

Determination of parameters of a viscous-cohesive fracture model by inverse analysis

Determinação de parâmetros de um modelo visco-coesivo de fratura por análise inversa



F. L. GEA DOS SANTOS^a
fabiozea@hotmail.com

J. L. A. O. SOUSA^a
jls@fec.unicamp.br

Abstract

The quasi-brittle, loading rate dependent behaviour of the concrete, characterized by a fracture process zone (FPZ) ahead of the crack front, can be described through a viscous-cohesive model. In this paper, a viscous cohesive model proposed in a former paper is evaluated for a group of high strength concrete beams loaded at rates from 10-5 mm/s to 10+1 mm/s. A software has been developed to enable the automatic determination of the viscous-cohesive model parameters through inverse analysis on load-versus loading-point displacement ($P-\delta$) from three-point bend tests on notched prismatic specimens. The strategy allowed the sensitivity analysis of the parameters related to viscous behaviour. The analysis of results shows that the formerly proposed model can be improved for a better simulation of the loading rate dependence on the cohesive fracture process.

Keywords: fracture, viscous-cohesive model, inverse analysis.

Resumo

O comportamento quase-frágil, dependente da taxa de carregamento do concreto, caracterizado pelo desenvolvimento de uma zona de processos de fratura (ZPF) ao redor do fronte da trinca, pode ser representado por uma lei visco-coesiva. Neste trabalho, um modelo visco-coesivo proposto em um artigo anterior foi avaliado para um grupo de vigas de concreto de alta resistência carregados com taxas variando de 10-5 mm/s a 10+1 mm/s. Desenvolveu-se um software para a determinação automática dos parâmetros do modelo visco-coesivo utilizando-se curvas da relação carga versus deslocamento no ponto de aplicação ($P-\delta$) obtidas em ensaios com vigas prismáticas ranhuradas carregadas em três pontos (Three-Point-Bend Test), com taxas de carregamento variadas. A estratégia permitiu a análise de sensibilidade dos parâmetros relacionados com o comportamento viscoso. A análise dos resultados demonstrou que o modelo visco-coesivo proposto no artigo ainda pode ser aperfeiçoado para melhor simular o processo de fraturamento coesivo dependente da taxa de carregamento.

Palavras-chave: fratura, modelo visco-coesivo, análise inversa.

^a Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Campinas, SP, Brasil.

1. Introdução

O concreto é um material pouco resistente à tração. Existem muitas microfalhas e microfissuras internas antes mesmo de este receber algum carregamento. As microfissuras dependem de inúmeros parâmetros, incluindo a distribuição granulométrica, dimensão do agregado, teor de cimento, relação água/cimento, grau de adensamento do concreto fresco, condições de cura, umidade ambiente e histórico térmico do concreto. O comportamento mecânico do concreto sujeito a diferentes condições de carregamento é governado pelo início e propagação dessas microfissuras internas durante o carregamento.

Quando uma estrutura de concreto é submetida a um carregamento externo, pode-se considerar que, até certo nível do carregamento, o material apresenta um comportamento linear. Conforme o carregamento aumenta, a tensão máxima é alcançada em pontos das seções transversais mais solicitadas. No entanto, devido à microestrutura heterogênea do concreto, desenvolvem-se zonas de plastificação e fraturamento, em função do aparecimento de microfissuras, que se concentram em pequenos volumes adjacentes aos pontos mais solicitados, e que se caracterizam por manter ainda alguma capacidade de transmissão de esforço.

A capacidade de transmissão de esforços nas faces das fissuras geradas no concreto pode ser explicada pela permanência de algumas micro ligações entre as faces. Na Figura 1 é apresentado um corpo de concreto submetido a tração uniaxial. No

instante em que o concreto atinge seu limite máximo de resistência à tração (f_{tc}), são geradas fissuras que macroscopicamente indicariam que as faces estão separadas. Entretanto, microscopicamente, ainda existem micro ligações entre as faces da fissura que não atingiram seu estado limite de resistência e continuam contribuindo para a transmissão de tensões entre as faces. Conforme as distâncias entre as faces das fissuras aumentam, as micro ligações atingem os limites resistência e se rompem, reduzindo progressivamente essa transmissão de tensões entre as faces.

Diferentes abordagens foram propostas com o intuito de representar a zona de processos inelásticos e/ou zona de processos de fratura (ZPF). Dentre estas, podem ser citadas: o modelo de fissura fictícia (MFF, [2-4]), o modelo de banda de fratura [5], o modelo de fratura de dois parâmetros [6], o modelo de fissura efetiva [7] e o método da carga de pico [8].

Seguindo o MFF, a ZPF é representada por uma fratura discreta (fictícia) cujos efeitos do amolecimento são expressos por forças de coesão atuantes entre suas faces. A Figura 2 apresenta a descrição do MFF. Nessa Figura, w representa a abertura entre as faces da fratura, w_c é a abertura crítica, a partir da qual as faces da fratura encontram-se completamente separadas, e f_{tc} é a tensão limite de resistência à tração do concreto.

Além de f_{tc} e w_c apresentados anteriormente, outra propriedade da curva coesiva é a energia de fratura aparente (G_F) que corresponde à quantidade de energia necessária por unidade de área para que as faces da fratura se separem completamente. O valor de G_F corresponde à área abaixo da curva coesiva. A Figura 3 mostra um exemplo de curva coesiva.

Com o aumento de pesquisas sobre o concreto, observou-se que este apresentava um comportamento diferente de acordo com a taxa de carregamento do ensaio. Alguns exemplos são encontrados [9-11], nos quais são tratados os estados de compressão, tração e flexão em diferentes velocidades. Mesmo que exista um

Figura 1 – Representação do processo de amolecimento entre as faces de uma fissura no concreto

