

# Optimized dimensioning of steel-concrete composite beams

## *Dimensionamento otimizado de vigas mistas de aço e concreto*

A. R. SILVA <sup>a</sup>

[amilton@ufop.edu.br](mailto:amilton@ufop.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0002-7122-252X>

T. A. RODRIGUES <sup>a</sup>

[tati10rodr@gmail.com](mailto:tati10rodr@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-2488-4942>

### Abstract

The steel-concrete composite sections are often used in civil building in Brazil and around the world. The connection of the steel profile and the concrete slab increases the performance of the composite structural element due to the use of the advantages of each material. In this article, a bar element is used with an interface element for nonlinear analysis of steel-concrete composite beams with partial interaction. The objective is to develop an algorithm that uses this analysis tool to design steel-concrete composite beams looking for project optimized in terms of material costs. Defined spans, supports, ultimate and service load, an optimization algorithm is used to define the dimensions of the rectangular cross section of the concrete slab, I-shaped steel profile, and the reinforcement bars of the concrete slab, so that the quantity of these materials are the minimum to ensure structural safety, considering the ultimate and service limit states. The design constraints are obtained from building code requirements for concrete, steel and composite structures. The objective function is defined as the cost per unit length of the composite beam, obtained from the unit cost of each material, steel, concrete and reinforcement. In the optimization process, the iterative method sequential linear programming is used, in which the nonlinear problem is approximated by a sequence of linear problems, which has its optimum point defined step by step by the Simplex method. Examples of composite beams with ultimate loads defined in the literature were used to validate the implementations. Other examples were analyzed, being evaluated at each iteration the restrictions and objective function to verify the efficiency of the algorithm.

**Keywords:** piles, PIT, reinforcement effects.

### Resumo

As seções mistas de aço e concreto estão cada vez mais sendo utilizadas na construção civil, tanto no cenário mundial quanto no Brasil. O trabalho conjunto do perfil de aço e da laje de concreto aumenta consideravelmente o desempenho do elemento estrutural misto devido ao aproveitamento das vantagens de cada material. Neste trabalho, é utilizado um elemento de barra em conjunto com um elemento de interface para análise não linear de vigas mistas de aço e concreto com interação parcial. O objetivo é montar um algoritmo que utilize essa ferramenta de análise para dimensionar vigas mistas de aço e concreto buscando um projeto otimizado em termos de gastos dos materiais. Definidos os vãos, os apoios, os carregamentos para verificação última e de serviço, um algoritmo de otimização é utilizado para definir as dimensões da seção transversal retangular da laje de concreto, do perfil I de aço e das barras de reforço da laje de concreto, de forma que a quantidade desses materiais seja mínima, garantindo a segurança estrutural, considerando os estados limites último e de serviço. As restrições de projeto são aquelas definidas em normas referentes ao dimensionamento de elementos lineares de concreto, aço ou misto. A função objetivo é definida como sendo o custo por metro linear da viga mista, obtida a partir do custo de cada material, aço, concreto e armadura. No processo de otimização é utilizado o método iterativo de programação linear sequencial, no qual o problema não linear é aproximado por uma sequência de problemas lineares, que tem seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex. Exemplos de vigas mistas para as quais foram definidas suas cargas últimas foram utilizados para validação das implementações. Outros exemplos foram analisados para os quais foram controlados a cada iteração as restrições e função objetivo verificando a funcionalidade do algoritmo.

**Palavras-chave:** otimização, vigas mistas, método simplex, programação linear sequencial.

<sup>a</sup> Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Ouro Preto, MG, Brasil.

## 1. Introdução

Com o uso progressivo dos dispositivos computacionais e o aumento da utilização da mecânica computacional para a resolução de problemas de análise estrutural, os processos de otimização têm se tornado uma importante ferramenta à disposição da engenharia. As técnicas de otimização têm como objetivo extrair do produto ou serviço seu rendimento máximo. Na engenharia estrutural elas podem ser aplicadas com o intuito de encontrar, entre as inúmeras soluções possíveis, aquela que é mais econômica e atende às condições arquitetônicas, de segurança e construtivas. As vigas mistas de aço e concreto são elementos estruturais compostos por um perfil metálico, laminado, dobrado ou soldado, ligado a uma laje de concreto, convencional ou do tipo steel-deck, por meio de conectores de cisalhamento. Na maioria dos problemas de dimensionamento desse elemento estrutural tem-se um número maior de variáveis do que equações relacionando essas variáveis. Dessa forma, é necessária a atribuição de valores a algumas variáveis para que se possa calcular as outras. Ou seja, existe um número ilimitado (variáveis contínuas) ou grande (variáveis discretas) de soluções para o problema. Diante desse contexto, tem-se como objetivo deste trabalho criar um algoritmo que utilize ferramentas de análise estrutural de vigas mistas de aço e concreto buscando um projeto otimizado em termos de quantidade e custo dos materiais. Ou seja, definidos, para uma viga mista a ser analisada, os vãos, os apoios e os carregamentos para verificação última e serviço, um algoritmo de otimização é utilizado para definir as dimensões de um perfil de aço do tipo I, dimensões da seção transversal retangular da laje de concreto e a quantidade e diâmetro das barras de reforço, de forma que a quantidade desses materiais seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes e garantir a segurança estrutural, considerando os estados limites último e de serviço.

Na verificação dos estados limites último e de serviço é necessária uma análise estrutural da viga mista com interação parcial. Para isso é usado o método dos elementos finitos utilizando elementos de barra e de interface desenvolvidos por Silva e Sousa [1]. Nessa simulação numérica os elementos de barra simulam a laje de concreto e a viga de aço enquanto que o elemento de interface faz a ligação entre os elementos de barra e simula a conexão deformável na interface de contato entre a laje de concreto e o perfil de aço. Diversos trabalhos podem ser encontrados na literatura seguindo essa linha de análise numérica não linear de vigas mistas de aço e concreto com interação parcial usando elementos finitos de barra [2-11].

Diversos trabalhos sobre otimização podem ser encontrados na literatura nas mais diversas áreas de conhecimento.

Kravanja *et al.* [12] otimizaram vigas mistas em que a laje de concreto armado é conectada a um perfil de aço I soldado. A técnica utilizada foi MINLP (Mixed Integer Nonlinear Programming) que soluciona problemas de otimização não linear com variáveis discretas e contínuas. Para essa análise, o autor verificou os estados limites último e de serviço e a função objetivo considera os custos da mão de obra e dos materiais.

Kravanja *et al.* [13] investigaram vigas mistas formadas por uma laje de concreto conectadas a um perfil de aço do tipo I soldado duplamente simétrico e vigas mistas formadas pela associação de uma laje de concreto a uma estrutura treliçada. O estudo foi realizado aplicando otimização estrutural por meio da programação não linear. Também usando programação não linear por meio da técnica do gradiente reduzido, Klanšek e Kravanja desenvolveram

alguns trabalhos na área de otimização de pisos mistos [14-17]. Senouci e Al-Ansari [18] desenvolveram um modelo de algoritmo genético para a otimização do custo de vigas mistas, incluindo o custo do concreto, da viga de aço e dos conectores de cisalhamento. Para esse fim, o presente modelo foi formulado em duas etapas principais: a primeira é determinar as principais variáveis que afetam a decisão no projeto de vigas mistas e a segunda, formular a otimização do custo total das vigas mistas.

Abadi e Kaveh [19] estudaram a otimização de custos de um sistema de pisos mistos utilizando algoritmo de busca harmônica. Na função objetivo, os autores consideraram apenas os custos dos materiais (concreto, aço e conectores) e as restrições de projeto são aquelas definidas de acordo com normas técnicas. Dois exemplos de pisos mistos foram avaliados para estudar o modelo desenvolvido e os autores concluíram que o método mostrou-se eficiente na busca da melhor solução dos problemas de otimização estrutural.

Silva *et al.* [20] apresentaram a otimização de vigas mistas de aço e concreto modeladas e discretizadas em elementos finitos de barra empregando o método da programação linear sequencial associado ao método Simplex. Os autores consideraram como variáveis de projeto as dimensões da seção transversal e a rigidez da conexão deformável. As restrições de projetos foram definidas a partir das tensões máximas nos materiais obtidas considerando análise linear física.

## 2. Elementos finitos para análise não linear de vigas mistas

Para a verificação das restrições de projeto referentes ao dimensionamento otimizado de vigas mistas de aço e concreto é necessária a realização de análise estrutural de vigas mistas. Para isso, são utilizados nesse trabalho dois elementos finitos, um elemento de barra e um elemento de interface [1].

