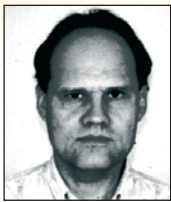


A variable limit for the instability parameter of wall-frame or core-frame bracing structures

Um limite variável para o parâmetro de instabilidade de estruturas de contraventamento formadas por associações de pórticos com paredes ou núcleos



R. J. ELLWANGER^a
rjellwanger@pop.com.br

Abstract

This work aims to investigate the viability and convenience of adopting a variable limit α_1 for the instability parameter of buildings with reinforced concrete wall-frame or core-frame structures. Initially, the evolution of tall buildings global stability theory is summarized, giving emphasis to define when a second order analysis is needed. The treatment given to this subject by the present Brazilian code for concrete structures design (NBR 6118:2007) is also showed. It follows a detailed analytical study that led to the derivation of an equation for the variable limit α_1 ; a series of examples is presented to check its accuracy. Results are analyzed, showing the validity bounds of the equation and research directions are suggested, in order to improve it.

Keywords: instability, bracing structures, second order.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo investigar a viabilidade e a conveniência de se adotar um limite variável α_1 para o parâmetro de instabilidade de edifícios com estruturas de concreto armado, constituídas por associações de pórticos com paredes ou núcleos. Inicialmente, é feito um resumo da evolução da teoria sobre a análise da estabilidade global de edifícios altos, especialmente sobre a definição da necessidade ou não de se realizar uma análise de segunda ordem; mostra-se também como esta questão é tratada pela atual norma de projeto de estruturas de concreto (NBR 6118:2007). Na seqüência, apresenta-se um detalhado estudo analítico que levou ao estabelecimento de uma fórmula para o limite variável α_1 , seguido de uma série de exemplos para testar a validade da mesma. Os resultados são analisados, mostrando-se os limites de validade da fórmula e indicando-se linhas de investigação no sentido de aperfeiçoá-la.

Palavras-chave: instabilidade, estruturas de contraventamento, segunda ordem.

^a Professor Associado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e-mail: rjellwanger@pop.com.br, endereço postal: Rua Marcelo Gama 1189/401, CEP 90540-041, Porto Alegre-RS, Brasil.

1. Introdução

1.1 Os efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios

Dependendo de seu grau de deformabilidade, a estrutura de contraventamento de um edifício, quando submetida simultaneamente a ações verticais e de vento, pode desenvolver efeitos adicionais em relação àqueles que são usualmente determinados em uma análise linear ou de primeira ordem (na qual o equilíbrio é estudado na configuração geométrica inicial da estrutura). Tratam-se dos efeitos de segunda ordem, em cuja determinação devem ser considerados o comportamento não linear dos materiais (não linearidade física) e a configuração deformada na análise do equilíbrio (não linearidade geométrica).

O trabalho de Beck e König [1], apresentado em 1967, representou um marco histórico no desenvolvimento da teoria e prática da análise da estabilidade global de edifícios altos. Foi estabelecido um critério, de grande simplicidade de aplicação, o qual determina que os efeitos de segunda ordem podem ser desprezados sempre que não representem acréscimo superior a 10% em relação aos efeitos de primeira ordem. Foi adotado um modelo simplificado para o sistema de contraventamento, mostrado na figura 1. Inicialmente, é feito o agrupamento de todas as subestruturas de contraventamento num único pilar e de todos os elementos contraventados (elementos portantes que não participam do contraventamento) num conjunto de barras bi-rotuladas, conforme mostrado na figura 1-a. É admitida uma distribuição uniforme de taxa w para as ações de vento. P e V representam as ações verticais totais, por andar, transmitidas, respectivamente, às subestruturas de con-

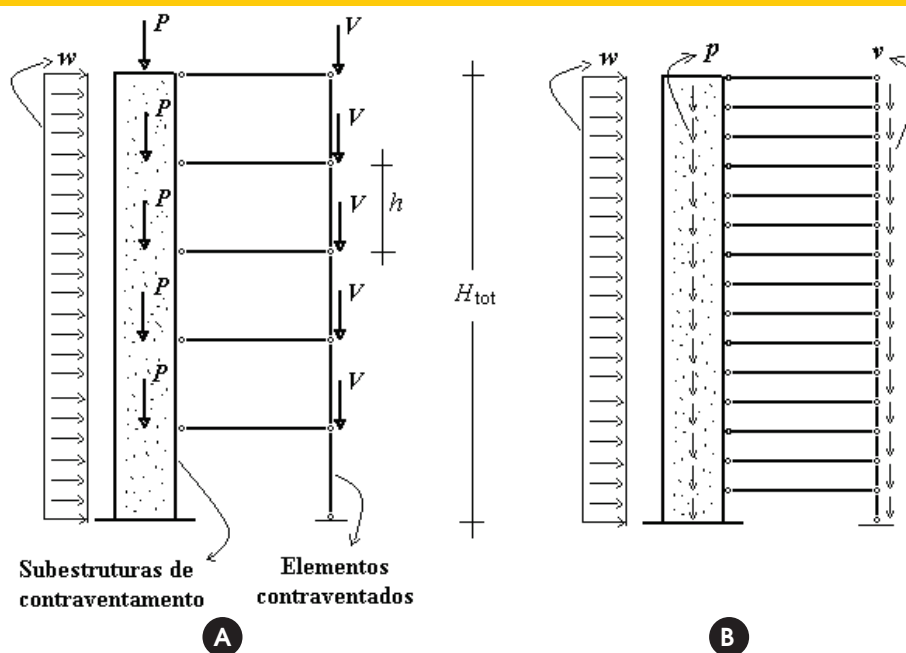
traventamento e aos elementos contraventados. As ações w , P e V são consideradas com seus valores característicos. Em seguida, para possibilitar a determinação dos efeitos de segunda ordem por meio da técnica do meio contínuo, adota-se um sistema aproximado equivalente, mostrado na figura 1-b, no qual se admite uma distribuição contínua e uniforme de andares e ações verticais ($p = P/h$ e $v = V/h$).

Com relação à influência das ações V , atuantes nos elementos contraventados, Beck e König [1] mostraram que, quando o sistema se deforma lateralmente, forças horizontais são transmitidas através das barras dos pavimentos ao sistema de contraventamento, fazendo aumentar o momento fletor na base do mesmo. Pode-se mostrar que este aumento é igual à soma dos produtos das forças V pelos deslocamentos horizontais dos respectivos pavimentos. Portanto, no que se refere à determinação deste momento fletor, incluindo os efeitos de segunda ordem, tudo se passa como se as cargas verticais atuantes no sistema de contraventamento fossem dadas pela soma de suas próprias ações P com as ações V .

Em 1978, o critério proposto por Beck e König [1] passou a fazer parte das recomendações do *Comité Euro-International du Béton* (CEB [2]). A aplicação do mesmo consiste em comparar os momentos fletores globais na base do sistema de contraventamento M^I (considerando apenas os efeitos de primeira ordem) e M^{II} (incluindo os efeitos de segunda ordem):

$$M^{II} \leq 1,1M^I \quad (1)$$

Figura 1 - Modelo simplificado do sistema de contraventamento



ou

$$\frac{1,75wH_{tot}^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1,75(p+v)H_{tot}^3}{8EJ}} \leq 1,1 \times 1,75 \frac{wH_{tot}^2}{2} \quad (2)$$

Observe-se que M^I e M^{II} são devidos a ações de cálculo, uma vez que as taxas w , p e v estão majoradas pelo coeficiente 1,75. Por outro lado, a não linearidade física é considerada, tomando-se para a rigidez dos elementos estruturais o valor $EJ = 0,7 E_{cm} J$, onde E_{cm} J representa a soma das rigidezes das subestruturas de contraventamento no estádio I (sem fissuração). Assim, efetuando esta substituição e realizando os devidos algebrismos, chega-se à condição:

$$H_{tot} \sqrt{(p+v)H_{tot} / (E_{cm} J)} \leq 0,54 \quad (3)$$

Segundo Vasconcelos [3], os resultados obtidos por Beck e König [1] só poderiam ser aplicados a estruturas de edifícios cuja rigidez lateral se concentrasse em poucos pilares, ligados rigidamente entre si, de maneira a poderem ser considerados equivalentes a um pilar único, como o da figura 1. A correspondência deste modelo com outros tipos de contraventamento (paredes de seção variável, pórticos etc.) passou a ser feita através da igualdade dos deslocamentos horizontais provocados pelas ações horizontais. O pilar equivalente seria aquele com um fator de rigidez EJ tal que resultassem os mesmos deslocamentos horizontais ocorridos na estrutura em consideração, para o mesmo carregamento horizontal. Para fins de simplificação, passou-se a determinar esta rigidez equivalente com base na atuação de uma carga horizontal unitária no topo do edifício. No Brasil, o procedimento passou a ser utilizado com a alteração do coeficiente majorador de 1,75 para 1,40 – vide, por exemplo, Sussekind [4] – passando a ser conhecido por teste de robustez mínima. Em consequência, a inequação (3) alterou-se para:

$$H_{tot} \sqrt{(p+v)H_{tot} / (E_{S-28} J_1)} \leq 0,60 \quad (4)$$

onde E_{S-28} é o módulo de elasticidade secante do concreto aos 28 dias e J_1 a soma das inércias das subestruturas de contraventamento no estádio I.

Em 1985, Franco [5] propõe que a rigidez do pilar equivalente seja determinada com base na atuação de uma carga horizontal uniformemente distribuída, no lugar da carga unitária concentrada no topo. Além disso, preconiza que a forma da linha elástica da estrutura de contraventamento pode afetar a aplicação do critério de Beck e König [1]. Assim, o coeficiente numérico à direita da inequação (4) seria definido em função do tipo de contraventamento:

- paredes ou núcleos: coeficiente 0,7;
- associações de paredes ou núcleos com pórticos: coeficiente 0,6;
- exclusivamente pórticos: coeficiente 0,5.