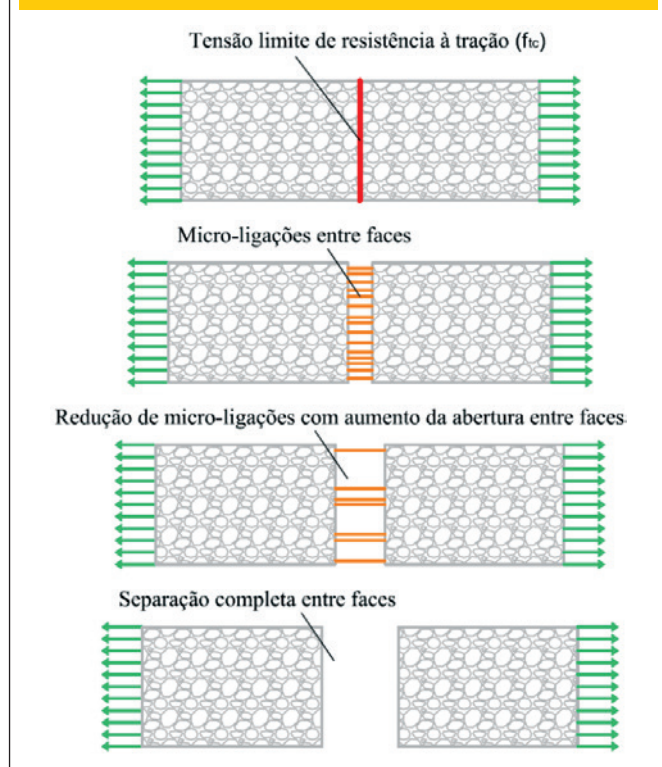


Figura 2 – Modelagem da fratura coesiva

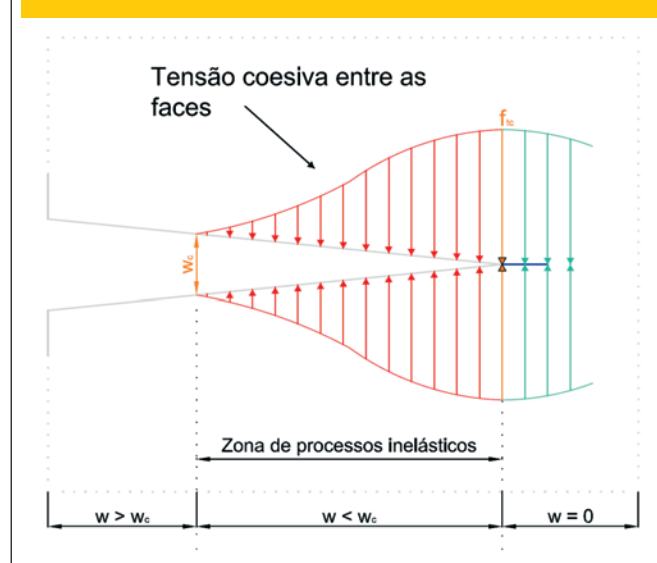
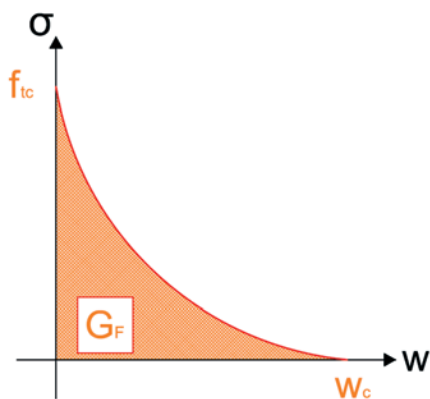


Figura 3 – Exemplo de curva coesiva e suas propriedades



número considerável de pesquisas sobre o assunto [12-22], ainda é pouco conhecido o processo decorrente do efeito da taxa de carregamento na propagação de fratura.

Com base nas observações de ensaios experimentais em velocidades variadas de carregamentos, diferentes modelos numéricos foram propostos com intuito de representar adequadamente o efeito da taxa de carregamento na propagação da fratura no concreto. A maioria dos modelos propostos sugere alguma modificação na curva coesiva com base na taxa de abertura da fratura. Segundo Bazant *et al.* [19], os modelos baseados em reologia são insuficientes para modelar a influência da taxa de aplicação do carregamento na resposta do material em fratura. O que se sugere é a inclusão de parâmetros relacionados ao comportamento viscoso ao modelo de fissura coesiva. Tandon *et al.* [23] propôs o seguinte modelo visco-coesivo:

$$\mathcal{F}(w, \dot{w}) = f(w) + \Psi(\dot{w}) \tag{1}$$

sendo \dot{w} a velocidade de abertura de fratura, $f(w)$ o modelo coesivo idealmente estático e Ψ o modelo viscoso proposto:

$$\Psi(\dot{w}) = f_{tc} k \sin^{-1} \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0} \right) \tag{2}$$

Os parâmetros k e \dot{w}_0 são auxiliares, sendo o primeiro adimensional e o segundo uma velocidade de referência. O modelo proposto por [23] realiza uma translação positiva da curva coesiva, como apresenta a Figura 4. Como também pode ser observado nessa figura, o modelo não propõe nenhuma ampliação de W_c , apresentando uma descontinuidade em W_c .

Zhou *et al.* [24] propôs o seguinte modelo nos estudos de polimetilmetacrilato (um material quase-frágil):

$$\mathcal{F}(w, \dot{w}) = f(w, Z(\dot{w})) \tag{3}$$

sendo $f(w, Z(\dot{w}))$ a formulação da curva coesiva modificada por um fator $Z(\dot{w})$ regido pela seguinte formulação:

$$Z(\dot{w}) = 1 + \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0} \right)^n \tag{4}$$

Figura 4 – Comportamento do parâmetro viscoso proposto por (23)

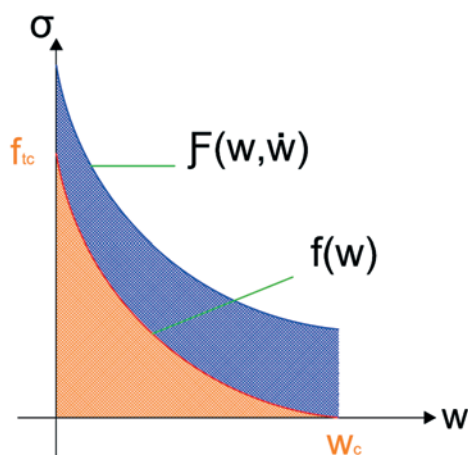


Figura 5 – Comportamento do parâmetro viscoso proposto por (24)

