, uma vez que lajes são elementos delgados. Outro aspecto importante sobre o uso de armaduras de cisalhamento em lajes lisas refere-se à praticidade de sua instalação. A região da ligação laje-pilar é submetida a esforços de flexão elevados, sendo comum a concentração de barras de flexão nessa região, o que dificulta a distribuição das armaduras de cisalhamento.

Diversos tipos de armaduras de cisalhamento já foram testados buscando-se avaliar sua eficiência. As primeiras armaduras testadas na resistência à punção foram barras dobradas como as apresentadas na Figura 1a. Este tipo de armadura foi usado em ensaios como os de Graf [6], Elstner e Hognestad [7] e Andersson [8]. Elas podem ser bastante eficientes na resistência à punção, desde que sejam tomados cuidados a fim de evitar a ruptura por punção na região imediatamente posterior às barras dobradas. Para isso, muitas vezes é necessário o uso de várias camadas de armaduras o que, no caso de barras dobradas, pode gerar dificuldades construtivas. Uma alternativa para o uso eficiente deste tipo de armadura foi apresentada por Broms [9], que associou barras dobradas nas duas primeiras camadas com estribos fechados, e conseguiu evitar a punção, com as lajes vindo a romper por flexão. Estribos também podem ser utilizados como armadura de cisalhamento, tendo sido testados estribos fechados (Figura 1b), estribos abertos (Figura 1c), estribos tipo "pente" (Figura 1d), estribos inclinados (Figura 1e), dentre outros. Estribos fechados e estribos do tipo "pente" são de difícil utilização por questões construtivas relacionadas à montagem das armaduras. Estribos abertos são de difícil ancoragem em lajes lisas, mesmo adotando-se medidas como dobrar suas extremidades em ângulos de 90° ou 180°, ou então usando-se barras horizontais passando por dentro destas dobras, conforme observado por Regan e Samadian [10]. Apenas os estribos inclinados, como os utilizados por Oliveira *et al.* [11] com inclinação de 60°, mostraram-se eficientes na resistência à punção. As armaduras do tipo pino ou *studs* (Figuras 1f e 1g) têm sido largamente utilizadas devido à boa ancoragem mecânica e pelo fato de serem industrializadas, o que garante um maior controle de qualidade e atende as tendências atuais de redução das atividades realizadas em canteiro. Ainda assim, estas armaduras também geram dificuldades construtivas relacionadas com sua instalação, principalmente se no projeto for adotada uma distribuição radial destas armaduras. Já na Figura 1h é apresentada a armadura do tipo *shearheads*, que nada mais é do que um perfil de aço soldado de modo a formar uma grelha metálica. É um tipo de armadura considerada de custo elevado, normalmente utilizado quando há a necessidade de se deixar grandes furos na região próxima à ligação e que exigem grandes ajustes nas armaduras de flexão desta região.

Em relação ao arranjo das armaduras, como a distribuição das tensões de cisalhamento é relativamente uniforme em ligações laje-