Em 1995, Franco [6], tratando da consideração da não-linearidade física através da redução das rigidezes dos elementos estruturais, propõe valores para esta redução, diferenciados para lajes,

barras de pilares e de vigas com armadura simétrica e assimétrica. Apesar de não fazer parte do escopo do presente trabalho, merece menção o método baseado no coeficiente de amplificação de momentos γ_z , apresentado em 1991 por Franco e Vasconcelos [7]. Ele também aplica o critério do acréscimo de 10% em relação aos efeitos de 1ª ordem para definir a necessidade ou não de uma análise de 2ª ordem; aqui, porém, isto é feito para cada combinação entre ações horizontais e verticais. Além disso, sob certas condições, o próprio método pode se constituir em uma análise de 2ª ordem. Estas características fizeram com que este método fosse rapidamente difundido e passasse a ser amplamente utilizado no projeto de estruturas de edifícios.

1.2 Prescrições da ABNT NBR 6118

A NBR 6118 (ABNT [8]), atual norma para projeto de estruturas de concreto, incorporou a idéia fundamental contida em [1] e [2], ao estabelecer, em sua seção 15, que os efeitos globais de segunda ordem são desprezíveis quando inferiores a 10% dos respectivos efeitos de primeira ordem (estrutura com nós fixos). Para “verificar a possibilidade da dispensa da consideração dos esforços globais de segunda ordem, ou seja, para indicar se a estrutura pode ser classificada como de nós fixos, sem a necessidade de cálculo rigoroso”, a ABNT [8] apresenta dois processos aproximados, baseados respectivamente no parâmetro de instabilidade e no coeficiente γ_z . O primeiro consiste justamente na aplicação do critério de Beck e König [1] e estabelece que: “Uma estrutura reticulada simétrica pode ser considerada como sendo de nós fixos se seu parâmetro de instabilidade α for menor que o valor α_1 , conforme as expressões:”

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{N_k / (E_{CS} I_C)} \quad (5)$$

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1n \quad \ni n \leq 3 \quad \wedge \quad \alpha_1 = 0,6 \quad \ni n \geq 4 \quad (6)$$

“ n é o número de níveis de barras horizontais (andares) acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo. H_{tot} é a altura total da estrutura, medida a partir do topo da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo. N_k é o somatório de todas as cargas verticais atuantes na estrutura (a partir do nível considerado para o cálculo de H_{tot}), com seu valor característico. $E_{CS} I_C$ representa o somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada. No caso de estruturas de pórticos, de treliças ou mistas, ou com pilares de rigidez variável ao longo da altura, pode ser considerado o valor da expressão $E_{CS} I_C$ de um pilar equivalente de seção constante.” A determinação desta equivalência será vista na seção 2.1. I_C é o momento de inércia considerando as seções brutas dos pilares. E_{CS} é o módulo de elasticidade secante, expresso por:

$$E_{CS} = 0,85 E_{Ci} = 0,85 \times 5600 f_{ck}^{1/2} \quad (7)$$

E_{CS} , E_{CI} (módulo de elasticidade tangente) e f_{ck} (resistência característica à compressão) são dados em MPa. A norma NBR 6118 também incorporou as proposições de Franco [5], ao estabelecer diferentes valores de α_1 em função do tipo de estrutura de contraventamento: “O valor limite $\alpha_1 = 0,6$ prescrito para $n \geq 4$ é, em geral, aplicável às estruturas usuais de edifícios. Pode ser adotado para associações de pilares-parede e para pórticos associados a pilares-parede. Pode ser aumentado para $\alpha_1 = 0,7$ no caso de contraventamento constituído exclusivamente por pilares-parede e deve ser reduzido para $\alpha_1 = 0,5$ quando só houver pórticos.”

Em uma análise de segunda ordem, devem ser considerados simultaneamente os efeitos das não-linearidades física e geométrica. A ABNT [8], em seu item 15.7.3, permite que, na obtenção dos esforços globais de segunda ordem em estruturas reticuladas com quatro ou mais andares, a não-linearidade física seja considerada de forma aproximada. Isso se dá mediante uma redução das rigidezes dos elementos estruturais em função de $E_{CI}I_C$, ou de $E_{CS}I_C$ se for aplicada a equação (7). Representando as áreas das armaduras longitudinais de tração e de compressão, respectivamente, por A_s e A_s' , resultam as seguintes expressões para as rigidezes reduzidas:

■ lajes:

$$(EI)_{sec} = 0,3 E_{CI} I_C = 0,353 E_{CS} I_C \quad (8)$$

■ vigas:

$$(EI)_{sec} = 0,4 E_{CI} I_C = 0,471 E_{CS} I_C \quad \ni A_s \neq A_s' \quad (9)$$

$$(EI)_{sec} = 0,5 E_{CI} I_C = 0,588 E_{CS} I_C \quad \ni A_s = A_s' \quad (10)$$

■ pilares:

$$(EI)_{sec} = 0,8 E_{CI} I_C = 0,941 E_{CS} I_C \quad (11)$$

Além disso, quando a subestrutura de contraventamento for constituída exclusivamente por vigas e pilares (pórtico) e o coeficiente de avaliação da importância dos esforços de segunda ordem global (γ_2) for menor que 1,3 (o que corresponde a uma não-linearidade “branda”), permite-se considerar a rigidez do conjunto de barras do pórtico como sendo:

$$(EI)_{sec} = 0,7 E_{CI} I_C = 0,824 E_{CS} I_C \quad (12)$$

1.3 Justificativa e objetivos da pesquisa

Ao introduzir em seu texto os processos para verificação da dispensa de consideração dos efeitos globais de 2ª ordem, a ABNT [8] representou um avanço em relação à norma anterior. No que diz respeito ao parâmetro de instabilidade para edifícios com quatro ou mais andares, deu um tratamento diferenciado aos diferentes tipos de sistemas de contraventamento, ao fixar diferentes valores para o limite α_1 . Todavia, a prescrição de um limite fixo ($\alpha_1 = 0,6$) para as associações de paredes e/ou núcleos com pórticos é questionável. À medida que pode variar a relação entre as rigidezes de pórticos e paredes/núcleos, α_1 também pode variar entre 0,5 e 0,7. Isto pode acarretar dois tipos de erros:

a favor da segurança: em associações com predominância de paredes, a norma limita α_1 em 0,6, quando poderia ser adotado um valor maior, possivelmente próximo de 0,7;

contra a segurança: no caso de associações com predominância de pórticos, quando deveria ser adotado um valor menor do que 0,6, possivelmente próximo de 0,5.

Esses erros, se expressos em função de α_1 , aparentemente são pequenos. Todavia, convém lembrar que a determinação do parâmetro de instabilidade envolve a extração de uma raiz quadrada. Consequentemente, ao se verificar a dispensa da necessidade de uma análise de 2ª ordem, o erro na determinação da rigidez necessária pode tornar-se relevante.

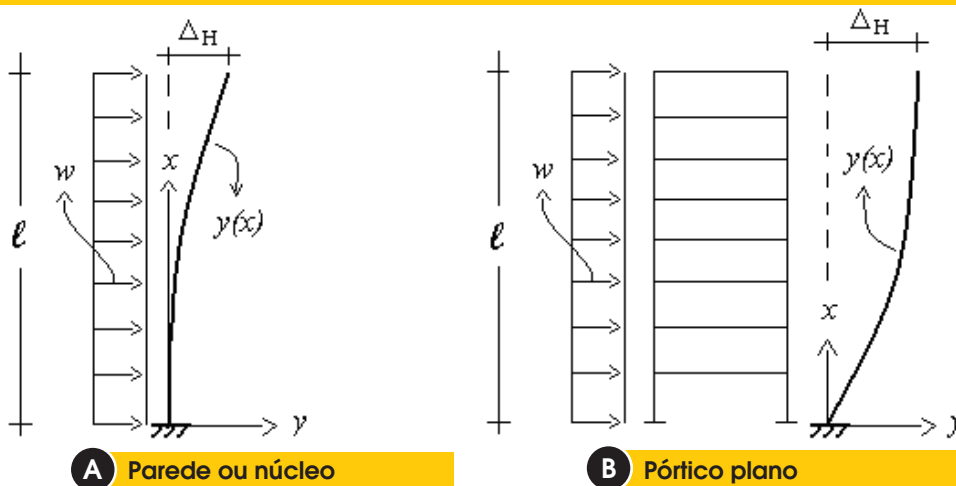
Este trabalho tem por objetivo pesquisar uma forma de definição do limite α_1 do parâmetro de instabilidade para associações de pórticos com paredes e/ou núcleos, variável com a relação entre as rigidezes dos mesmos. Inicialmente, é apresentada a formulação do comportamento linear dessas associações. Segue-se um estudo analítico sobre o comportamento não-linear geométrico de paredes/núcleos e pórticos isolados e, após, da associação entre os mesmos. O estudo tem por base o modelo simplificado apresentado na seção 1.1, sendo aplicado o critério expresso pela inequação (1); as equações diferenciais são resolvidas pelo método de Galerkin. A fórmula deduzida para o limite variável α_1 é então testada em uma série de exemplos de edifícios contraventados por associações de paredes com pórticos. São realizados 88 testes, variando-se os números de andares, de vãos dos pórticos e a proporção entre as rigidezes de pórticos e paredes.