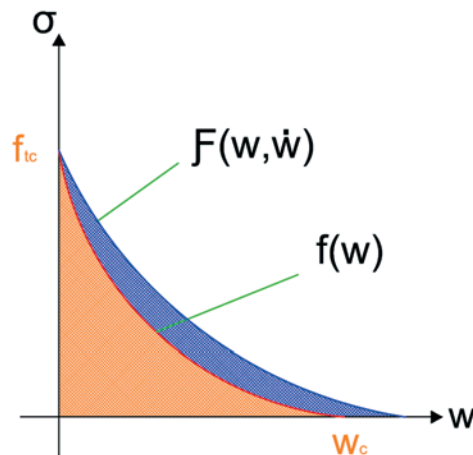
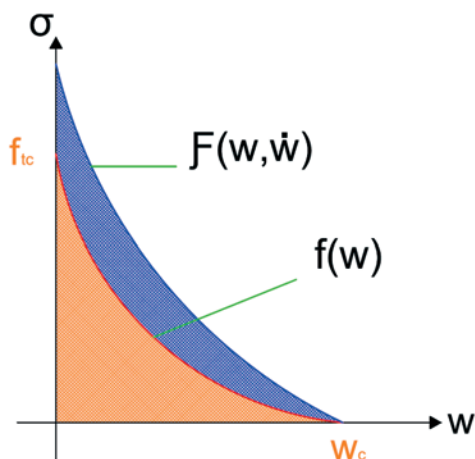


Figura 6 – Comportamento do parâmetro viscoso proposto por (1)



Os parâmetros n e \dot{w}_0 são auxiliares, sendo o primeiro adimensional e o segundo uma velocidade de referência. O modelo proposto expande a curva a coesiva no sentido de w , como mostra a Figura 5. Esse modelo expande w_c , sendo que esse fator deve ser adequadamente atribuído, dependendo da formulação do modelo coesivo. Maiores detalhes sobre a influência de $Z(\dot{w})$ em $f(w, Z(\dot{w}))$ podem ser obtidos em [24] e [25].

Rosa *et al.* [1] propuseram um outro modelo visco-coesivo utilizando o mesmo fator proposto por Zhou *et al.* [2], porém incidindo sobre o valor da tensão de coesão:

$$F(w, \dot{w}) = R(\dot{w}) \cdot f(w) \tag{5}$$

O modelo viscoso R proposto é idêntico à Equação 4, porém gerando uma expansão da curva coesiva no sentido de σ . Esse modelo visco-coesivo é apresentado na Figura 6.

1.1 Justificativa

Os parâmetros propostos pelos modelos não possuem ensaios experimentais específicos, sendo ajustados por meio de análise inversa. No trabalho desenvolvido em [1] foram realizados ensaios de flexão em três pontos para vigas de concreto de alta resistência (*High Strength Concrete – HSC*) em velocidades de carregamento variando de $1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$ a $1,74 \times 10^{+1} \text{ mm/s}$. Os parâmetros do modelo viscoso foram ajustados de modo que valores de pico de carga em curvas P- δ (carga versus deslocamento do ponto de aplicação da carga), obtidas por um modelo de elementos finitos, fossem próximos aos picos de carga observados nos experimentos. O trabalho utilizou a proposta de curva coesiva bilinear de [26], construída com dados de ensaios experimentais e que representa bem o pico das curvas P- δ .

Este artigo utiliza uma metodologia numérica para o ajuste simultâneo dos parâmetros do modelo coesivo com os parâmetros adicionais correspondentes ao comportamento viscoso. O objetivo é avaliar a capacidade do modelo visco-coesivo de [1] em representar o comportamento do concreto sob o efeito da taxa de carregamento utilizando uma ferramenta computacional para o ajuste de curvas P- δ obtidas em ensaios com vigas prismáticas ranhuradas em flexão em três pontos. São considerados como critério de avaliação a capacidade de representação da curva P- δ numérica em relação às curvas experimentais e a correspondência dos parâmetros que descrevem a curva coesiva (f_{tc} e G_F) em relação aos valores obtidos experimentalmente.

2. Materiais

São utilizados os dados dos ensaios apresentados em [1]. Os ensaios foram realizados em vigas de concreto de alta resistência submetidas a flexão em três pontos nas seguintes velocidades de atuação do pistão: $1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$, $5,5 \times 10^{-4} \text{ mm/s}$, $1,74 \times 10^{-2} \text{ mm/s}$, $5,5 \times 10^{-1} \text{ mm/s}$ e $1,74 \times 10^{+1} \text{ mm/s}$.

As propriedades do concreto foram definidas por ensaios de compressão axial (Módulo de Elasticidade, $E_c = 33,9 \text{ GPa}$), ensaios de compressão diametral ($f_{tc} = 5,2 \text{ MPa}$) e ensaios de flexão em três pontos ($G_F = 123 \text{ J/m}^2$).

3. Ferramenta Computacional Desenvolvida

Para determinar os parâmetros do modelo viscoso proposto por [1] e a capacidade do modelo em representar o comportamento do concreto quando solicitado a diferentes taxas de carregamento, desenvolveu-se um programa em linguagem C++ visando automatizar o processo de análise inversa. O programa desenvolvido baseou-se na ideia apresentada em [27].

O programa, batizado de FIT3PB-FG, é dividido em dois módulos: um somente para ajuste de parâmetros coesivos e outro para os parâmetros visco-coesivos, ou seja, um módulo puramente estático e outro incluindo efeitos decorrentes da dependência da taxa de carregamento. Uma interface gráfica foi desenvolvida para facilitar o uso, assim como a visualização dos dados de entrada e da solução.

Os dados de entrada fornecidos pelo usuário são:

Figura 7 – Esquema da viga em flexão em três pontos com a indicação das dimensões geométricas

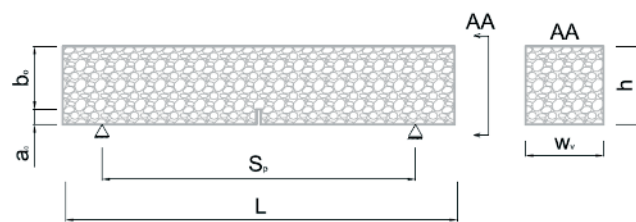


Tabela 1 – Resultados do módulo de elasticidade obtidos pela programa

	Rosa <i>et al.</i> (2012) (1)	CHM	SF
E_c (MPa)	33900	33900	33987
Resíduo (kN ² .mm)	-	1,16×10 ⁻⁶	1.23×10 ⁻⁶
PD (%)	-	0,00	0,26

PD - diferença percentual relativa ao valor experimental.

- Geometria da viga ensaiada: comprimento (L), vão livre (S_p), altura (h), largura (w_v), altura de ranhura (a_0) e módulo de elasticidade (E_c) (Figura 7);
- Um arquivo de dados contendo as curvas experimentais, que, para o caso de ajuste visco-coesivo, as curvas experimentais são divididas em grupos de acordo com a taxa de carregamento. Após a entrada de dados, o usuário deve escolher, dentre as opções do programa:
 - O modelo coesivo (linear, bilinear, exponencial...);
 - O modelo viscoso (por exemplo, o de [1]);
 - O modelo numérico de simulação da curva $P-\delta$;
 - O método de análise inversa.