Figura 1 –Tipos de armaduras de cisalhamento para ligações laje-pilar

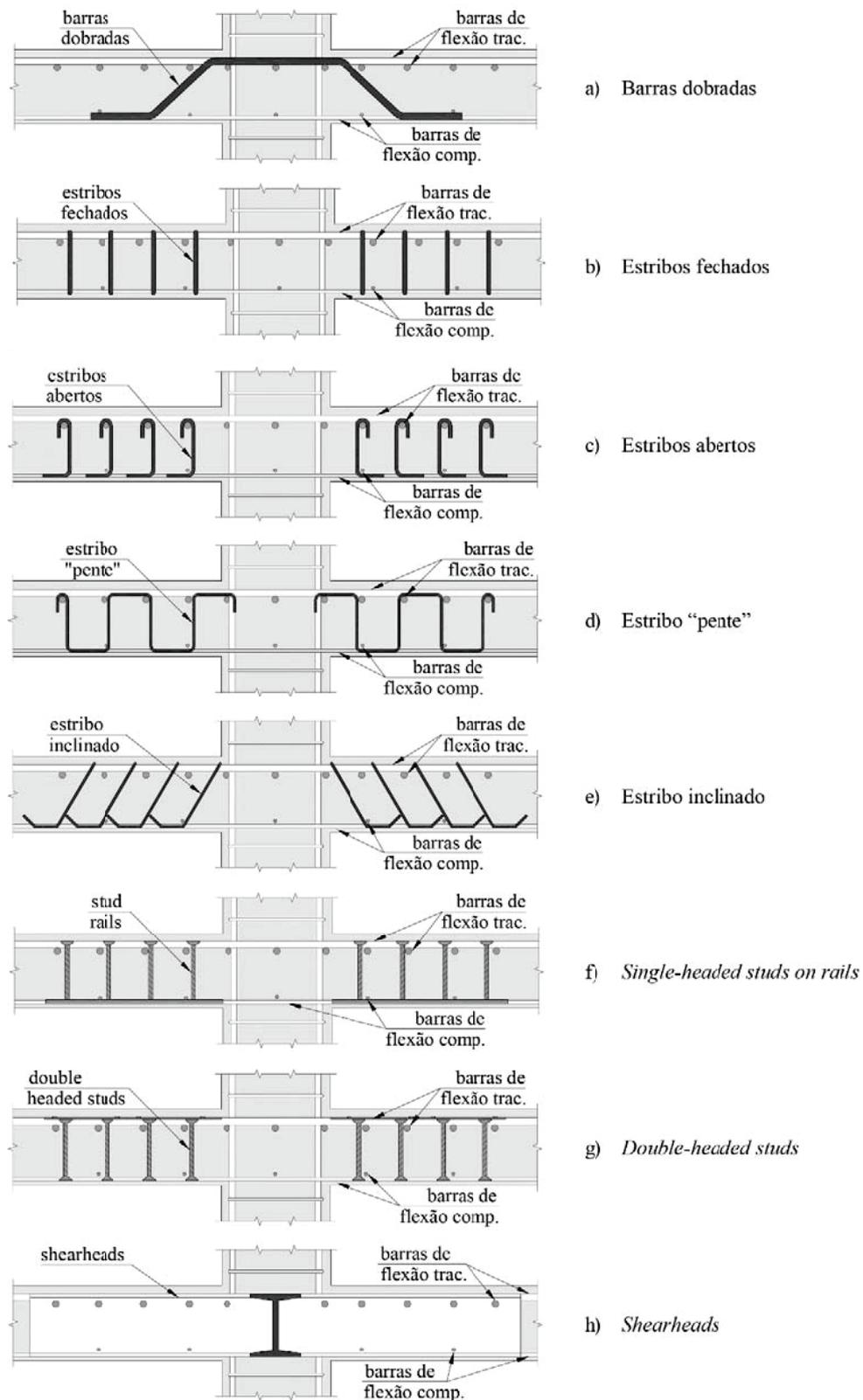


Figura 2 – Arranjos para a distribuição da armadura de cisalhamento tipo studs

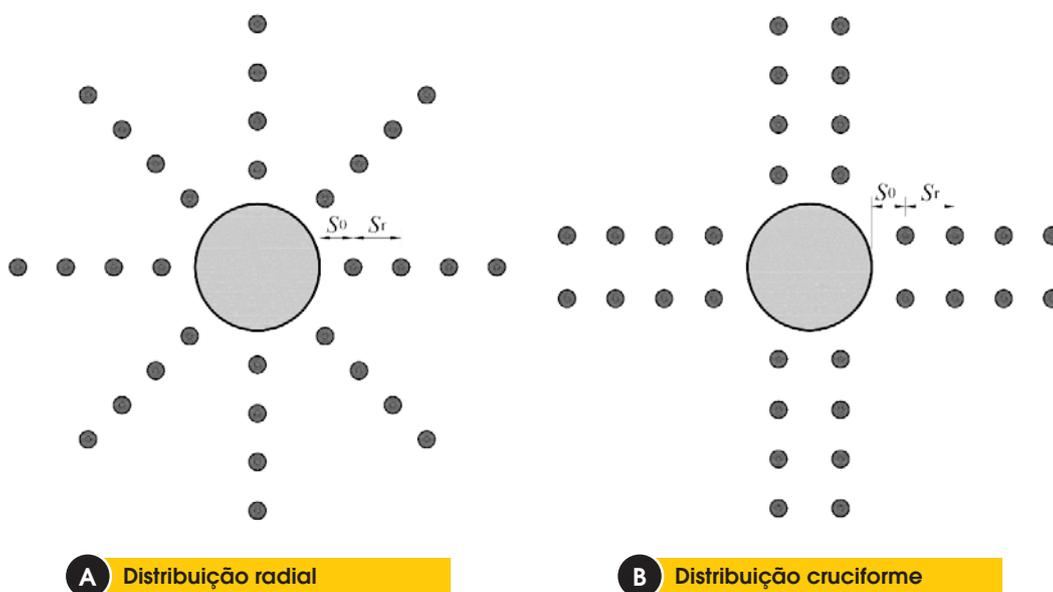


Figura 3 – Modos de ruptura por punção em lajes com armadura de cisalhamento

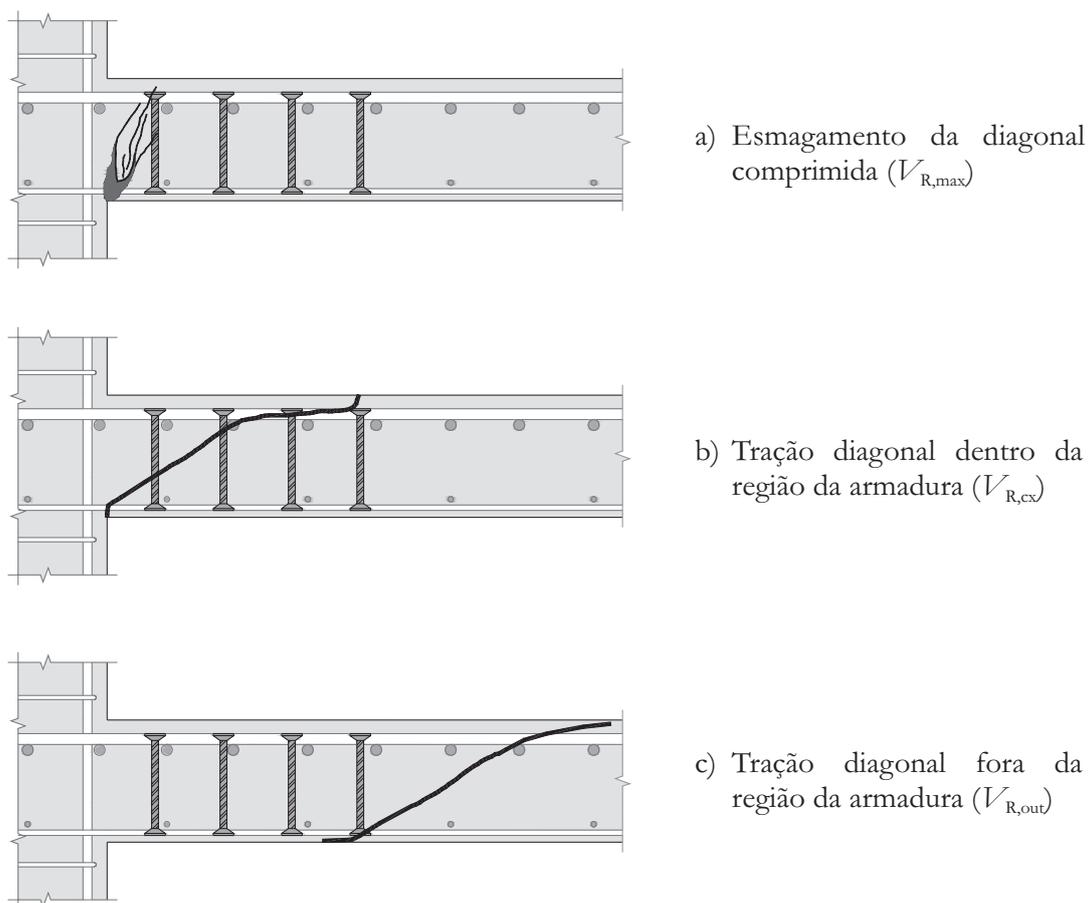
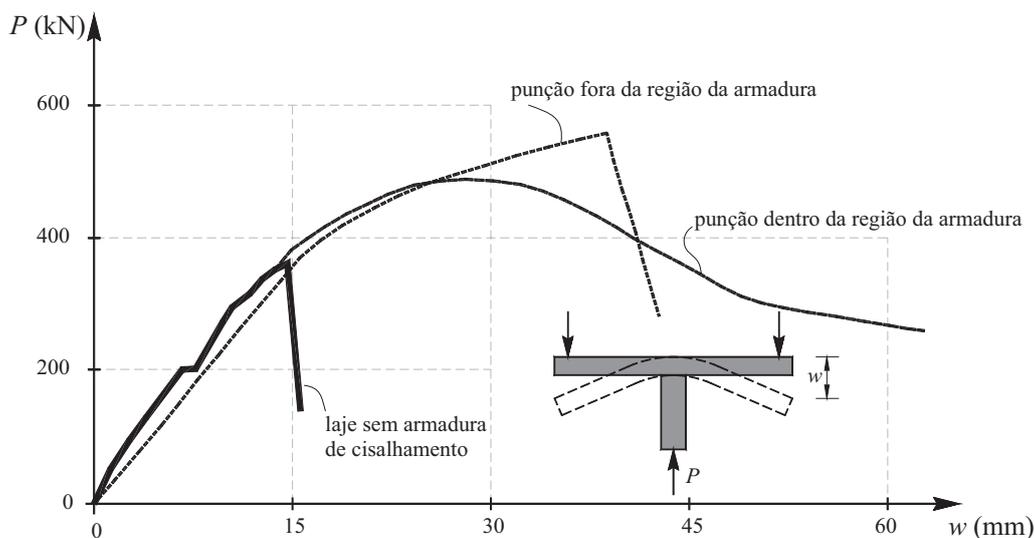


Figura 4 – Influência da armadura de cisalhamento - Dilger e Ghali (11)

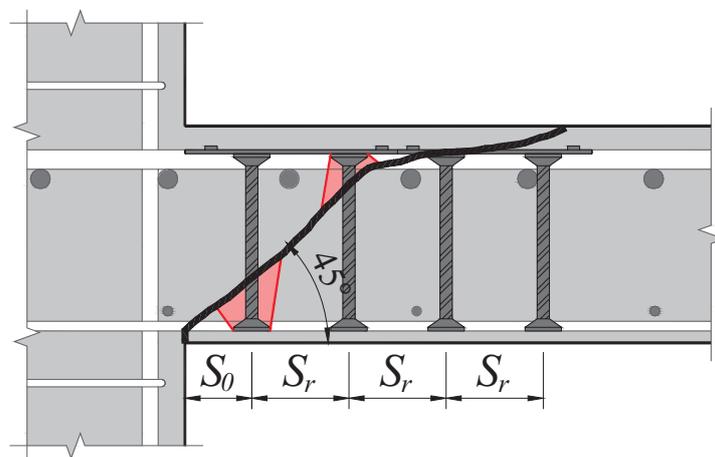


- pilar com pilares de seção circular, quadrada e retangular com índice de retangularidade até 2, teoricamente o ideal seria adotar uma distribuição radial das armaduras, conforme indicado na Figura 2a. No entanto, distribuir as armaduras de cisalhamento de forma radial usualmente gera grandes interferências com as armaduras de flexão na ligação laje-pilar. Uma alternativa é concentrar as armaduras de cisalhamento em faixas ortogonais, em um arranjo cruciforme, conforme apresentado na Figura 2b. Com exceção do ACI, as demais normas de projeto costumam penalizar as estimativas de resistência à punção de lajes com este tipo de arranjo cruciforme nas armaduras de cisalhamento, considerando de forma geral, que isso só seria justificável nos casos de pilares com alto índice de retangularidade ou para ligações laje-pilar em painéis com assimetria significativa de cargas ou geométrica. A taxa de armadura de cisalhamento por camada e o número de

camadas utilizadas influenciam diretamente no modo de ruptura por punção, que pode ocorrer por esmagamento da diagonal comprimida próxima da face do pilar ou por tração diagonal dentro ou fora da região da armadura de cisalhamento, conforme ilustrado na Figura 3. Evidências experimentais indicam que a posição da superfície de ruptura por punção, influencia significativamente na ductilidade da ligação laje-pilar após a ruptura. A Figura 4, adaptada de Dilger e Ghali [12], mostra que quando a ruptura ocorre fora da região armada ao cisalhamento, a ruína pode ser tão brusca quanto no caso de lajes sem armadura de cisalhamento, com a ligação apresentando baixa capacidade portante.

Outro parâmetro importante na definição da resistência à punção de ligações laje-pilar é o espaçamento da armadura de cisalhamento em relação à face do pilar (s_0) e entre suas camadas (s_r). No caso da primeira camada (s_0), a norma Eurocode 2 [2] recomenda que

Figura 5 – Possível falha por ancoragem dos studs em lajes lisas



esta distância seja no mínimo igual a $0,3 \cdot d$. Já a NBR 6118 [3] recomenda que ela seja no máximo de $0,5 \cdot d$, sendo d a altura útil da laje. Já para o espaçamento entre camadas (s_r), essas mesmas normas sugerem que a distância máxima seja de $0,75 \cdot d$. Limitações para estes valores são importantes (ver Figura 5). Se a primeira camada de *studs* for posicionada muito próximo da face do pilar (s_0 muito pequeno) é possível que a ancoragem inferior da armadura seja prejudicada. O mesmo pode acontecer com as camadas posteriores, porém na ancoragem superior, se o espaçamento entre camadas for muito elevado. Em ambos os casos, a deficiência na ancoragem pode favorecer a ocorrência da punção sem que a armadura de cisalhamento atinja o escoamento.

