

Experimental and numerical analysis of reinforced concrete mushroom slabs

Análise experimental e numérica de lajes cogumelo de concreto armado



A. F. LIMA NETO ^a
aaraon@ufpa.br

M. P. FERREIRA ^b
mpina@ufpa.br

D. R. C. OLIVEIRA ^c
denio@ufpa.br

G. S. S. A. MELO ^d
melog@unb.br

Abstract

The use of column capitals is one way to increase the punching strength of slab-column connections. Recommendations presented by codes of practice for defining the geometry and checking the resistance of slab-column connections with capitals are not comprehensive, with few experimental studies available on the topic. This paper discusses important aspects of the historical development of mushroom slabs and also presents experimental results of 4 tests, with 1 test in a reference flat slab and 3 tests in mushroom slabs with circular column capitals. These results are compared with theoretical results estimated using Eurocode 2 (2004) and NBR 6118 (2007). They were also compared with a series of non-linear finite element analysis in order to get insight of the stress distribution and of the failure mechanism of mushroom slabs.

Keywords: mushroom slab, punching shear, reinforced concrete, column capitals.

Resumo

O uso de capitéis é uma das formas de se aumentar a resistência à punção de ligações laje-pilar. As recomendações normativas para a definição da geometria e verificação da resistência última de ligações com capitéis são pouco abrangentes, sendo poucas as pesquisas experimentais disponíveis sobre o tema. Este artigo discute aspectos relevantes do desenvolvimento histórico das lajes cogumelo e apresenta resultados de 4 ensaios experimentais, sendo 1 laje lisa de referência e 3 lajes cogumelo com capitéis de seção circular. Estes resultados são comparados com as estimativas das normas EUROCODE 2 (2004) e NBR 6118 (2007) e com modelos numéricos não-lineares a fim de se compreender melhor a distribuição das tensões e o mecanismo de ruptura de lajes cogumelo.

Palavras-chave: lajes cogumelo, punção, concreto armado, capitel.

^a Professor, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Campus de Tucuruí, aaraon@ufpa.br, Tucuruí, Pará, Brasil.

^b Professor, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, mpina@ufpa.br, Belém, Pará, Brasil.

^c Professor, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, denio@ufpa.br, Belém, Pará, Brasil.

^d Professor, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, melog@unb.br, Brasília, Distrito Federal, Brasil.

1. Introdução

Lajes lisas se distinguem das lajes convencionais por se apoiarem diretamente sobre os pilares, não sendo utilizadas vigas, o que facilita a execução, podendo gerar ganhos econômicos com a redução do custo com a mão-de-obra. Uma das desvantagens desse tipo de estrutura é a possibilidade da ocorrência da punção, ruptura por cisalhamento que acontece de forma frágil e que pode levar a estrutura à ruína através do colapso progressivo. Para melhorar a ductilidade e aumentar a capacidade resistente da ligação laje-pilar deste tipo de elemento estrutural o projetista estrutural possui várias opções, como o uso de armaduras de cisalhamento, cada vez mais eficientes, podendo ainda aumentar a altura útil na região da ligação através de ábacos ou capitéis, mudando o nome do sistema para lajes cogumelo. Na Figura 1 são mostradas algu-

mas das possibilidades para ligações laje-pilar com destaque para o uso de ábacos ou capitéis, que tem como objetivo reduzir a tensão cisalhante na ligação, o que aumenta a capacidade resistente à punção, podendo aumentar ainda a ductilidade à medida que a resistência à punção se aproxima da resistência à flexão da laje. A Figura 2 mostra um sistema estrutural de laje cogumelo, no território nacional, com o emprego da combinação de capitéis e ábacos.

1.1 Histórico

As lajes lisas surgiram no início do século XX e provavelmente foram desenvolvidas de forma independente na mesma época por diferentes engenheiros. Nos EUA o principal responsável pela sua aplicação foi C. A. P. Turner (Gasparini [1]) e na Europa seu uso pode ser creditado ao engenheiro suíço Robert Maillart (Furst e Marti [2]) e ao engenheiro russo Artur F. Loleit (Kierdorf [3]). Nesta

Figura 1 – Sistemas de lajes sem vigas

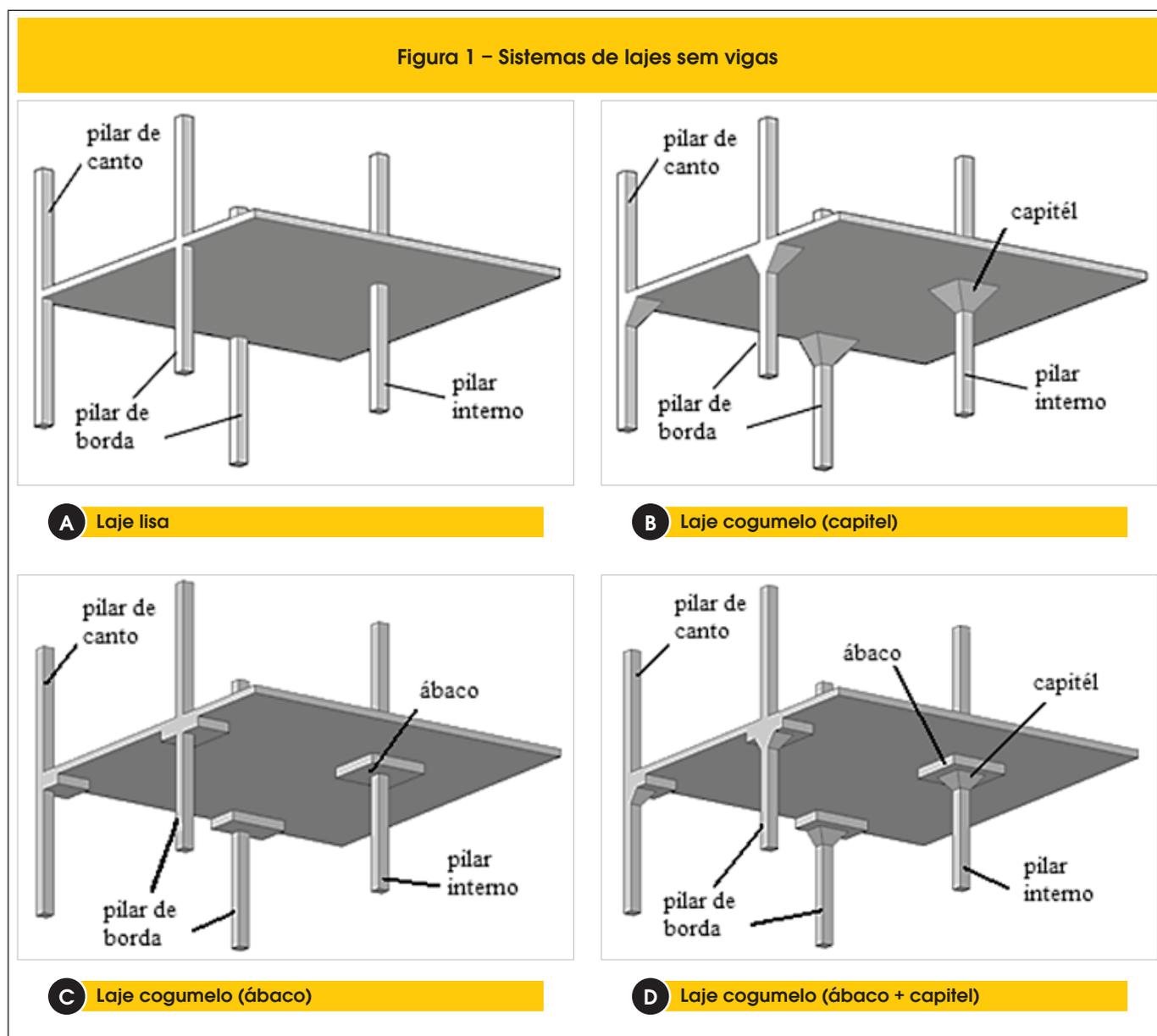


Figura 2 – Laje cogumelo que apresenta a combinação capitel e ábaco



época um dos maiores desafios era a determinação dos esforços em um pavimento sem vigas, apenas com apoios pontuais, sendo comum grande variação na taxa de armadura de flexão dentre os diferentes sistemas. Segundo Melo [4], em 1911 ocorreu o primeiro acidente estrutural em um edifício com lajes lisas. Foi o desabamento do edifício *Prest-o-Lite* nos EUA, onde a ruptura por punção que levou o edifício todo à ruína evidenciou a necessidade de estudar melhor o comportamento da ligação laje-pilar.

A primeira pesquisa que forneceu subsídios para o dimensionamento à punção de ligações laje-pilar foi realizada por Talbot [5], que na verdade ensaiou sapatas de concreto armado e observou que em muitos casos elas romperam por punção, formando um tronco de cone com faces inclinadas em torno de 45° (devido a elevada espessura das sapatas testadas), verificando ainda que a taxa de armadura de flexão poderia influenciar significativamente na resistência última à punção, fato este também observado por Richart [6]. Apenas em 1960 surgiu o primeiro modelo teórico para explicar o mecanismo de ruptura por punção e prever a resistência última de ligações laje-pilar. Este modelo foi apresentado por Kinnunen e Nylander [7] e baseava-se em observações experimentais obtidas após a realização de um vasto programa experimental. Os autores observaram que a parte da laje externa à superfície de ruptura apresentava rotações de corpo rígido e criaram um modelo buscando satisfazer o equilíbrio das forças (ver Figura 3a). Nesse modelo, os segmentos de laje são tratados como corpos rígidos supostamente apoiados em uma casca cônica imaginária confinada entre o pilar e a fissura de cisalhamento. Sob carregamento, cada segmento rígido gira em torno de um ponto de rotação (CR) e é suportado pelas forças resultantes apresentadas na Figura 3b, com as forças internas sendo uma função da rotação (ψ) da laje. Para os autores a ruptura ocorre quando um ponto na superfície inferior da laje, verticalmente localizado abaixo da extremidade da fissura de cisalhamento, atinge uma deformação radial crítica (ϵ_{cto}) ao mesmo tempo em que as deformações tangenciais no concreto e na casca cônica imaginária atingem valores de ruptura característicos para o concreto. Este modelo foi inicialmente desenvolvido para o caso de armaduras axissimétricas, mas como, na prática, são

utilizadas armaduras ortogonais, Kinnunen e Nylander [7] tiveram de propor alterações que na prática elevaram ainda mais o nível de complexidade do método, dificultando a sua utilização corrente.

1.2 Justificativa

Muitos outros estudos foram desenvolvidos, a maioria voltada para a avaliação do uso de armaduras de cisalhamento no combate à punção. No que se refere ao uso de ábacos ou capitéis, os poucos trabalhos encontrados (Wey [8] e Hueste *et al.* [9]) são voltados para a avaliação da ductilidade da ligação laje-pilar em casos de sismos (carregamento cíclico). As normas de projeto de estruturas de concreto apresentam recomendações superficiais para estimar a resistência à punção de lajes cogumelo, em muito baseadas em ensaios com sapatas. Logo, fica evidente a relevância de se produzir resultados experimentais sobre o comportamento e resistência de lajes cogumelo.

1.3 Metodologia

Este artigo apresenta resultados de 4 ensaios em ligações laje-pilar, sendo 1 laje lisa e 3 lajes cogumelo com capitéis. Os resultados experimentais são comparados com valores teóricos de acordo com as normas NBR 6118 [10], EUROCODE 2 [11], Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (Muttoni [12]). Apresentam-se ainda os resultados de uma análise computacional não-linear através do software comercial MIDAS FEA realizada com o objetivo de entender melhor o comportamento e o mecanismo de ruptura de lajes cogumelo.