O FIT3PB-FG realiza a análise inversa minimizando a seguinte função:

$$\xi_{sqr}(\vec{p}) = \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{i=1}^{n_{tj}} \int_{v_{ini}}^{v_{fin}} [P_{exp,i,j}(v) - P_{num}(v, \vec{p}, \dot{\delta}_j)]^2 dv \quad (6)$$

sendo n_t o número de diferentes taxas de carregamento, n_{tj} o número de espécimes ensaiados com determinada taxa de carregamento, P_{exp} a função que representa a resposta experimental, P_{num} a função que representa a resposta numérica, V um dado valor de deslocamento do ponto de aplicação de carga no intervalo de dados experimentais, \vec{p} o vetor de parâmetros a serem ajustados e $\dot{\delta}$ a taxa de carregamento.

Na versão do FIT3PB-FG utilizada neste trabalho, o algoritmo de

minimização existente é o de Levenberg-Marquardt [28-29], cujo procedimento também pode ser encontrado em [30].

Os modelos numéricos utilizados na simulação das curvas $P-\delta$:

- Modelo da Rótula Fissurada (CHM – *Cracked Hinge Model*) [31]: formulação analítica simplificada para a propagação da fratura em vigas. A ideia básica consiste em modelar uma faixa da região por onde se propaga a fratura com elementos de mola. Esses elementos de mola são conectados a bordas rígidas que se ligam ao restante da viga.
- Modelo de Superposição de Fratura (SF) [32]: faz-se a superposição de problemas em mecânica da Fratura Elástica Linear para representar a resposta em Mecânica da Fratura Não-Linear. O procedimento permite realizar com agilidade um grande número de cálculos, uma vez que se obtém um sistema de equações otimizado, cuja resolução não requer a inversão da matriz dos coeficientes.

4. Metodologia

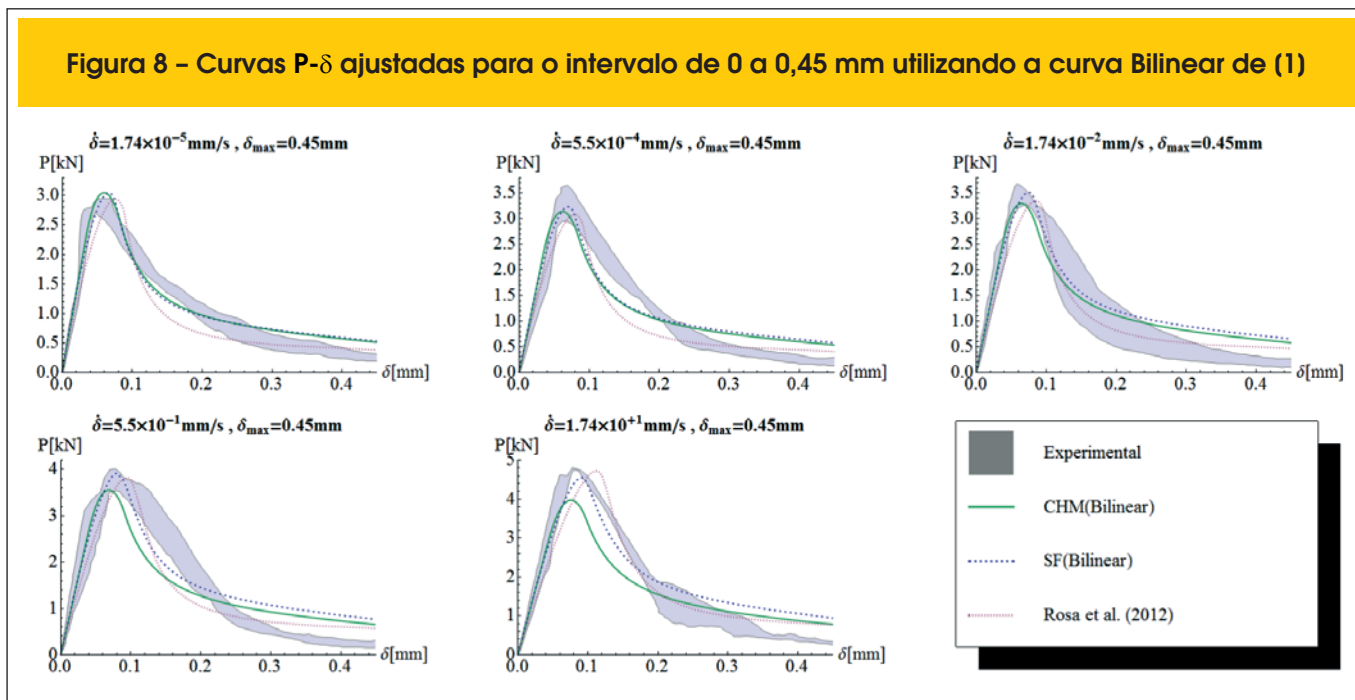
Com base no conjunto de curvas experimentais apresentado por Rosa *et al.* (2012)[1], são realizados os seguintes procedimentos:

- **Ajuste do Módulo de Elasticidade:** uso da ferramenta desenvolvida para ajuste do módulo de elasticidade utilizando os modelos numéricos apresentados na seção 3. Consiste em ajustar o módulo de elasticidade do concreto de modo que a curva $P-\delta$ obtida pelo modelo numérico na fase elástica reproduza a correspondente curva experimental.
- **Uso de três intervalos de ajuste:** [1] utilizaram somente o pico das curvas $P-\delta$ como parâmetro para o ajuste das variáveis do modelo viscoso. Para verificar a influência do intervalo de ajuste na solução, são utilizados três intervalos de δ :
 - 0 to 0.45mm;
 - 0 to 0.225mm;
 - 0 to 0.11mm: o final do intervalo localiza-se logo após o pico de carga das curvas experimentais, sendo este caso o que mais se aproxima ao ajuste pelo pico de curva realizado por [1].
- **Ajuste do modelo viscoso utilizando a curva Bilinear apresentada em [1]:** é utilizada a curva Bilinear construída por [1] como modelo coesivo base para ajuste do modelo viscoso. Os resultados são comparados entre os modelos numéricos (CHM e SF), nos diferentes intervalos de ajuste e com os resultados da referência.