3. Métodos teóricos para estimativa da resistência à punção

Tanto as três normas consideradas neste artigo quanto a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento admitem que a resistência à punção de lajes lisas com armaduras de cisalhamento deve ser considerada como o menor valor entre $V_{R,cs}$, $V_{R,out}$ e $V_{R,max}$, correspondentes aos modos de ruptura indicados na Figura 3, mas não inferior à $V_{R,c}$, que é a resistência à punção de uma laje com as mesmas características, porém sem armadura de cisalhamento. No caso das normas de projeto, para a estimativa da resistência à punção, o princípio geral adotado é assumir uma tensão resistente constante ao longo de diferentes perímetros de controle. Estes perímetros de controle são admitidos a distâncias específicas da face do pilar, tendo ainda diferentes geometrias. O perímetro de controle u_0 é utilizado nas estimativas da resistência máxima possível de uma ligação laje-pilar ($V_{R,max}$). Já o perímetro de controle u_1 está

associado com a resistência à tração diagonal nas proximidades da face do pilar, sendo utilizado para o cálculo de $V_{R,c}$ e $V_{R,cs}$. Por fim, u_{out} é um perímetro associado à resistência à tração diagonal na região externa à armadura de cisalhamento, sendo associado à $V_{R,out}$. A Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento trás uma metodologia para a estimativa da resistência à punção diferente da apresentada pelas normas de projeto.

3.1 ACI 318M

As expressões do ACI para a estimativa da resistência à punção são apresentadas nas Equações 1 a 5. A Figura 6 apresenta algumas recomendações para o arranjo das armaduras e para a definição dos perímetros de controle. O ACI apresenta expressões específicas para a estimativa da resistência à punção de lajes lisas armadas com *studs*. Estas equações são mais otimistas quanto à contribuição destas armaduras na resistência à punção ($V_{R,s}$), se comparadas às apresentadas para os casos onde estribos forem utilizados, justamente por considerá-las com ancoragem mais eficiente.

$$V_{R,c} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d \tag{1}$$

$$V_{R,cs} = 0,75 \cdot V_{R,c} + V_{R,s} \tag{2}$$

Figura 6 – Regras para detalhamento e perímetros de controle – ACI 318M

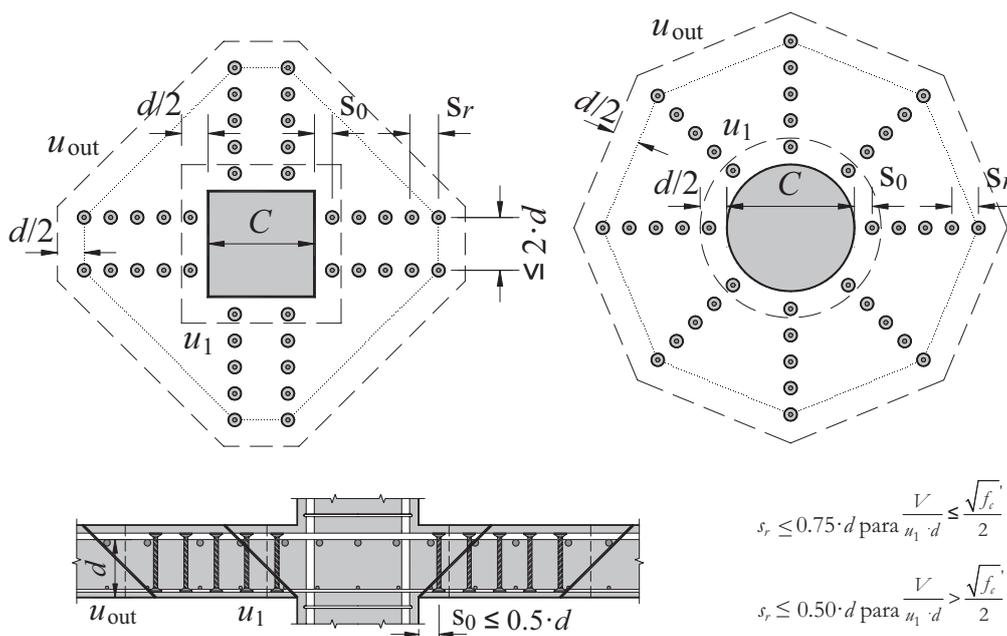
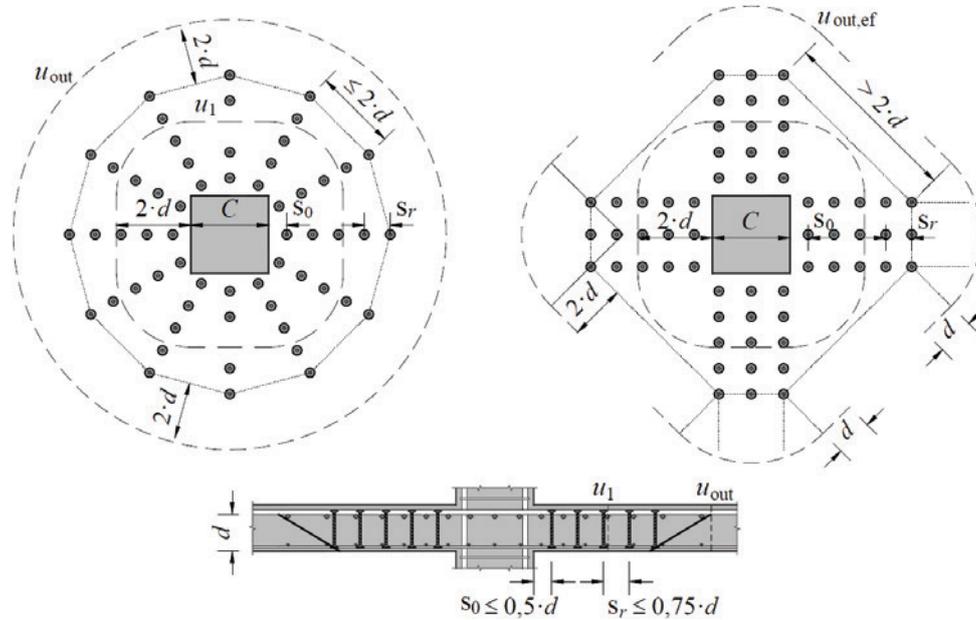


Figura 7 – Regras para detalhamento e perímetros de controle – NBR 6118



$$V_{R,s} = \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{yw}, \text{ com } f_{yw} \leq 414 \text{ MPa} \quad (3)$$

$$V_{R,out} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{out} \cdot d \quad (4)$$

$$V_{R,max} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d, \text{ se } s_r \leq 0,5d \quad (5a)$$

$$V_{R,max} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_1 \cdot d, \text{ se } 0,5d \leq s_r \leq 0,75d \quad (5b)$$

f_c é limitado à ≤ 69 MPa para fins de cálculo.
 A_{sw} é a área de aço de uma camada da armadura de cisalhamento;
 f_{yw} é a tensão de escoamento da armadura de cisalhamento, não maior que 420 MPa.

3.2 NBR 6118

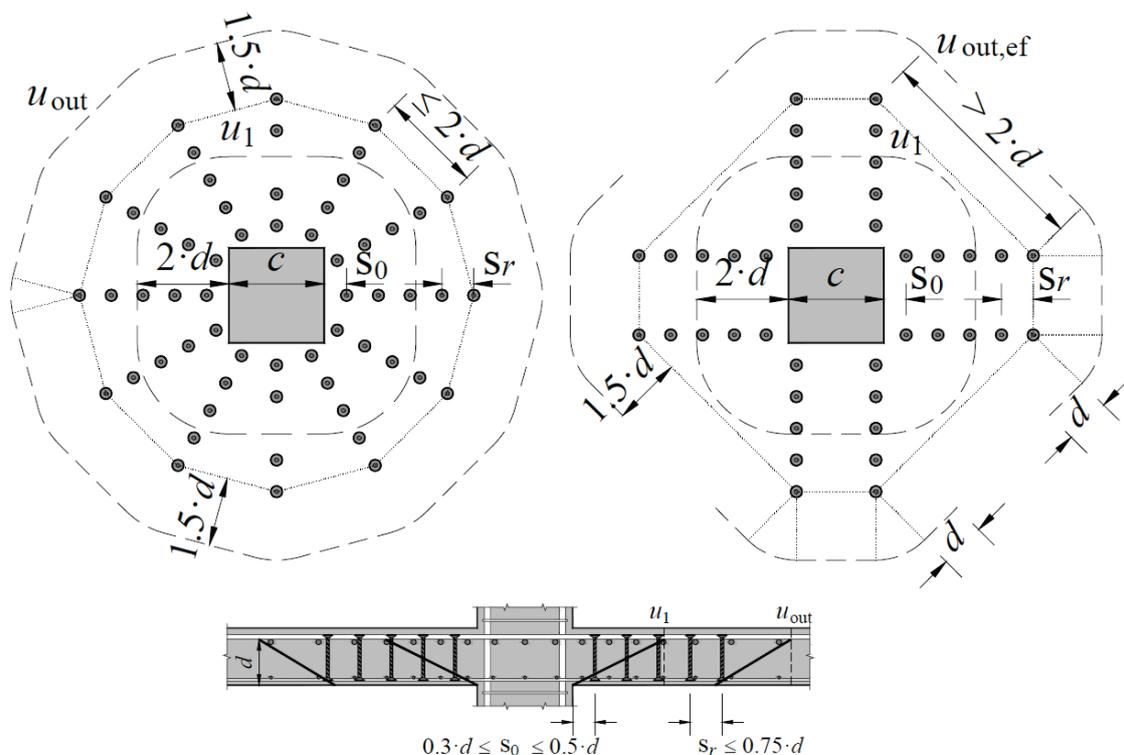
A norma brasileira usou como referência para suas recomendações para estimativa da resistência à punção a antiga norma CEB-FIPMC90 [13], apresentando praticamente as mesmas equações desta norma, com pequenas alterações, como a geometria do perímetro de controle externo para o caso de lajes com armaduras distribuídas radialmente, que no caso da norma brasileira é circular. Estas recomendações são apresentadas de forma sintetizada nas Equações 6 a 9 e na Figura 7. Notar que neste artigo as equações estão apresentadas sem o coeficiente de segurança de 1,4 que está embutido nas expressões apresentadas pela norma brasileira.