2. Análise linear

2.1 Equivalência entre as subestruturas de contraventamento

As subestruturas do tipo paredes ou núcleos caracterizam-se por serem bastante rígidas ao esforço cortante, predominando as deformações por flexão. Elas podem ser modeladas por simples barras, engastadas na base do edifício, comportando-se como pilares. A figura 2-a mostra uma parede ou núcleo modelado por uma barra engastada-livre, de comprimento ℓ e submetida a uma carga horizontal uniformemente distribuída de taxa w . Representando por E , J e $M(x)$, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal do material, o momento de inércia da seção transversal

Figura 2 - Barras equivalentes às subestruturas de contraventamento



(constante) e a função de momentos fletores, pode-se expressar a equação diferencial da linha elástica:

$$EJ d^2 y / dx^2 = EJ d\phi / dx = M(x) = w(\ell - x)^2 / 2 \quad (13)$$

Consideram-se positivos os momentos causando tração no lado esquerdo da barra, ficando a concavidade da deformada voltada para a direita; $\phi(x)$ é sua declividade. Introduzindo-se as condições de contorno apropriadas, obtém-se $y(x)$ e o deslocamento horizontal no topo Δ_H :

$$y(x) = \frac{w\ell^4}{24EJ} \left[\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^4 + \frac{4x}{\ell} - 1 \right] \quad (14)$$

$$\Delta_H = y(\ell) = w\ell^4 / 8EJ \quad (15)$$

Nas subestruturas do tipo pórtico plano, predominam as deformações por flexão das barras individuais de viga e pilar. Quando o pórtico é submetido às ações horizontais, o momento fletor global é predominantemente absorvido na forma de esforços normais nos pilares, para os quais a estrutura proporciona uma grande rigidez. Por outro lado, é o esforço cortante global que causa a maior parte das deformações horizontais da estrutura. Portanto, os pórticos podem ser modelados como barras verticais extremamente rígidas ao momento fletor global, nas quais predominam deformações por corte.

A figura 2-b mostra um pórtico plano submetido a uma carga horizontal uniformemente distribuída de taxa w . Ele é modelado

por uma barra vertical com predominância de deformações por corte. Conforme é mostrado na figura, a deformada desta barra caracteriza-se por uma declividade $\phi(x)$ máxima junto à base e tendendo a zero no topo, justamente o contrário do que ocorre com a deformada da barra simulando a parede ou núcleo. Esta declividade está relacionada com as diferenças entre deslocamentos horizontais de andares adjacentes aos quais, por sua vez, são proporcionais ao esforço cortante global $Q(x)$. Conforme Stamato [9], a deformada para este caso é descrita pela equação:

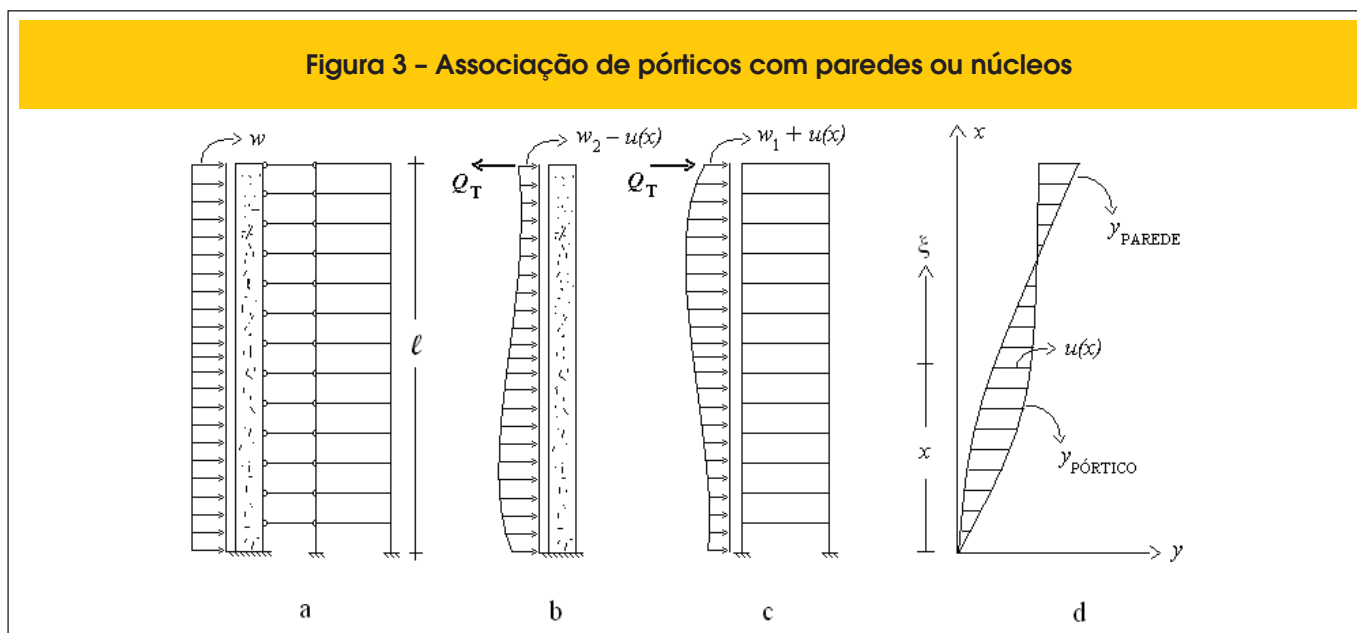
$$S dy / dx = S\phi(x) = Q(x) = w(\ell - x) \quad (16)$$

A constante de proporcionalidade S representa a rigidez do sistema (pórtico plano) ao esforço cortante global; ela é análoga ao fator $G A / c$ de uma barra com deformação por corte, onde G , A e c são, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal, a área e o coeficiente de forma da seção transversal. Resolvendo-se a equação (16), obtém-se $y(x)$ e o deslocamento horizontal no topo:

$$\Delta_H = y(\ell) = w\ell^2 / 2S \quad (17)$$

As relações estabelecidas nesta seção têm por objetivo obter a inércia de uma barra equivalente a um pórtico plano. O item 15.5.2 da ABNT [8], ao tratar do parâmetro de instabilidade, estabelece uma metodologia de determinação do fator $E_{cs} I_c$ de um pilar de seção constante, equivalente a um dado pórtico plano. Segundo esta metodologia, a referida rigidez deve ser obtida calculando-se, inicialmente, o deslocamento horizontal no topo da estrutura de contraventamento (pórtico) sob a ação do carregamento horizontal, que vem a ser o Δ_H dado por (17). Em seguida, obtém-se a rigidez de um pilar equivalente de seção constante tal que, sob a

Figura 3 - Associação de pórticos com paredes ou núcleos



ação do mesmo carregamento, sofra o mesmo deslocamento horizontal no topo o que, neste caso, vem a ser o Δ_H da equação (15). Isto implica na igualdade entre as duas expressões, o que leva a:

$$S = 4EJ/\ell^2 \quad (18)$$

2.2 Associação de pórticos com paredes e/ou núcleos

Apresenta-se nesta seção a formulação da resposta linear das associações de pórticos com paredes/núcleos, para que a mesma seja posteriormente utilizada pelo método de Galerkin na obtenção de uma solução aproximada para o comportamento não-linear das mesmas. A figura 3-a mostra o modelo simplificado de um sistema de contraventamento formado por subestruturas dos tipos pórtico e parede/núcleo. O modelo consiste numa parede (representando todas as paredes e núcleos do sistema) e num pórtico (representando todos os pórticos do sistema) ligados entre si por bielas (representando as lajes dos pavimentos). É admitida uma distribuição uniforme de taxa w para as ações do vento. EJ_1 representa a rigidez do conjunto de pórticos, conforme a equação (18). EJ_2 representa a rigidez do conjunto de paredes/núcleos.

As figuras 3-b e 3-c mostram as ações às quais estarão submetidos a parede e o pórtico, respectivamente. Estas ações consistem em forças concentradas no topo (Q_T para o pórtico e $-Q_T$ para a parede) e em forças distribuídas que podem ser decompostas em parcelas constantes e variáveis. As parcelas constantes (w_1 para o pórtico e w_2 para a parede) são tais que $w_1 + w_2 = w$. As parcelas variáveis com a altura (taxa $u(x)$ para o pórtico e $-u(x)$ para a parede), juntamente com as ações Q_T , representam forças internas decorrentes da interação entre a parede e o pórtico, os quais, por estarem ligados pelas bielas, ficam impedidos de de-

envolver suas deformadas naturais, mostradas na figura 3-d. O pórtico estará submetido a uma distribuição de esforços cortantes globais dada por:

$$Q(x) = w_1(\ell - x) + Q_T + \int_x^\ell u(\xi)d\xi \quad (19)$$

Conforme foi visto na seção 2.1, o comportamento do pórtico é descrito pela equação (16). Escrevendo esta equação, introduzindo (18) e (19) e isolando as parcelas referentes às forças internas, obtêm-se:

$$Q_T + \int_x^\ell u(\xi)d\xi = \frac{4EJ_1}{\ell^2}\phi(x) - w_1(\ell - x) \quad (20)$$

Por sua vez, a parede estará submetida a uma distribuição de momentos fletores dada por:

$$M(x) = w_2(\ell - x)^2/2 - Q_T(\ell - x) - \int_x^\ell u(\xi)(\xi - x)d\xi \quad (21)$$

Conforme também foi visto na seção 2.1, o comportamento da parede é descrito pela equação (13). Escrevendo esta equação, entrando com $M(x)$ dado por (21) e derivando ambos os membros, obtêm-se sucessivamente:

$$EJ_2 \frac{d\phi}{dx} = w_2(\ell - x)^2/2 - Q_T(\ell - x) - \int_x^\ell u(\xi)(\xi - x)d\xi \quad (22)$$

$$EJ_2 \frac{d^2\phi}{dx^2} = -w_2(\ell - x) + Q_T + \int_x^\ell u(\xi)d\xi \quad (23)$$

Substituindo (20) em (23) e rearranjando:

$$EJ_2 \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{4EJ_1}{\ell^2}\phi(x) + w_1(\ell - x) + w_2(\ell - x) = 0 \quad (24)$$