Table 2 – Resultados obtidos pela análise inversa do modelo de (1) utilizando a curva bilinear

Modelo	δ_{max} (mm)	\dot{w}_0 (mm/s)	n	Resíduo (kN ² .mm)
CHM	0,450	45,5	0,148	2,15×10 ⁻³
	0,225	12,3	0,137	4,51×10 ⁻⁴
	0,110	10,2	0,160	9,23×10 ⁻⁵
SF	0,450	1,95	0,125	2,14×10 ⁻³
	0,225	0,497	0,111	4,32×10 ⁻⁴
	0,110	0,804	0,124	9,06×10 ⁻⁵
Rosa <i>et al.</i> (2012) (1)	0,450	0,0965	0,16	4,14×10 ⁻³

Figura 8 – Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva Bilinear de (1)



■ **Ajuste do modelo coesivo utilizando os dados experimentais quase-estáticos:** os ensaios realizados com a menor taxa de carregamento, $\dot{\delta} = 1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$ são considerados ensaios quase-estáticos. Estando esses ensaios muito próximos de um ensaio estático ideal, utilizam-se esses conjuntos de dados para ajustar as curvas coesivas de Hordijk [33] e Bilinear. Esses resultados são comparados com a curva Bilinear apresentada em [1];

■ **Ajuste do modelo viscoso utilizando as curvas coesivas determinadas numericamente:** utilizando as curvas coesivas determinadas com os experimentos quase-estáticos, é ajustado o modelo viscoso com base nos demais ensaios experimentais, correspondentes a taxas de carregamento mais elevadas. Os resultados são comparados entre os modelos numéricos (CHM e SF), nos diferentes intervalos de ajuste e com os resultados da referência;

■ **Ajuste simultâneo do modelo visco-coesivo:** o modelo vis-

Figura 9 – Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva Bilinear de (1)

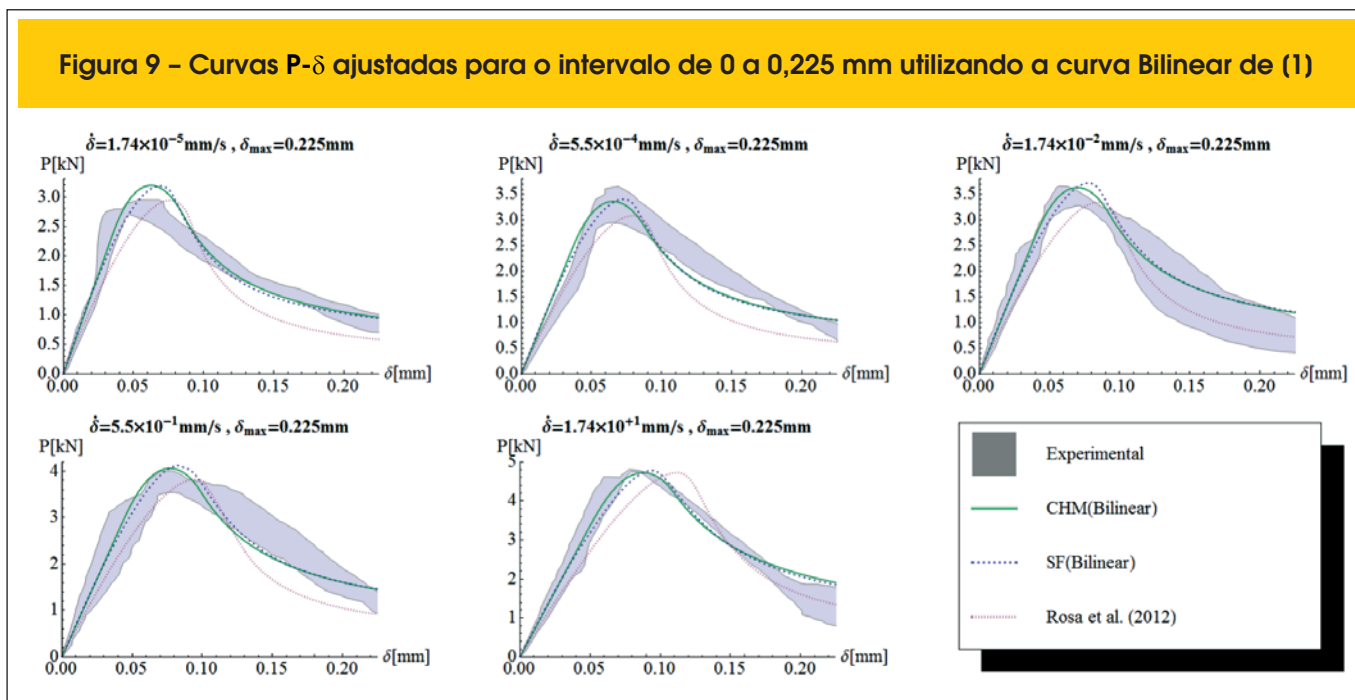
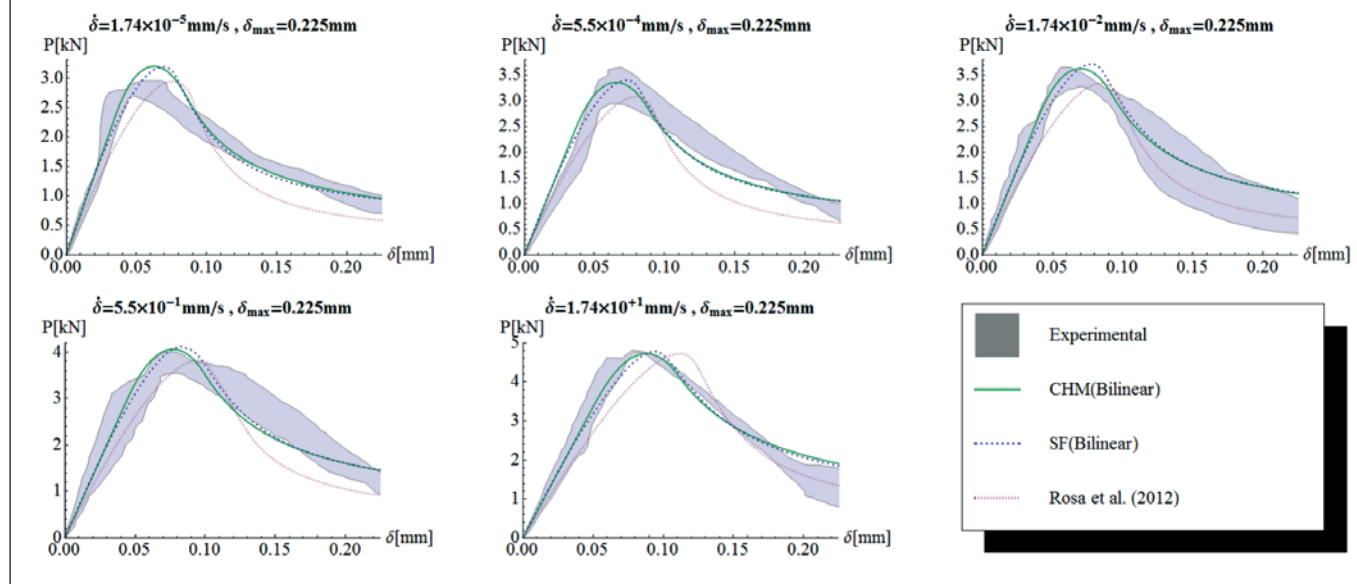