### 2.1 Elemento de barra

Considerando as hipóteses básicas da teoria de viga de Bernoulli-Euler definem-se as Equações 1 e 2 para os deslocamentos axiais e transversais de um ponto qualquer no elemento de barra com eixo de referência coincidente com o eixo da barra.

$$u(x, y) = u^0(x) - y'v(x) \quad (1)$$

$$v(x, y) = v^0(x) \quad (2)$$

Nas Equações 1 e 2 o sobrescrito 0 indica um eixo de referência adotado para representar a viga tridimensional por um elemento de barra. Do tensor de deformação de Green-Lagrange obtém-se, a partir das equações dos deslocamentos, a equação para deformação axial no elemento de barra. Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais chega-se ao vetor de forças interna e a matriz de rigidez tangente dados pelas Equações 3 e 4 para um elemento de barra.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \begin{Bmatrix} N\Phi_u' \\ -M\Phi_v'' \end{Bmatrix} dx \quad (3)$$

$$\mathbf{K}_T = \int_L \begin{bmatrix} \Phi_u' \left( \frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_v'' \left( \frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dx \quad (4)$$

Nas equações 3 e 4,  $N = \int_A \sigma_x dA$  e  $M = \int_A \sigma_x y dA$  são esforços normal e momento fletor na seção transversal da viga. Os termos dos vetores  $\Phi_u$  e  $\Phi_v$  são dados por funções de forma que aproximam as equações dos deslocamentos axial e transversal a partir dos valores desses deslocamentos dados em pontos específicos do elemento de barra. Neste artigo é usado o elemento de barra de dois nós com três graus de liberdade por nó; logo o vetor  $\Phi_u$  tem dois termos (interpolação linear dos deslocamentos axiais) e o vetor  $\Phi_v$  tem 4 termos (interpolação cúbica dos deslocamentos transversais). Para o elemento de barra de 2 nós,  $q = [u_1, u_2, v_1, v_2, v_1', v_2']^T$  é o vetor dos deslocamentos nodais.

### 2.2 Elemento de interface

Considerando viga mista simulada por um elemento de barra para a seção acima da interface de deslizamento e outro elemento de barra para a seção abaixo dessa interface, o elemento de interface tem a função de conectar esses elementos de barra e simular a conexão deformável na interface de deslizamento.

É apresentada na Figura 1 a deformação de um segmento de viga mista considerando a teoria de viga de Bernoulli-Euler. Em um elemento de interface retangular de espessura nula, os deslocamentos considerados são os movimentos relativos entre as faces superior e inferior do elemento retangular na direção horizontal e vertical em relação ao eixo do elemento. Esses deslocamentos são apresentados nas Equações 5 e 6, onde  $w_h$  é o deslocamento horizontal relativo e  $w_v$  o deslocamento vertical relativo.

$$w_h(x) = u_2(x) - u_1(x) + (y_2 - d)\theta_2(x) - (y_1 - d)\theta_1(x) \tag{5}$$

$$w_v(x) = v_2(x) - v_1(x) \tag{6}$$

Assim como no elemento de barra é utilizado o princípio dos trabalhos virtuais para o desenvolvimento da formulação do elemento de interface retangular de espessura nula. Sendo  $S_b$  a força cortante por unidade de comprimento que surge devido ao deslocamento relativo horizontal e  $N_b$  a força normal por unidade de comprimento que surge devido ao deslocamento relativo na direção vertical, chega-se às expressões 7 e 8 para vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente para o elemento de interface.

$$f_{int} = \int_L \begin{Bmatrix} -S_b \Phi_u \\ (d - y_1) S_b \Phi'_v - N_b \Phi_v \\ S_b \Phi_u \\ (y_2 - d) S_b \Phi'_v + N_b \Phi_v \end{Bmatrix} dx \tag{7}$$

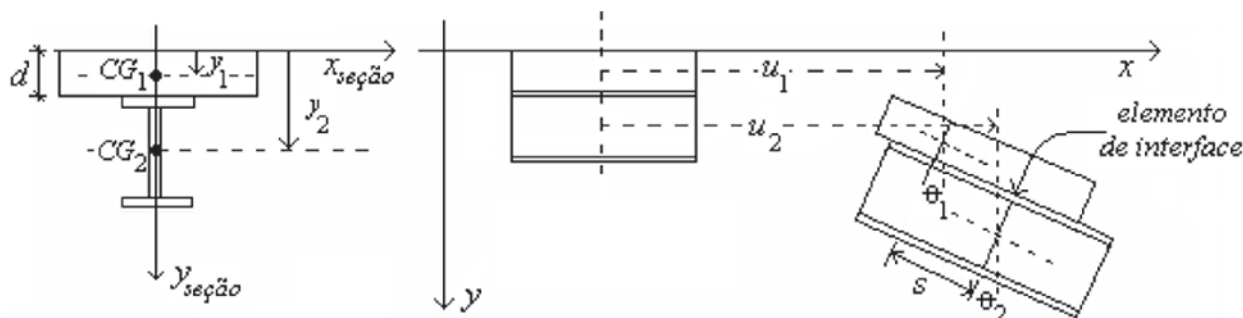


Figura 1 Deformação de um segmento de viga mista [1]

$$K_T = \int_L \begin{Bmatrix} -\Phi_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial q} \right)^T \\ (d - y_1) \Phi'_v \left( \frac{\partial S_b}{\partial q} \right)^T - \Phi_v \left( \frac{\partial N_b}{\partial q} \right)^T \\ \Phi_u \left( \frac{\partial S_b}{\partial q} \right)^T \\ (y_2 - d) \Phi'_v \left( \frac{\partial S_b}{\partial q} \right)^T + \Phi_v \left( \frac{\partial N_b}{\partial q} \right)^T \end{Bmatrix} dx \tag{8}$$

O elemento de interface é um elemento retangular de 4 nós e três graus de liberdade por nó; dessa forma  $q^T = [q_1^T, q_2^T]$ , com  $q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) sendo o vetor de deslocamentos nodais do elemento de barra acima e abaixo da interface.  $\Phi_u$  e  $\Phi_v$  são vetores colunas como apresentados para o elemento de barra do item anterior.

## 3. Otimização

São apresentadas neste item as considerações referentes ao problema estudado, como a função objetivo, restrições e variáveis de projeto. É apresentado também o método de otimização aplicado para análise do problema de otimização não linear com restrições.

### 3.1 Função objetivo

Para um mesmo problema estrutural existem diversos projetos viáveis, sendo alguns melhores que outros em termo de algum parâmetro de comparação, como, por exemplo, a quantidade de material gasto. Assim, estabelece-se um critério numérico que relacione um dado conjunto de variáveis de projeto chamado de função objetivo a qual se deseja extremizar.

Neste artigo o objetivo é determinar o custo mínimo de vigas mistas de aço e concreto sujeitas à flexão simples. Sendo assim, deve-se determinar o mínimo da função objetivo dada pela Equação 9, onde:  $b$  é a largura da laje de concreto,  $h$ , a altura da laje de concreto,  $b_f$ ,  $b_s$ , e  $b_w$ , as larguras da mesa inferior, superior e da alma,  $t_f$ ,  $t_s$  e  $t_w$ , as espessuras da mesa inferior, superior e da alma,  $A_{s1}$  e  $A_{s2}$ , as áreas de armadura de reforço da laje de concreto superior e inferior,  $C_a$ ,  $C_c$  e  $C_b$ , os custos do aço do perfil, do aço das barras de reforço, e da laje de concreto.

$$f(x) = (bh)C_c + (b_f t_f + b_s t_s + b_w t_w)C_a + (A_{s1} + A_{s2})C_b \tag{9}$$

Essa função foi definida para o caso de perfil I não simétrico; no caso do perfil I simétrico tem-se  $b_f = b_s = b_{fs}$  and  $t_f = t_s = t_{fs}$ .

### 3.2 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto são parâmetros que descrevem o projeto e sofrem alterações durante todo o processo de otimização. Elas podem ser de dois distintos tipos: variáveis discretas ou inteiras (valores compreendidos dentro de um certo conjunto fixo) e variáveis contínuas (reais). Neste trabalho, no processo de otimização, as variáveis de projeto são contínuas sendo elas os parâmetros que definem a seção transversal da viga de aço de perfil I, a seção retangular de concreto e a área das barras de reforço da laje de concreto, como são mostradas na Figura 2 e na Eq. 10.

$$\mathbf{x}^T = [b \quad h \quad b_{fi} \quad t_{fi} \quad b_{fs} \quad t_{fs} \quad b_w \quad t_w \quad A_{s1} \quad A_{s2}] \quad (10)$$

Como apresentado na seção 3.6, o algoritmo implementado define inicialmente valores para as variáveis de projeto considerando-as variáveis contínuas definindo assim dimensões para o perfil de aço, para a laje de concreto e armadura não usuais. Para evitar isso, foram inseridos no algoritmo alguns passos após a definição da seção otimizada considerando as variáveis de projeto como discretas, obtendo assim uma seção com dimensões usuais.

### 3.3 Restrições de projeto

As restrições são um conjunto de requisitos especificados e condições que devem ser satisfeitas para que o projeto seja aceitável. Pode-se dizer também que são equações ou inequações das variáveis de projeto que descrevem situações de projeto que devem ser atendidas. Definidas as propriedades dos materiais de acordo com especificações técnicas [21, 22], deve-se determinar a carga limite última e de serviço que a viga mista suporta. Esses valores são comparados com os dados de entrada e definem duas restrições. Neste trabalho serão utilizados apenas perfis compactos; dessa forma, a esbelteza da mesa e da alma do perfil I será limitada pelas restrições referentes à flambagem local da mesa e da alma. Outras restrições que devem ser consideradas são referentes às restrições laterais, as quais são os limites inferiores e superiores das dimensões da laje de concreto, do perfil I de aço, das áreas de armadura de reforço e o tamanho do passo. Essa última restrição lateral é definida para que sejam válidas as aproximações lineares das funções objetivo e restrições usadas no método da programação linear sequencial.