Considerando que $w_1 + w_2 = w$ (ação total de vento atuante no sistema), definindo uma nova variável $K = \sqrt{J_1/J_2}$, pode-se expressar a solução da equação (24) na forma:

$$\phi(x) = C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell} + \frac{w\ell^2}{4EJ_1}(\ell - x) \quad (25)$$

onde:

$$C_1 = \frac{w\ell^3}{8EJ_1K} \frac{e^{2K} - 2K}{e^{4K} + 1} \quad (26)$$

$$C_2 = \frac{-w\ell^3}{8EJ_1K} \frac{2Ke^{4K} + e^{2K}}{e^{4K} + 1} \quad (27)$$

3. O método de Galerkin

Em muitos problemas de Engenharia, como os apresentados nas próximas seções, surge a necessidade de se resolver uma equação do tipo $L(y) = 0$, onde L é um operador diferencial, cuja solução satisfaz a condições de contorno homogêneas. O método de Galerkin consiste em obter uma solução aproximada, na forma:

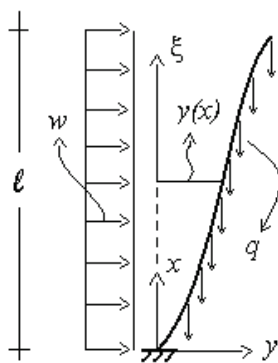
$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \quad (28)$$

onde $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) são funções, escolhidas previamente e satisfazendo às mesmas condições de contorno; os a_i são coeficientes a serem determinados. As n funções $\varphi_i(x)$ devem ser linearmente independentes e pertencer a um sistema, representado por $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e dotado da propriedade de plenitude no domínio da solução. Para que $\bar{y}(x)$ seja a solução exata da equação dada, é necessário que $L(\bar{y})$ seja identicamente nulo. Esta condição, se $L(\bar{y})$ for contínuo, é equivalente à condição de ortogonalidade entre a expressão de $L(\bar{y})$ e todas as funções $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Todavia, tendo disponíveis apenas n constantes a_i , podem-se satisfazer somente a n condições de ortogonalidade. Aplicando estas condições, obtém-se o seguinte sistema de equações:

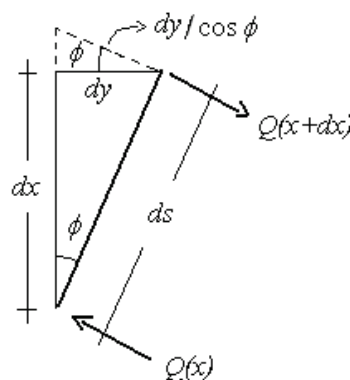
$$\int_D L(\bar{y}(x)) \cdot \varphi_i(x) dx = \int_D L\left(\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x)\right) \cdot \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (29)$$

A solução deste sistema (linear, no caso de L ser um operador linear) fornece os valores dos coeficientes a_i , a partir dos quais se chega à solução aproximada $\bar{y}(x)$. A demonstração da convergência, bem como considerações mais detalhadas sobre o método de Galerkin podem ser vistas em Kantorovich e Krylov [10].

Figura 4 – Influência das deformações na resposta da estrutura



A Barra equivalente ao contraventamento



B Deformação por corte a nível infinitesimal

4. Dispensa da consideração dos efeitos de segunda ordem

As seções 4.1 e 4.2 apresentam a formulação do comportamento não-linear geométrico, respectivamente, de conjuntos de paredes/núcleos e de pórticos. Para ambos os casos, são deduzidos os limites α_1 do parâmetro de instabilidade, confrontando-os com os valores prescritos pela ABNT [8]. A seção 4.3 realiza o mesmo para as associações destes tipos de subestruturas, obtendo-se uma expressão para o limite variável α_1 , objetivo principal deste trabalho.

A figura 4-a mostra a deformada de uma barra equivalente a um sistema de contraventamento, submetida a cargas uniformemente distribuídas de taxas w e q , respectivamente, nas direções horizontal e vertical; q é dado pela soma das taxas p e v da figura 1-b. Levando em consideração a deformação da barra (não-linearidade geométrica) e representando por Y a função primitiva dos deslocamentos $y(x)$, o momento fletor será dado por:

$$M(x) = w(\ell - x)^2 / 2 + \int_x^\ell q[y(\xi) - y(x)]d\xi \quad (30)$$

ou

$$M(x) = w(\ell - x)^2 / 2 + q[Y(\ell) - Y(x) - (\ell - x)y(x)] \quad (31)$$

Considerando que $y(0) = 0$, o momento fletor na base será expresso por:

$$M(0) = w\ell^2 / 2 + q[Y(\ell) - Y(0)] \quad (32)$$

4.1 Subestruturas do tipo paredes ou núcleos

No caso de contraventamento formado exclusivamente por paredes e/ou núcleos, a equação diferencial da linha elástica será obtida substituindo-se $M(x)$ dado por (31) na equação (13):

$$EJ d^2 y / dx^2 = w(\ell - x)^2 / 2 + q[Y(\ell) - Y(x) - (\ell - x)y(x)] \quad (33)$$

Derivando-a em relação a x e considerando que as rotações são dadas por $\phi(x) = dy/dx$, a equação (33) transforma-se em:

$$EJ d^2 \phi / dx^2 + q(\ell - x)\phi(x) + w(\ell - x) = 0 \quad (34)$$

Pode-se obter uma solução aproximada para a equação (34) por meio do

método de Galerkin. Assumindo que esta solução seja proporcional à $\phi(x)$ devida exclusivamente aos efeitos de primeira ordem, pode-se escrever:

$$\phi(x) = a_1 \varphi_1(x) = a_1 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^3 \right] \quad (35)$$

onde $\varphi_1(x)$ foi obtido derivando-se a equação (14) em relação a x e suprimindo-se a constante que ficaria em evidência. Aplicando a equação (29) com $n = 1$, obtém-se sucessivamente:

$$\int_0^\ell L(\phi) \cdot \varphi_1(x) dx = \int_0^\ell L(a_1 \varphi_1(x)) \cdot \varphi_1(x) dx = 0 \quad (36)$$

$$\int_0^\ell \left\{ \frac{6EJa_1}{\ell^2} \left(\frac{x}{\ell} - 1 \right) + q(\ell - x)a_1 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^3 \right] + w(\ell - x) \right\} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^3 \right] dx = 0 \quad (37)$$

Efetuada-se a integração e isolando a_1 , resulta:

$$a_1 = \frac{4w\ell^3}{24EJ - 3q\ell^3} \quad (38)$$

Substituindo (38) em (35), obtém-se a solução aproximada:

$$\phi(x) = \frac{4w\ell^3}{24EJ - 3q\ell^3} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^3 \right] \quad (39)$$

Integrando (39) em relação a x e aplicando a condição de deslocamento nulo na base, obtém-se a função dos deslocamentos. Integrando novamente, obtém-se:

$$Y(x) = \frac{w\ell^4}{24EJ - 3q\ell^3} \left[-\frac{\ell}{5} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^5 + \frac{2x^2}{\ell} - x \right] + C \quad (40)$$

onde C é a constante de integração. O momento fletor na base pode ser obtido, combinando-se as equações (32) e (40):

$$M(0) = \frac{w\ell^2}{2} + \frac{2qw\ell^5}{5(8EJ - q\ell^3)} \quad (41)$$

A equação (41) pode ser transformada sucessivamente em:

$$M(0) = \frac{w\ell^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{4q\ell^3}{5(8EJ - q\ell^3)} \right) = \frac{w\ell^2}{2} \cdot \frac{8EJ - q\ell^3 / 5}{8EJ - q\ell^3} \quad (42)$$

A condição de que, no estado limite último (cargas majoradas em 1,4), os efeitos de 2ª ordem não podem superar em mais de 10% os efeitos de 1ª ordem (inequação (1)), é aplicada ao momento fletor na base, obtendo-se:

$$\frac{1,4w\ell^2}{2} \times \frac{8EJ - 1,4q\ell^3/5}{8EJ - 1,4q\ell^3} \leq 1,1 \times \frac{1,4w\ell^2}{2} \quad (43)$$

Os termos $w\ell^2$, em evidência em ambos os lados da inequação, desaparecem. Efetuando-se os devidos algebrismos, obtém-se:

$$q\ell^3 / EJ \leq 0,6349 \quad (44)$$

Como uma parede ou núcleo tem comportamento equivalente ao de um pilar, a consideração da não-linearidade física pode ser feita adotando-se para EJ a expressão $0,941 E_{CS}I_C$, de acordo com a equação (11). Por outro lado, lembrando que $q\ell$ é a carga vertical total N_k e que ℓ é a altura H_{tot} , a inequação (44) transforma-se em:

$$H_{tot}^2 \times N_k / E_{CS}I_C \leq 0,5974 \quad (45)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros:

$$H_{tot} \times \sqrt{N_k / E_{CS}I_C} \leq 0,773 \quad (46)$$

A inequação (46) indica, assim, um valor $\alpha_1 = 0,773$. Por sua vez, a ABNT [8] permite que seja aumentado para até 0,7 o coeficiente α_1 , quando o contraventamento for constituído exclusivamente por paredes ou núcleos.