Figura 10 – Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva Bilinear de (1)



coso e o modelo coesivo (Hordijk ou Bilinear) são ajustados simultaneamente com base em todo conjunto de dados experimentais e em diferentes intervalos de ajuste. Esses resultados são comparados com os dados da referência [1];

5. Resultados e discussões

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos a partir dos procedimentos indicados na seção 4, acompanhados de uma análise comparativa em relação aos valores experimentais e aos resultados apresentados em [1].

5.1 Ajuste do módulo de elasticidade

A Tabela 1 apresenta os resultados do ajuste do módulo de elasticidade utilizando o CHM e a SF. Como pode-se observar, ambos modelos, CHM e SF, resultaram muito próximos ao módulo de elasticidade determinado experimentalmente.

5.2 Ajuste do modelo viscoso utilizando a curva coesiva Bilinear apresentada em [1]

A Tabela 2 apresenta os resultados dos ajustes, onde δ_{max} é o valor máximo utilizado no intervalo de ajuste. Como pode ser observado, o parâmetro \dot{W}_0 varia consideravelmente de intervalo a intervalo e não corresponde ao parâmetro obtido por [1] mesmo quando $\delta_{max} = 0,11mm$. Entretanto, a completa correspondência entre os valores obtidos com $\delta_{max} = 0,11mm$ e os obtidos por [1] não era esperada, uma vez que estes foram obtidos por um processo manual, interrompido quando a curva obtida foi considerada satisfatória.

As Figuras 8 a 10 apresentam a comparação gráfica das curvas numéricas com a envoltória experimental. Na Figura 8 observa-se que o ajuste entre as curvas numéricas e o envoltório experimental não é satisfatório. Isso ocorre pois a curva bilinear determinada em [1] utilizando o procedimento de [26] limita-se à representação do valor máximo de P da curva $P-\delta$ (experimental). Percebe-se que nas Figuras 9 e 10 as curvas numéricas se ajustam melhor às

Table 3 – Resultados das curvas coesivas obtidos pela análise inversa das envoltórias quase-estáticas

Modelo	Coesão	f_{ic} (MPa)	G_F (J/m ²)	a_1 (mm ⁻¹)	a_2 (mm ⁻¹)	b_2	Resíduo ($\times 10^{-5}$) (kN ² .mm)
CHM	Hordijk	5,03	98	-	-	-	5,82
	Bilinear	4,80	100	40,3	3,16	0,30	5,92
SF	Hordijk	4,78	111	-	-	-	6,93
	Bilinear	5,25	113	49,3	3,05	0,317	6,14
Rosa et al. (2012) (1)	Bilinear	5,20	128	50,0	0,43	0,12	414

Table 4 – Comparação dos parâmetros ajustados com os valores experimentais

Modelo numérico	Modelo coesivo	f_{ic} (MPa)	PD f_{ic} (%)	G_F ($G_{F(0-0.45)}$) (J/m ²)	PD G_F ($G_{F(0-0.45)}$) (%)
Experimental	-	5,20	-	123 (95)	-
CHM	Hordijk	5,03	-2,27	98	-20,33 (3,16)
	Bilinear	4,80	-7,69	100	-18,70 (5,26)
SF	Hordijk	4,78	-8,08	111	-9,76 (16,84)
	Bilinear	5,25	0,96	113	-8,13 (18,95)

experimentais, entretanto, os parâmetros n e \dot{w}_0 , obtidos para diferentes valores de $\dot{\delta}_{max}$, variam significativamente.

5.3 Ajuste do modelo coesivo para os dados experimentais quase-estáticos

A Tabela 3 apresenta os resultados dos ajustes das curvas coesivas utilizando as envoltórias experimentais quase-estáticas ($\dot{\delta} = 1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$). A Tabela 4 expõe a comparação dos parâmetros f_{ic} e G_F experimentais e numéricos. Para G_F considerou-se também a comparação da energia de fratura aparente medida até o limite do intervalo dos dados experimentais (0,45 mm), sendo esse valor indicado por $G_{F0-0,45}$. Pela análise dos resultados

considera-se que os valores obtidos pelo ajuste são razoavelmente similares aos experimentais.

As Figuras 11 e 12 apresentam a comparação das curvas $P-\delta$ numérica e experimentais. As curvas ajustadas representam bem o comportamento das curvas experimentais. É possível observar que a principal diferença dos modelos coesivos ajustados para o modelo Bilinear utilizado por [1] encontra-se no valor W_c , sendo que os ajustados apresentam um valor em torno de 0,10 mm enquanto o da referência [1] encontra-se um pouco acima de 0,25 mm.