#### 3.3.1 Verificação do estado limite último

Determina-se o fator  $f_u$  que multiplica o carregamento último fornecido pelo usuário para o qual a viga mista está em iminência de ruína. A Eq. 11 fornece a restrição relacionada ao estado limite último da viga mista.

$$C_1(\mathbf{x}) = f_u - 1 \geq 0 \quad (11)$$

O valor de  $f_u$  igual à unidade significa que a seção analisada suporta, no limite, um carregamento igual ao carregamento definido pelo usuário. Caso seja maior que a unidade, a seção está com uma folga em relação à restrição de estado limite último.

#### 3.3.2 Verificação do estado limite de serviço

Determina-se a flecha máxima, para cada vão da viga, considerando

na análise o carregamento de serviço fornecido pelo usuário. Para os diferentes vãos da viga, verifica-se o mais suscetível à verificação do estado limite de serviço determinando o valor da flecha máxima nesse vão ( $\delta$ ). Esse valor é comparado com a flecha limite ( $\delta_{lim}$ ) especificada pelo usuário, como mostra a Eq. 12.

$$C_2(\mathbf{x}) = 1 - \delta/\delta_{lim} \geq 0 \quad (12)$$

Se  $\delta = \delta_{lim}$  implica que a seção analisada satisfaz a condição de flecha máxima no limite. Caso  $\delta < \delta_{lim}$  a seção analisada está com uma folga em relação à restrição de estado limite de serviço de deformação excessiva.

#### 3.3.3 Verificação da esbelteza da mesa e alma

Neste trabalho é admitido apenas perfil compacto, ou seja, segundo NBR 8800 [22], a esbelteza ( $0,5b/t_f$ ) limite para elementos

do tipo AL é de  $\lambda_f = 0,38 \sqrt{E/f_y}$  e do tipo AA ( $b_w/t_w$ ) é de  $\lambda_w = 3,76 \sqrt{E/f_y}$ . Sendo assim, podem-se definir as Eq. 13 e

14 para as restrições referentes à esbelteza da mesa e da alma, respectivamente.

$$C_3(\mathbf{x}) = \lambda_f t_{fi} - 0,5b_{fi} \geq 0 \quad (13)$$

$$C_4(\mathbf{x}) = \lambda_w t_w - b_w \geq 0 \quad (14)$$

#### 3.3.4 Restrições laterais

As restrições laterais são limites práticos inferiores e superiores para as variáveis. Por exemplo, uma variável referente ao diâmetro das barras de aço, não pode ser inferior ao menor diâmetro comercial das barras e nem superior ao maior diâmetro comercial. Esse tipo de restrição é comum a todos os problemas de otimização com restrição.

O vetor  $\mathbf{x}$  das variáveis de projeto já foi definido. Definindo os vetores  $\bar{\mathbf{l}}$  e  $\bar{\mathbf{u}}$  como sendo os limites inferiores e superiores dessas variáveis, define-se o conjunto de restrições dados pelas Eq. 15

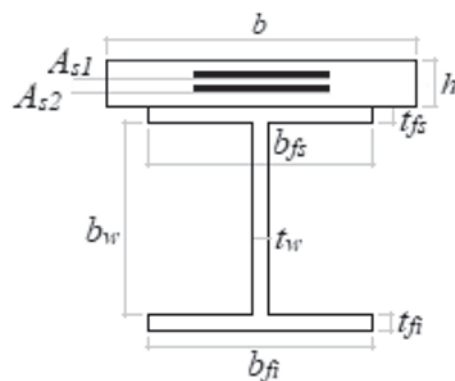


Figura 2 Variáveis de projeto do problema

e 16 para as restrições laterais das variáveis de projeto. Nessas equações,  $i = 1, 2, \dots, n$  com  $n$  sendo o número de variáveis, ou seja,  $n = 8$  para o caso simétrico e  $n = 10$  para o caso não simétrico.

$$C_{i+4}(\mathbf{x}) = x_i - \bar{l}_i \geq 0 \tag{15}$$

$$C_{i+n+4}(\mathbf{x}) = \bar{u}_i - x_i \geq 0 \tag{16}$$

No método de busca do ponto de ótimo apresentado no item seNo método de busca do ponto de ótimo apresentado no item seguinte desse capítulo, define-se um ponto de partida  $\mathbf{x}_0$  e obtém-se o próximo ponto que atenda às restrições de projeto e gere uma redução na função objetivo a partir da equação iterativa  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}$ , onde  $\mathbf{d}$  é o tamanho do passo. Dessa forma, o problema não linear analisado transforma-se em uma sequência de problemas lineares com as variáveis dadas pelo vetor  $\mathbf{d}$ . Para que seja válida a aproximação linear usada no método implementado nesse trabalho, devem-se impor restrições laterais para o tamanho do passo, ou seja,  $|\mathbf{d}| \leq \Delta$ . Dessa forma, chega-se ao conjunto de restrições dadas pelas Eq. 17 e 18, onde  $i$  varia de 1 até  $n$ , com  $n$  dado da mesma forma que no parágrafo anterior.

$$C_{i+2n+4}(\mathbf{d}) = \Delta_i + d_i \geq 0 \tag{17}$$

$$C_{i+3n+4}(\mathbf{d}) = \Delta_i - d_i \geq 0 \tag{18}$$

### 3.4 Programação linear sequencial

O método da programação linear é uma solução matemática aplicada a problemas de otimização onde a função objetivo e todas as restrições representadas por equações ou inequações das variáveis de projeto são lineares em relação a essas variáveis.

A Eq. 19 é a forma matemática de apresentação do problema geral de otimização com restrições de igualdade e desigualdade. Nessa equação,  $f$  é a função objetivo que se deseja minimizar,  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de projeto e  $C$  e  $D$  são funções das variáveis de projeto que definem, nesta ordem, as restrições de desigualdade e igualdade do problema analisado.

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } C_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ e } D_j(\mathbf{x}) = 0 \tag{19}$$

As Eq. 20 e 21 apresentam a linearização das funções objetivo e restrições usando a expansão em série de Taylor truncadas no termo de primeira ordem, onde  $\nabla^T f_k$  é um vetor linha com  $n$  termos dados pelas derivadas parciais de primeira ordem da função objetivo em relação às variáveis de projeto avaliadas no ponto  $\mathbf{x}_k$ . O termo  $\nabla^T C_{ik}$  é definido de forma análoga, considerando as funções que definem as restrições.

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong f(\mathbf{x}_k) + \nabla^T f_k \mathbf{d} \tag{20}$$

$$C_i(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) \cong C_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T C_{ik} \mathbf{d} \tag{21}$$

Conhecido um ponto de partida viável  $\mathbf{x}_0$ , o problema apresentado na Eq. 19 pode ser analisado de forma iterativa utilizando aproximações lineares das funções objetivo e restrições e a equação iterativa  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}$ . O passo  $\mathbf{d}$  é encontrado resolvendo o problema de otimização linear dado na Eq. 22. Neste trabalho é aplicado o método Simplex para a solução desse problema de otimização linear.

$$\min_{\mathbf{d}} \nabla^T f_k \mathbf{d} \text{ sujeito a } \nabla^T C_{ik} \mathbf{d} \geq -C_i(\mathbf{x}_k) \tag{22}$$

### 3.5 Forma padrão para o problema analisado

Para definir o passo seguinte do método da programação linear sequencial por meio do método Simplex, é necessário colocar o proble-

ma linear da Eq. 22 na forma padrão da programação linear. Fazendo isso, obtém-se a Eq. 23 para o problema de otimização linear, que definirá o passo a ser dado em cada iteração. A formulação nesse item é apresentada para o caso de perfil I não simétrico ( $n = 10$  e  $m = 44$ ); no caso de perfil I simétrico ( $n = 8$  e  $m = 36$ ), a formulação é análoga.

$$\min_{\mathbf{d}^*} [\nabla^T f_k \quad -\nabla^T f_k \quad 0_{1 \times m}] \mathbf{d}^* \text{ sujeito a} \tag{23}$$

$$[[\nabla^T C]_{m \times n} \quad -[\nabla^T C]_{m \times n} \quad -[\mathbf{I}]_{m \times m}] \mathbf{d}^* = -[C]_{m \times 1}$$

Na Eq. 23,  $\nabla^T f_k$  é como definido anteriormente,  $\mathbf{d}^* = [\mathbf{d}^+ \quad \mathbf{d}^- \quad \mathbf{u}^T]^T$ , onde  $\mathbf{d}^+$  e  $\mathbf{d}^-$  são dois vetores com  $n$  termos (número de variáveis de projeto),  $\mathbf{u}$  é um vetor com  $m$  termos (número de restrições),  $\mathbf{I}_{m \times m}$  é uma matriz identidade de ordem  $m$ , e  $0_{1 \times m}$  é um vetor linha nulo com  $m$  termos. Para maiores informações de como chegar a essa forma padrão, consultar [23, 24].