4.2 Subestruturas do tipo pórticos planos

No caso de contraventamento formado exclusivamente por pórticos, a barra equivalente da figura 4-a terá predominância de deformações por corte. Também neste caso, a expressão das solicitações deve levar em consideração a configuração deformada. Pode-se provar que os infinitésimos ds e dx da figura 4-b estão relacionados por:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2(1 + dy^2/dx^2)} = dx\sqrt{1 + \phi^2} \quad (47)$$

O esforço cortante pode ser obtido a partir da derivação da equação (31) em relação ao eixo deformado da barra. Introduzindo ds dado por (47), obtém-se:

$$Q(x) = -\frac{dM}{ds} = \frac{-dM/dx}{\sqrt{1 + \phi^2}(x)} = \frac{w(\ell - x) + q(\ell - x)\phi(x)}{\sqrt{1 + \phi^2}(x)} \quad (48)$$

Trata-se de um esforço cortante inclinado, conforme mostra a figura 4-b. A deformação por corte provocado por ele tem a mesma inclinação, sendo dada, a nível infinitesimal, por:

$$\frac{dy}{\cos\phi} = \frac{dy}{dx/ds} = \frac{dy}{1/\sqrt{1 + \phi^2}} = dy\sqrt{1 + \phi^2} \quad (49)$$

Ao estabelecer a equação diferencial da linha elástica para este caso, devem-se realizar duas adaptações em relação à equação (16): entrar com $dy/\cos\phi$, dado por (49), no lugar de dy e com $Q(x)$ dado por (48). Desta forma, obtém-se:

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{1 + \phi^2}(x) = \frac{Q(x)}{S} = \frac{w(\ell - x) + q(\ell - x)\phi(x)}{S\sqrt{1 + \phi^2}(x)} \quad (50)$$

Assim:

$$\phi(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{w(\ell - x) + q(\ell - x)\phi(x)}{S[1 + \phi^2(x)]} \quad (51)$$

Nos casos de que trata o presente trabalho, isto é, de não-linearidade geométrica “branda”, as rotações $\phi(x)$ apresentam valores bem menores do que a unidade; portanto, $\phi^2(x)$ pode ser desprezado na presença de 1 e a equação (51) pode ser posta na forma:

$$S\phi(x) = w(\ell - x) + q(\ell - x)\phi(x) \quad (52)$$

Isolando $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \frac{w(\ell - x)}{S - q(\ell - x)} \quad (53)$$

Integrando a equação (53) em relação a x e aplicando a condição de deslocamento nulo na base, obtém-se a função dos deslocamentos. Integrando novamente, obtém-se:

$$Y(x) = \frac{S_w}{q^3} [S - q(\ell - x)] \cdot \{ \ln[S - q(\ell - x)] - 1 \} - \frac{S_w}{q^2} x \ln(S - q\ell) - \frac{w}{2q} (\ell^2 + x^2) + C \quad (54)$$

onde C é a constante de integração. Aplicando a equação (54) para $x = 0$ e $x = \ell$, pode-se expressar a diferença:

$$Y(\ell) - Y(0) = \frac{S^2 w}{q^3} \ln \frac{S}{S - q\ell} - \frac{w\ell}{q} \left(\frac{\ell}{2} + \frac{S}{q} \right) \quad (55)$$

Assim, o momento fletor na base pode ser expresso, substituindo-se a equação (55) na (32):

$$M(0) = \frac{w\ell^2}{2} + \frac{S^2 w}{q^2} \ln \frac{S}{S - q\ell} - w\ell \left(\frac{\ell}{2} + \frac{S}{q} \right) = \frac{S^2 w}{q^2} \ln \frac{1}{1 - q\ell/S} - \frac{Sw\ell}{q} \quad (56)$$

Aplicando-se a este momento fletor a condição expressa pela inequação (1), resulta:

$$\frac{1,4 S^2 w}{1,4^2 q^2} \ln \frac{1}{1 - 1,4 q\ell/S} - \frac{1,4 Sw\ell}{1,4 q} \leq 1,1 \times 1,4 \frac{w\ell^2}{2} \quad (57)$$

Efetuando-se os devidos algebrismos, a inequação (57) transforma-se em:

$$\frac{1}{1,4(q\ell/S)^2} \ln \frac{1}{1 - 1,4 q\ell/S} - \frac{1}{q\ell/S} \leq 0,77 \quad (58)$$

Tomando-se o fator $q\ell/S$ como incógnita, pode-se resolver a inequação (58) por meio de tentativas, obtendo-se:

$$q\ell/S \leq 0,0962 \quad (59)$$

Substituindo S pela expressão (18), resulta:

$$\ell^2 \cdot q\ell/EJ \leq 0,3848 \quad (60)$$

De acordo com a ABNT [8], a não-linearidade física poderia ser considerada, substituindo-se EJ por $(EI)_{\text{sec}}$ dado por (12). Todavia, a relação $(EI)_{\text{sec}}/E_{CS}I_C$ do conjunto de barras do pórtico, como uma função das relações $(EI)_{\text{sec}}/E_{CS}I_C$ das barras individuais, não pode ser considerada fixa; ela pode variar em função de vários fatores, como número e altura dos andares, número e extensão dos vãos, relação entre as dimensões transversais de vigas e pilares etc. Pinto e Ramalho [11] mostram que a influência da não linearidade física na rigidez lateral dos pórticos depende principalmente das taxas de armadura e da magnitude do carregamento aplicado, tendo obtido relações $(EI)_{\text{sec}}/E_{CS}I_C$ para o estado limite último variando entre 0,51 e 0,75. Por outro lado, Schueler [12] afirma que a contribuição da flexibilidade

das vigas para a deformação lateral de um pórtico pode chegar a 65%, restando 35% devidos à flexibilidade dos pilares. Assim, considerando a situação de projeto de um pórtico esbelto (na qual a predominância dos efeitos do vento leva a uma tendência de igualdade entre as armaduras A_s e A_s' das vigas), podem-se utilizar as equações (10) e (11) para relacionar as parcelas dos deslocamentos horizontais do pórtico com a consideração da não-linearidade física (y_{NL}), relativas às vigas ($y_{\text{NL}}^{\text{VIGAS}}$) e aos pilares ($y_{\text{NL}}^{\text{PILARES}}$), com as correspondentes parcelas (y_L^{VIGAS}) e (y_L^{PILARES}) dos deslocamentos horizontais resultantes da análise linear (y_L). Simultaneamente, podem-se aplicar as recém mencionadas proporções de 35% e 65% de participação destas parcelas em relação aos deslocamentos totais, resultando as seguintes expressões:

$$y_{\text{NL}}^{\text{PILARES}} = \frac{y_L^{\text{PILARES}}}{0,941} = \frac{0,35 y_L}{0,941} \quad (61)$$

$$y_{\text{NL}}^{\text{VIGAS}} = \frac{y_L^{\text{VIGAS}}}{0,588} = \frac{0,65 y_L}{0,588} \quad (62)$$

Em seguida, efetuando a soma das parcelas expressas por (61) e (62), obtém-se a seguinte relação entre os deslocamentos horizontais totais y_{NL} e y_L :

$$y_{\text{NL}} = \frac{0,35 y_L}{0,941} + \frac{0,65 y_L}{0,588} = \frac{y_L}{0,677} \quad (63)$$

Como a rigidez lateral do pórtico é inversamente proporcional a esses deslocamentos, pode-se escrever:

$$(EI)_{\text{sec}} = 0,677 E_{CS} I_C \quad (64)$$

Considerando esta expressão de $(EI)_{\text{sec}}$ e seguindo a mesma linha dedutiva que levou às inequações (45) e (46), obtém-se:

$$H_{\text{tot}} \times \sqrt{N_k / E_{CS} I_C} \leq 0,51 \quad (65)$$

Observe-se a coerência desta inequação com a ABNT [8], a qual fixa em 0,5 o coeficiente α_1 , quando o contraventamento for constituído exclusivamente por pórticos. Na verdade, para obter-se $\alpha_1 = 0,5$, dever-se-ia ter:

$$(EI)_{\text{sec}} = 0,650 E_{CS} I_C = 0,552 E_{CS} I_C \quad (66)$$

4.3 Associações de pórticos com paredes e/ou núcleos

É adotado o mesmo modelo da figura 3 e são consideradas as mesmas definições da seção 2.2. Ao estabelecer a equação diferencial da linha elástica para o conjunto de pórticos (figura 3-c), aplica-se a equação (50), acrescentando ao esforço cortante as parcelas relativas às forças de interação entre paredes e pórticos, tal como foi feito na equação (19):

$$\frac{Q(x)}{S} = \frac{w_1(\ell - x) + Q_T + \int_x^\ell u(\xi) d\xi + q_1(\ell - x)\phi(x)}{S\sqrt{1 + \phi^2(x)}} = \phi(x)\sqrt{1 + \phi^2(x)} \quad (67)$$

Considerando que $\phi^2(x)$ pode ser desprezado na presença de 1 e isolando as parcelas referentes às forças de interação:

$$Q_T + \int_x^\ell u(\xi) d\xi = S\phi(x) - w_1(\ell - x) - q_1(\ell - x)\phi(x) \quad (68)$$

Ao estabelecer a equação diferencial da linha elástica para o conjunto de paredes (figura 3-b), entra-se com o momento fletor dado por (31) acrescido das parcelas relativas às forças de interação, tal como foi feito na equação (21):

$$\frac{w_2(\ell - x)^2}{2} - Q_T(\ell - x) - \int_x^\ell u(\xi)(\xi - x) d\xi + q_2[Y(\ell) - Y(x) - (\ell - x)y(x)] = \frac{EJ_2 d^2 y}{dx^2} \quad (69)$$

Derivando a equação (69) em relação a x , obtém-se:

$$EJ_2 \frac{d^3 y}{dx^3} = EJ_2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -w_2(\ell - x) + Q_T + \int_x^\ell u(\xi) d\xi - q_2(\ell - x)\phi(x) \quad (70)$$

Substituindo (68) em (70) e rearranjando, resulta:

$$EJ_2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -(w_1 + w_2)(\ell - x) - (q_1 + q_2)(\ell - x)\phi(x) + S\phi(x) \quad (71)$$

Considerando que $w_1 + w_2 = w$ (ação total do vento), $q_1 + q_2 = q$ (ação gravitacional total) e rearranjando novamente, obtém-se a equação diferencial que governa o comportamento de um sistema de pórticos e paredes/núcleos incluindo a influência das deformações:

$$EJ_2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - [S - q(\ell - x)]\phi(x) + w(\ell - x) = 0 \quad (72)$$