2. Métodos recomendados para o cálculo da punção

2.1 NBR 6118/2007

A NBR 6118 [10] recomenda que a verificação da resistência à punção em lajes cogumelo sem armadura de cisalhamento deve ser feita em três regiões. Deve-se avaliar a resistência à compres-

são da biela no perímetro de controle u_0 em torno do pilar, através da Equação 1. Deve-se também verificar a resistência à tração

diagonal dentro e fora do capitel, nos perímetros de controle u_1 e u_{out} , respectivamente, segundo as Equações 2 e 3, atentando-se

Figura 3 – Modelo mecânico de Kinnunen e Nylander (7)

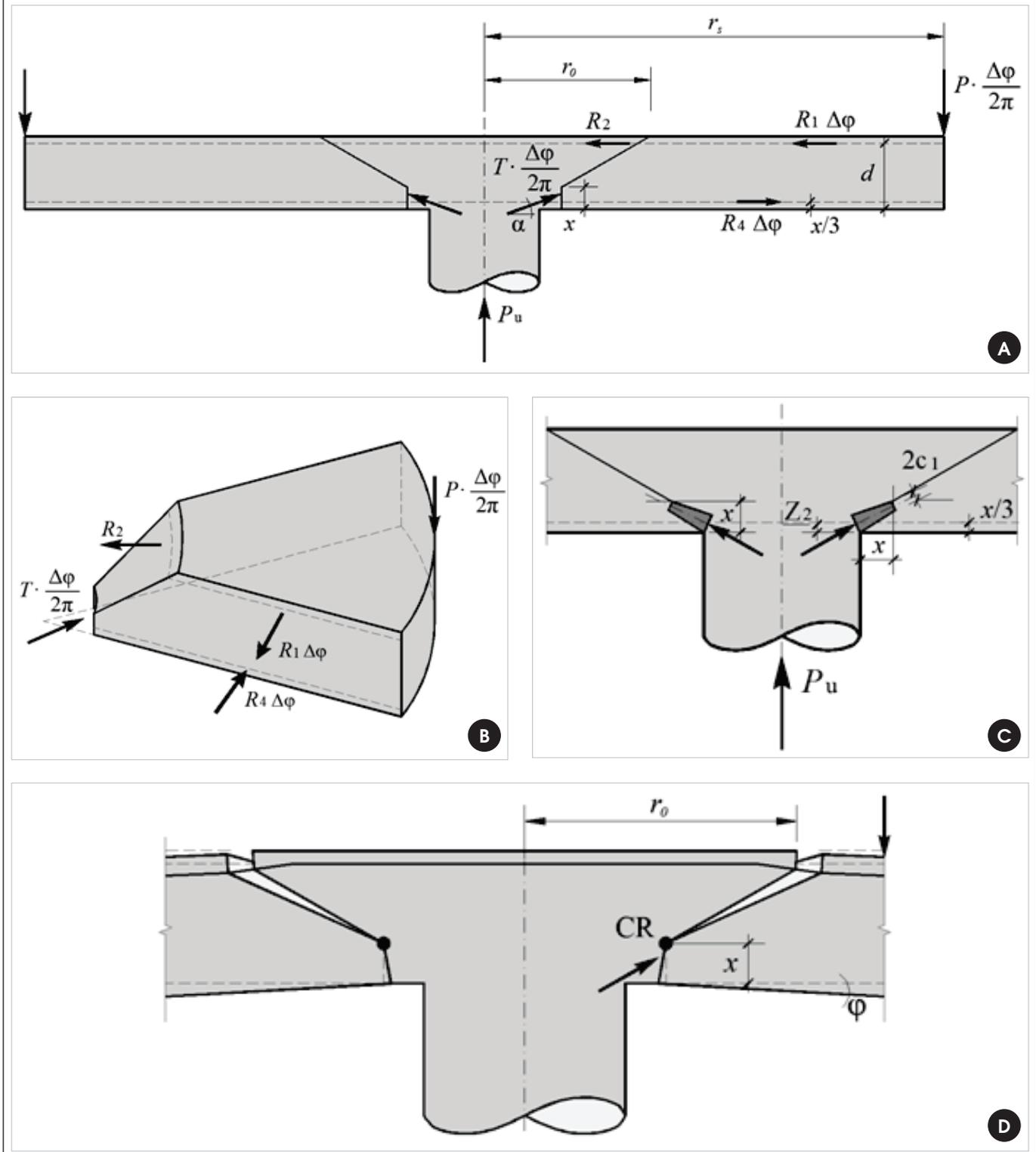
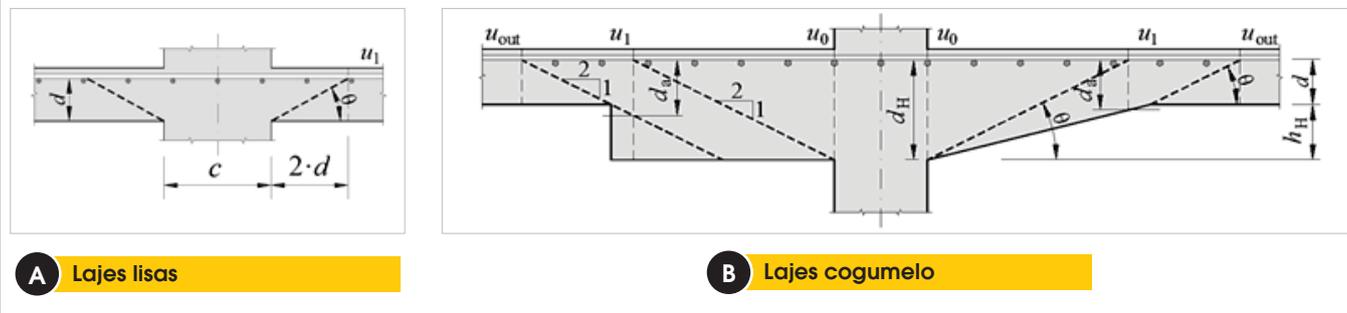


Figura 4 – Definição da altura útil no caso de capitel (NBR 6118 (10))



ao fato de que nesta equação o termo d pode assumir os valores de d_a ou d , conforme indicado na Figura 4.

$$V_{R,max} = 0,27 \cdot \alpha_{v1} \cdot f_c \cdot u_0 \cdot d_H \quad (1)$$

Onde:

$\alpha_{v1} = (1 - f_c/250)$, com f_c em MPa;
 u_0 é o perímetro do pilar em mm;
 d_H é a altura útil da laje na região da extremidade do pilar em mm (ver Figura 4).

$$V_{Rc,int} = 0,18 \cdot (1 + \sqrt{200/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_1 \cdot d_a \quad (2)$$

Onde:

ρ é a taxa geométrica de armadura de flexão, expressa por $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$.
 ρ_x e ρ_y são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais;
 f_c é a resistência à compressão do concreto em MPa ($f_c \leq 50$ MPa);

u_1 é o comprimento do perímetro de controle afastado $2 \cdot d$ das faces do pilar, em mm. Para lajes sem capitel este valor é calculado através de $u_1 = \pi \cdot (C + 4 \cdot d)$ e para lajes com capitel o mesmo é calculado por $u_1 = \pi \cdot [C + 4 \cdot (d + h_H)]$;
 d_a é a altura útil da laje no perímetro u_1 , em mm.

$$V_{Rc,ext} = 0,18 \cdot (1 + \sqrt{200/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_{out} \cdot d \quad (3)$$

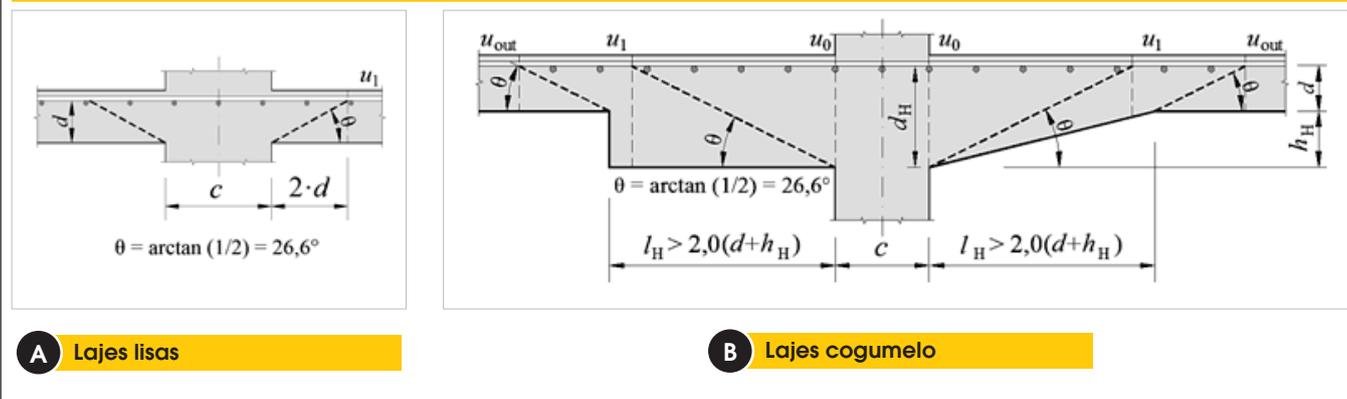
Onde:

d é a altura útil da laje no perímetro u_{out} , em mm;
 u_{out} é o comprimento do perímetro de controle afastado $2 \cdot d$ da extremidade do capitel e calculado por $u_{out} = \pi \cdot (C + 2 \cdot l_h + 4 \cdot d)$;
 l_h é a distância entre a borda do capitel e a face do pilar, em mm.
 Onde:
 $l_h \leq 2 \cdot (d_H - d)$, basta verificar o contorno u_{out} ;
 $2 \cdot (d_H - d) < l_h \leq 2 \cdot d_H$, basta verificar o contorno u_1 ;
 $l_h > 2 \cdot d_H$, é necessário verificar os contornos u_{out} e u_1 .

2.2 Eurocode 2

Segundo o EUROCODE 2 [11] estas recomendações são comple-

Figura 5 – Modelo de verificação de punção no estado limite último (EUROCODE 2 (11))



mentares para a verificação da ruptura por punção em elementos como lajes maciças, lajes nervuradas com áreas sólidas sobre pilares e fundações. A punção pode resultar de uma carga concentrada ou reação aplicada em uma área relativamente pequena, chamada de área carregada A_{load} de uma laje ou uma fundação. O modelo recomendado para verificar resistência à punção é mostrado na Figura 5. A resistência ao cisalhamento deve ser verificada junto aos perímetros de controle definidos. As recomendações enunciadas neste item são principalmente formuladas para o caso de carga uniformemente distribuída. Basicamente a resistência à punção deve ser verificada na face do pilar (contorno u_0) e no contorno básico de controle u_1 , em lajes sem capitel. Se a armadura de cisalhamento for necessária, uma verificação adicional deve ser feita no contorno u_{out} , onde não exista a necessidade desta armadura. O contorno básico de controle u_1 está localizado a uma distância $2 \cdot d$ da área carregada e deve ser construído visando minimizar seu comprimento, conforme mostra a Figura 5, inclusive no caso de pilares com seções irregulares.