As derivadas em relação às cargas última e de serviço são obtidas usando o método aproximado das diferenças finitas. As derivadas em relação à função objetivo, as restrições de flambagem local da mesa inferior e da alma, e as restrições laterais e de controle do tamanho do passo são obtidas de forma analítica derivando essas expressões em relação às  $n$  variáveis de projeto. A Eq. 24 apresenta as derivadas da função objetivo em relação às  $n$  variáveis de projeto, já as Eq. 25 a 32 apresentam as derivadas das  $m$  restrições de desigualdade em relação às  $n$  variáveis de projeto.

$$\nabla^T f_k = [hC_c \quad bC_c \quad t_{fi}C_a \quad b_{fi}C_a \quad t_{fs}C_a \quad b_{fs}C_a \quad t_wC_a \quad b_wC_a \quad C_b \quad C_b] \tag{24}$$

$$\nabla^T C_1 = \left[ \frac{\partial f_u}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f_u}{\partial x_n} \right] \tag{25}$$

$$\nabla^T C_2 = - \frac{1}{\delta_{lim} \left[ \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \right]} \tag{26}$$

$$\nabla^T C_3 = \left[ 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \lambda_f \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \tag{27}$$

$$\nabla^T C_4 = [0 \quad \dots \quad 0 \quad -1 \quad \lambda_w \quad 0 \quad 0] \tag{28}$$

$$\nabla^T C_{i+4} = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \text{ com } i = 1, \dots, n \tag{29}$$

$$\nabla^T C_{i+n+4} = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{-1}_{i\text{-ésima posição}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \text{ com } i = 1, \dots, n \tag{30}$$

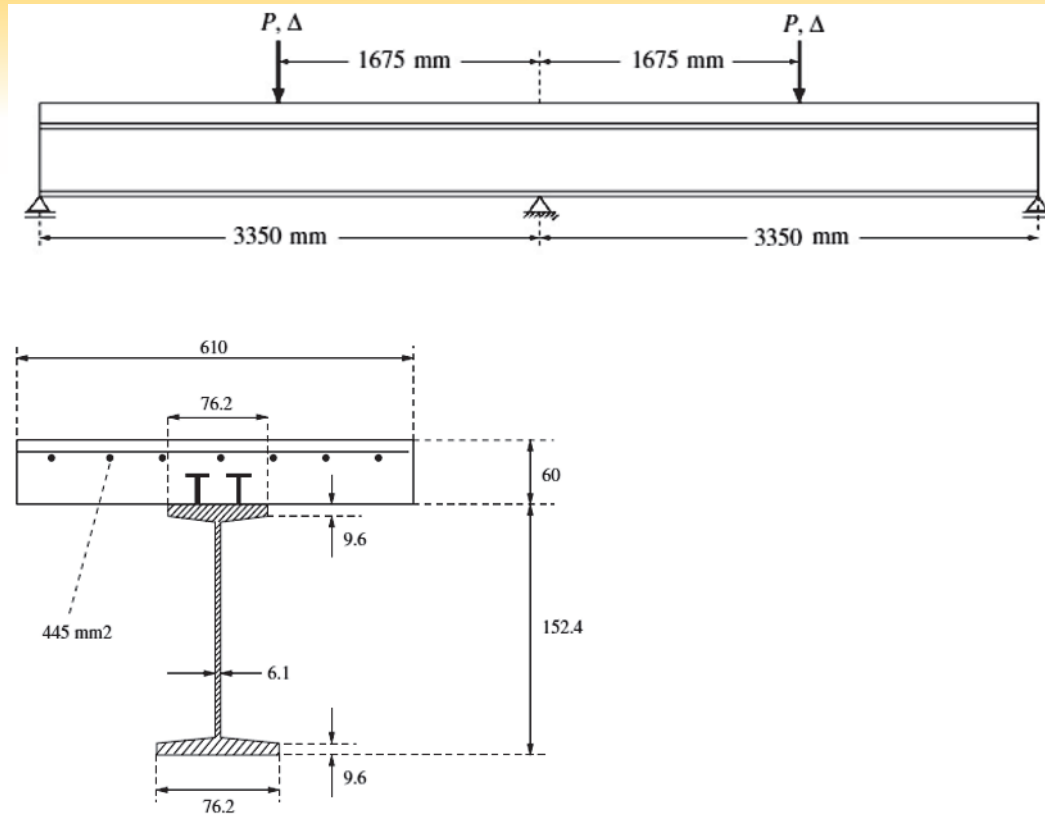
$$\nabla^T C_{i+2n+4} = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \text{ com } i = 1, \dots, n \tag{31}$$

$$\nabla^T C_{i+3n+4} = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{-1}_{i\text{-ésima posição}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \text{ com } i = 1, \dots, n \tag{32}$$

### 3.6 Algoritmo

O algoritmo a seguir descreve o método iterativo para se obter um vetor  $\mathbf{x}$  que minimize a função objetivo  $f(\mathbf{x})$  e satisfaça todas as restrições do projeto discutidas anteriormente.

**Passo 1** Leitura dos dados de entrada fornecidos pelo usuário no arquivo de entrada: curva tensão-deformação dos materiais que compõem a viga mista, carregamento considerando combinação última e de serviço das ações, condições de apoio, custo unitário dos materiais, parâmetros limites, discretização da viga em elementos finitos, tipo de análise (para perfil de aço I simétrico ou não simétrico), bem como as dimensões da laje de concreto, viga de aço e área de aço de armadura. Essas dimensões devem ser fornecidas respeitando os parâmetros limites. Outros dados de entrada são as variações possíveis dentro dos parâmetros limites para cada variável de projeto. Esses dados são utilizados pelo programa para



**Figura 3** Viga mista com interação parcial: viga contínua e seção transversal [25]

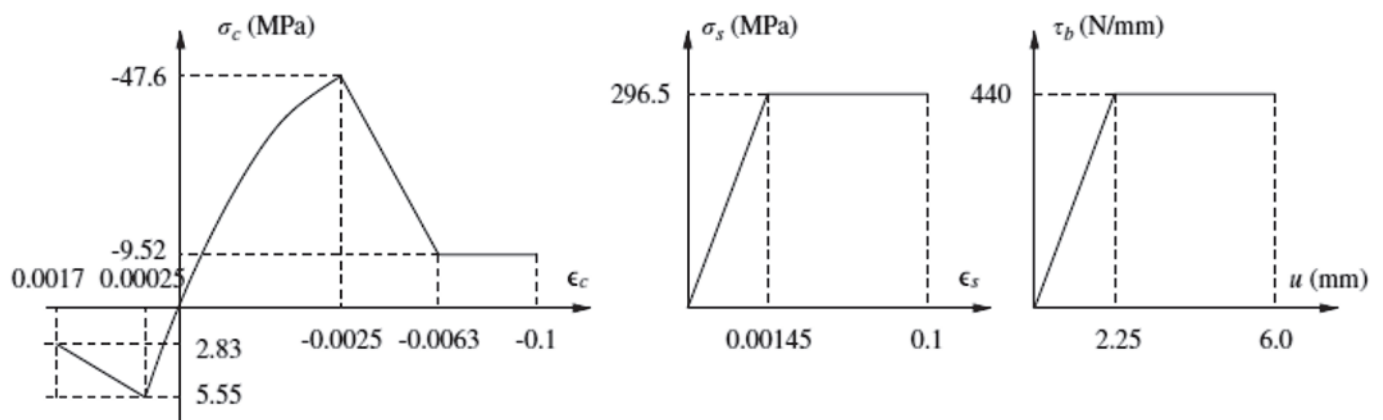
definir uma seção discreta a partir da seção otimizada considerando as variáveis de projeto como contínuas.

**Passo 2** Determinação do ponto de partida que atenda a todas as restrições de projeto. Esse ponto é necessário para iniciar o processo iterativo de busca do ponto de ótimo usando aproximações lineares para as restrições e função objetivo a cada passo. O algoritmo realiza a análise estrutural e verifica se as dimensões fornecidas pelo usuário atendem às restrições. Caso não sejam atendidas, o algoritmo aumenta em 10% as dimensões fornecidas pelo usuário até que todas as restrições sejam satisfeitas.

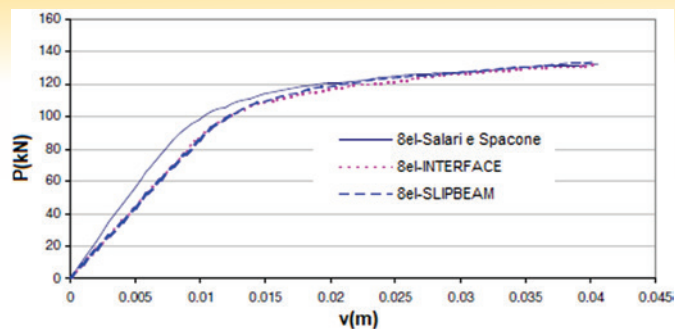
**Passo 3** Utilização da programação linear sequencial e o método Simplex para definição da seção otimizada. Usando

o ponto de partida do passo anterior define-se um novo ponto resolvendo um problema de otimização linear usando o método Simplex.