$$V_{R,c} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad (6)$$

$$V_{R,cs} = 0,75 \cdot V_{R,c} + \left(1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{yw,ef} \right) \quad (7)$$

$$V_{R,out} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_{out} \cdot d \quad (8)$$

Figura 8 – Regras para detalhamento e perímetros de controle – Eurocode 2



$$V_{R,max} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_c \cdot u_0 \cdot d \quad (9)$$

f_c é limitado à 50 MPa para fins de cálculo;
 ρ é a taxa de armadura de flexão tracionada média da laje, calculada como $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$, onde
 ρ_x e ρ_y são as taxas nas direções x e y , respectivamente;
 A_{sw} é a área de aço de uma camada da armadura de cisalhamento;

ξ é o *size effect*, assumido como $\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$, com d em mm;

$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_c}{250}\right)$, com f_c em MPa;

f_{yw} é a tensão de escoamento da armadura de cisalhamento, não maior que 345 MPa para pinos ou 288 MPa para estribos (de aço CA-50 ou CA-60).

3.3 Eurocode 2

O Eurocode 2 [2] também baseou-se na MC90, apresentando recomendações semelhantes às da norma brasileira. As principais diferenças entre as prescrições estabelecidas por esta norma são a limitação do valor do *size effect* em $k \leq 2,0$, a limitação da taxa de armadura de

flexão que efetivamente contribui na resistência à punção, considerada como $\rho \leq 2\%$ e a determinação da tensão efetiva na armadura de cisalhamento. As Equações 10 a 16 resumem as expressões apresentadas por esta norma e a Figura 8 auxilia na determinação dos perímetros de controle e no espaçamento das armaduras.

$$V_{R,c} = 0,18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad (10)$$

$$k = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2,0 \quad (11)$$

$$V_{R,\alpha} = 0,75 \cdot V_{R,c} + V_{R,s} \quad (12)$$

$$V_{R,s} = 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{yw,ef} \quad (13)$$

$$f_{yw,ef} = 1,15 \cdot (250 + 0,25 \cdot d) \leq f_{yw,ef} \leq 600 \text{ MPa} \quad (14)$$

$$V_{R,out} = 0,18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c')^{1/3} \cdot u_{out,ef} \cdot d \quad (15)$$

$$V_{R,máx} = 0,30 \cdot f_c \cdot \left(1 - \frac{f_c}{250}\right) \cdot u_0 \cdot d \quad (16)$$

Onde:
 ρ é a taxa de armaduras de flexão calculada como $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$, onde ρ_x e ρ_y são as taxas de armadura em direções ortogonais determinadas para faixas com largura igual ao lado do pilar mais $3 \cdot d$ para ambos os lados;
 $\rho \leq 0,02$ para fins de cálculo;
 $f_c \leq 90 \text{ MPa}$.

3.4 Teoria da fissura crítica de cisalhamento (TFCC)

A teoria desenvolvida por Muttoni baseia-se na ideia de que a resistência à punção diminui com o aumento da rotação da laje, o que pode ser explicado pelo surgimento de uma fissura crítica de cisalhamento que se propaga na laje cortando a diagonal comprimida que transmite a força cortante para o pilar (ver Figura 9a). A abertura

dessa fissura reduz a resistência da biela comprimida e pode eventualmente levar a uma ruptura por punção. Segundo Muttoni e Schwartz [14] a espessura desta fissura é proporcional ao produto $\psi \cdot d$ (ver Figura 9b). Já a transmissão de cisalhamento na fissura crítica está diretamente ligada à rugosidade de sua superfície, a qual por sua vez é função do tamanho máximo do agregado graúdo. Baseando-se nesses conceitos, Muttoni [15] propõe que a parcela de resistência ao cisalhamento proporcionada pelo concreto pode ser estimada segundo a Equação 17. A Figura 10 apresenta a posição e geometria dos perímetros de controle segundo a TFCC.

$$V_{R,c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_1 \cdot d \cdot \sqrt{f_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad (17)$$

Onde:
 ψ é a rotação da laje;
 d_{g0} é o diâmetro de referência do agregado admitido como 16 mm;
 d_g é o diâmetro máximo do agregado usado no concreto da laje.
 Já a parcela de resistência proporcionada pelas armaduras de cisalhamento verticais cortadas pela superfície de ruptura pode ser obtida através da Equação 18.

$$V_{R,s} = \sum A_{sw} \cdot f_{sw} \quad (18)$$

Onde:
 \sum é feito para as armaduras de cisalhamento cortadas pela superfície de ruptura;

Figura 9 – Propagação da fissura crítica de cisalhamento – Adaptado de Ruiz e Muttoni (4)

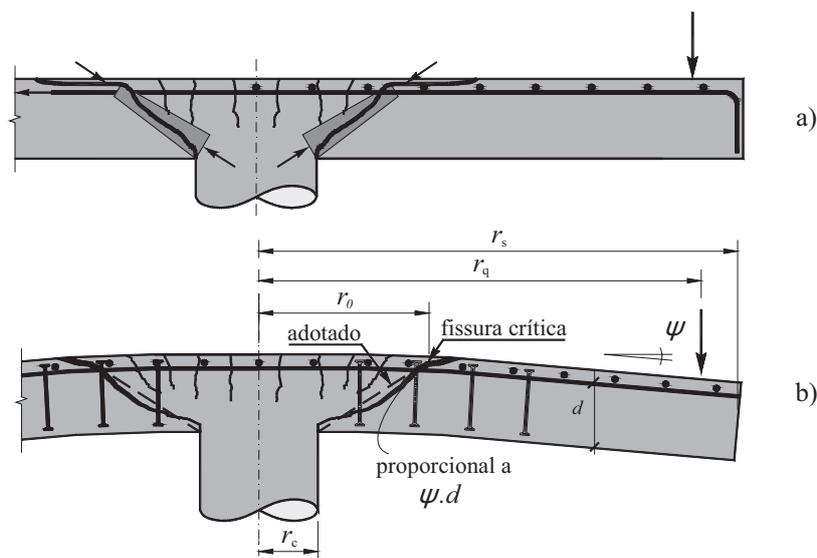
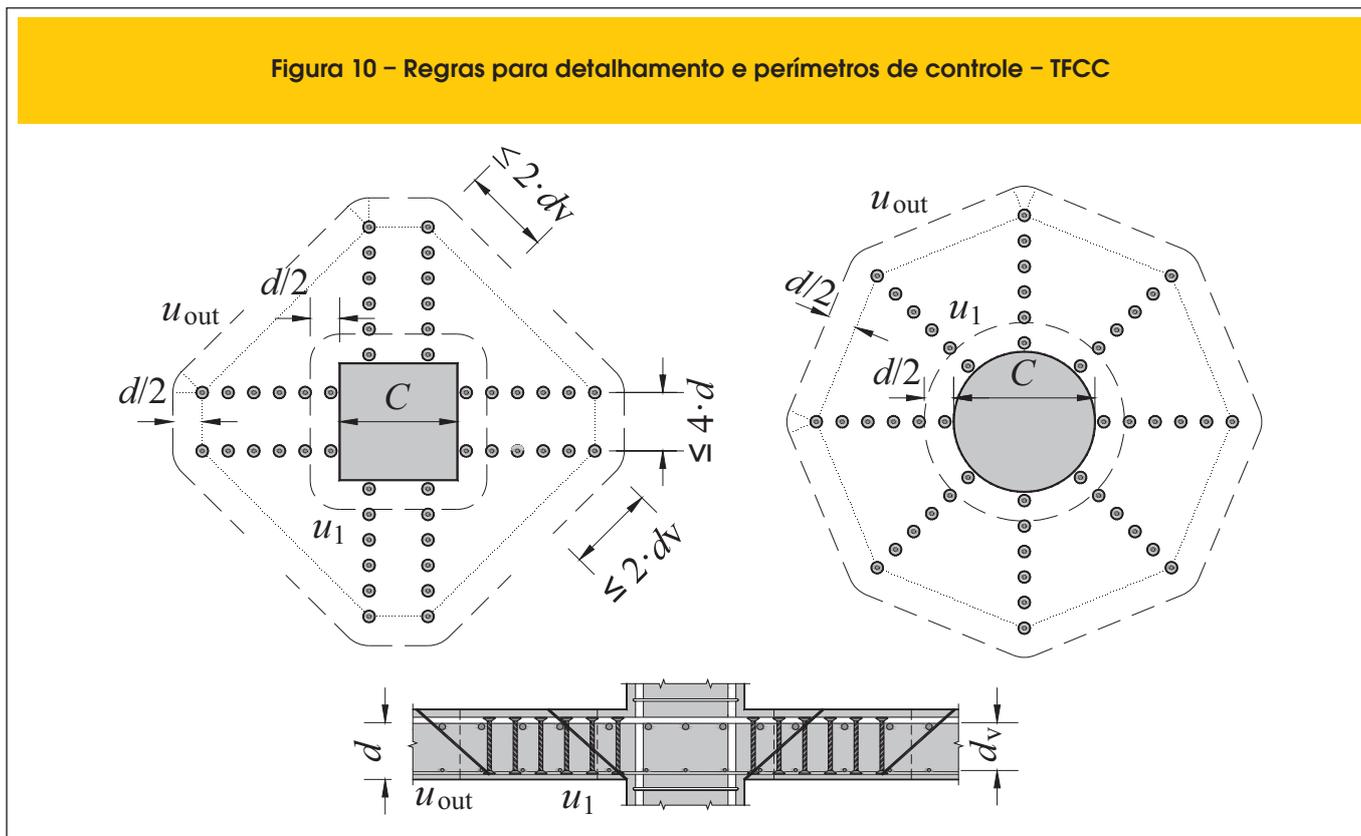


Figura 10 – Regras para detalhamento e perímetros de controle – TFCC



A_{sw} é a área de aço de uma camada de armadura de cisalhamento; f_{sw} é a tensão em cada camada de armadura, sendo uma função dos detalhes da armadura de cisalhamento e dos deslocamentos verticais δ_v (ver Equação 19) em cada camada de armadura no ponto interceptado pela superfície de ruptura (ver Tabela 1).

$$\delta_v = \frac{\psi \cdot s}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad (19)$$

Onde:

s é a distância horizontal medida da face do pilar até a camada de armaduras de cisalhamento em questão.