Sendo assim para os casos de cálculo de resistência à punção das ligações sem armadura de cisalhamento e sem capitel, deve ser utilizado a Equação 4. E para a estimativa da resistência a punção e ligações com capitéis recomenda-se as Equações 5 e 6, para verificações dentro e fora da área dos capitéis, onde $V_{Rc,int}$ e $V_{Rc,ext}$ são, respectivamente, a carga de ruptura por punção dentro do capitel (interno) e a carga de ruptura fora do capitel (externo).

$$V_{R_{max}} = 0,3 \cdot f_c \cdot \left(1 - \frac{f_c}{250}\right) \cdot u_0 \cdot d \tag{4}$$

Onde:

f_c é a resistência à compressão do concreto, que segundo o EUROCODE 2 [12] deve ser menor que 90 MPa, porém devem ser respeitados os limites estabelecidos pelos anexos de cada país membro da comunidade européia;

u_1 é o comprimento do perímetro de controle afastado $2 \cdot d$ das faces do pilar, em mm.

d é a altura útil da laje, em mm;

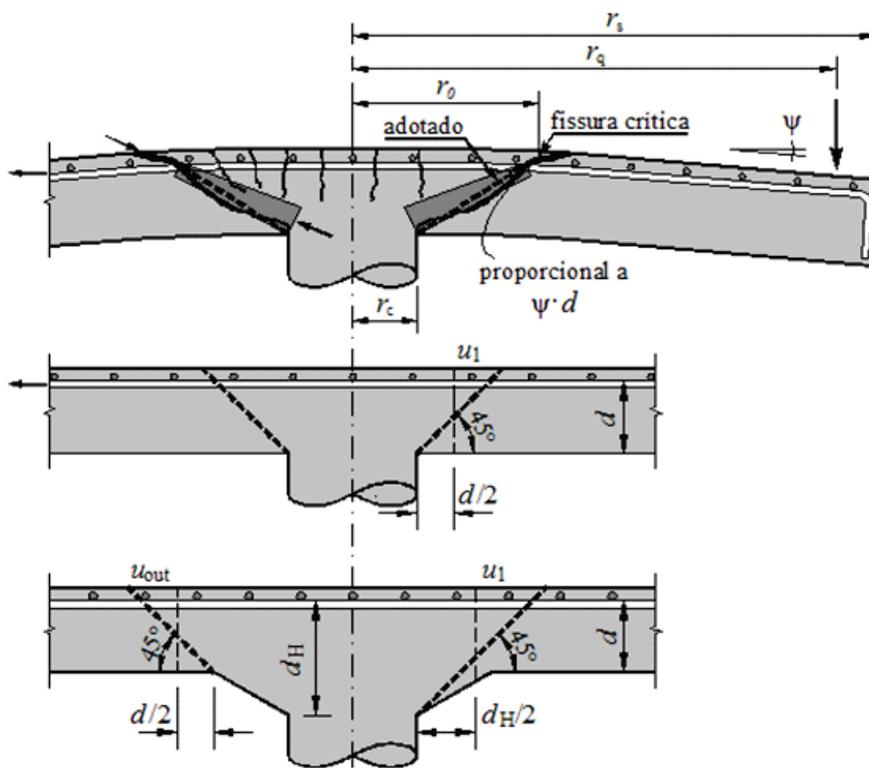
ξ é o *size effect*, assumido como $\xi = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2,0$, com d em mm;

ρ é taxa média da armadura de flexão tracionada. A mesma é calculada usando $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$, onde ρ_x e ρ_y são as taxas nas direções x e y, respectivamente. Devem ser consideradas as barras dentro de uma região afastada $3 \cdot d$ das faces do pilar;

u_1 é o comprimento do perímetro de controle afastado $2 \cdot d$ das faces do pilar.

$$V_{Rc,int} = 0,18 \cdot \xi_H \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho \cdot f_c} \cdot u_1 \cdot d_H \tag{5}$$

Figura 6 – Teoria desenvolvida por Muttoni (12)



Onde:

ξ_H é o *size effect*, assumido como $\xi_H = 1 + \sqrt{200/(d + h_H)} \leq 2,0$ para ruptura interna no capitel, com d e h_H em mm;
 d_H é a altura útil da laje na face do pilar, em mm;
 h_H é a espessura do capitel, em mm.

$$V_{Rc,ext} = 0,18 \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho \cdot f_c} \cdot u_{out} \cdot d \quad (6)$$

Onde:

u_{out} é o comprimento do perímetro de controle afastado $2 \cdot d$ do limite externo do capitel (mm).

2.3 Teoria da fissura crítica de cisalhamento (TFCC)

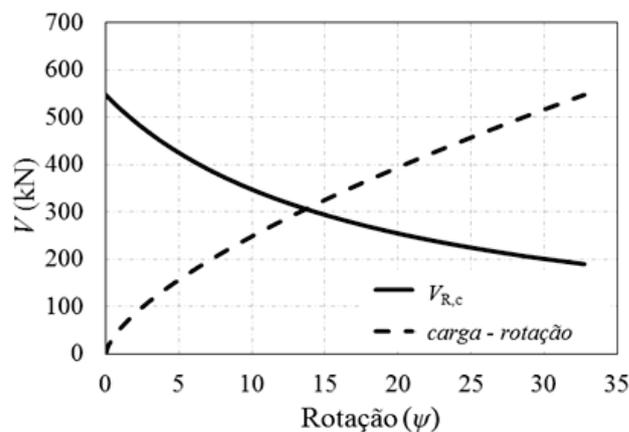
Muttoni [12] idealizou esta teoria baseado na hipótese que a resistência a ruptura por punção de uma laje diminui com o aumento da rotação da mesma, e este fato pode ser atribuído a presença de uma fissura crítica cisalhante na seção transversal da laje que se propaga cortando a biela de compressão, que transmite o esforço de corte para o pilar (ver a Figura 6). Consequentemente, a abertura da fissura citada, diminui a resistência da biela comprimida e em função da queda de resistência pode levar a ruptura por punção. Segundo Muttoni e Schwartz [13] a abertura dessa fissura é proporcional ao produto $\psi \cdot d$ (ver a Figura 6), porém a transmissão do esforço de corte na fissura crítica está diretamente ligada à rugosidade do concreto encontrada nesta fissura. Esta rugosidade pode ser avaliada em função do tamanho máximo do agregado usado no concreto em questão. Dessa forma, Muttoni [12], baseado em seu estudo, sugere a Equação 7 para estimar a contribuição do concreto na resistência ao cisalhamento. Ressaltando que esta teoria considera que a superfície de ruptura ocorre com inclinação de 45°.

$$V_{Rk,c,int} = \frac{2}{3} \cdot \frac{u_s \cdot d_H \cdot \sqrt{f_c}}{1 + 20 \cdot \frac{\psi \cdot d_H}{d_{g0} + d_g}} \quad (7)$$

Onde:

u_s é o comprimento de um perímetro de controle à $d/2$ da face do pilar, em mm;
 d_H é a altura útil da laje na face do pilar, em mm;
 f_{ck} é a resistência característica do à compressão do concreto,

Figura 7 – Representação gráfica do cálculo da carga de ruptura por punção segundo TFCC



MPa;

ψ é a rotação da laje;

d_{g0} é o dimensão de referência do agregado admitido como 16 mm;

d_g é o dimensão máxima do agregado usado no concreto da laje, em mm.

A rotação ψ da laje é expressa pela Equação 7.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{ys}}{E_s} \cdot \left(\frac{V_E}{V_{flex}} \right)^{1,3} \quad (8)$$

Onde:

r_s é a distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos, em mm;

r_q é a distância entre o eixo do pilar e a linha da carga, em mm;

r_c é o raio do pilar circular ou o raio equivalente de um pilar retangular, em mm;

f_{ys} é a tensão de escoamento da armaduras de flexão tracionada, em MPa;

E_s é o módulo de elasticidade da armadura de flexão tracionada, em MPa;

V_E é a força aplicada, em N;

$$V_{flex} = 2 \cdot \pi \cdot m_R \cdot \frac{r_s}{r_q - r_c}$$

Tabela 1 – Variação experimental das lajes

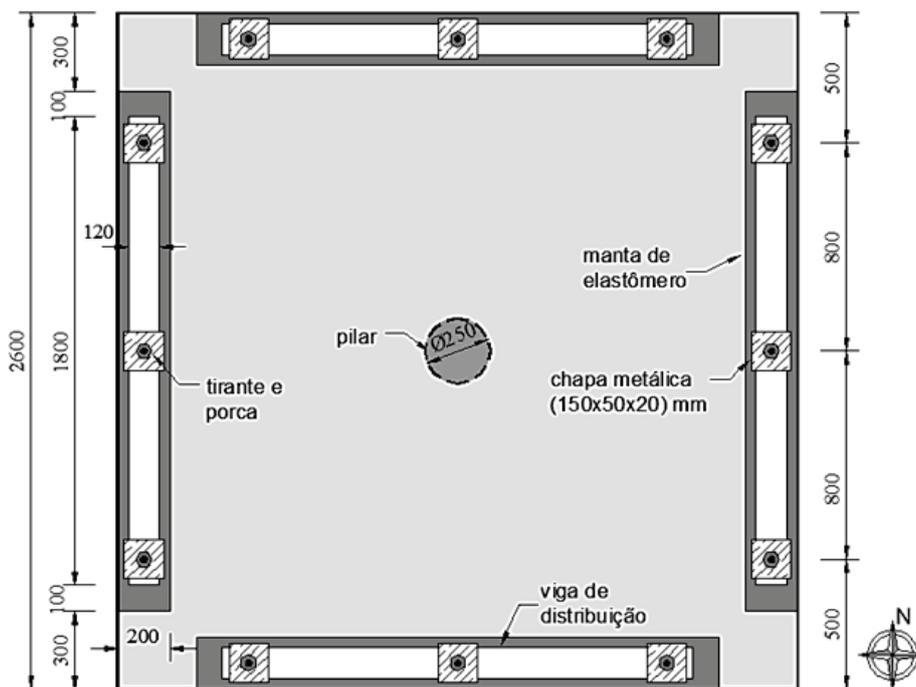
Laje	C (mm)	h_H (mm)	l_H (mm)	d (mm)	f_c (MPa)	ρ (%)	Relação $h_H:l_H$
LC1	250	55	-	111,5	31	1,04	-
LC2			110	112,5			1:2
LC3			165	110,5			1:3
LC4			220	110,5			1:4

$$m_R = \rho \cdot f_{ys} \cdot d^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot f_{ys}}{2 \cdot f_c}\right)$$

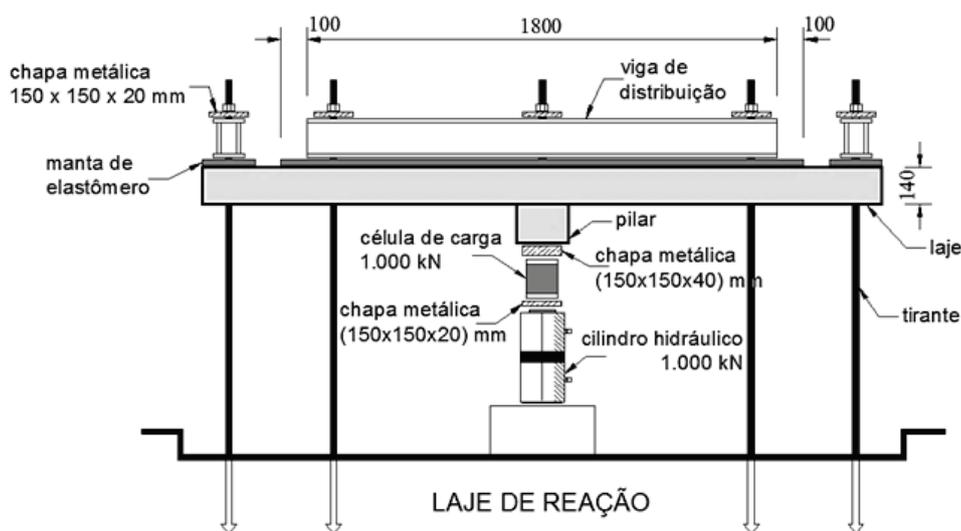
No caso de lajes dotadas de capitéis sem armadura de cisalhamento, assim como é feito com as normas já citadas, faz-se

necessário a verificação de duas possíveis superfícies de ruptura. A primeira situação seria a superfície partindo da face do pilar, com ruptura interna ao capitel, tendo que ser aplicado então o perímetro de controle u_1 com comprimento $d_H/2$, e usando a altura útil d_H como sendo igual a soma da altura útil da laje mais a