5.4 Ajuste do modelo viscoso utilizando as curvas coesivas determinadas numericamente

A Tabela 5 apresenta os resultados dos ajustes do modelo vis-

Figura 11 – Comparação das curvas P-δ obtidas pelo ajuste do modelo coesivo de Hordijk (1991) (33)

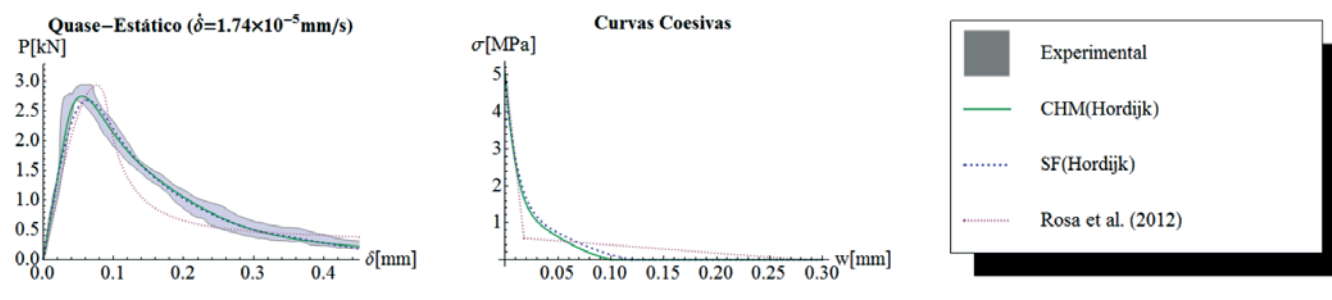


Figura 12 – Comparação das curvas P-δ obtidas pelo ajuste do modelo coesivo bilinear

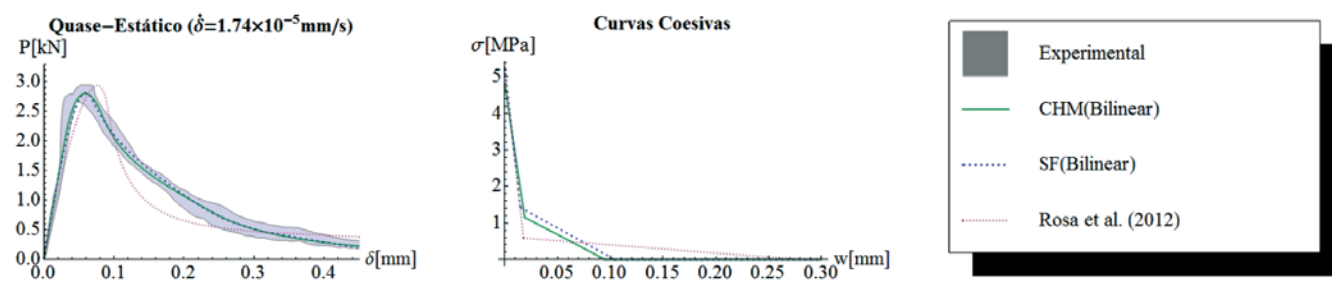


Table 5 – Resultados obtidos pela análise inversa do modelo viscoso de (1) utilizando as curvas coesivas determinadas numericamente na seção 5.3

Modelo	Coesão	δ_{max} (mm)	$\dot{\gamma}_0$ (mm/s)	n	Resíduo (kN ² .mm)
CHM	Hordijk	0,450	99,0	0,156	$1,25 \times 10^{-3}$
		0,225	45,0	0,152	$4,42 \times 10^{-4}$
		0,110	7,74	0,161	$7,38 \times 10^{-5}$
	Bilinear	0,450	90,3	0,154	$1,29 \times 10^{-3}$
		0,225	35,2	0,152	$4,39 \times 10^{-4}$
		0,110	9,32	0,16	$7,32 \times 10^{-5}$
SF	Hordijk	0,450	21,3	0,158	$1,15 \times 10^{-3}$
		0,225	15,6	0,149	$4,45 \times 10^{-4}$
		0,110	1,55	0,159	$8,04 \times 10^{-5}$
	Bilinear	0,450	21,6	0,167	$1,22 \times 10^{-3}$
		0,225	14,7	0,156	$4,63 \times 10^{-4}$
		0,110	2,29	0,148	$7,27 \times 10^{-5}$
Rosa <i>et al.</i> (2012) (1)	Bilinear	0,450	0,0965	0,16	$4,14 \times 10^{-3}$

coso utilizando-se como base as curvas coesivas determinadas na seção 5.3 e as amostras experimentais referentes às taxas $\dot{\delta}$ superiores a $1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$. Novamente, os parâmetros apresentam variação significativa de um intervalo ao outro.

As Figuras de 13 a 18 apresentam a comparação das curvas $P-\delta$ ajustadas com as curvas experimentais. Para $\dot{\delta} = 1,74 \times 10^1 \text{ mm/s}$ existe dificuldade de o modelo numérico representar o pico da curva experimental. Entretanto, estes ajustes

Figura 13 – Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva de Hordijk (1991) (33) ajustada na seção 5.3

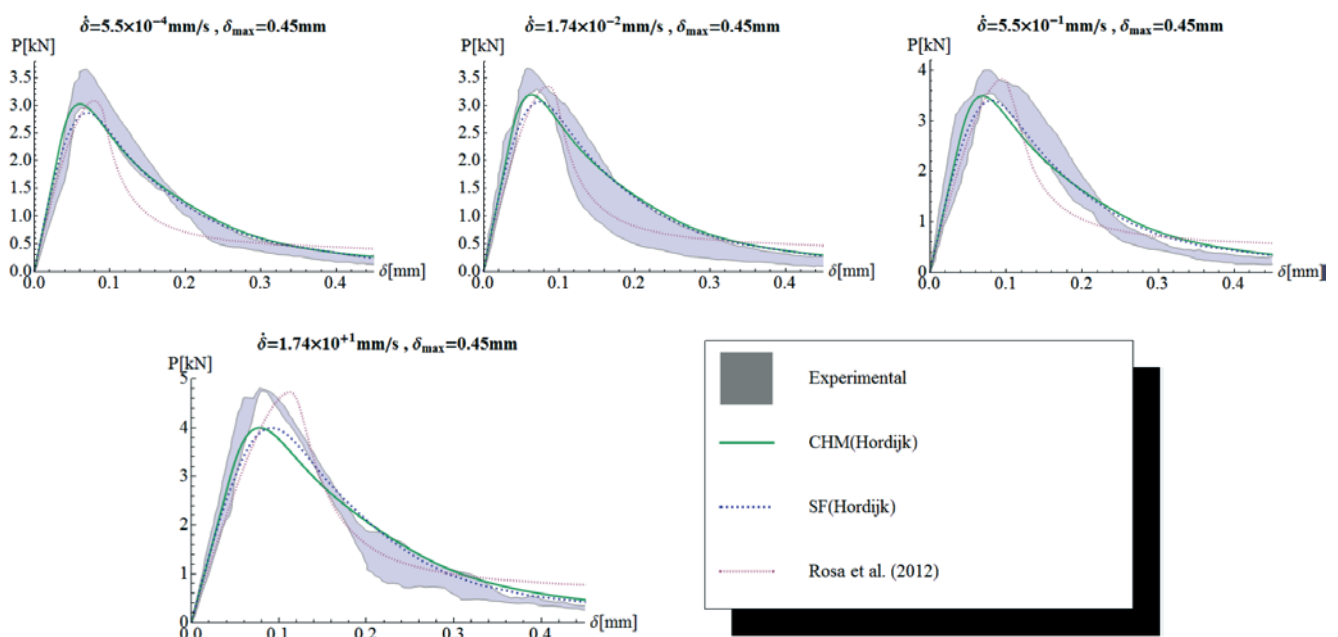


Figura 14 - Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva de Hordijk (1991) (33) ajustada na seção 5.3