A resistência à punção de uma laje lisa de concreto armado com armadura de cisalhamento vertical pode ser obtida através da Equação 20, sendo esta uma função de ψ . A relação entre a carga aplicada (V_E) e a rotação ψ é expressa pela Equação 21.

$$V_{R,\sigma} = V_{R,c} + V_{R,s} \quad (20)$$

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys,f}}{E_{s,f}} \cdot \left(\frac{V_E}{V_{flex}} \right)^{3/2} \quad (21)$$

Onde:

r_s é a distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos; $f_{ys,f}$ é a tensão de escoamento das armaduras de flexão; $E_{s,f}$ é o módulo de elasticidade das armaduras de flexão; V_E é a força aplicada;

V_{flex} é a resistência à flexão calculada através da teoria das linhas de ruptura.

A resistência $V_{R,max}$ correspondente à ruptura por esmagamento da diagonal comprimida próximo ao pilar e pode ser calculada pela Equação 22.

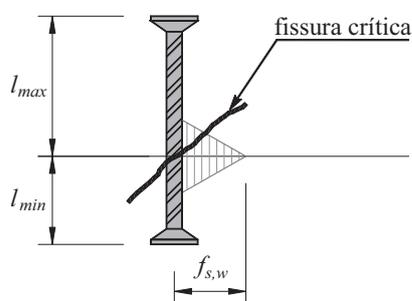
$$V_{R,max} = \lambda \cdot V_{R,c} \quad (22)$$

Onde:

λ é considerado igual a 3 para os casos de armaduras de cisalhamento bem ancoradas como *studs* e 2 para os demais tipos de armaduras de cisalhamento.

No caso de rupturas ocorrendo fora da região das armaduras de cisalhamento admite-se que a superfície de ruptura também terá inclinação de 45° , mas sua extremidade coincide com o ponto de ancoragem inferior da armadura de cisalhamento mais externa. Na prática, isso implica na redução da altura útil da laje (d) para uma altura útil (d_v), conforme pode ser observado na Figura 11. O perímetro de controle neste caso é tomado a uma distância $d/2$ do perímetro da camada de armaduras de cisalhamento mais externa. A Equação 23 deve ser utilizada para o cálculo de $V_{R,out}$.

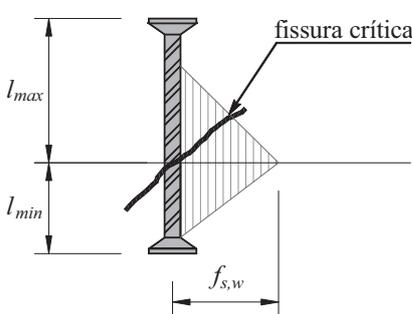
Tabela 1 – Relação entre f_{sw} e δ_v em studs com barras de alta aderência



$$f_{sw,1} = \sqrt{\frac{4 \cdot \tau_b \cdot E_{sw} \cdot \delta_v}{\phi_w}} \leq f_{ys,w}$$

Para

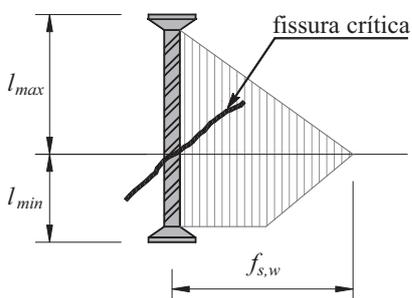
$$\delta_v \leq \frac{4 \cdot \tau_b}{E_{sw} \cdot \phi_w} \cdot l_{min}^2 = \delta_{v,1}$$



$$f_{sw,2} = \frac{\sqrt{2 \cdot l_{min}^2 + \frac{\phi_w \cdot E_{sw} \cdot \delta_v}{2 \cdot \tau_b}} - l_{min}}{\frac{\phi_w}{4 \cdot \tau_b}} \leq f_{ys,w}$$

Para

$$\delta_{v,1} \leq \delta_v \leq \frac{2 \cdot \tau_b}{E_{sw} \cdot \phi_w} \cdot [(l_{max} + l_{min})^2 - 2 \cdot l_{min}^2] = \delta_{v,2}$$



$$f_{sw,3} = \frac{E_{sw} \cdot \delta_v}{(l_{max} + l_{min})} + \frac{2 \cdot \tau_b}{\phi_w} \cdot \left(\frac{l_{max}^2 + l_{min}^2}{l_{max} + l_{min}} \right) \leq f_{ys,w}$$

Para

$$\delta_v \leq \delta_{v,2}$$

Considere $\tau_b = 5MPa$ para todas as equações anteriores

$$V_{R,out} = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_{out} \cdot d_v \cdot \sqrt{f'_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad (23)$$

Onde:

u_{out} é o perímetro externo definido à uma distância $d/2$ da camada mais externa de armaduras, considerando-se $4 \cdot d$ como a distância máxima efetiva entre duas linhas concêntricas de armaduras de cisalhamento;

d_v é a altura útil reduzida.

A Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento é um método gráfico para a determinação da resistência à punção. O processo de cálculo inicia-se com a construção de uma curva que relaciona o esforço cortante com a rotação da ligação laje-pilar, utilizando-se os termos V_E e ψ . Posteriormente, adiciona-se a este gráfico os

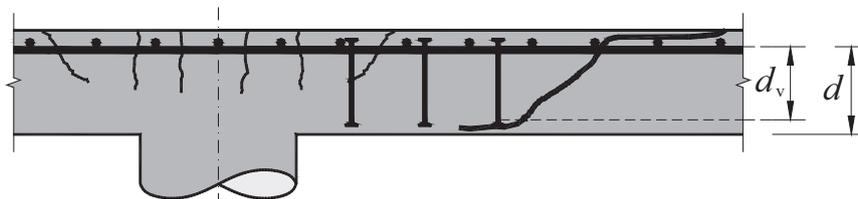
critérios de ruptura estabelecidos pelas equações apresentadas acima, gerando curvas $V_{R,cs} - \psi$, $V_{R,Max} - \psi$ e $V_{R,out} - \psi$.

O ponto de interseção destas curvas de resistência com a curva carga-rotação define a resistência da ligação para cada um dos modos de ruptura. A Figura 12 ilustra o processo gráfico utilizado para a estimativa da resistência à punção segundo a TFCC.

4. Análise dos métodos teóricos

Os resultados apresentados e avaliados neste artigo são oriundos da criação de um banco de dados que conta com resultados obtidos por diversos autores que estudaram o caso de lajes lisas com armadura de cisalhamento e submetidas a carregamento simétrico. Buscou-se na formação deste banco de dados selecionar apenas resultados de lajes armadas com *double-headed studs* ou com outros tipos de armadura que apresentem comportamento mecânico similar, uma vez que estas armaduras são internacionalmente consideradas como as mais eficientes na resistência à punção devido à sua melhor ancoragem mecânica.

Figura 11 – Ruptura na região externa à armadura de cisalhamento – Ruiz e Muttoni (4)



Desta forma, o banco de dados conta apenas com os resultados de 36 ensaios experimentais. Optou-se por não utilizar resultados de lajes com outros tipos de armadura de cisalhamento, a fim de avaliar a precisão e adequação das hipóteses admitidas pelos métodos teóricos apresentados anteriormente para estimar a resistência à punção nos casos de lajes com armadura de cisalhamento consideradas com boa ancoragem. Foram selecionadas lajes ensaiadas por Regan [16], Birkle [17], Regan e Samadian [10], Gomes e Regan [18] e Cordovil [19].