Figura 8 – Sistema empregado nos ensaios, com todas as medidas em mm

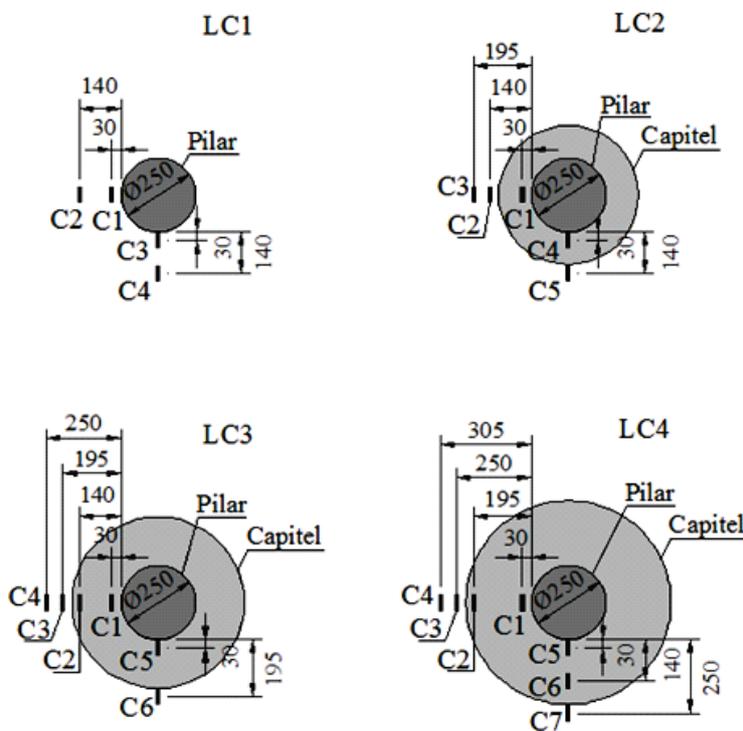


A Sistema de ensaio em planta



B Sistema de ensaio em corte

Figura 9 – Extensômetros fixados no concreto na face inferior das lajes



espessura do capitel. A segunda circunstância seria a ruptura a partir da extremidade do capitel, no perímetro de controle u_{out} com comprimento de $d/2$, e conseqüentemente deve ser usada a altura útil d , ou seja, a altura útil da laje (ver a Figura 6).

$$V_{Rk,c,ext} = \frac{2}{3} \cdot \frac{u_{out} \cdot d \cdot \sqrt{f_{ck}}}{1 + 20 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad (9)$$

Onde:

u_{out} é o comprimento de um perímetro de controle à $d/2$ da extre-

midade do capitel, em mm;

d é a altura útil da laje no perímetro u_{out} , em mm.

Com V_E , ψ e $V_{R,c}$ é possível traçar um gráfico com duas curvas. A primeira delas é uma curva que expressa o comportamento carga-rotação da laje de forma teórica. A segunda curva expressa a redução da resistência da laje em função do aumento da rotação. O ponto de interseção destas duas curvas expressa a resistência última à punção de uma determinada ligação laje-pilar. A Figura 7 ilustra esse gráfico.

3. Programa experimental

Buscando avaliar experimentalmente o comportamento de lajes

Tabela 2 – Resultados experimentais das lajes ensaiadas

Slab	d (mm)	l_H (mm)	f_c (MPa)	$\epsilon_{cmax,in}$ (‰)	$\epsilon_{cmax,out}$ (‰)	r_{ys} (mm)	Local de Ruptura Experimental	P_u (kN)
LC1	111,5	-	31	-	-	3,23.d	-	327,0
LC2	112,5	110	31	-0,92	-2,16	5,02.d	EXT	427,0
LC3	112,5	165	33	-3,26	-1,39	5,02.d	INT	518,5
LC4	110,5	220	33	-4,12	-1,55	6,95.d	INT	513,5

cogumelo de concreto armado com capitéis, foram ensaiadas 4 lajes de concreto armado, das quais 1 era laje lisa e as 3 restantes eram lajes cogumelo com capitel. As lajes tinham dimensões de (2.600 x 2.600) mm e espessura de 140 mm sendo apoiadas em segmentos de pilar com seção circular de 250 mm de diâmetro. A armadura de flexão utilizada foi a mesma para todas as lajes, sendo formada por barras de 12,5 mm a cada 105 mm na direção x e barras de 12,5 mm a cada 115 mm na direção y . Foi adotado um cobrimento de 15 mm para as armaduras na face superior e 10 mm para as armaduras na face inferior das lajes. Esta série de ensaios teve como principal variável a inclinação dos capitéis, adotando-se relações entre $h_{c1}:l_{c1}$ de 1:2, 1:3 e 1:4, a fim de avaliar sua influência no comportamento e na resistência das lajes. A Tabela 1 apresenta as características das lajes ensaiadas. As lajes

foram submetidas a um carregamento simétrico, como mostra a Figura 8, utilizando um cilindro hidráulico de 1.000 kN e uma célula de carga com mesma capacidade e precisão de 0,5 kN. A região próxima à ligação laje-pilar foi monitorada com extensômetros elétricos fixados no concreto, na face inferior das lajes, posicionados nas direções tangencial e radial, conforme mostrado na Figura 9, sendo que a distância dos extensômetros em relação à face do pilar variou de acordo com a presença e inclinação dos capitéis. Como a variação da inclinação do capitel influencia diretamente no local do aparecimento da superfície de ruína, buscou-se monitorar de forma mais intensiva as extremidades do capitel, regiões mais críticas quanto à concentração de tensões. A Tabela 2 apresenta os resultados dos ensaios das 4 lajes. Observa-se uma variação na carga de ruptura das lajes de até 58,5%

Figura 10 – Modelagem numérica axissimétrica (Menetrey (15))

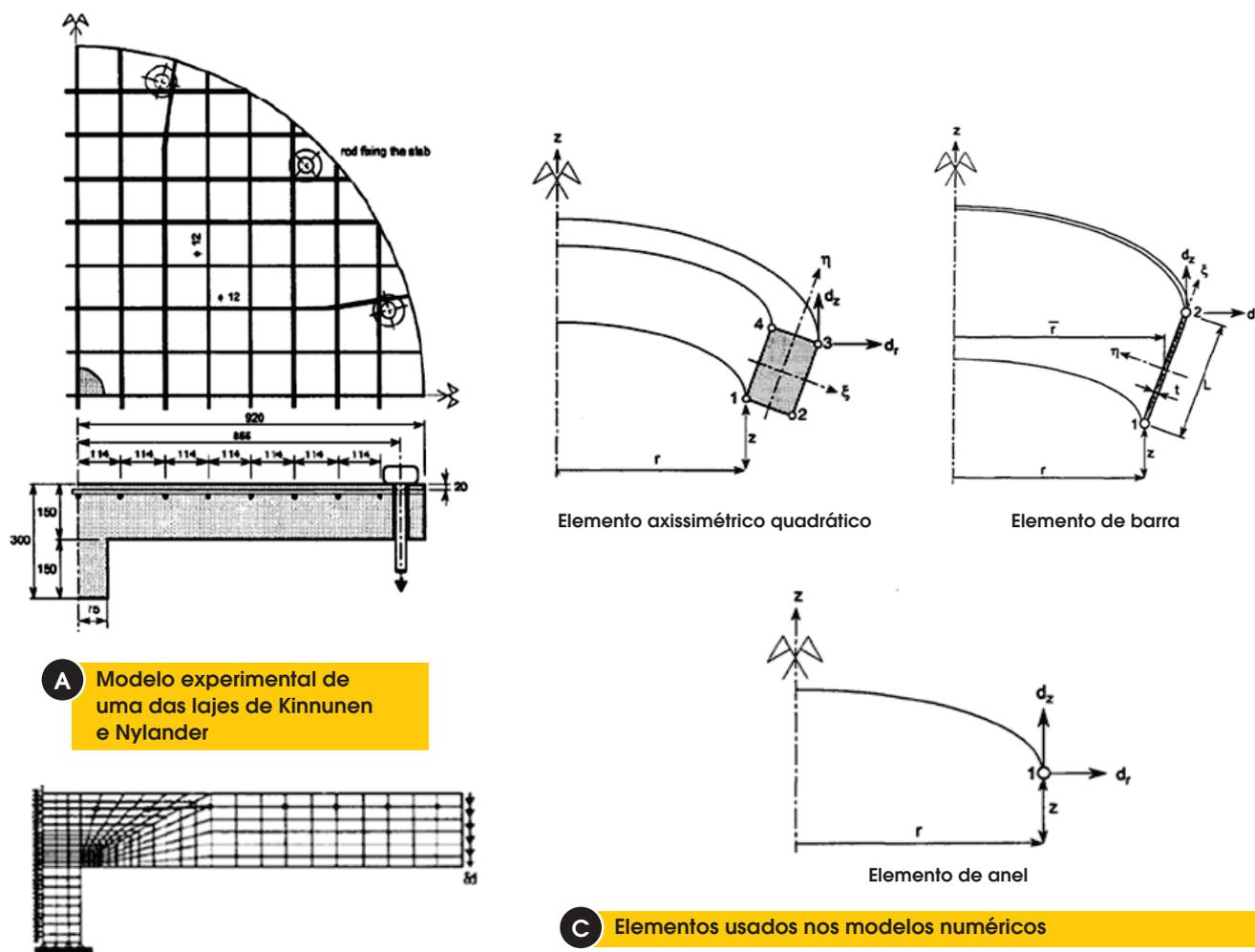
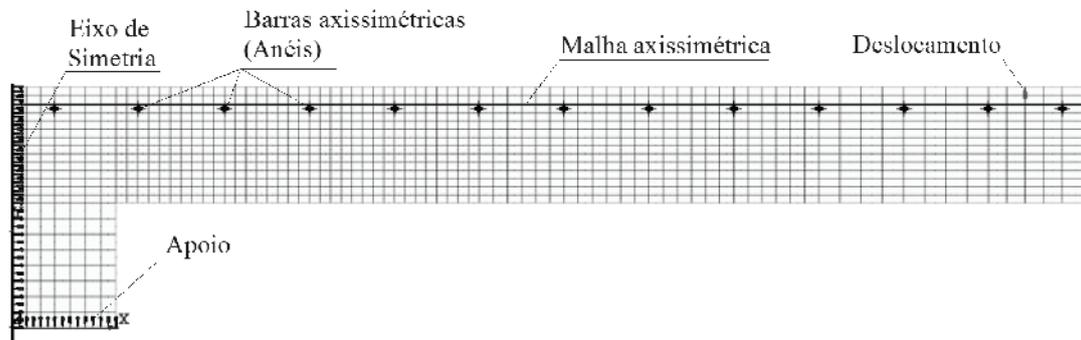
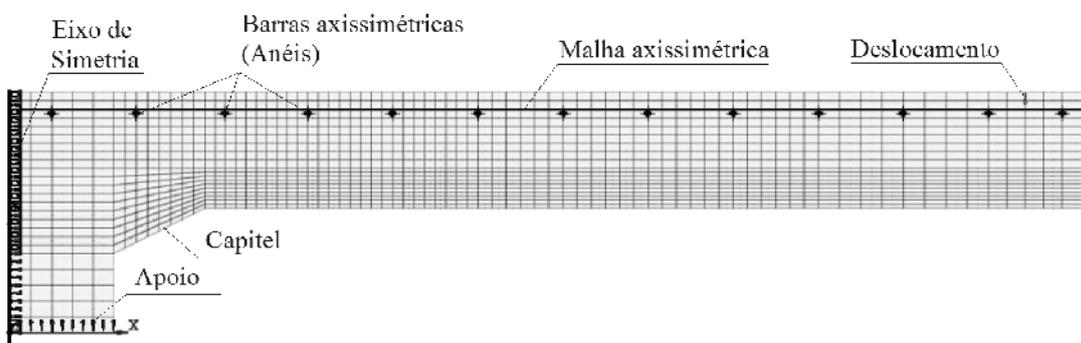