Para a aplicação do método de Galerkin à equação (72), será assumida uma solução dada pelo produto de uma função $f(x)$ pela

solução linear, expressa pelas equações (25), (26) e (27):

$$\phi(x) = f(x) \left[C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell} + \frac{w\ell^2}{4EJ_1}(\ell - x) \right] \quad (73)$$

Substituindo (73) em (72), resulta:

$$EJ_2 f''(x) \left[C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell} + \frac{w\ell^2}{4EJ_1}(\ell - x) \right] + 2EJ_2 f'(x) \left[\frac{2K}{\ell} (C_1 e^{2Kx/\ell} - C_2 e^{-2Kx/\ell}) - \frac{w\ell^2}{4EJ_1} \right] + \frac{4K^2}{\ell^2} EJ_2 f(x) (C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell}) - f(x) [S - q(\ell - x)] \left[C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell} + \frac{w\ell^2}{4EJ_1}(\ell - x) \right] + w(\ell - x) = 0 \quad (74)$$

Assumindo que $f(x)$ seja uma função constante, implica em serem nulas a primeira e a segunda parcelas da equação (74), uma vez que elas estão com as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ em evidência. Além disso, considerando a definição já existente de K , bem como a de S (equação 18), pode-se escrever:

$$\frac{4K^2}{\ell^2} EJ_2 = \frac{4EJ_1}{\ell^2} = S \quad (75)$$

Em consequência disto, a terceira parcela da equação (74) cancela-se com alguns termos da quarta e a equação fica reduzida a:

$$q f(x) \left[C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell} + \frac{w\ell^2}{4EJ_1}(\ell - x) \right] + w[1 - f(x)] = 0 \quad (76)$$

O método de Galerkin será utilizado para encontrar uma função $f(x) = \text{constante}$, que seja uma boa aproximação para a $f(x)$ envolvida na equação (76). De acordo com (28), pode-se escrever:

$$\bar{f}(x) = a_1 \phi_1(x) \quad \ni \quad \phi_1(x) = 1 \quad (77)$$

A aplicação da equação (29) para este caso assume a forma:

$$\int_0^\ell \left\{ a_1 q \left[C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell} + \frac{w\ell^2}{4EJ_1}(\ell - x) \right] + w(1 - a_1) \right\} dx = 0 \quad (78)$$

Efetuada-se a integral, pode-se isolar a_1 , obtendo-se:

$$a_1 = \frac{1}{1 - \frac{q\ell^3}{8EJ_1} - \frac{q}{2Kw} [C_1(e^{2K} - 1) - C_2(e^{-2K} - 1)]} \quad (79)$$

Portanto, a solução aproximada para a equação (72) será dada por:

$$\phi(x) = a_1 \left[C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell} + \frac{w\ell^2}{4EJ_1} (\ell - x) \right] \quad (80)$$

com a_1 dado por (79). Integrando-a duas vezes, obtém-se a primitiva dos deslocamentos:

$$Y(x) = a_1 \left[\frac{\ell^2}{4K^2} (C_1 e^{2Kx/\ell} + C_2 e^{-2Kx/\ell}) + \frac{w\ell^2 x^2}{4EJ_1} \left(\frac{\ell}{2} - \frac{x}{6} \right) + C_3 x + C_4 \right] \quad (81)$$

sendo C_4 uma constante indeterminada e C_3 resultante da condição de deslocamento nulo na base:

$$C_3 = \frac{-w\ell^4}{8EJ_1} \cdot \frac{K(e^{4K} - 1) + e^{2K}}{K^2(e^{4K} + 1)} \quad (82)$$

O momento fletor na base é obtido, aplicando-se a equação (32):

$$M(0) = \frac{w\ell^2}{2} + a_1 q \left\{ \frac{\ell^2}{4K^2} [C_1(e^{2K} - 1) + C_2(e^{-2K} - 1)] + \frac{w\ell^5}{12EJ_1} + C_3 \ell \right\} \quad (83)$$

Observe-se que a diferença $Y(\ell) - Y(0)$ fez desaparecer a constante C_4 . Substituindo C_1 , C_2 e C_3 , respectivamente, pelas equações (26), (27) e (82), leva a equação (83) a assumir a forma:

$$M(0) = \frac{w\ell^2}{2} + \frac{a_1 q w \ell^5}{96EJ_1 K^3} \cdot \frac{(6K + 8K^3)(e^{4K} + 1) + (3 - 12K^2)(e^{4K} - 1) - 24Ke^{2K}}{e^{4K} + 1} \quad (84)$$

Introduzindo as expressões de C_1 e C_2 também na equação (79) e substituindo a fórmula de a_1 assim obtida na equação (84), obtém-se a expressão do momento fletor na base do sistema formado por pórticos e paredes/núcleos:

$$M(0) = \frac{w\ell^2}{2} \left[1 + \frac{(2K + 8K^3/3)(e^{4K} + 1) + (1 - 4K^2)(e^{4K} - 1) - 8Ke^{2K}}{(16EJ_1/q\ell^3)K^3(e^{4K} + 1) - (K + 2K^3)(e^{4K} + 1) + 2K^2(e^{4K} - 1) + 2Ke^{2K}} \right] \quad (85)$$

Aplicando-se a este momento fletor a condição expressa pela inequação (1), resulta:

$$\frac{1,4w\ell^2}{2} \left[1 + \frac{(2K + 8K^3/3)(e^{4K} + 1) + (1 - 4K^2)(e^{4K} - 1) - 8Ke^{2K}}{(16EJ_1/q\ell^3)K^3(e^{4K} + 1) - (K + 2K^3)(e^{4K} + 1) + 2K^2(e^{4K} - 1) + 2Ke^{2K}} \right] \leq 1,1x \frac{1,4w\ell^2}{2} \quad (86)$$

Na inequação (86), pode-se isolar o fator $q\ell^3/EJ_1$, obtendo-se:

$$\frac{q\ell^3}{EJ_1} \leq \frac{(24/7)K^3(e^{4K} + 1)}{(6,3K + 8,6K^3)(e^{4K} + 1) + (3 - 12,6K^2)(e^{4K} - 1) - 24,6Ke^{2K}} \quad (87)$$

Chamando de J a soma das inércias dos conjuntos de paredes/núcleos e de pórticos e considerando a definição anterior de K , pode-se escrever:

$$J = J_1 + J_2 = J_1 + J_1/K^2 = J_1(K^2 + 1)/K^2 \quad (88)$$

Isolando J_1 :

$$J_1 = K^2 J / (K^2 + 1) \quad (89)$$

Definem-se I_{c1} e I_{c2} como as inércias brutas, respectivamente, dos conjuntos de pórticos e de paredes. Chamando de I_c a soma de I_{c1} e I_{c2} e aplicando as relações (11) e (66), tem-se que:

$$I_c = I_{c1} + I_{c2} = \frac{J_1}{0,65} + \frac{J_2}{0,941} = \frac{J_1}{0,65} + \frac{J_1}{0,941K^2} = \frac{1,5385K^2 + 1,0625}{K^2} J_1 \quad (90)$$

A partir de (90), o fator EJ_1 pode ser expresso por:

$$EJ_1 = \frac{K^2}{1,5385K^2 + 1,0625} E_{CS} I_c \quad (91)$$

A equação (87) pode ser reescrita, substituindo-se EJ_1 pela expressão (91), $q\ell$ por N_k (carga vertical total) e ℓ por H_{tot} (altura do edifício). Em seguida, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, resulta:

$$H_{tot} \times \sqrt{\frac{N_k}{E_{CS} I_c}} \leq \alpha_1 \quad (92)$$

onde

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{(24/7)K^3(e^{4K} + 1)}{(1,5385K^2 + 1,0625)[(6,3K + 8,6K^3)(e^{4K} + 1) + (3 - 12,6K^3)(e^{4K} - 1) - 24,6Ke^{2K}]}} \quad (93)$$

Obteve-se assim uma expressão para o limite α_1 do parâmetro de instabilidade, variável com K (relação entre as inércias reduzidas de pórticos e paredes/núcleos). Para fins de obtenção de α_1 , no entanto, é mais prático trabalhar com as inércias brutas. Combinando as equações (66) e (90), obtém-se a seguinte relação entre K e I_{C1}/I_C (razão entre a inércia bruta dos pórticos e a total):

$$K = 0,831\sqrt{(I_{C1}/I_C)/(1 - I_{C1}/I_C)} \quad (94)$$

Assim, dada uma razão I_{C1}/I_C qualquer, obtém-se K pela aplicação da equação (94) e em seguida α_1 pela aplicação da (93). A seqüência de valores de α_1 , apresentada na tabela 1 e representada graficamente nas figuras 7 e 8, mostra uma variação mais brusca para I_{C1}/I_C próximo de 1 (predominância de pórticos) e mais suave para I_{C1}/I_C próximo de 0 (predominância de paredes). Observa-se também que a equação (93), nos extremos de seu intervalo de aplicação, reproduz fielmente a equação (46), mas apresenta uma diferença de 1,8% para contraventamento formado exclusivamente por pórticos. A seguir, a equação (93) será testada em uma série de exemplos.

5. Exemplos

5.1 Descrição dos testes

A figura 5 mostra a configuração básica, em planta, do sistema de contraventamento transversal de um edifício de planta retangular (exemplos 1, 3, 5 e 7), o qual é constituído pelas paredes 1 e 5 junto às fachadas laterais e pelos pórticos 2, 3 e 4, de vão único (7,5 m de eixo a eixo de pilar). Da mesma forma, pode-se observar na figura 6 a configuração básica do sistema de contraventamento transversal de um edifício de planta octogonal alongada (exem-

Tabela 1 - Valores de α_1 , variando-se a razão I_{C1}/I_C

I_{C1}/I_C	α_1	I_{C1}/I_C	α_1	I_{C1}/I_C	α_1
0	0,773	0,50	0,755	0,90	0,651
0,10	0,772	0,60	0,744	0,95	0,611
0,20	0,771	0,70	0,726	0,98	0,574
0,30	0,768	0,80	0,699	0,99	0,555
0,40	0,763	0,85	0,679	1,00	0,509

plos 2, 4, 6 e 8), sendo também formado por duas paredes e três pórticos que, neste caso, possuem três vãos iguais (5 m de eixo a eixo de pilar). Cada um destes sistemas foi empregado em edifícios de 5, 10, 20 e 30 andares com pé direito de 3 m, constituindo os exemplos 1 a 8, cujas informações gerais constam na tabela 2.