As lajes de Regan [16] não foram publicadas em mídia científica de acesso público, tendo estes resultados sido repassados através de correspondência pessoal com o autor, tendo sua devida concessão autoral. Das lajes ensaiadas por Birkle [17], nove lajes possuíam armadura de cisalhamento e três lajes serviram como referência. As lajes deste autor têm sua importância decorrente da elevada espessura que possuíam, fornecendo resultados valiosos com relação ao *size effect*. Todas as lajes selecionadas que foram ensaiadas por Regan e Samadian [10] apresentavam armaduras de cisalhamento do tipo *double-headed stud*, sendo seus resultados importantes para avaliação das prescrições para modos de ruptura ocorrendo fora da região com armaduras de cisalhamento. Das 11 lajes ensaiadas por Gomes e Regan [18], uma não possuía armadura de cisalhamento e dez possuíam armaduras forma-

das por fatias de perfis I, tendo estas armaduras comportamento mecânico semelhante aos *double-headed studs*. Por fim, das lajes ensaiadas por Cordovil [19], três lajes possuíam armadura de cisalhamento e uma laje serviu como referência. Estas lajes forneceram resultados para pequenas espessuras e para a utilização de taxas de armadura de cisalhamento relativamente baixas.

As análises feitas nesse artigo consistiram basicamente de comparar as cargas de ruptura obtidas nos ensaios com as cargas teóricas estimadas pelos métodos apresentados. Para avaliar a precisão e a segurança destes métodos teóricos, foi estabelecido por estes autores, o critério apresentado na Tabela 2, que tem como base a relação V_u/V_{te0} (sendo V_u a carga última de ensaio e V_{te0} a carga última estimada pelo método teórico sob avaliação). A Figura 13 apresenta características gerais das lajes utilizadas no banco de dados e a Tabela 3 mostra todas as variáveis dos modelos ensaiados, utilizadas com valores de entrada nos cálculos realizados. A Tabela 4 apresenta os resultados dos ensaios e das estimativas teóricas, além de uma avaliação estatística simplificada, considerando a média dos resultados e seus respectivos coeficientes de variação.

Analisando os resultados da norma norte americana ACI 318M [1], fica evidente que dentre todas as estimativas de carga última, esta apresentou as previsões mais conservadoras, tendo para a relação V_u/V_{ACI} um valor médio de 1,48 e coeficiente de variação de 0,19. Este fato está associado ao fato desta norma subestimar a contribuição do concreto e do aço na resistência à punção. Comparando-se as expressões para consideração da contribuição do concreto do ACI com as do Eurocode e com as da NBR 6118, tem-se que $V_{R,cACI} / V_{R,cEC2}$ tem valor médio de 0,85 e para a NBR a relação $V_{R,cACI} / V_{R,cNBR}$ tem valor médio de 0,79. Isso evidencia o

Figura 12 – Exemplo da estimativa da resistência à punção segundo a TFCC

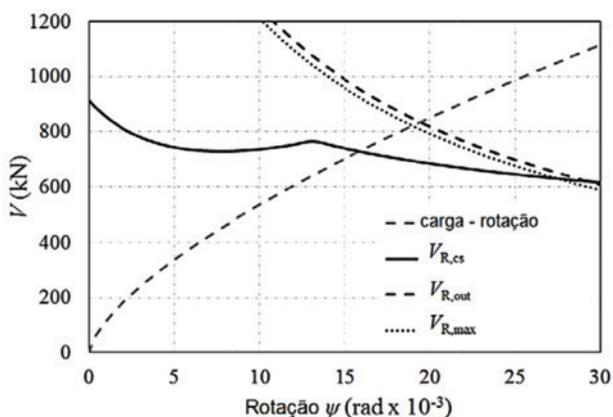
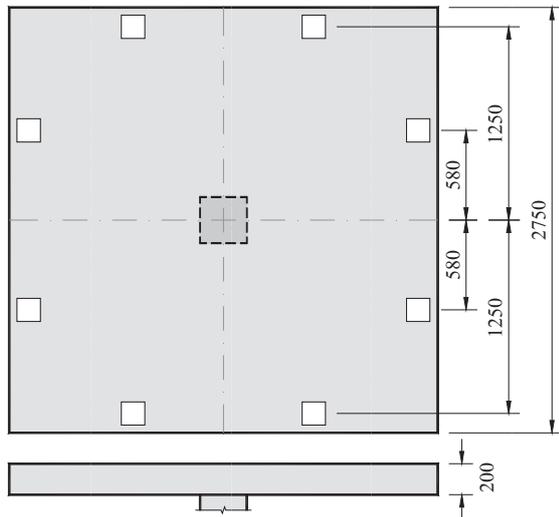


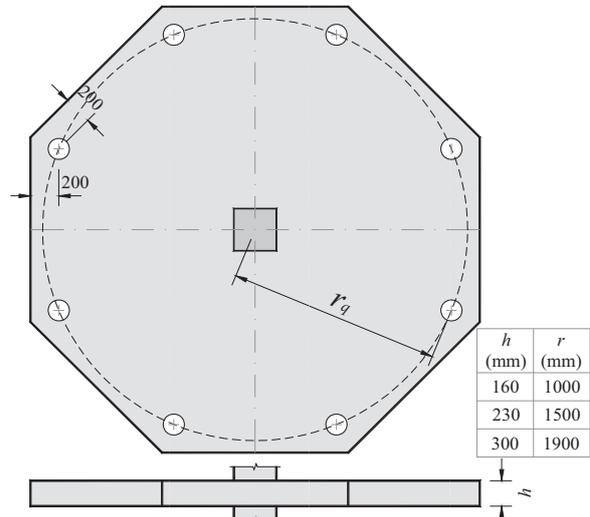
Tabela 2 – Critérios de avaliação V_u/V_{te0}

Critério de avaliação	Classificação
$V_u/V_{te0} < 0,95$	Inseguro
$0,95 \leq V_u/V_{te0} \leq 1,15$	Preciso
$1,15 < V_u/V_{te0} \leq 1,30$	Satisfatório
$V_u/V_{te0} > 1,30$	Conservador

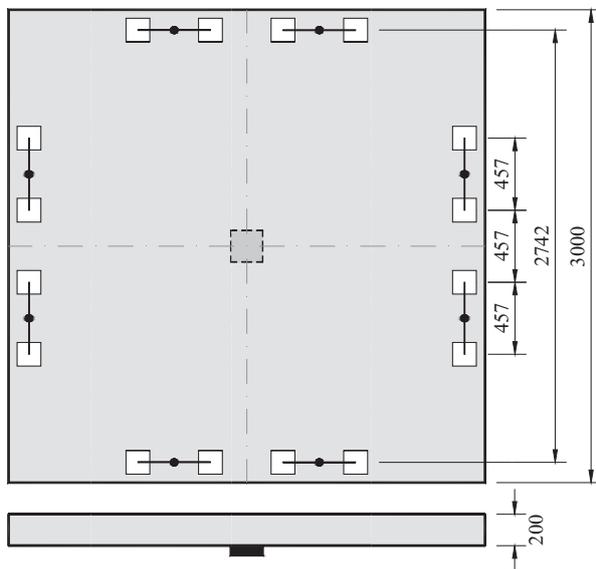
Figura 13 – Detalhes das lajes do banco de dados



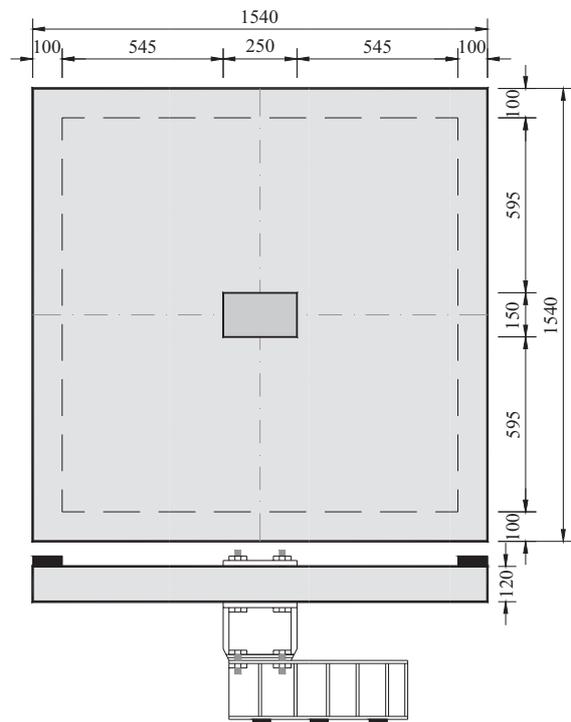
A Regan (16)



B Birkle (17)



C Gomes e Regan (18); Regan e Samadian (10)



D Cordovil (19)

- : cilindro ou tirante gerando duas cargas ou reações;
- : cilindro ou tirante; (cilindros abaixo dos pilares não representados)

conservadorismo do ACI em relação à parcela de contribuição do concreto na resistência à punção. Este mesmo conservadorismo é percebido quando comparado à relação das parcelas de resistência do aço $V_{R,SACI}/V_{R,SEC}$ com valor médio de 0,86 e a relação $V_{R,SACI}/V_{R,SNBR}$ com um valor médio de 0,76.

Esta norma também apresenta uma forte tendência a prever rupturas em um perímetro crítico fora da região da armadura de cisalhamento, apresentando este tipo de ruptura em 89% das suas previsões, além de apresentar de um modo geral um erro de 45%

em todas as previsões da superfície de ruptura. Embora o ACI considere de forma mais apropriada à condição de ancoragem dos diferentes tipos de armadura de cisalhamento, o seu conservadorismo com relação à capacidade resistente dos materiais talvez necessite ser reavaliado. Este fato leva à discussão de que a norma norte americana pode ter suas prescrições ajustadas para o caso aqui analisado, com o objetivo de evitar níveis considerados exagerados de segurança e que podem levar a um dimensionamento antieconômico.