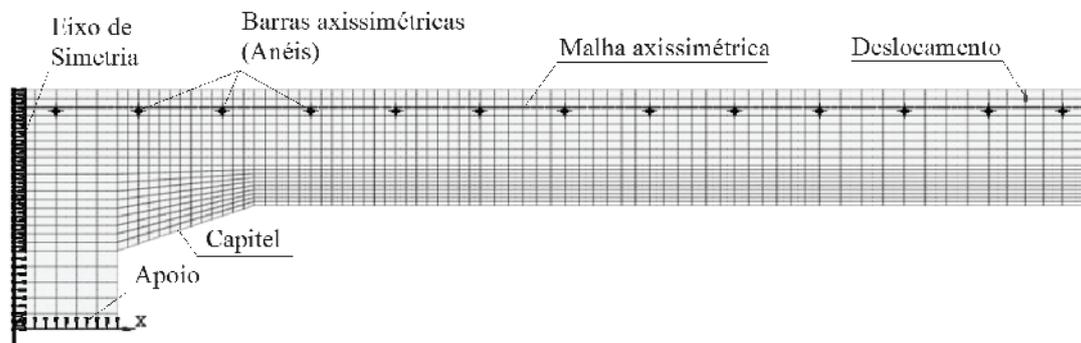
Figura 11 – Modelos adotados para as lajes LC1, LC2, LC3 e LC4



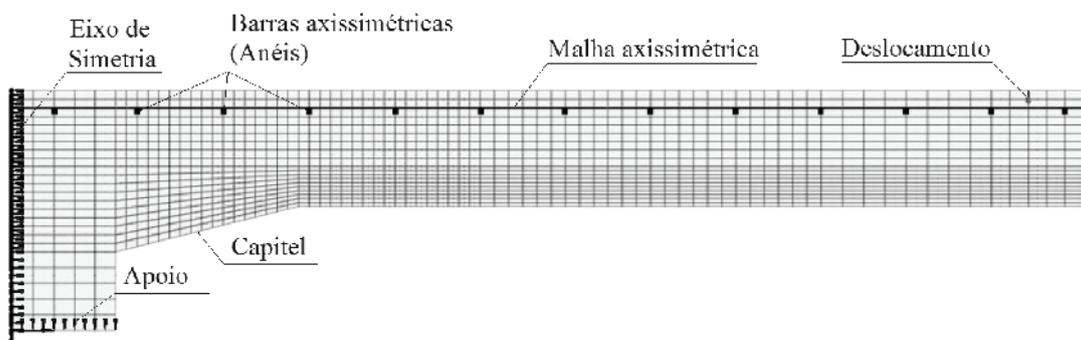
A Modelagem da laje sem capitel (LC1)



B Modelagem da laje LC2

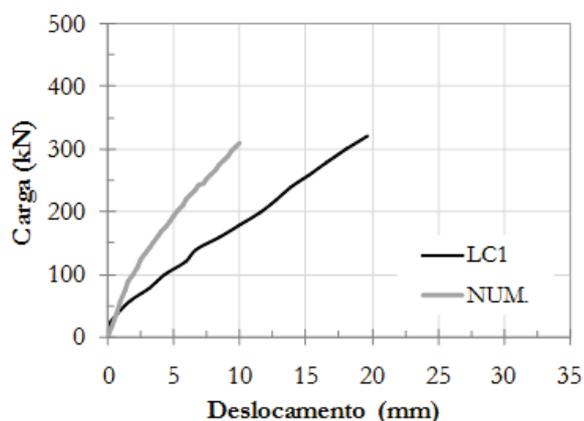


C Modelagem da laje LC3

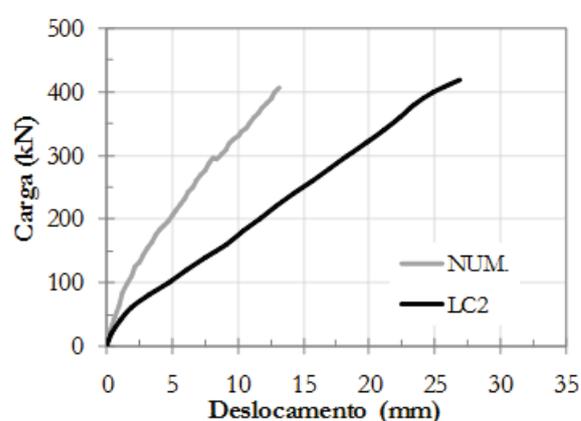


D Modelagem da laje LC4

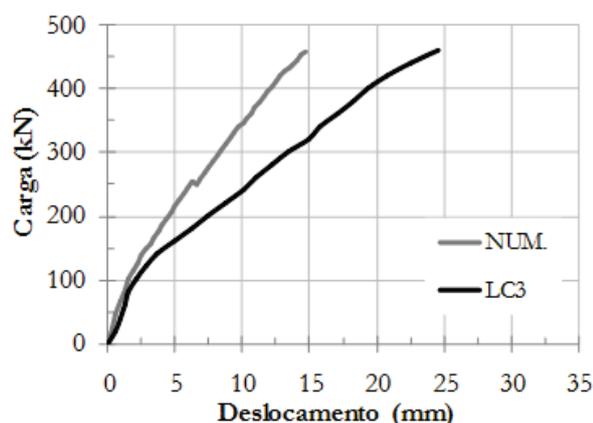
Figura 12 – Curvas carga-deslocamento numérico e experimental das lajes LC1, LC2, LC3 e LC4



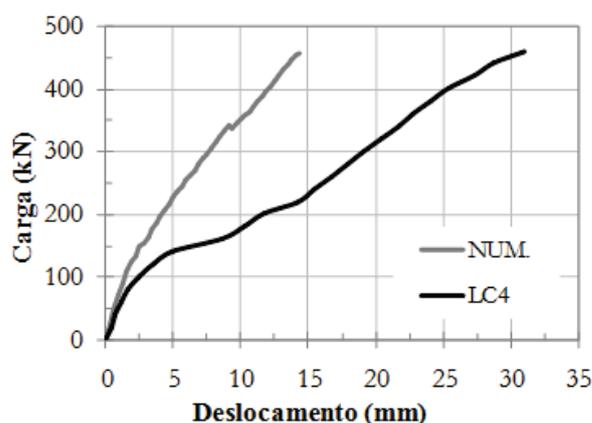
A Deslocamentos da laje LC1



B Deslocamentos da laje LC2



C Deslocamentos da laje LC3



D Deslocamentos da laje LC4

(LC1 a LC3). Esta variação pode ser atribuída ao acréscimo e ao posterior aumento dos capitéis, uma vez que a laje LC1 não tem capitel e as lajes LC2, LC3 e LC4 tiveram seus capitéis adicionados e variadas a sua relação espessura/comprimento de 1:2 a 1:4. Percebe-se um ganho na carga de ruptura entre a laje LC1 e a laje LC2 de aproximadamente 30%, tendo a laje LC2 o menor capitel, com relação 1:2, como é recomendado por norma (EUROCODE 2 [11] e NBR 6118 [10]). Para a laje LC3, com relação de 1:3, percebe-se um ganho de carga de 21% para a laje LC2 e de 58% para a laje LC1, sem capitel. Porém, a laje LC4 não melhorou em desempenho, quanto a carga de ruptura, em relação a laje LC3. Em relação às deformações no concreto, observa-se que próximo a face do pilar, as lajes LC3 e LC4 apresentaram deformações maiores que a laje LC2 e que próximo ao limite externo dos capitéis estes valores invertem e a laje LC2 apresentam deformações maiores que as anteriores. Essas diferenças de deformação podem ser confirmadas pelos locais de ruptura, uma vez que a laje LC2 obteve ruptura externa e as lajes LC3 e LC4 ruptura interna aos capitéis. E quanto as barras de flexão comprimida, observa-se que na laje LC1 um raio de escoamento (r_{ys}) de $3,23 \cdot d$, pois apenas as 2

barras mais próximas do pilar escoaram, para as lajes LC2 e LC3 um r_{ys} de $5,02 \cdot d$ e para a laje LC4 um r_{ys} de $6,95 \cdot d$, nesta última quase todas as barras monitoradas atingiram o escoamento.

4. Análise computacional

A realização de ensaios em modelos experimentais de elementos estruturais é de fundamental importância para a elaboração e aprimoramento de métodos teóricos. No entanto, ela apresenta limitações uma vez que os resultados obtidos se restringem aos pontos do modelo nos quais foram instalados sensores e equipamentos para medir deformações e deslocamentos. Uma das formas de complementar os resultados experimentais a fim de entender melhor o comportamento e o mecanismo de ruptura dos modelos experimentais é através da modelagem computacional, uma vez que, após a calibração deste modelo é possível obter resultados em qualquer ponto. Buscando entender melhor o comportamento e o mecanismo de ruptura de lajes cogumelo foram gerados modelos computacionais das lajes ensaiadas para a realização de uma análise não-linear baseada no Método dos Elementos Fi-

nitos utilizando-se o software comercial MIDAS FEA. Foram gerados modelos axissimétricos tendo como referência as análises feitas por Ferreira [14], Menetrey [15] e Trautwein [16]. Nestas análises os autores buscaram simplificar a modelagem computacional transformando os modelos experimentais em modelos axissimétricos, que são aqueles onde existe simetria em torno de um eixo para a geometria, para as propriedades dos materiais e para os carregamentos. Para isso os autores tiveram que fazer adaptações no modelo computacional, principalmente quanto às armaduras de flexão, transformando as barras que na prática são distribuídas de forma ortogonal em armaduras axissimétricas, que são aquelas formadas por anéis e por barras radiais, conforme mostrado na Figura 10.

As comparações entre os resultados computacionais e experimentais feitas por estes autores indicam que, no que se refere ao comportamento carga x deslocamento, os modelos computacionais apresentam um comportamento significativamente mais rígido. Segundo os autores, isso na verdade representa um comportamento já observado também experimentalmente em ensaios como os de Kinnunen e Nylander [7], uma vez que as armaduras do tipo anel e barras radiais tendem a combater de forma mais eficiente a fissuração de flexão, aumentando a rigidez da laje. Porém, quanto às cargas de ruptura, os autores observaram que é possível obter resultados muito próximos aos experimentais e que, portanto, estas análises são válidas e podem permitir uma melhor compreensão do fenômeno da punção.

Os dados de entrada usados na análise não-linear para definir os materiais foram: Coeficiente de Poisson do concreto $\nu_c = 0,15$; Resistência do concreto à compressão $f_c = 32$ MPa; *Fixed crack model*; Efeito da fissuração lateral segundo Vecchio e Collins [17]; Desconsideração do efeito de confinamento; Valor básico de energia de fratura para um agregado de dimensão máxima de 9,5 mm $G_{f0} = 0,0259$ N.mm/mm²; Energia de fratura a compressão $G_c = 10$ N.mm/mm²; Módulo de elasticidade do aço $E_s = 200$ GPa; Coeficiente de Poisson do aço $\nu_s = 0,30$; Tensão de escoamento do aço $f_{ys} = 550$ N/mm²; Módulo de elasticidade do concreto igual $E_c = 27$ GPa. Para o cálculo da energia de fratura necessária para gerar fissuração à tração foi utilizada a Equação 10, abaixo:

$$G_f = G_{f0} \cdot \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7} \tag{10}$$

$$f_{cm} = f'_c + \Delta f \tag{11}$$

Onde:

G_{f0} é a valor básico de energia de fratura determinado em função do diâmetro do agregado;

f_{cm} é a resistência à compressão média do concreto (Equação 11); f_{cm0} é admitido como igual a 10 MPa.

Para simular o carregamento foi aplicado um deslocamento de 50 mm na extremidade dos modelos, há uma distância de 100 mm da extremidade da laje. A Figura 11 mostra os modelos das lajes utilizados no trabalho, com suas respectivas malhas e detalhes. O

método de interação utilizado foi o de *Newton Raphson*, com 160 passos de carga e 200 interações por passo de carga, sendo adotado como critério de convergência de energia com tolerância de 10^{-3} . Para analisar o concreto à compressão foi adotado o comportamento de uma lei parabólica de *hardening e softening* (endurecimento e amolecimento), proposto por Feenstra [18]. O diagrama tensão-deformação do concreto não-confinado sob tração uniaxial foi definido como linear até a fissuração. Após as primeiras fissuras a tensão de tração se reduz exponencialmente em função da deformação na direção normal à fissura (*nn*), e para mais detalhes sobre as curvas adotadas, ver o trabalho de Lima Neto [19].