**Passo 4** Transformando a seção otimizada do passo anterior em uma seção com variáveis discretas com variação definida pelo usuário. O algoritmo fixará o valor de uma variável de projeto conforme uma lista disponível e mais próximo do valor obtido pelo método Simplex. A partir daí, essa variável será eliminada e o problema será reanalisado definindo novos valores para as outras variáveis, e assim sucessivamente até que todas as variáveis de projetos sejam definidas conforme a variação definida pelo usuário.



**Figura 4** Leis constitutivas utilizadas por Salari e Spacone [25], respectivamente: concreto, aço (perfil e barras de reforço) e conexão da interface



**Figura 5**  
Curva carga-deslocamento para um ponto no meio dos vãos da viga mista

## 4. Aplicações

Em todos os exemplos analisados para comprovação do método proposto neste artigo, as análises não lineares das vigas mistas foram feitas usando os elementos finitos apresentados no item 2. São apresentados, a seguir, dois desses exemplos.

### 4.1 Exemplo 1

Salari e Spacone [25] analisaram a capacidade de carga de uma viga mista de aço e concreto, de dois tramos, contínua sobre o apoio central, com interação parcial, ilustrada na Figura 3. Na análise numérica, os autores utilizaram um elemento finito de barra com dez graus de liberdade, capaz de simular a não linearidade física dos materiais. As relações constitutivas dos materiais usadas por Salari e Spacone [25] são mostradas na Figura 4.

O exemplo da Figura 3 também foi analisado por Silva e Sousa [1]. Os resultados numéricos obtidos por Salari e Spacone [25] e Silva e Sousa [1] são mostrados na Figura 5 a seguir, onde encontram-se representadas as curvas que relacionam o carregamento aplicado  $P$  ao deslocamento vertical  $\Delta$  da viga analisada nesse exemplo.

Observa-se na Figura 5 que o carregamento concentrado máximo suportado pela viga mista analisada é de 132,3kN, aplicado no meio do vão. Esse valor será utilizado como carregamento solicitante em uma viga mista contínua com as mesmas configurações da viga mostrada na Figura 3, para a qual o usuário definirá uma seção inicial qualquer e o algoritmo de otimização fornecerá uma viga mista otimizada, validando sua aplicação.

Na simulação foram utilizados 8 elementos de viga para simular a viga de concreto, 8 elementos de viga para simular a viga de aço e 8 elementos de interface que simulam a conexão deformável.

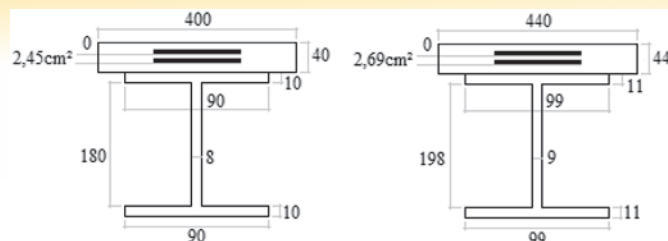
#### 4.1.1 Otimizando o perfil I de aço

Será forçado que as variáveis referentes à seção da laje de concreto e da área da armadura apresentem valores finais iguais ao da seção da Figura 3 ( $A_{s1}$  com área de 445mm<sup>2</sup> e  $A_{s2}$  igual a 0,  $b$  com largura de 610mm e  $h$  com espessura de 60mm). Para isso, será definido no arquivo de entrada um custo baixo para o

**Tabela 1**

Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm<sup>2</sup>)

Variáveis	$b$	$h$	$b_f$	$t_f$	$b_w$	$t_w$	$A_{s1}$	$A_{s2}$
Limite inferior	200	10	40	2	80	2	0	0
Limite superior	610	60	1000	100	2000	100	4,4	0



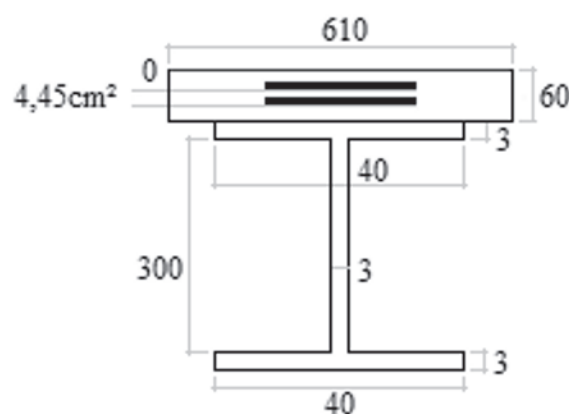
**Figura 6**  
Seção definida pelo usuário e seção inicial definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

concreto e armadura e um custo alto para o aço, em conjunto com valores limites superiores das dimensões da seção de concreto e da armadura iguais aos valores das dimensões da seção da Figura 3. Dessa forma, na busca do custo mínimo, o algoritmo tenderá a reduzir mais significativamente o perfil de aço até se atingir um ponto em que ele começará a aumentar as dimensões do concreto e da armadura, para continuar reduzindo o perfil de aço. O aumento das dimensões do concreto e da armadura da laje cessará quando forem atingidas as dimensões limites (restrições laterais) definidas; a partir daí apenas as variáveis do perfil de aço serão alteradas.

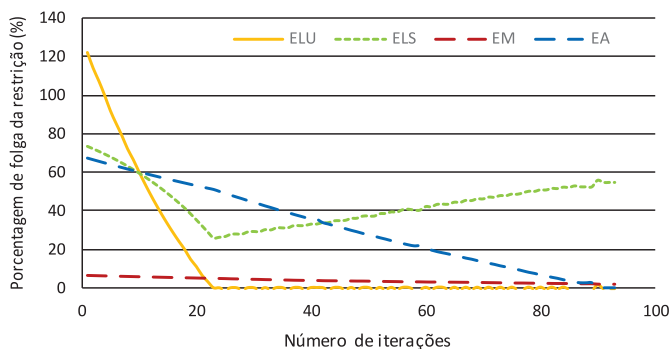
É mostrada na Figura 6 a seção inicial fornecida pelo usuário que deve satisfazer apenas as exigências das dimensões limites também inseridas no arquivo de entrada. A seção alterada pelo algoritmo para atender às exigências referentes aos carregamentos e esbelteza é apresentada também na Figura 6, sendo essa seção o ponto de partida do método de otimização neste exemplo.

Na Tabela 1 são apresentados os valores limites definidos para as variáveis de projeto. Como já mencionado, os custos foram fornecidos forçando as variáveis referentes à seção de concreto ( $b$  e  $h$ ) e à armadura ( $A_{s1}$  e  $A_{s2}$ ) a convergirem para seus valores limites superiores.

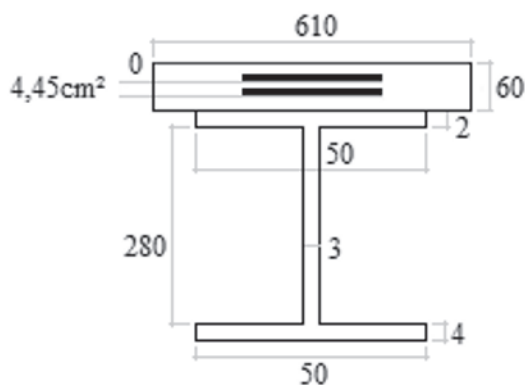
Na atribuição dos valores discretos, os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário foram de 10 mm para as dimensões  $b_f$



**Figura 7**  
Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)



**Figura 8**  
Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)



**Figura 9**  
Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

e  $b_w$  e de 1,0 mm para as dimensões  $t_f$  e  $t_w$ . Assim, as larguras serão valores discretos com precisão de centímetro e as espessuras serão valores discretos com precisão de milímetro, entre os limites inferior e superior de cada variável descritos na Tabela 1.

O algoritmo implementado irá fornecer uma seção de concreto armado com dimensões e armaduras iguais aos da seção de Salari e Spacone, sendo que, para a seção de aço, será fornecido o menor perfil que atenda a todas as restrições de projeto. Para a restrição referente ao carregamento último, foi considerado uma carga concentrada no meio do vão da viga de 132,3 kN, e para o carregamento de serviço foi considerado o valor de 70 kN para uma carga concentrada no meio do vão da viga, que é um carregamento aproximadamente igual à metade do carregamento obtido por uma combinação última das ações.

A resposta obtida neste exemplo, considerando perfil I simétrico,

**Tabela 2**

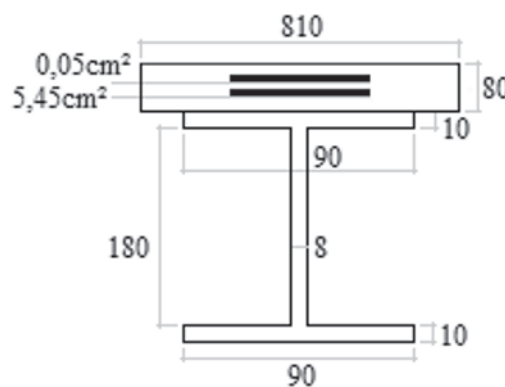
Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em  $cm^2$ )

Variáveis	b	h	$b_f$	$t_f$	$b_w$	$t_w$	$A_{s1}$	$A_{s2}$
Limite inferior	100	40	76,2	9,6	133,2	6,1	4,4	0
Limite superior	2000	250	1000	100	2000	100	5,4	0,01

é mostrada na Figura 7. Como já esperado, a seção de concreto armado é igual à seção de Salari e Spacone. O perfil I simétrico apresenta uma área total de 1.140mm<sup>2</sup>, enquanto que o perfil de Salari e Spacone apresenta área de 2.390mm<sup>2</sup>. Pode-se notar que o algoritmo de otimização partiu de uma seção inicial dada na Figura 6 com área de 3.960mm<sup>2</sup> e convergiu para um perfil de área 71,2% menor que a seção de partida e 52,3% menor em relação à seção dos referidos autores.