Tabela 3 – Características das lajes

Autor	Laje	d (mm)	c (mm)	ρ (%)	ϕ_w (mm)	Nº de linhas	$A_{sw}/$ camada (mm ²)	Nº de camadas	s_n (mm)	s_s (mm)	f_c (MPa)	f_{ys} (MPa)	E_{sf} (GPa)	$f_{ys,w}$ (MPa)	$E_{s,w}$ (GPa)	d_g (mm)
Regan (2009)	1	150	300	1,45	10	10	785	4	80	120	33	550	210	550	210	20,0
	2	150	300	1,76	10	12	942	6	60	100	30	550	210	550	210	20,0
	3	150	300	1,76	12	10	1.131	5	60	120	26	550	210	550	210	20,0
Birkle (2004)	S1	124	250	1,53	-	-	-	-	-	-	36	488	195	-	-	14,0
	S2	124	250	1,53	10	8	567	6	45	90	29	488	195	393	200	14,0
	S3	124	250	1,53	10	8	567	6	45	90	32	488	195	393	200	14,0
	S4	124	250	1,53	10	8	567	5	30	60	38	488	195	465	200	14,0
	S5	124	250	1,53	10	8	567	7	30	60	36	488	195	465	200	14,0
	S6	124	250	1,53	10	8	567	7	30	60	33	488	195	465	200	14,0
	S7	190	300	1,29	-	-	-	-	-	-	35	531	200	-	-	20,0
	S8	190	300	1,29	10	8	567	5	50	100	35	531	200	460	200	20,0
	S9	190	300	1,29	10	8	567	6	75	150	35	531	200	460	200	20,0
	S10	260	350	1,10	-	-	-	-	-	-	31	524	200	-	-	20,0
	S11	260	350	1,10	13	8	1.013	5	65	130	30	524	200	409	200	20,0
	S12	260	350	1,10	13	8	1.013	6	95	195	34	524	200	409	200	20,0
Regan e Samadian (2001)	R3	160	200	1,26	12	8	905	4	80	120	33	670	210	442	210	20,0
	R4	160	200	1,26	12	8	905	6	80	80	39	670	210	442	210	20,0
	A1	160	200	1,64	10	8	628	6	80	80	37	570	210	519	210	20,0
	A2	160	200	1,64	10	8	628	4	80	120	43	570	210	519	210	20,0
	R5	240	500	0,72	14	12	1.847	4	90	60	32	550	210	350	210	20,0
	R6	236	350	0,67	14	8	1.232	5	70	140	25	550	210	350	210	20,0
Gomes e Regan (1999)	1	159	200	1,27	-	-	-	-	-	-	40	680	215	-	-	20,0
	2	153	200	1,32	6	8	226	2	80	80	34	680	215	430	205	20,0
	3	158	200	1,27	7	8	301	2	80	80	39	670	185	430	205	20,0
	4	159	200	1,27	8	8	402	3	80	80	32	670	185	430	205	20,0
	5	159	200	1,27	10	8	628	4	80	80	35	670	185	430	205	20,0
	6	159	200	1,27	10	8	628	4	80	80	37	670	185	430	205	20,0
	7	159	200	1,27	12	8	905	5	80	80	34	670	185	430	205	20,0
	8	159	200	1,27	12	8	905	6	80	80	34	670	185	430	205	20,0
	9	159	200	1,27	12	8	940	9	80	80	40	670	185	430	205	20,0
	10	154	200	1,31	6	8	226	5	80	80	35	670	185	430	205	20,0
	11	154	200	1,31	7	8	301	5	80	80	35	670	185	430	205	20,0
Cordovil (1995)	7	131	100	0,85	-	-	-	-	-	-	34	500	199	-	-	19,0
	8	131	100	0,85	6,3	8	249	3	70	100	34	500	199	320	199	19,0
	11	131	100	0,85	6,3	8	249	3	70	100	34	500	199	320	199	19,0
	14	104	250/1	0,88	6,3	8	249	3	53	90	30	500	199	320	199	19,0

Fazendo uma avaliação da NBR 6118 [3] e tendo como base o critério de classificação do nível de desempenho normativo apresentado na Tabela 4, pode-se dizer que esta norma apresenta

resultados médios bastante precisos. Embora tenha apresentado relação V_u/V_{NBR} com média geral de 0,97 e um coeficiente de variação de 0,11, o nível de segurança das equações da NBR

Tabela 4 – Relação entre os resultados experimentais e os métodos teóricos

Autor	Laje	V_u (kN)	Superfície de ruptura	NBR -2007		EC2 -2004		ACI -2008		TFCC	
				V/V_{NBR}	Superfície de ruptura NBR	V/V_{EC2}	Superfície de ruptura EC2	V/V_{ACI}	Superfície de ruptura ACI	V/V_{TFCC}	Superfície de ruptura TFCC
Regan (2009)	1	881	in	0,85	out	1,02	out	1,45	out	0,98	out
	2	1.141	fc/out	0,94	out	1,13	out	1,71	out	1,17	out
	3	1.038	fc/in	1,00	out	1,22	out	1,73	out	1,09	out
Birkle (2004)	S1	435	Ref.	0,97	Ref.	1,11	Ref.	1,30	Ref.	1,13	Ref.
	S2	480	in	0,92	out	1,19	out	1,24	out	1,06	in
	S3	513	in	0,91	out	1,12	out	1,10	out	1,04	in
	S4	526	out	0,93	out	1,21	out	1,67	out	1,11	out
	S5	518	out	0,93	out	1,21	out	1,67	out	1,10	out
	S6	522	out	0,96	out	1,18	out	1,67	out	1,08	out
	S7	874	Ref.	0,92	Ref.	0,94	Ref.	1,12	Ref.	1,00	Ref.
	S8	1.070	in	0,84	out	0,98	out	1,29	out	0,91	in
	S9	1.025	in	0,98	in	1,06	in	1,28	in	1,10	in
	S10	1.335	Ref.	0,77	Ref.	0,78	Ref.	0,88	Ref.	0,84	Ref.
	S11	1.626	in	0,86	out	1,00	out	1,24	out	0,93	in
	S12	1.687	in	0,82	in	0,90	out	1,03	in	1,00	in
Regan e Samadian (2001)	R3	850	out	0,85	out	1,04	out	1,44	out	1,05	in
	R4	950	out	0,90	out	1,10	out	1,39	out	1,12	in
	A1	1.000	out	0,88	out	1,08	out	1,50	out	1,20	in
	A2	950	in	0,93	in	1,03	in	1,42	out	1,10	in
	R5	1.440	out	0,95	out	1,09	out	1,08	out	1,07	out
	R6	1.280	flex	0,91	out	1,02	out	1,05	out	0,88	in
Gomes e Regan (1999)	1	560	Ref.	0,88	Ref.	0,94	Ref.	1,16	Ref.	1,02	Ref.
	2	693	in	1,14	in	1,26	in	1,64	out	1,19	in
	3	773	in/out	1,10	in	1,21	in	1,64	out	1,22	in
	4	853	out	1,03	out	1,27	out	1,98	out	1,36	in
	5	853	out	1,01	out	1,24	out	1,77	out	1,21	in
	6	1.040	out	1,01	out	1,23	out	2,07	out	1,44	in
	7	1.120	out	1,13	out	1,38	out	2,02	out	1,43	in
	8	1.200	out	1,20	out	1,48	out	1,90	out	1,53	in
	9	1.227	out	0,92	out	1,09	out	1,70	Max	1,49	in
	10	800	in	1,16	in	1,28	in	1,58	in	1,39	in
	11	907	in	1,18	in	1,31	in	1,68	out	1,52	in
Codovil (1995)	7	320	Ref.	0,96	Ref.	1,08	Ref.	1,36	Ref.	1,05	Ref.
	8	400	in	0,98	in	1,05	in	1,42	in	1,11	in
	11	412	in	1,01	in	1,09	in	1,47	in	1,16	in
	14	302	in	0,86	in	1,07	out	1,30	out	0,97	in
Média				0,97		1,13		1,48		1,16	
C.V				0,11		0,12		0,19		0,15	

Ref. – laje de referência (sem armadura de cisalhamento); in – posição da superfície de ruptura dentro da região da armadura de cisalhamento; out – posição da superfície de ruptura fora da região da armadura de cisalhamento; Max – ruptura por esmagamento da diagonal comprimida de concreto; flex – ruptura por flexão; Obs: todas as lajes de referência romperam por punção.

6118 é discutível, uma vez que para 64% das lajes seus resultados foram contra a segurança, com a norma estimando uma capacidade resistente superior a observada nos ensaios. Com relação à previsão das superfícies de ruptura, esta norma apresentou resultados considerados satisfatórios, acertando 71% de suas previsões.

Dentre as normas analisadas, o Eurocode 2 [2] foi a que apresentou os melhores resultados, apresentando para a relação V_U/V_{EC2} um valor médio de 1,13, coeficiente de variação de 0,12 e apenas 11% de resultados contra a segurança. Porém, os resultados apresentados na Tabela 4 evidenciam que o EC2 apresenta uma forte tendência em prever rupturas fora da região com armaduras de cisalhamento, tendo previsto este tipo de ruptura em 74% das lajes com armadura de cisalhamento que constam no banco de dados. Este mesmo comportamento também foi notado por Ferreira [17] e está associado ao conservadorismo das prescrições para definição dos perímetros de controle externos (u_{out} e $u_{out,eff}$).