Para cada um dos oito edifícios, foram realizados testes variando as seções retangulares das paredes e das barras dos pórticos, de forma a resultar na série de razões I_{C1}/I_C apresentada na tabela 3. Isto exigiu, em alguns casos, alterações nas configurações básicas das figuras 5 e 6, mantendo-se, porém, a dupla simetria do contraventamento em planta. Para $I_{C1}/I_C = 1$ foram suprimidas as paredes; para valores decrescentes de I_{C1}/I_C , os pórticos eram gradativamente suprimidos, ficando completamente eliminados para $I_{C1}/I_C = 0$. Nos exemplos de 30 andares, foram incluídos pórticos adicionais em alguns casos e paredes adicionais em outros. As dimensões das seções transversais adotadas nos testes encontram-se na tabela 4.

Considerou-se a utilização de um concreto com $f_{ck} = 25$ MPa, resultando em um módulo $E_{cs} = 23800$ MPa. Foi considerada uma carga vertical total (valor característico) de 10 kN/m² por pavimento. Adotou-se uma carga devida à pressão do vento de 1,5 kN/m² (valor característico), constante ao longo da altura. Esta consideração foi feita por tratar-se da primeira experiência com uma formulação baseada num modelo com carga de vento de taxa constante.

Assim, foram testados 88 sistemas de contraventamento. Cada teste teve por objetivo determinar a relação entre cargas verticais e rigidez horizontal que resultasse em um acréscimo de 10% no momento global da base do edifício, em relação à análise de primeira ordem; com isso, determinava-se o limite α_1 do parâmetro de instabilidade. O procedimento aplicado em cada teste consistiu em, inicialmente, fixar as dimensões das seções das barras do

Figura 5 - Sistema de contraventamento transversal: exemplos 1, 3, 5 e 7

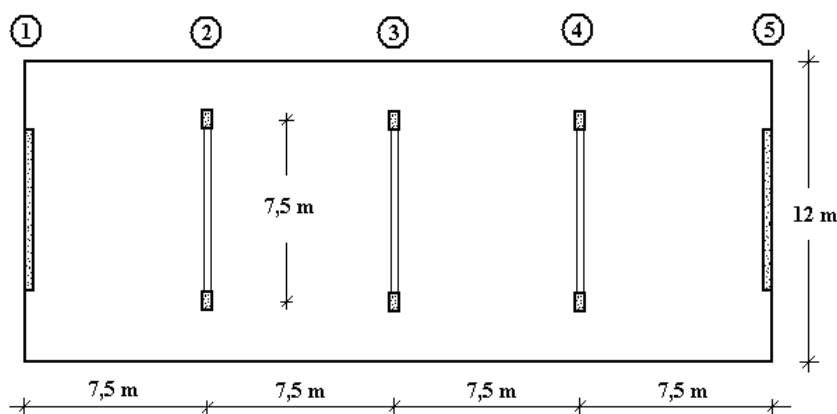


Figura 6 - Sistema de contraventamento transversal: exemplos 2, 4, 6 e 8

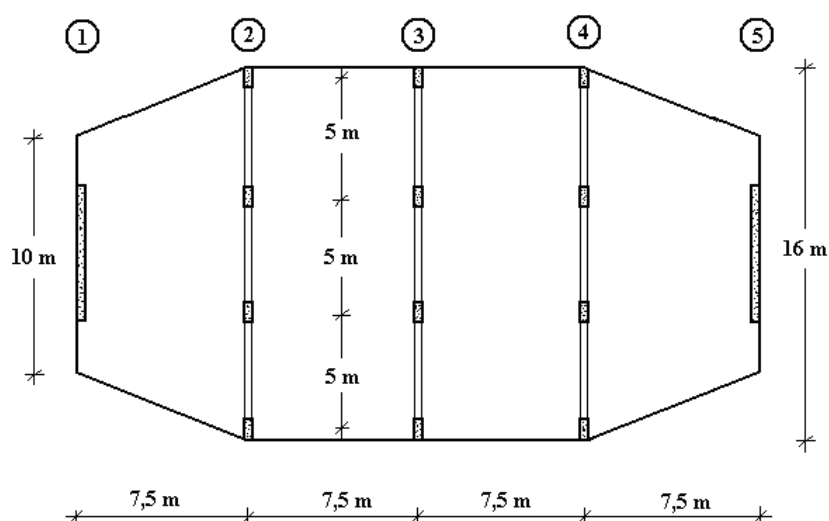


Tabela 2 - Informações gerais dos exemplos 1 a 8

Exemplo	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de andares	5	5	10	10	20	20	30	30
Altura (m)	15	15	30	30	60	60	90	90
Nº de vãos de cada pórtico	1	3	1	3	1	3	1	3
Nº de pórticos	0 a 3	0 a 3	0 a 3	0 a 3	0 a 3	0 a 3	0 a 5	0 a 5
Nº de paredes	0 a 2	0 a 2	0 a 2	0 a 2	0 a 2	0 a 2	0 a 2	0 a 4

conjunto de pórticos e calcular sua rigidez horizontal I_{c1} , de acordo com o item 15.5.2 da ABNT [8] (relação entre a carga de vento e o deslocamento horizontal ocorrido no topo da estrutura). Em seguida, ajustou-se a seção do conjunto de paredes de forma a obter-se a razão I_{c1}/I_c desejada.

Na seqüência do teste, realizou-se uma análise inicial de segunda ordem do conjunto pórticos-paredes, empregando-se o método $P-\Delta$. Em seguida, realizaram-se novas análises de segunda ordem, ajustando-se o valor das cargas verticais até que resultasse o acréscimo desejado de 10% no momento global da base. Embo-

Tabela 3 - Razões I_{c1}/I_c adotadas nos exemplos

1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,20	0
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	---

Tabela 4 - Dimensões (cm) das seções transversais

Exemplo	Vigas	Pilares	Paredes
1	20 x 50 a 25 x 60	20 x 50 a 25x 60	20 x 88,5 a 20 x 201
2	15 x 34 a 20 x 50	15 x 34 a 20x 50	20 x 102 a 20 x 243
3	18 x 68 a 24 x 68	30 x 85 a 40 x 85	20 x 158,5 a 20 x 422,5
4	15 x 51 a 24 x 59,5	20 x 77 a 34x 90	20 x 224 a 20 x 481,5
5	34 x 85	42,5 x 140	20 x 307,5 a 25 x 838,5
6	21 x 68	34 x 96	20 x 351 a 25 x 957
7	34 x 85	42,5 x 140	20 x 418 a 35 x 1200
8	21 x 85	36 x 119	20 x 588 a 31 x 998,5

ra a lógica indique que o ajustamento devesse ser feito na rigidez horizontal, optou-se pelo ajustamento das cargas, pois, além de não afetar os resultados, tornou mais ágil a realização dos 88 testes. A não-linearidade física foi considerada por meio da redução da rigidez das barras individuais, expressa pelas equações (10) e (11). Adotou-se para a análise um modelo de pórtico plano como o da figura 3, com os conjuntos de pórticos e de paredes unidos por bielas, por tratar-se do modelo no qual está baseada a formulação proposta neste trabalho. Posteriormente, alguns casos foram re-analisados por um método com emprego de matriz de rigidez geométrica, a fim de confirmar os resultados obtidos pelo $P-\Delta$.

5.2 Análise dos resultados

Os valores de α_1 obtidos nos testes encontram-se na tabela 5. Para a interpretação dos resultados, é conveniente agrupar os oito exemplos por número de andares e considerar dois intervalos de

valores da rigidez relativa: $I_{c1}/I_c \leq 0,9$ e $I_{c1}/I_c > 0,9$. As figuras 7 e 8 mostram, para cada número de andares, uma curva representando a variação do limite α_1 encontrado nos testes, bem como a curva de α_1 correspondente à fórmula (93).

Ao analisar os resultados referentes ao intervalo $I_{c1}/I_c \leq 0,9$, constata-se que os valores de α_1 obtidos nos exemplos estão, em sua quase totalidade, abaixo dos valores previstos pela fórmula (93), apresentados na tabela 1. Assim, a aplicação desta fórmula resulta em erros para mais, cujos valores máximos são apresentados na tabela 6. Observa-se claramente que estes erros decrescem com o aumento de andares; iniciam com 16,2% aos 5 andares e diminuem para 3,1% aos 30 andares, mostrando uma tendência de se anularem para um número de andares pouco superior a 30. Esse desempenho da equação (93) deve-se muito provavelmente à adoção do modelo da figura 1-b no lugar do da figura 1-a; ou seja, o modelo com distribuição uniforme e contínua de andares e ações verticais proporciona uma precisão aceitável apenas para edifícios a partir de 30 andares.