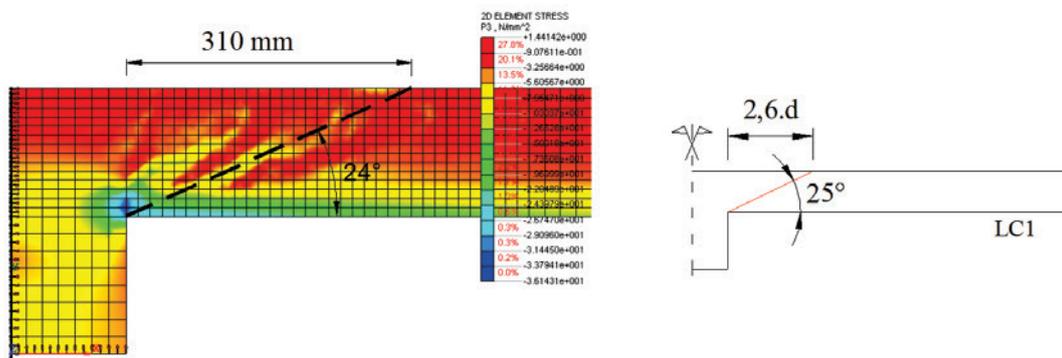
4.1 Laje sem capitel

Para adotar a malha ideal para este modelo, foi realizado um estudo paramétrico, usando modelos para calibração da malha ideal, fazendo uma variação com os índices de refinamento da malha do modelo, e por fim adotando os valores baseados no estudo paramétrico realizado por Ferreira [14], em seu trabalho. Sendo assim, foram adotados como parâmetros referentes à resistência a tração do concreto (f_{ct}) e fator de retenção de cisalhamento (β_c) os valores 1,85 MPa e 0,12, respectivamente. Na Figura 11a, é apresentado o modelo da laje LC1 utilizado para esta análise com a presença da armadura tangencial e radial, o ponto de aplicação do deslocamento, o eixo de simetria e a região de apoio do pilar. Na Figura 12a, observa-se que em relação ao deslocamento o modelo numérico apresentou maior rigidez que o encontrado experimentalmente na laje LC1, resultado este que já era esperado, como foi comentado anteriormente. Porém, quando comparadas às cargas de ruptura observa-se resultados mais próximos, uma vez que a carga de ruptura experimental desta laje foi de 327 kN e a encontrada no modelo numérico foi de 309 kN, ou seja, uma diferença de apenas 5,5% (ver Tabela 3).

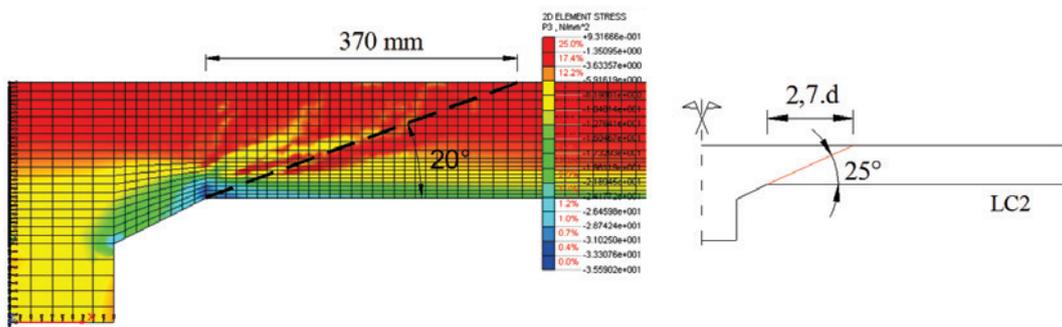
A distribuição de tensões normais da Figura 13a mostram a formação de 2 bielas comprimidas, sendo que a mais expressiva pode ter gerado as tensões de tração que possibilitou a abertura da superfície de ruptura. Assim como, tensões compressivas concentradas próximas a ligação laje-pilar com valor acima da resistência à compressão do concreto, que pode ter gerado o esmagamento do concreto neste ponto e possibilitado dessa forma a ruptura por punção. Nota-se também que o raio aproximado para o aparecimento do suposto cone de ruptura na face superior da laje, a partir da face do pilar, seria próximo do que foi encontrado experimentalmente (2,8-d). Observa-se na Figura 14a as fissuras formadas por tensões radiais que se desenvolveram em 3 pontos diferentes e que foram surgindo conforme o acréscimo do carregamento, a primeiras fissuras mais próximas dos pilares e que se estabilizaram nos últimos passos de carga e as fissuras mais distantes do pilar, que apareceram nas fases mais críticas de carregamento e que se tornam parte do cone de ruptura. Percebe-se também a passagem da provável superfície de ruptura próxima a essas fissuras, com uma inclinação com a horizontal de 24°, não distante do que foi observado em laboratório (23°).

Quanto às deformações no concreto da laje LC1, é possível observar na Figura 15a e 15b que os resultados dos modelos numéricos aproximaram-se dos experimentais. Percebe-se que os extensômetros tangenciais (C1 e C2) apresentaram deformações próximas às observadas nos modelos (C1N e C2N), para o mesmo nível de carregamento. Porém não se observa o mesmo compor-

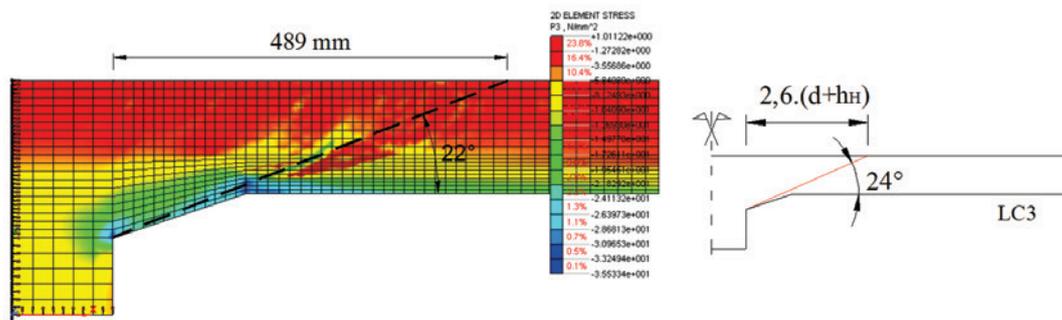
Figura 13 – Distribuição de tensões normais máximas dos modelos numéricos e o ângulo da superfície de ruína experimental observados nas lajes LC1, LC2, LC3 e LC4



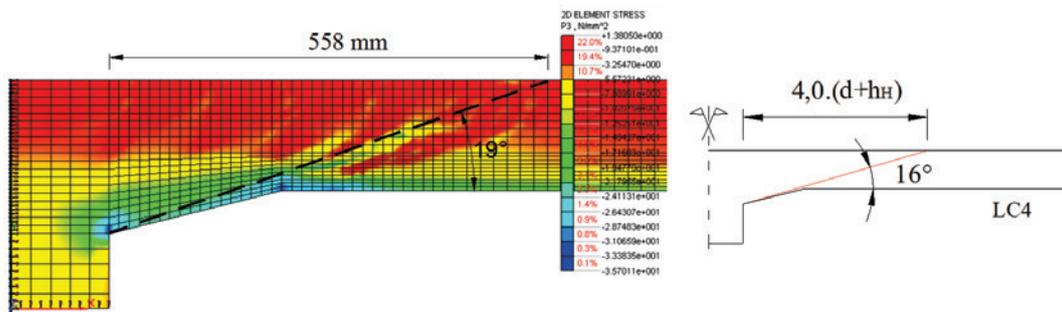
A Tensões de $\sigma_{Máx}$ referentes à carga de ruptura do modelo LC1 e o ângulo da superfície de ruína experimental



B Tensões de $\sigma_{Máx}$ referente à carga de ruptura do modelo LC2 e o ângulo da superfície de ruína experimental

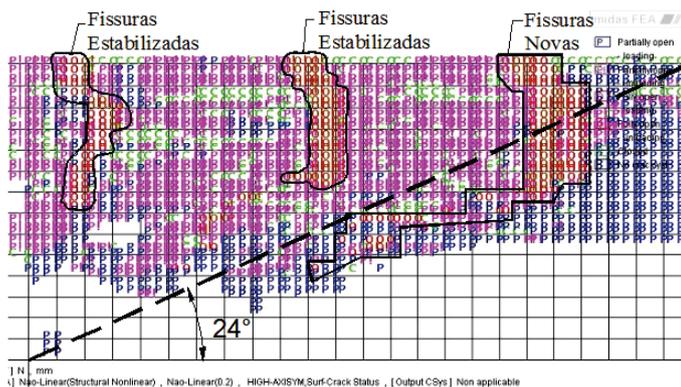


C Tensões de $\sigma_{Máx}$ referente à carga de ruptura do modelo LC3 e o ângulo da superfície de ruína experimental

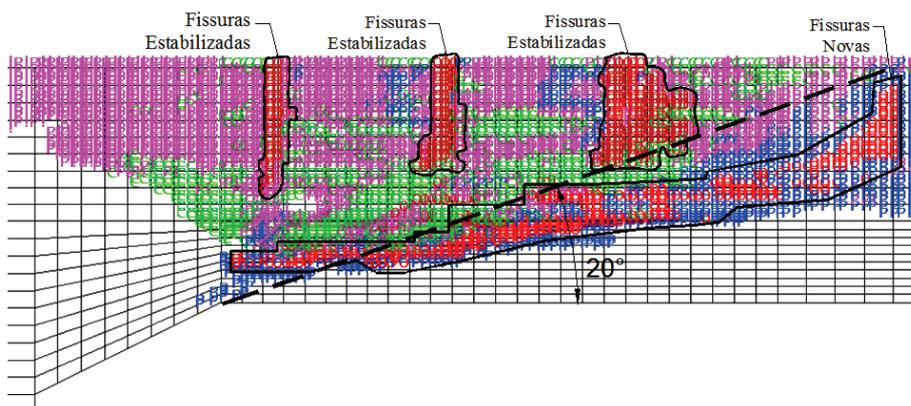


D Tensões de $\sigma_{Máx}$ referente à carga de ruptura do modelo LC4 e o ângulo da superfície de ruína experimental

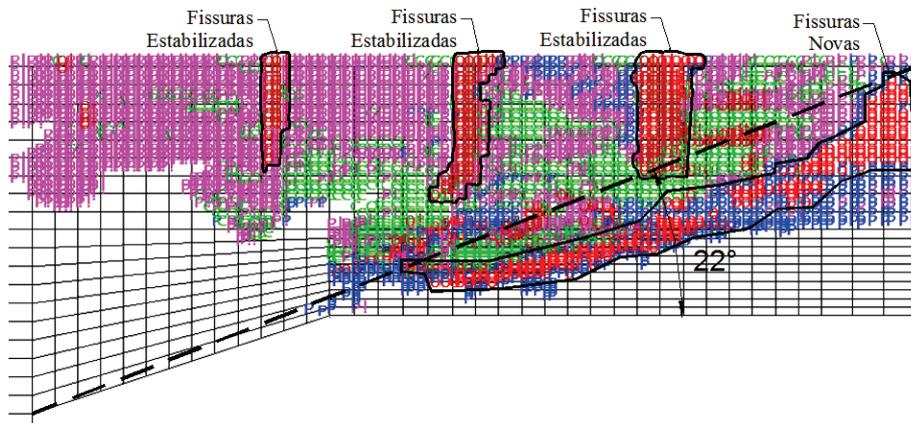
Figura 14 – Fissuras observadas no momento da ruptura nos modelos das lajes LC1, LC2, LC3 e LC4



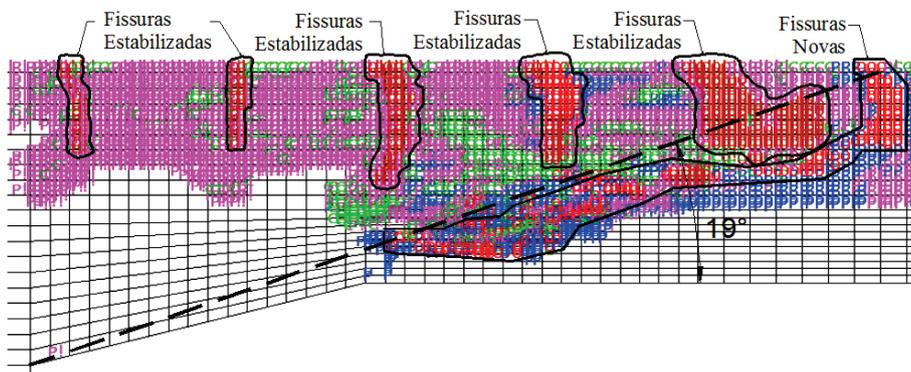
A Fissuras da laje LC1 referentes à ruptura



B Fissuras da laje LC2 referentes à ruptura



C Fissuras da laje LC3 referentes à ruptura



D Fissuras da laje LC4 referentes à ruptura

tamento para os extensômetros radiais, que inicialmente apresentavam deformações próximas entre experimental (C3 e C4) e numérica (C3N e C4N), mas para os últimos níveis de carregamento os valores divergiram, uma vez que as tensões radiais experimentais apresentaram deformações de tração, próximo a ruptura, e no modelo numérico estas deformações comprimiram até a ruptura.