Em seu trabalho, Ferreira [17] analisou a possibilidade de alterar a distância do afastamento de u_{out} em relação à última camada de armaduras de 1,5.d para 2.d e alterando o critério do espaçamento transversal máximo entre camadas ($s_{t,max}$) de 2.d para 4.d. O autor observou que tais medidas melhorariam significativamente as previsões para $V_{R,out}$, sendo mais adequadas às evidências experimentais, mas requerem ajustes também na equação para $V_{R,cs}$. Do contrário, esta norma passaria a apresentar um número significativo de resultados contra a segurança.

Uma alternativa que pode solucionar este problema seria reduzir o coeficiente de ajuste da Equação 10 de 0,18 para 0,16, conforme discutido por Sacramento *et al.* [21] e também por Oliveira [22].

A Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC) mostrou resultados satisfatórios, tendo valor médio para a relação V_U/V_{TFCC} igual a 1,16 e coeficiente de variação de 0,15, com desempenho similar ao do EC2. Com relação à previsão das superfícies de ruptura, ao contrário das demais normas, a TFCC apresentou uma tendência em prever rupturas dentro da região das armaduras de cisalhamento, prevendo este tipo de ruptura em 74% das lajes do banco de dados. Ainda assim suas previsões para o modo de ruptura das lajes foi inadequado, tendo errado a posição da superfície de ruptura em 37% dos casos avaliados.

5. Conclusões

Este artigo discute o uso de armaduras de cisalhamento como uma das melhores formas de aumentar a capacidade resistente e a ductilidade de ligações laje-pilar. Ele apresenta ainda de forma sucinta as recomendações das normas ACI 318, NBR 6118 e Eurocode 2, além da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento. Foi montado um pequeno banco de dados com resultados de 36 lajes com armaduras de cisalhamento do tipo *double-headed studs* ou similares, comparando-se os resultados experimentais existentes neste banco de dados com os obtidos utilizando-se as normas e a TFCC.

Apesar do banco de dados ser limitado, no que se refere à resistência à punção, os resultados mostraram que as recomendações disponibilizadas pelo ACI podem ser conservadoras para os casos de lajes com armaduras de cisalhamento com boa ancoragem. A média da relação V_U/V_{ACI} foi de 1,48 e o coeficiente de variação foi de 0,19, significativamente superior ao observado para os de-

mais métodos teóricos. Esse elevado coeficiente de variação já era esperado uma vez que o ACI ignora parâmetros importantes em suas equações, como a contribuição das armaduras de flexão, além da redução da tensão resistente com o aumento da altura útil (*size effect*). Destaca-se ainda que, a versão atual da norma americana apresenta recomendações diferenciadas para o dimensionamento de lajes com *studs*, isto porque esta norma considera que tais armaduras apresentam condições mecânicas de ancoragem mais eficientes que as demais, permitindo que seja considerada uma tensão resistente nestes casos, superior aos valores recomendados para lajes armadas com outros tipos de armadura, como por exemplo, estribos.

A NBR 6118 mostrou que, apesar de apresentar resultados médios de V_U/V_{NBR} de 0,97 e um coeficiente de variação de 0,11, o mais baixo dentre os métodos avaliados, suas equações apresentam forte tendência de resultados contra a segurança. Ao mesmo tempo em que o baixo coeficiente de variação indica que os parâmetros utilizados em suas equações apresentam boa correlação com a tendência dos resultados experimentais, fica evidente a necessidade de alguns ajustes a fim de evitar esta tendência de resultados inseguros, conforme já havia sido destacado por Ferreira [20] e Sacramento *et al.* [21].

O Eurocode 2, ao limitar os valores de k e p , reduziu a tendência de resultados inseguros observada para a NBR 6118, apresentando os melhores resultados dentre os métodos teóricos avaliados. Para o pequeno banco de dados apresentado, o Eurocode 2 apresentou média da relação V_U/V_{EC2} de 1,13 e coeficiente de variação de 0,12. Ainda assim, destaca-se que os autores não conseguiram observar experimentalmente justificativas para as limitações impostas pelo Eurocode 2 ao *size effect* e para a taxa de armadura de flexão, considerando tecnicamente mais adequado realizar ajustes nos coeficientes das formulações. Quanto à Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, breves comentários devem ser feitos. Este método mostrou-se sensível às diversas variáveis comuns no dimensionamento de lajes lisas e apresentou resultados próximos aos do EC2, embora levemente mais conservadores para o banco de dados em questão. Apesar de suas equações apresentarem, aparentemente, um forte fundo empírico, o método é muito bem fundamentado e explica de modo satisfatório o fenômeno da punção. No entanto, deve ser ressaltado que, como o método considera que o trecho da laje externo à fissura crítica de cisalhamento apresenta apenas rotações de corpo rígido e que não ocorre o deslizamento das superfícies na região desta fissura, o método apresenta a tendência de estimar deformações e, conseqüentemente, tensões superiores quanto mais afastadas do pilar estiverem as armaduras de cisalhamento, quando na realidade o efeito que experimentalmente tem sido observado é o oposto. Na prática isto pode levar a resultados inadequados para valores de s_0 e s_r próximos aos mínimos.

6. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro em todas as etapas desta pesquisa.

7. Referências bibliográficas

- [01] ACI Committee 318, Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary,

- American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2008.
- [02] Eurocode 2, Design of Concrete Structures—Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, CEN, EN 1992-1-1, Brussels, Belgium, 2004, 225 pp.
- [03] ASSOCIACAO BRASILEIRA DE NORMAS TECNICAS. NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2007.
- [04] RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. Applications of Critical Shear Crack Theory to Punching of Reinforced Concrete Slabs with Transverse Reinforcement. *ACI Structural Journal*, July-August 2009. N° 106-S46.
- [05] fib Bulletins no. 65 e no. 66, Model Code 2010 – Final draft, Volume 1, 350p, Volume 2, 370p, 2012.
- [06] GRAF, O..Versucheuber die Widerstandsfahigkeit von Eisenbetonplattenunterkonzentrierter Last naheinem Auflager. *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton*, Heft 73, Berlin, 1933, 16 pp.
- [07] ELSTNER, R. C., e HOGNESTAD, E., Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs. *Journal of the American Concrete Institute, Proceedings*, V. 53, No. 1, Jul. 1956, pp. 29-58.
- [08] ANDERSON, J. L., Punching of Concrete Slabs with Shear Reinforcement. *Royal Institute of Technology, Bulletin*, No. 212, KTH Stockholm, Sweden, 1963, 59p.
- [09] BROMS, C.E., Elimination of Flat Plate Punching Failure Mode, *ACI Structural Journal*, V. 97, No. 1, Jan.-Feb. 2000, pp. 94-101.
- [10] REGAN, P. E., SAMADIAN, F., Shear Reinforcement against Punching in Reinforced Concrete Flat Slabs, *The Structural Engineer*, V. 79, No. 10, May 2001, pp. 24-31.
- [11] OLIVEIRA, D. R., MELO, G. S., REGAN, P. E., Punching Strengths of Flat Plates with Vertical or Inclined Stirrups. *ACI Structural Journal*, V. 97, No. 3, May-June 2000, pp. 485-491.
- [12] DILGER, W.H., and GHALI, A., Shear Reinforcement for Concrete Slabs, *ASCE Journal of Structural Division, Proceedings*, V. 107, No. ST12, Dec. 1981, pp. 2403- 2420.
- [13] Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code 1990. London, Thomas Telford, 1993.
- [14] MUTTONI, A., and SCHWARTZ, J., Behaviour of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement, *IABSE Colloquium*, V. 62, Zurich, Switzerland, 1991, pp. 703-708.
- [15] MUTTONI, A., Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement, *ACI Structural Journal*, V. 105, No. 4, July-Aug. 2008, pp. 440-450.
- [16] REGAN, P. E., Report on tests of reinforced concrete flat slabs with double-headed studs. *Correspondência pessoal com o autor*. 2009.
- [17] BIRKLE, G., Punching of Flat Slabs: The Influence of Slab Thickness and Stud Layout. PhD Thesis. Department of Civil Engineering, University of Calgary, Calgary, Canada, 2004, 152 pp.
- [18] GOMES, R. B. e REGAN, P. E., Punching Resistance of RC Flat Slabs with Shear Reinforcement. *Journal of Structural Engineering*, 1999, 684-692.
- [19] CORDOVIL, F. A. B. Punção em Placas de Concreto Armado. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1995, 393p.
- [20] FERREIRA, M. P. (2010). Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de Cisalhamento e Momentos Desbalanceados. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 007 A/10 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 275p.
- [21] SACRAMENTO, P.V.P; FERREIRA, M.P; OLIVEIRA, D.R.C; MELO, G.S.S.A, Punching strength of reinforced concrete flat slabs without shear reinforcement. *IBRACON Structures and Materials Journal*. 2012. vol. 5, nº 5.
- [22] OLIVEIRA, M. H. (2013). Punção Em Lajes Lisas Com Armadura de Cisalhamento Submetidas a Carregamento Excêntrico e Apoiadas Sobre Pilares Retangulares. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 001 A/13 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 223p.