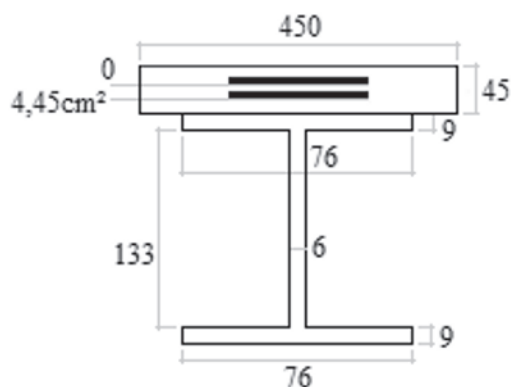
São ilustradas na Figura 8 as variações das restrições referentes aos carregamentos último e de serviço, à esbelteza da mesa e da alma, em relação ao número de iterações. Nessa figura, ELU faz referência a restrição dada pelo carregamento último, ELS faz referência a restrição dada pelo carregamento de serviço, EM e EA fazem referências à restrição de esbelteza da mesa e da alma, respectivamente. Pode-se observar que a seção de partida apresenta uma folga de 122%, 73%, 6%, e 67% em relação a essas restrições, respectivamente. Nota-se que a verificação quanto ao estado limite último é determinante quando comparada ao estado limite de serviço, visto que, em relação ao estado limite de serviço, a seção otimizada apresenta uma folga de 54% e nenhuma folga em relação ao estado limite último. Nota-se também que a esbelteza da alma apresenta bastante folga no início das iterações, finalizando sem folga, e a esbelteza da mesa, apresenta uma pequena folga durante todo o processo iterativo.

As mesmas análises feitas para o perfil I duplamente simétrico foram realizadas para o caso não simétrico e são apresentadas a seguir. A Figura 9 mostra a resposta para a seção otimizada não simétrica e pode-se observar que a seção de concreto armado é igual à seção de Salari e Spacone, como deveria ser, e que o perfil I não simétrico apresenta área total de 1140 mm<sup>2</sup>. Da mesma forma que para a seção simétrica, o algoritmo de otimização partiu da seção dada pela Figura 6 e convergiu para um perfil de área

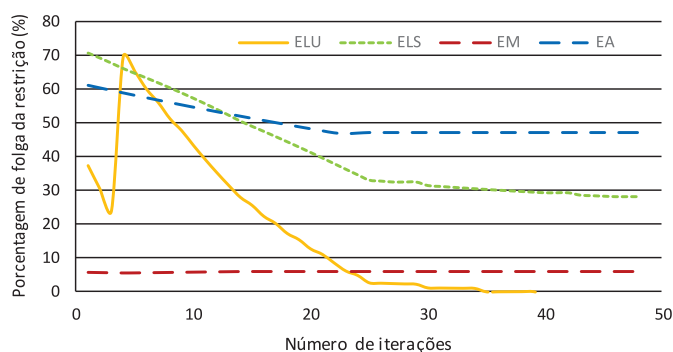


**Figura 10**  
Seção definida pelo usuário e seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

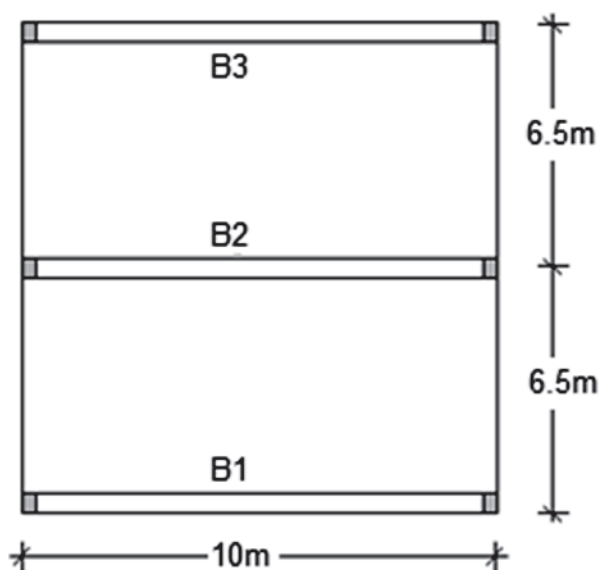




**Figura 11**  
Seção simétrica otimizada pelo algoritmo  
(dimensões em mm)



**Figura 12**  
Variação das restrições no processo de  
otimização (laje de concreto)



**Figura 13**  
Piso formado por laje de concreto e vigas de aço  
simplesmente apoiadas

71,2% menor que a da seção de partida e 52,3% menor que a da seção dos referidos autores.

O gráfico das variações das restrições para o caso não simétrico é praticamente o mesmo para a seção simétrica e por isso não é apresentado.

#### 4.1.2 Otimizando a laje de concreto

Neste exemplo são consideradas as mesmas características do exemplo do sub-item anterior, porém será definida uma seção inicial qualquer e o algoritmo de otimização fornecerá um perfil I de aço simétrico igual à seção dos autores e otimizará a seção da laje de concreto armado.

A seção inicial fornecida pelo usuário é mostrada na Figura 10. Como no exemplo anterior, essa seção deve satisfazer apenas às exigências das dimensões limites. Neste exemplo, a seção fornecida pelo usuário atende a todas as restrições de projeto, sendo então tomada como seção de partida para o algoritmo de otimização. Na Tabela 2 são apresentados os valores limites definidos pelo usuário para as variáveis de projeto. Como já mencionado, esses valores servirão como limites para as variáveis de projeto (restrições laterais), lembrando que os custos foram fornecidos forçando as variáveis referentes ao perfil de aço ( $b_f$ ,  $t_f$ ,  $b_w$  e  $t_w$ ) e armadura ( $A_{s1}$  e  $A_{s2}$ ) convergirem para seus valores limites inferiores.

Na atribuição dos valores discretos, os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário foram de 10 mm para a dimensão  $b$ , 5 mm para  $h$  e 0,1 mm para as dimensões  $b_f$ ,  $t_f$ ,  $b_w$  e  $t_w$ . Dessa forma, a altura da laje de concreto será um valor discreto com precisão de 5mm entre os limites inferior e superior dados na Tabela 2, ou seja, um valor discreto da lista: 40, 45, 50, ..., 240, 245, 250mm.

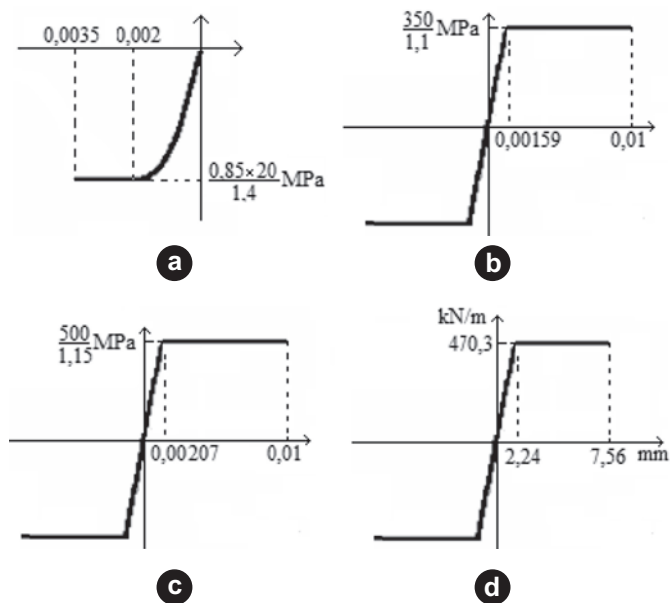
Na Figura 11 é mostrada a resposta obtida para este exemplo. Nessa figura observa-se que a armadura e as dimensões do perfil I são iguais às da seção de Salari e Spacone, como previsto, e a seção de concreto apresenta área total de 20.250 mm<sup>2</sup>, enquanto que a laje de concreto da seção de Salari e Spacone apresenta área de 36.600 mm<sup>2</sup>. Assim, nota-se que o algoritmo de otimização partiu de uma seção qualquer dada na Figura 6, com área de 64.800mm<sup>2</sup> e convergiu para uma seção de área 68,8% menor que a da seção de partida e 44,6% menor que a da seção de Salari e Spacone.