4.2 Lajes com capitel

Para as lajes com capitel, além do acréscimo dos capitéis, a malha utilizada anteriormente, também foi modificada na quantidade de elementos, em função de uma análise mais detalhada na região dos capitéis, a malha que antes tinha 14 elementos foi aumentada para 19 elementos na espessura das lajes LC2, LC3 e LC4, em função da maior concentração de tensões na ligação laje-pilar, sendo assim, fez-se necessário o refinamento da malha na região. Em relação aos parâmetros complementares, eles foram modificados, conforme o comportamento dos modelos, os valores eram validados ou não. Portanto, para a modelagem da laje LC2, com capitel de relação $h_{ct}:l_{ct}$ igual a 1:2, foram adotados $f_{ct} = 1,75$ MPa e $\beta_c = 0,15$. Para a laje LC3 foram adotados $f_{ct} = 1,72$ MPa e $\beta_c = 0,16$ e para a laje LC4 adotou-se $f_{ct} = 1,85$ MPa e $\beta_c = 0,15$. Na Figura 11 são apresentados os modelos com as malhas empregadas nas lajes com capitel, onde a diferença apresenta-se apenas no comprimento dos capitéis.

Observando a Figura 12, é possível notar-se que, assim como a laje anterior, sem capitel, os modelos numéricos das lajes com capitel LC2, LC3 e LC4 apresentaram rigidez maior em relação aos resultados experimentais. Porém, em relação à carga de ruptura, mais uma vez o modelo numérico se aproximou do experimental na laje LC2 enquanto a carga de ruptura experimental foi de 427,0 kN, o modelo numérico atingiu o valor de 406,3 kN, ou seja, 4,8% de diferença entre os dois, porém para o estimado pelo EUROCODE 2 [11] uma diferença de 5,3%. Porém, as lajes com inclinação superior a 1:2 (LC3 e LC4) apresentaram um diferença um pouco maior entre a carga de ruptura experimental e os modelos numéricos (ver Tabela 3). A laje LC3, com inclinação de 1:3, apresentou uma ruptura experimental de 518,5 kN e o modelo da análise numérica uma capacidade de carga de 456,5 kN, ou seja, diferença de 12%, porém com um comportamento adequado e modo de ruptura próximo ao que foi observado em laboratório. Também se destaca que houve um ganho na capacidade de carga em relação às lajes anteriores, proporcionado pelo aumento do capitel, e também foi observado uma superfície de ruptura interna ao capitel, assim como ocorreu com a laje ensaiada. Para a laje LC4 a carga experimental foi de 513,5 kN e a numérica de 457,3 kN, ou seja, a capacidade resistente da laje modelada foi 11% menor que a experimental. Nota-se que a laje com capitel com inclinação de 1:4 não apresentou melhora na capacidade resistente, quando comparada a laje com inclinação de 1:3 (LC3), assim como foi observado experimentalmente.

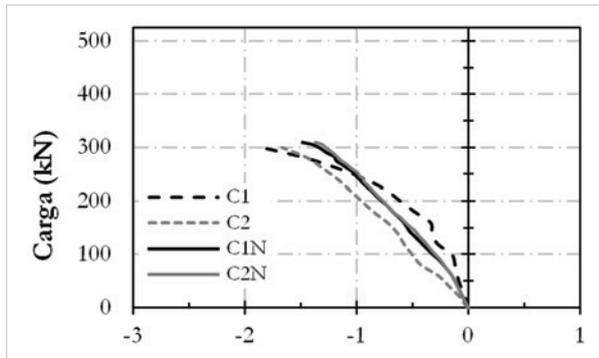
Na Figura 13b observa-se no último passo de carga, para a laje LC2, a formação de uma biela comprimida, partindo do limite externo do capitel na face inferior da laje para a face superior da mesma. Provavelmente esta biela comprimida gerou as tensões de tração que possibilitaram a abertura do cone de ruptura, uma vez que na face inferior da laje, no limite do capitel com a laje percebe-se uma tensão de compressão com valores acima da resistência à compressão do concreto adotado para a laje. Desta

forma, nota-se a indicação que essa ruptura, assim como foi observado em laboratório, foi externa iniciando no limite do capitel com a laje. Nas Figuras 13c e 13d percebe-se, assim como no modelo anterior, que os modelos das Lajes LC3 e LC4 apresentaram o desenvolvimento de uma biela comprimida, com tensões de tração em sua volta. Porém diferente de LC2, nota-se nestes modelos que a concentração elevada de tensões de compressão espalham-se desde o limite externo do capitel, com tensões um pouco mais elevadas, até o encontro deste com o pilar. Em virtude deste fato, é possível ser considerado que a superfície de ruptura passou do limite do capitel e provavelmente iniciou no encontro do capitel com o pilar. Observa-se que a superfície de ruptura, com início na face do pilar, pode ter chegado a um raio de aproximadamente 489 mm, no modelo da laje LC3, próximo aos $3,2 \cdot (d+h_{ct})$ encontrado em laboratório, e de 558 mm, no modelo da laje LC4, estando este também próximo ao experimental ($4 \cdot (d+h_{ct})$).

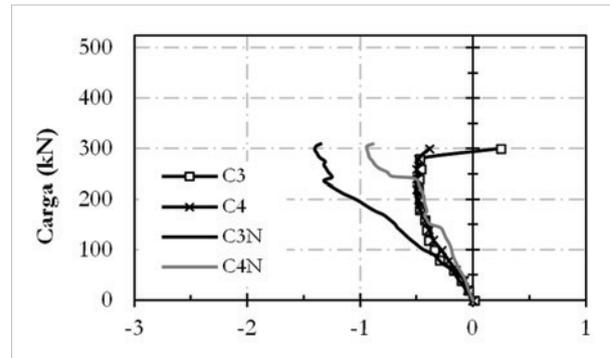
Na Figura 14b nota-se as fissuras tangenciais, na face superior do modelo da laje LC2, já estabilizadas, mais ou menos nos mesmos locais onde foram observadas as deformações radiais mais elevadas, e o surgimento da provável superfície de ruptura, com uma inclinação de aproximadamente 22°, ressaltando que o experimental apresentou variação entre 20° e 24°. Nas Figuras 14c e 14d nota-se as fissuras tangenciais do modelo da laje LC3, na face superior, já estabilizadas, mais ou menos nos mesmos locais onde foram observadas as deformações radiais mais elevadas em LC2, e o aparecimento da provável superfície de ruptura, com uma inclinação de aproximadamente 22°, ressaltando que o experimental apresentou variação entre 20° e 24°. E o modelo da laje LC4 apresenta uma quantidade maior de fissuras tangenciais, em relação aos modelos anteriores, inclusive com fissuras ocorrendo nas regiões internas ao capitel. Estas fissuras internas podem ser atribuídas ao maior comprimento do capitel utilizado neste modelo, fazendo com que as fissuras que antes surgiam apenas nas extremidades, adentrassem os limites do mesmo. Observa-se que as fissuras tangenciais ocorreram nas mesmas regiões onde apareceram deformações tangenciais elevadas, como observado em lajes anteriores, inclusive a superfície de ruína, apresentando uma projeção com inclinação de aproximadamente 19°.

Na Figura 15 observa-se uma comparação entre as deformações do concreto, experimentais (C1, C2, C3, C4, C5, C6 e C7) e dos modelos numéricos (C1N, C2N, C3N, C4N, C5N, C6N e C7N), para as lajes com capitel (LC2, LC3 e LC4). Em geral, percebe-se que as deformações tangenciais (ver as Figuras 15c, 15e e 15g) dos modelos numéricos aproximaram-se das experimentais, confirmando assim o bom comportamento dos modelos na análise das lajes. Sendo assim, nota-se mais uma vez a tendência das lajes apresentarem valores mais elevados de deformações nos pontos onde foram identificados o surgimento da superfície de ruptura. Nota-se também que as deformações dos modelos numéricos tendem a ser um pouco menores que as experimentais, para o mesmo nível de carregamento, o que pode ser atribuído à distribuição axissimétrica da armadura, que torna os modelos mais rígidos em relação às lajes. Para as deformações radiais (ver as Figuras 15d, 15f e 15h), como observado na laje sem capitel (LC1), percebem-se deformações próximas, entre os valores experimentais e da modelagem numérica, nos estágios iniciais de carga, porém com valores discordantes, para o mesmo nível de carregamento, nos últimos passos de carga. Com exceção das deformações radiais na laje LC2 que apresentou valores próximos, entre os modelos

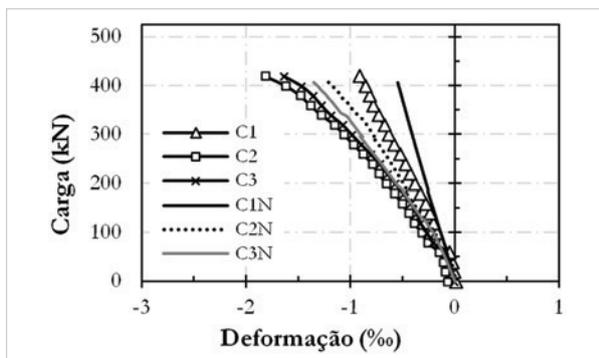
Figura 15 - Deformações do concreto, experimentais e da análise numérica, na face inferior das lajes