Tabela 5 - Valores de α_1 , variando-se a razão I_{c1}/I_c , o número de andares e o de vãos

I_{c1}/I_c	Exemplo: Andares:	1 5	2 5	3 10	4 10	5 20	6 20	7 30	8 30
1,00		0,515	0,514	0,528	0,519	0,569	0,534	0,608	0,591
0,95		0,552	0,557	0,567	0,563	0,605	0,590	0,639	0,635
0,90		0,572	0,584	0,594	0,592	0,630	0,621	0,656	0,656
0,85		0,590	0,603	0,613	0,614	0,650	0,644	0,675	0,676
0,80		0,610	0,619	0,629	0,632	0,663	0,662	0,690	0,690
0,70		0,626	0,641	0,653	0,657	0,687	0,687	0,710	0,711
0,60		0,641	0,656	0,671	0,676	0,702	0,702	0,724	0,727
0,50		0,652	0,665	0,685	0,689	0,716	0,716	0,734	0,735
0,40		0,662	0,671	0,695	0,699	0,724	0,726	0,743	0,740
0,20		0,675	0,681	0,714	0,715	0,738	0,736	0,753	0,752
0		0,683	0,683	0,726	0,726	0,749	0,749	0,764	0,764

Figura 7 - Gráficos α_1 x razão I_{c1}/I_c para os exemplos de 5 e 10 andares

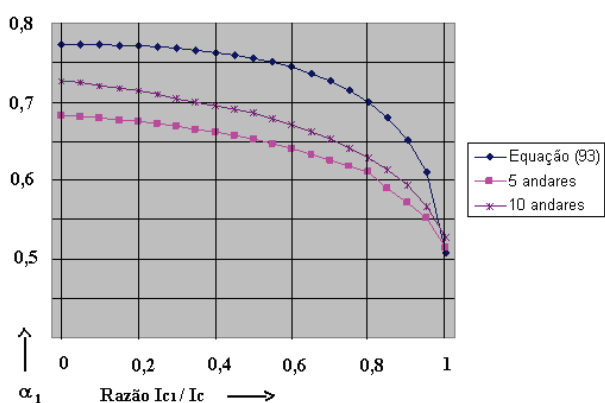


Figura 8 - Gráficos α_1 x razão I_{c1}/I_c para os exemplos de 20 e 30 andares

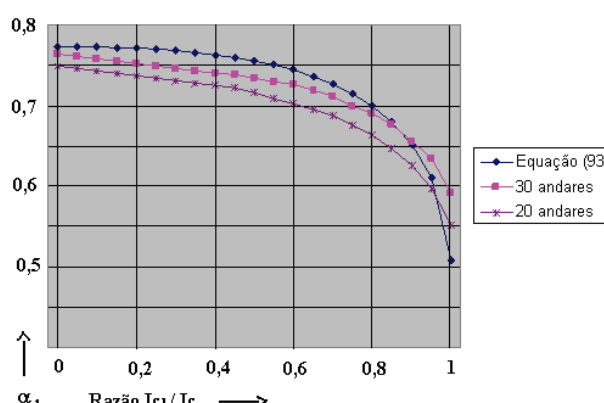


Tabela 6 – Erros máximos (%)

I_{c1}/I_c	5 andares	10 andares	20 andares	30 andares
$\leq 0,90$	+16,2	+11,2	+6,0	+3,1
$= 0,95$	+10,7	+8,5	+3,6	-4,4
$= 1,00$	-1,2	-3,6	-10,5	-16,3

Por outro lado, para valores de I_{c1}/I_c superiores a 0,9, indicativos de uma alta predominância de pórticos, a tendência de erros decrescentes com o aumento de andares também existe. Todavia, aqui ela está acompanhada por outra tendência que é a de erros para menos produzidos pela equação (93), crescentes com o número de andares, conforme se pode observar na tabela 6 para $I_{c1}/I_c = 0,95$ e 1,00. Essa tendência é devida ao fato da equação (93) levar em consideração que os pórticos se deformam somente devido ao esforço cortante global. Smith e Coull [13] afirmam que, em edifícios esbeltos, a flexão global dos pórticos, devida à deformação axial dos pilares, pode ter uma contribuição significativa para os deslocamentos horizontais. Trata-se do mesmo padrão de deformação das paredes, o que faz aumentar o coeficiente limite α_1 . Assim, quanto mais alto o edifício e maior a presença de pórticos, maiores serão os erros gerados por uma formulação que ignore esse efeito. No caso de contraventamento formado exclusivamente por pórticos ($I_{c1}/I_c = 1$), observa-se na tabela 6 que os erros máximos variam entre -1,2% (5 andares) e -16,3% (30 andares).

Com relação, ainda, ao caso $I_{c1}/I_c = 1$, os valores de α_1 , mostrados na primeira linha da tabela 5, sugerem ser conservador o limite $\alpha_1 = 0,5$ prescrito pela ABNT [8] para o caso de contraventamento formado exclusivamente por pórticos, principalmente em edifícios com mais de 10 andares. Por outro lado, os valores de α_1 encontrados para $I_{c1}/I_c = 0$, mostrados na última linha da tabela 5, indicam ser também conservador o valor de $\alpha_1 = 0,7$ prescrito para o contraventamento formado exclusivamente por paredes/núcleos, em edifícios com mais de 10 andares. Todavia, em edifícios com menos de 10 andares, pode ocorrer o contrário. Nos exemplos analisados, encontraram-se valores ligeiramente inferiores a 0,7 nos edifícios de 5 andares. Além disso, a adoção do valor fixo $\alpha_1 = 0,6$ para associações de pórticos com paredes e/ou núcleos deveria estar condicionada a um limite mínimo de contribuição das paredes para a rigidez do contraventamento, principalmente em edifícios mais baixos. Nos exemplos analisados, interpolações feitas na tabela 5 mostram que a inércia bruta das paredes em relação à inércia total deveria ser de pelo menos 18% no exemplo 1, 14% no 2 e 12% nos exemplos 3 e 4.

6. Conclusões

Os valores limites α_1 do parâmetro de instabilidade, obtidos nos exemplos do presente trabalho e apresentados na tabela 5, mostram uma variabilidade que vai de um mínimo de 0,514 no exemplo 2 até um máximo de 0,764 nos exemplos 7 e 8. A proporção entre estes valores extremos é de aproximadamente 1,5:1. Considerando que a obtenção dos mesmos

envolve a extração de uma raiz quadrada, a proporção entre os radicandos (relações carga vertical/rigidez horizontal) associados a esses extremos é superior a 2:1. Esta variabilidade mostra a importância de se ter uma forma de prever-se um limite α_1 apropriado à relação I_{c1}/I_c e ao número de andares de um dado edifício a ser projetado, no lugar dos valores fixos estabelecidos pela ABNT [8].

A equação (93) representa uma tentativa inicial de se realizar tal previsão. A precisão relativamente boa obtida nos exemplos 7 e 8 para $I_{c1}/I_c \leq 0,9$ mostra que o objetivo é viável e que esforços merecem ser realizados no sentido de atingi-lo. Para fazer frente aos erros encontrados nos demais casos (predominância de pórticos e menor número de andares), deve-se introduzir o efeito da deformabilidade axial dos pilares dos pórticos nas equações (16) e (50), fazendo com que a curva de α_1 , correspondente à equação (93) e mostrada nas figuras 7 e 8, não decline tanto em seu trecho final; deve-se também encontrar um meio de adequar a formulação à variação do número de andares. Outra questão a investigar é a viabilidade de se incorporar à formulação a variabilidade da influência da não-linearidade física na rigidez lateral dos pórticos (atualmente, esta influência é considerada na forma de um coeficiente constante).

Convém salientar que tudo isto deve ser feito de forma a manter a simplicidade da formulação, justamente uma das maiores virtudes da utilização do parâmetro de instabilidade. Finalmente, convém destacar a necessidade de se adotar para os testes um modelo mais realístico de análise: simulação da estrutura como um reticulado tridimensional considerando-se os pavimentos como diafragmas rígidos; variação da carga de vento ao longo da altura do edifício; realização da análise não-linear através de um método incremental-iterativo; e consideração mais acurada da não-linearidade física, por exemplo, por meio das relações momento-curvatura.

7. Agradecimento

Ao Prof. Eng. Mário Franco, pelo fornecimento de material valioso à realização deste trabalho.

8. Referências Bibliográficas

- [01] Beck, H. and König, G.; Halkräfte im Skelettbau. In: Beton- und Stahlbetonbau, n. 62, tome 1 (pp. 7-15) and tome 2 (pp. 37-42), Berlin, 1967.
- [02] CEB – Comité Euro-International du Béton; CEB/FIP Manual of Buckling and Instability, The Construction Press, Lancaster, 1978.
- [03] Vasconcelos, A.C.; Origem dos Parâmetros de Estabilidade α e γ_2 . In: Revista IBRACON de

- Estruturas, n. 20, pp. 56-60, São Paulo, 1998.
- [04] Sussekund, J.C.; Curso de Concreto, vol. 2, Porto Alegre, Ed. Globo, 1984.
- [05] Franco, M.; Problemas de Estabilidade nos Edifícios de Concreto Armado. *In* Colóquio IBRACON sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 1985.
- [06] Franco, M.; Global and Local Instability of Concrete Tall Buildings, *In*: International Symposium for Shell and Spatial Structures, Proceedings, vol. 2, pp. 1327-36, Milan, 1995.
- [07] Franco, M. and Vasconcelos, A.C.; Practical Assessment of Second Order Effects in Tall Buildings. *In*: Colóquio do CEB-FIP Model Code 1990, pp. 307-24, Rio de Janeiro, 1991.
- [08] ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas; NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento, Rio de Janeiro, 2007.
- [09] Stamato, M.C.; Associação Contínua de Painéis de Contraventamento (Publicação 157), São Carlos, EESC/USP, 1972.
- [10] Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I.; Approximate Methods of Higher Analysis, New York, Interscience Publishers Inc., 1964.
- [11] Pinto, R.S. and Ramalho, M.A.; Inércia equivalente das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado. *In*: Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 9, n. 38, p. 107-136, 2007.
- [12] Schueeler, W.; High-rise Building Structures, New York, John Wiley & Sons, 1977.
- [13] Stafford Smith, B. and Coull, A.; Tall Building Structures: Analysis and Design, New York, John Wiley & Sons Inc., 1991.