Observa-se na Figura 12 que a seção de partida apresenta uma folga de 37%, 71%, 5%, e 61%, respectivamente, em relação à verificação quanto aos carregamentos último e de serviço, e às esbeltezes da mesa inferior e da alma. Verifica-se nessa mesma figura que, para a flecha limite estabelecida e o carregamento de serviço considerado, iguais aos anteriores, onde se utilizou a seção de Salari e Spacone, a verificação quanto ao estado limite último é determinante quando comparada ao estado limite de serviço, já que a seção otimizada apresenta uma folga de 28% em relação ao estado limite de serviço.

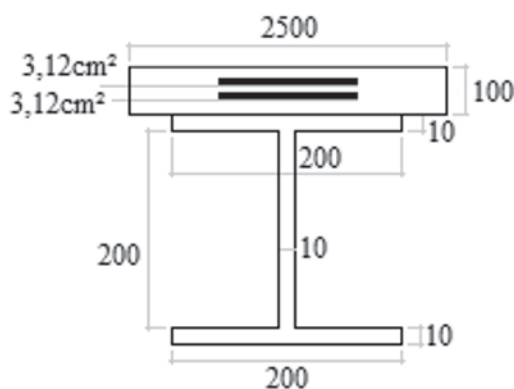
#### 4.2 Exemplo 2

O piso da Figura 13 a seguir é formado por uma laje de concreto ( $f_{ck} = 20\text{MPa}$ ) apoiada em três vigas de aço AR 350 ( $f_y = 350\text{MPa}$ ) simplesmente apoiadas nas extremidades. Para a definição do carregamento último e de serviço atuantes nas vigas é

considerado um carregamento variável acidental de 2kN/m<sup>2</sup> (piso de escritório), um carregamento permanente de peso próprio da laje mais revestimento de 3,8kN/m<sup>2</sup> e um carregamento permanente por metro linear de viga de 0,8kN/m (peso próprio do perfil I de aço). É considerado que a viga central pega metade da área do piso e a outra metade é igualmente dividida entre as vigas das extremidades. Nesse exemplo serão determinadas as dimensões da viga mista formada pela laje de concreto e a viga central (viga V2 na Figura 13) de forma a minimizar uma função custo relacionada com o custo do concreto, aço do perfil e aço da armadura. A viga é dada por um perfil I simétrico, a armadura por barras de 10mm de aço CA50 e a laje de concreto retangular com espessura a ser deter-



**Figura 14**  
Leis constitutivas utilizadas neste exemplo: (a) concreto, (b) aço, (c) barras de reforço e (d) conexão da interface



**Figura 15**  
Seção definida pelo usuário (dimensões em mm)

minada e largura fixa dada pelo conceito de largura efetiva[22]. De acordo com os dados fornecidos nos parágrafos anteriores, na Figura 13, e nas condições de combinações de ações para verificação de estado limite último e de serviço da NBR 8800 [22], chega-se aos carregamentos de cálculo último e de serviço dados por 55,16kN/m e 30,7kN/m, respectivamente. Segundo essa mesma norma a largura efetiva (*b*) é de 2,5m.

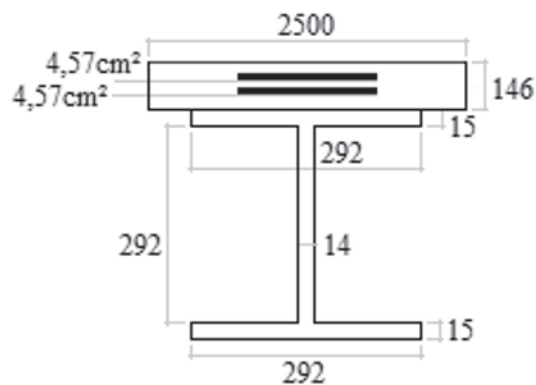
A não linearidade física dos materiais é representada pelas suas curvas tensão-deformação e a curva força cortante versus deslizamento da conexão deformável. Nesse exemplo são usadas as curvas tensão-deformação mostradas na Figura 14 [21,22]. Para a curva da conexão deformável é considerado o uso de conectores do tipo pino com cabeça de 19,1mm espaçados a cada 20cm. O aço do conector apresenta  $f_y = 345$ MPa e  $f_u = 415$ MPa. Para maiores detalhes de como chegar nessa curva, consultar as referências [26, 27].

Para análise numérica, utilizou-se uma discretização da viga mista  $V_2$  da Figura 13 em 4 elementos de viga para simular a viga de concreto, 4 elementos de viga para simular a viga de aço, e 4 elementos de interface para conectar os elementos de viga e simular a conexão deformável.

Na definição da função objetivo é necessário que o usuário forneça os valores de custo do concreto, aço e armadura. Nesse exemplo foram adotados os valores de R\$350/m<sup>3</sup>, R\$31000/m<sup>3</sup>, e R\$50000/m<sup>3</sup> para o custo dos materiais concreto, aço e armadura, respectivamente.

É apresentada na Figura 15 a seção inicial fornecida pelo usuário para esse exemplo. A seção inserida pelo usuário deve satisfazer apenas as exigências das dimensões limites. Como nos outros exemplos, se as exigências de esbeltez das mesas e alma e as exigências referentes aos carregamentos último e de serviço não forem satisfeitas, a seção é alterada pelo algoritmo e tem suas dimensões aumentadas em um processo iterativo até que todas as restrições sejam satisfeitas tornando-se essa o ponto de partida para o procedimento de otimização. Nesse exemplo, a seção da Figura 15 não atendeu as exigências e a seção que foi alterada pelo algoritmo é apresentada na Figura 16.

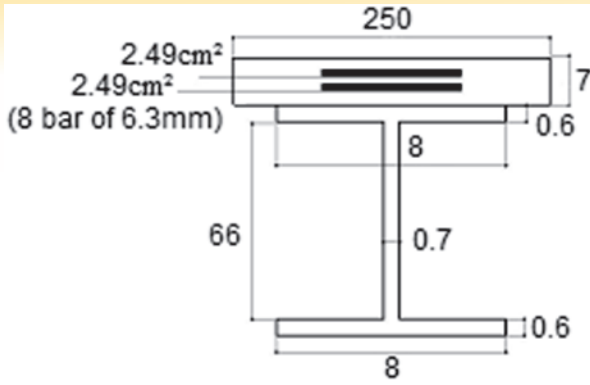
Na Tabela 3 são apresentados os valores limites definidos pelo usuário para as variáveis de projeto. Observa-se dessa tabela que



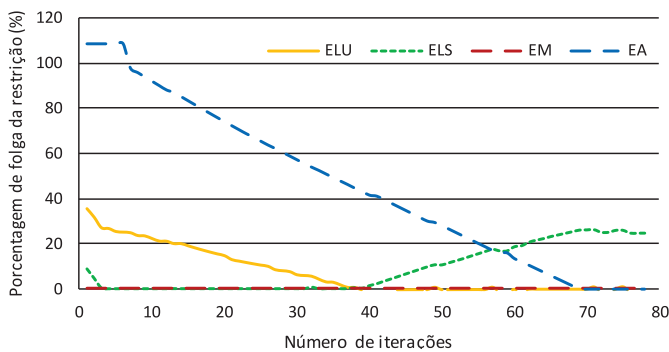
**Figura 16**  
Seção de partida definida pelo algoritmo (dimensões em mm)

**Tabela 3**  
Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm<sup>2</sup>)

Variáveis	b	h	b <sub>f</sub>	t <sub>f</sub>	b <sub>w</sub>	t <sub>w</sub>	A <sub>s1</sub>	A <sub>s2</sub>
Limite inferior	2460	70	50	20	200	2	2,49	2,49
Limite superior	2500	250	1000	100	2000	100	20	20



**Figura 17**  
Seção simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)



**Figura 18**  
Variação das restrições no processo de otimização (perfil simétrico)

a variável  $b$  tem uma pequena variabilidade e que qualquer que for o seu valor dentro dessa variabilidade a dimensão final atribuída será o valor de 2,5m. Isso porque no processo de transformação dessa variável contínua em um valor discreto será utilizada uma variação de 50mm. Para as outras variáveis, os parâmetros de variação fornecidos pelo usuário são de 5mm para  $h$ , 10mm para  $b_f$  e  $b_w$  e de 1,0mm para as dimensões de  $t_f$  e  $t_w$ .

Nesse exemplo, o algoritmo irá fornecer uma seção com largura da laje de concreto ( $b$ ) igual a 2,5m e as demais dimensões serão definidas dentro dos limites especificados de forma a minimizar a função objetivo relacionada ao custo. A resposta obtida desse exemplo, considerando perfil I simétrico, é mostrada na Figura 17. Verifica-se dessa figura que a seção otimizada apresenta a largura da laje de concreto de 2,5m, como se desejava, e valores limites mínimos para a espessura da laje de concreto ( $h$ ) e para a armadura ( $A_{s1}$  e  $A_{s2}$ ).