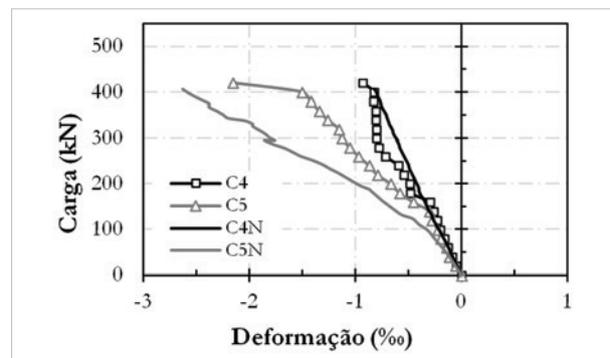
A Deformações tangenciais na laje LC1



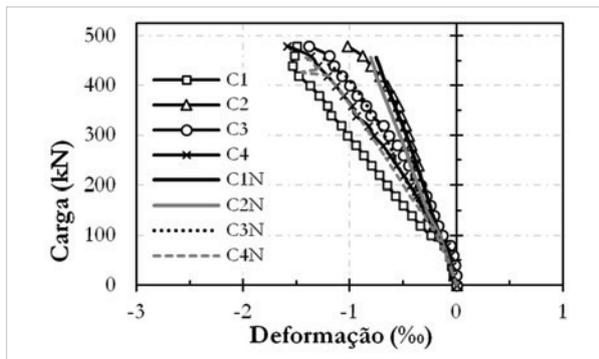
B Deformações radiais na laje LC1



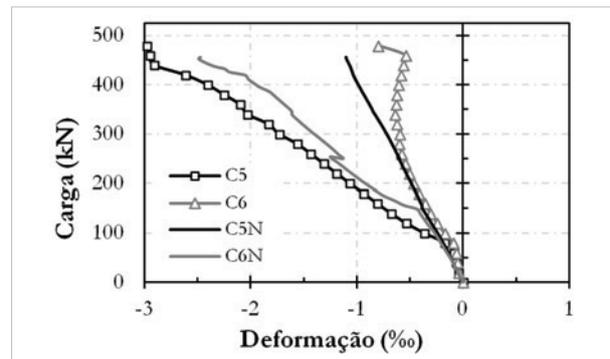
C Deformações tangenciais na laje LC2



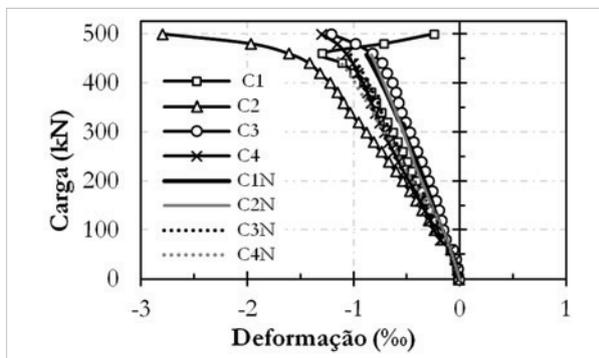
D Deformações radiais na laje LC2



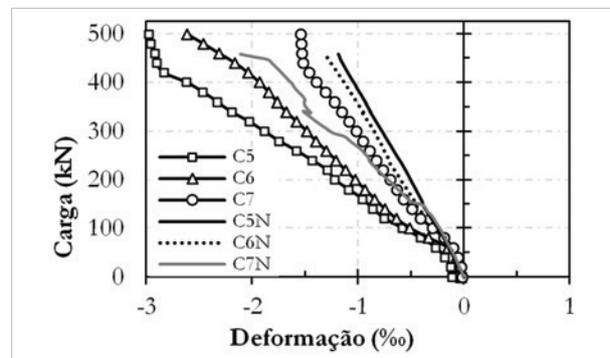
E Deformações tangenciais na laje LC3



F Deformações radiais na laje LC3



G Deformações tangenciais na laje LC4



H Deformações radiais na laje LC4

numéricos (C4N e C5N) e experimentais (C4 e C5), para o mesmo nível de carga, principalmente em relação às deformações dentro do capitel, próximas a face do pilar.

5. Avaliação dos métodos de cálculo

A Tabela 3 apresenta as cargas de ruptura observadas nos ensaios (P_u) e as cargas de ruptura estimadas pelas recomendações do EUROCODE 2 [11] e da NBR 6118 [10] (V_{Rc}), assim como o local da superfície de ruína, uma vez que estas poderiam ocorrer dentro (Interna) ou fora (Externa) da área correspondente aos capitéis. Quanto às cargas de ruptura experimentais, observa-se valores próximos as cargas de ruptura estimadas pelas recomendações do EUROCODE 2 [11]. A laje LC4 apresenta maior diferença entre as cargas experimentais e as estimadas, uma vez que a norma considera a contribuição do capitel, e foi possível perceber experimentalmente que capitéis com inclinação acima de 1:3 tem sua contribuição na resistência à punção reduzida. Quase todas as lajes apresentaram uma relação P_u/V_{Rc} próximas a 1,0, com exceção da laje LC4. Em relação à NBR 6118 [10], observa-se cargas de ruptura, em sua maioria, próximas as cargas encontradas pelas estimativas do EUROCODE 2 [11], com exceção das cargas referentes às lajes que apresentam capitéis com inclinação maiores que 1:2 (LC3, LC4). Apesar das recomendações apresentarem formulações parecidas, observa-se que os limites para o uso das mesmas, são diferentes, quando se refere ao perímetro de controle, afinal para a NBR 6118 [10] o perímetro independe do comprimento do capitel, e deve ser sempre respeitado a relação de 1:2 referente à espessura do mesmo, forçando assim uma inclinação de 26,6° a partir da face do pilar. Portanto, aplicando os limites encontrados na norma, percebe-se que nas lajes com capitel de inclinação 1:3 e 1:4, o perímetro de controle a ser usado tem comprimento de $2 \cdot d_H$ e espessura com altura útil d , e desta forma os valores estimados apresentam-se um pouco conservadores. Em relação às superfícies de ruptura observa-se que a NBR 6118 [10] apresentou bons resultados, pois suas estimativas coincidiram com as superfícies de ruptura observadas experimentalmente (ver a Figura 16). As estimativas através do EUROCODE 2 [11], para o local de ruptura, foi determinada usando a igualdade entre as formulações $V_{Rc,int}$ e $V_{Rc,ext}$. Com essa igualdade é possível determinar o valor equivalente a l_H (capitel circular) que tem o limite entre esses dois modos de ruptura. Sendo assim, experimentalmente, as lajes apresentaram ruptura externa apenas para o capitel com inclinação 1:2, concordando inicialmente com a norma (EUROCODE 2 [11]), porém, para lajes com inclinação maior que 1:2, a ruptura ocorreu em uma região interna do capitel, divergindo do que foi estimado.

A Tabela 3 apresenta uma comparação entre as cargas de ruptura experimentais e as cargas de ruptura estimadas pela TFCC. Observa-se que as cargas estimadas apresentaram, em todas as lajes, valores um pouco conservadores em relação às cargas experimentais, a relação P_u/V_{tfcc} mostra uma média de 1,32. Percebe-se que o valor mais conservador foi observado na laje LC3, com capitel de 165 mm de comprimento, e os resultados menos conservadores nas lajes sem capitel ou com capitel de inclinação 1:2. Com relação ao local de ruptura observa-se que as estimativas apresentaram bons resultados. Ressalta-se que a laje LC2, com

inclinação de 1:2, apesar do modo de ruptura atribuído a mesma, a laje apresenta uma proximidade entre os dois modos de ruptura possíveis, com diferença de mais ou menos 5 kN entre a carga de ruptura interna e a carga de ruptura externa ao capitel.

6. Conclusões

Na análise das cargas de ruptura experimentais usou-se as recomendações normativas e teóricas desenvolvidas sobre o assunto. No presente trabalho foram empregadas as recomendações do EUROCODE 2 [11], da NBR 6118 [10] e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento. Então observa-se que as estimativas para carga de ruptura do EUROCODE 2 [11] (V_{Rc}) apresentaram bons resultados, com valores próximos aos experimentais, com relação P_u/V_{Rc} em torno de 1,0, com exceção da laje LC4. Uma vez que a norma em questão considera a contribuição na capacidade de carga no aumento do capitel, mesmo para inclinação do capitel acima de 1:3, fato que não foi verificado experimentalmente. Quanto à estimativa para o local de ruptura, as lajes com inclinação de 1:2 apresentaram ruptura externa, conforme o que é previsto pela norma, porém para as lajes com capitéis de relação $h_H:l_H$ de 1:3 e 1:4 apresentaram ruptura interna, partindo da face do pilar, diferindo do que foi estimado. A NBR 6118 [10] também apresentou bons resultados para LC1 e LC2, porém com valores conservadores em relação às lajes LC3 e LC4. Já quanto ao local do surgimento da superfície de ruptura a norma apresentou boas estimativas para todas as lajes. Em relação à TFCC observa-se resultados conservadores, pois a teoria usa um perímetro de controle com raio de $0,5 \cdot d$ a partir da face do pilar e do limite do capitel. A relação entre as cargas de ruptura experimentais e as cargas estimadas pela TFCC (P_u/V_{tfcc}) apresentaram uma média de 1,32. Observa-se que a laje LC3 apresentou valor estimado próximo da laje LC4, o que indica uma melhor avaliação quanto a contribuição do capitel para relações $h_H:l_H$ de 1:3 e 1:4. Percebe-se também que em relação à superfície de ruptura, esta teoria apresentou bons resultados, porém observa-se na laje LC2 um equilíbrio entre as cargas de ruptura internas e externas, com diferença em torno de 5 kN.

Os modelos computacionais apresentaram rigidez maior em relação aos experimentais, com menores deslocamentos, para o mesmo nível de carga, como já era esperado, uma vez que a armadura do modelo numérico era axissimétrica e a experimental disposta ortogonalmente. Porém, em relação à superfície de ruptura, as deformações no concreto e as cargas de ruína percebem-se bons resultados dos modelos computacionais em relação aos experimentais, principalmente as lajes LC1 e LC2 que apresentaram diferença de 5% entre as cargas numéricas e experimentais. Mostraram também aproximação quanto à inclinação da superfície de ruptura computacional com o que foi observado experimentalmente, confirmando assim a eficiência do modelo utilizado. Para as lajes LC3 e LC4 apresentaram diferenças em média de 10% entre cargas de ruptura numéricas e experimentais, assim como, boa aproximação para superfície de ruptura.

7. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

8. Referências

- [01] GASPARINI D. A., Contributions of C. A. P. Turner to development of reinforced concrete flat slabs 1905–1999. *Journal of Structural Engineering*, 2002, 128, No. 10, 1243–1252.
- [02] FURST, A., MARTI, D., Robert Maillart's design approach for flat slabs. *Journal of Structural Engineering*, 1997, No. 123(8), 1102–1110.
- [03] KIERDORF, A., Early Mushroom Slab Construction in Switzerland, Russia and the U.S.A. - A Study in Parallel Technological Development, In: *Proceedings of the Second International Congress on Construction History*, vol II, pp 1793 – 1807. Cambridge Construction History Society, Cambridge University, 2006.
- [04] MELO, G. S. S. A., Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs after Local Failure. PhD Thesis, Polytechnic of Central London, London, England, 1990, 214p.
- [05] TALBOT, A. N., Reinforced Concrete Wall Footings and Column Footings. Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, Bulletin No. 67, Mar. 1913, 114p.
- [06] RICHART, F. E., Reinforced Concrete Wall and Column Footings. *ACI Journal*, Proceedings, V. 45, No. 10, Oct. 1948, pp. 97-127.
- [07] KINNUNEN, S., NYLANDER, H., Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement. *Transactions of the Royal Institute of Technology*, No. 158, Stockholm, Sweden, 1960, 112 pp.
- [08] WEY, E. H., 1991. Seismic response of slab-column connections with shear capitals. PhD Thesis, Rice University. Houston, Texas.
- [09] HUESTE, M. B. D., BROWNING, J., LEPAGE, A. and WALLACE, J. W., Seismic Design Criteria for Slab-Column Connections, *ACI Structural Journal*, 2007; 104(4): 448–11.
- [10] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2007.
- [11] EUROCODE 2, Design of Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings, CEN, EN 1992-1-1, Brussels, Belgium, 2004, 225 pp.
- [12] MUTTONI, A., Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement, *ACI Structural Journal*, V. 105, No. 4, July-Aug. 2008, pp. 440-450.
- [13] MUTTONI, A., and SCHWARTZ, J., Behaviour of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement, *IABSE Colloquium*, V. 62, Zurich, Switzerland, 1991, pp. 703-708.
- [14] FERREIRA, M. P. (2010). *Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de Cisalhamento e Momentos Desbalanceados*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 007 A/10 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 275p.
- [15] MENETREY, Ph., Relationship between flexural and punching failure. *ACI Structural Journal*, 1998; 95(4): 412–9.
- [16] TRAUTWEIN, L. M., 2001. *Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado com Armadura de Cisalhamento Tipo “Stud Interno” e Tipo “Estribo Inclinado”*. Dissertação de Mestrado, Publicação 001 A/2001, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 165p.
- [17] VECCHIO, F. J., COLLINS, M.P., The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected To Shear. *Proceedings V. 83*, No. 2, Mar.-Apr. 1986, pp. 219-231
- [18] FEENSTRA, P. H., *Computational Aspects of Civil Engineering*, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1993, 149 p.
- [19] LIMA NETO, A. F., 2012. *Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado com Capitéis*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.TD. – 003 A/12 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, DF. 164p.