Na Figura 18 a seguir são ilustradas as variações das restrições em relação ao número de iterações. Observa-se dessa figura que a seção de partida apresenta uma folga de 35%, 9%, 0%, e 109%, respectivamente, em relação às restrições referentes aos carregamentos último e serviço, esbeltez da mesa e alma. Verifica-se

**Tabela 4**

Valores limites para as variáveis de projeto (dimensões em mm e área em cm<sup>2</sup>)

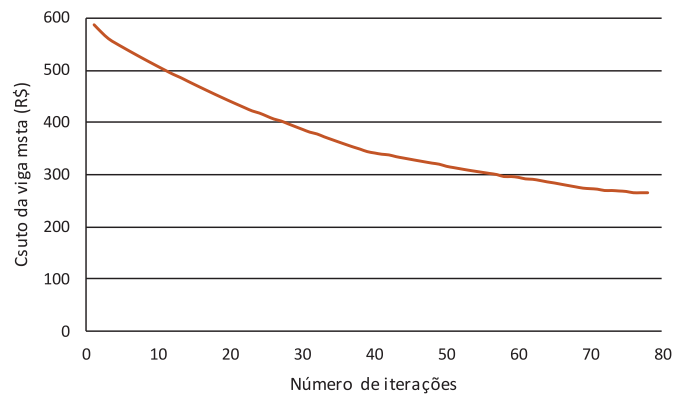
Variáveis	$b$	$h$	$b_f$	$t_f$	$b_w$	$t_w$	$A_{s1}$	$A_{s2}$
Limite inferior	2460	70	50	20	200	2	2,49	2,49
Limite superior	2500	250	1000	100	2000	100	20	20

dessa figura que o estado limite último é determinante no dimensionamento. Na iteração 38 as folgas em relação aos dois estados limites eram nulas, no entanto, a folga de 45% em relação a esbeltez da alma permitiu a continuação do método levando a uma seção com esbeltez limite da alma e 25% de folga para o estado limite de serviço. Já a esbeltez da mesa apresenta-se sem folga desde a seção de partida.

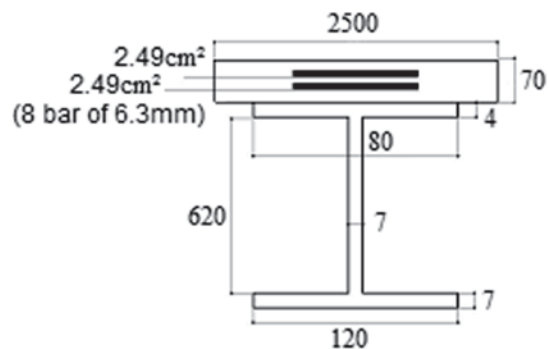
Na Figura 19 é apresentada a variação do custo por metro linear da viga com as iterações do método apresentado neste trabalho. A seção de partida apresenta um custo de R\$586,61/m enquanto que a seção otimizada apresenta um custo de R\$265,01/m, uma redução de 54,8%.

As mesmas análises feitas considerando perfil I duplamente simétrico foram realizadas considerando perfil I não simétrico. A seção definida pelo usuário e a seção de partida do algoritmo são as mesmas do caso simétrico. Na Tabela 4 são apresentados os valores limites definidos pelo usuário para as variáveis de projeto.

A seção não simétrica otimizada pelo algoritmo é apresentada na Figura 20. Verifica-se dessa figura que a mesa superior é menor que a mesa inferior, o que é justificado devido a viga mista está submetida apenas a momentos positivos.



**Figura 19**  
Variação do custo por metro linear da viga mista (perfil simétrico)



**Figure 20**  
Seção não simétrica otimizada pelo algoritmo (dimensões em mm)

A curva da variação das restrições e do custo por metro linear da viga com as iterações é muito semelhante ao caso do perfil I simétrico. A seção de partida apresenta um custo de R\$586,61/m enquanto que a seção otimizada apresenta um custo de R\$251,12/m, uma redução de 57,2%. Já em comparação com o perfil simétrico tem-se uma redução de 5,2%.

## 5. Conclusões

Este artigo consiste na implementação de um algoritmo para definir as dimensões do perfil de aço do tipo I simétrico ou não simétrico, das dimensões da laje de concreto retangular e da quantidade de armadura, de forma que a viga mista aço-concreto com interação parcial sujeita à flexão simples atenda às condições de projeto especificadas em normas técnicas, minimizando uma função objetivo custo definida a partir da quantidade de material e do custo desses. O método de programação linear sequencial foi utilizado para resolver o problema não linear na determinação dos esforços resistentes na seção mista aço-concreto em relação às variáveis de projeto. A cada passo do processo sequencial foi utilizado o método Simplex para definir o próximo passo garantindo um avanço no sentido do ponto de mínimo do problema. Contando com a eficiência das formulações dos elementos finitos usadas, o método proposto para a busca da seção otimizada teve sua eficiência devidamente comprovada a partir dos resultados observados nos exemplos apresentados.

## 6. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a Universidade Federal de Ouro Preto/PROPEC, o CNPq, e a FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

## 7. Referências Bibliográficas

- [1] SILVA, A. R., SOUSA Jr., J. B. M. Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 43, p. 954-964, 2007.
- [2] R. XU, Y.F. Wu, Two-dimensional analytical solutions of simply supported composite beams with interlayer slips, *Int. J. Solids Struct.* 44 (2007) 165–175.
- [3] A. DALL'ASTA, A. ZONA, Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection, *Finite Elem. Anal. Des.* 40 (2004) 425–448.
- [4] G. RANZI, F. GARA, G. LEONI, M.A. BRADFORD, Analysis of composite beams with partial shear interaction using available modelling techniques: a comparative study, *Comput. Struct.* 84 (2006) 930–941.
- [5] G. RANZI, A. ZONA, A steel-concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component, *Eng. Struct.* 29 (2007) 3026–3041.
- [6] S. SCHNABL, M. SAJE, G. TURK, I. PLANINC, Locking-free two-layer Timoshenko beam element with interlayer slip, *Finite Elem. Anal. Des.* 43 (2007) 705–714.
- [7] A. DALL'ASTA, A. ZONA, Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection, *Finite Elem. Anal. Des.* 40 (2004) 1907–1930.
- [8] F. GARA, G. RANZI, G. LEONI, Displacement-based formulations for composite beams with longitudinal slip and vertical uplift, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 65 (8) (2006) 1197–1220.
- [9] SOUSA JR, JOÃO BATISTA M. ; SILVA, A. R. . Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. *Engineering Structures*, v. 32, p. 1671-1680, 2010.
- [10] SILVA, A. R.; SOUSA JR., JOÃO BATISTA M. . A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 45, p. 305-314, 2009.
- [11] SOUSA JR., JOÃO BATISTA M. ; OLIVEIRA, CLAUDIO E.M. ; SILVA, A. R. . Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam columns with partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 66, p. 772-779, 2010.
- [12] KRAVANJA, S.; SILIH, S. The MINLP optimisation of composite I-beams. *Transactions on the Built Environment*, v. 52, p. 401-407, 2001.
- [13] KRAVANJA, S.; SILIH, S. Optimization based comparison between composite I beams and composite trusses. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 59, p. 609-625, 2003.
- [14] KLANŠEK, U.; KRAVANJA, S. Comparison between three different composite systems. *High Performance Structures and Materials II*, v. 52, p. 87-97, 2004.
- [15] KLANŠEK, U.; KRAVANJA, S. Cost estimation, optimization and competitiveness of different composite floor systems - Part 1: Self-manufacturing cost estimation of composite and steel structures. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 62, p. 434-448, 2006a.
- [16] KLANŠEK, U.; KRAVANJA, S. Cost estimation, optimization and competitiveness of different composite floor systems - Part 2: Optimization based competitiveness between the composite I beams, channel-section and hollow-section trusses. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 52, p. 449-462, 2006b.
- [17] KLANŠEK, U.; KRAVANJA, S. Cost optimization of composite I beam floor system. *American Journal of Applied Sciences*, v. 5, p. 7-17, 2007.
- [18] SENOUCI, A. B.; AL-ANSARI, M. S. Cost optimization of composite beams using genetic algorithms. *Advances in Engineering Software*, v. 40, p. 1112-1118, 2009.
- [19] ABADI, A. S. M.; KAVEH, A. Cost optimization of a composite floor system using an improved harmony search algorithm. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 66, p. 664-669, 2010.
- [20] SILVA, A. R., SOUSA Jr., J. B. M.; NEVES, F. A. Optimization of steel-concrete composite beams with partial interaction by sequential linear programming. XXXII CILAMCE. Ouro Preto, 2011.
- [21] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 6118: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014. (in portuguese)
- [22] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 8800: projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008. (in portuguese)
- [23] VANDERPLAATS, G., 1984. Numerical optimization

technique for engineering design - with applications. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.

- [24] HAFTKA, R.; KAMAT, M. Elements of structural optimization. Martinus Nijhoff Publishers, Boston, 1985.
- [25] SALARI, M. K.; SPACONE, E. Finite element formulation of one-dimensional elements with bond-slip. Engineering Structures, v. 23, p. 815-826.
- [26] OEHLERS, D. J.; BRADFORD, M. A. Composite steel and concrete structural members: fundamental behaviour. Pergamon Press, Oxford, 1995.
- [27] OLLGAARD, J. G.; SLUTTER, R. G.; FISHER, J. W. Shear strength of stud connectors in lightweight and normal-weight concrete. AISC Eng, v. J, p. 55-64, 1971.