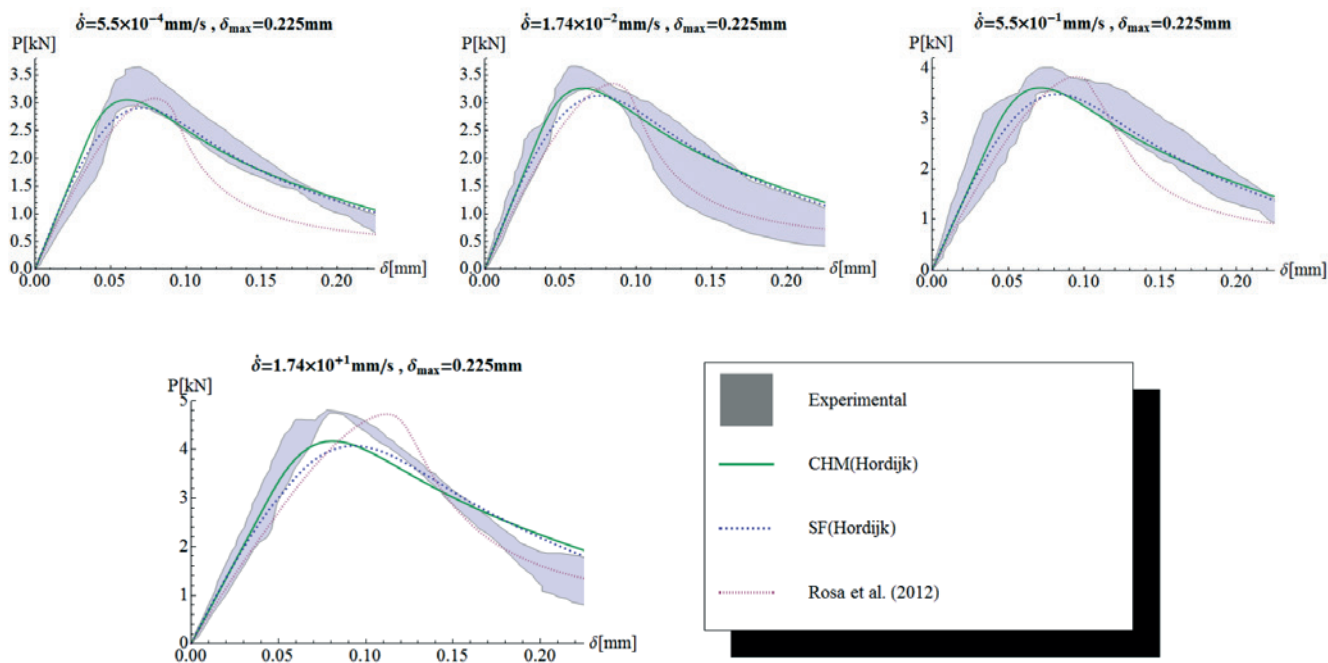


Figura 15 - Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva de Hordijk (1991) (33) ajustada na seção 5.3

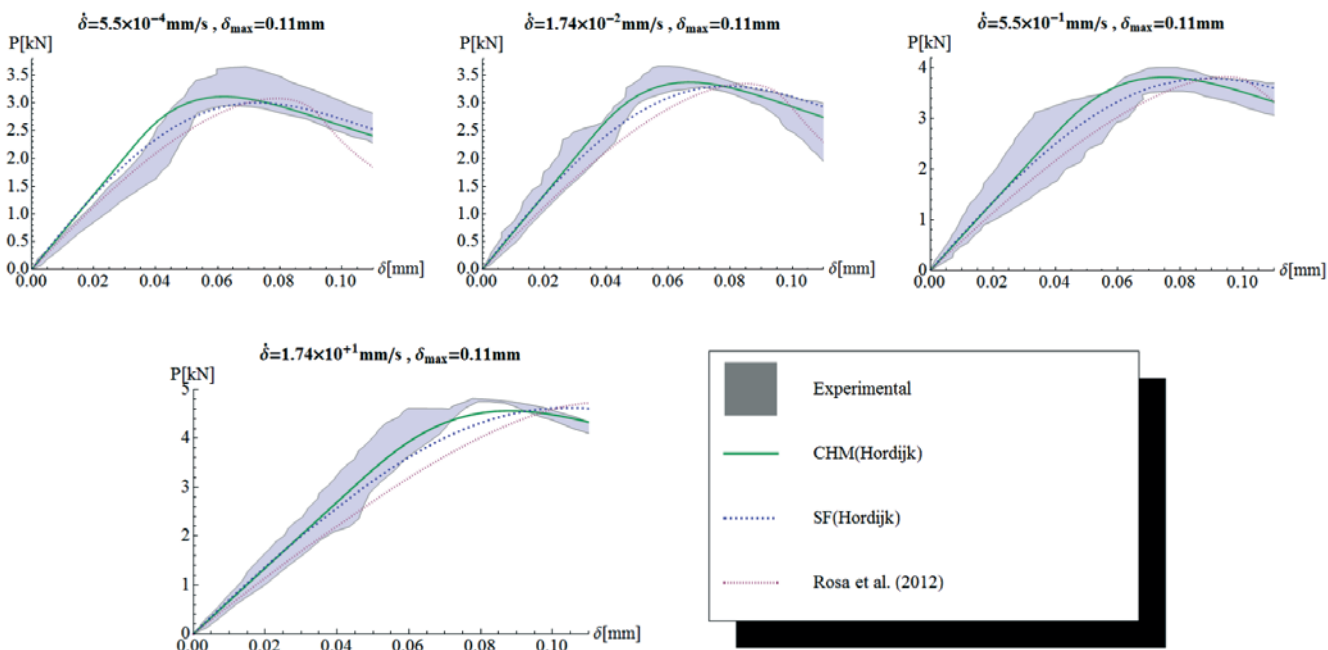


Figura 16 – Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,45 mm utilizando a curva Bilinear ajustada na seção 5.3

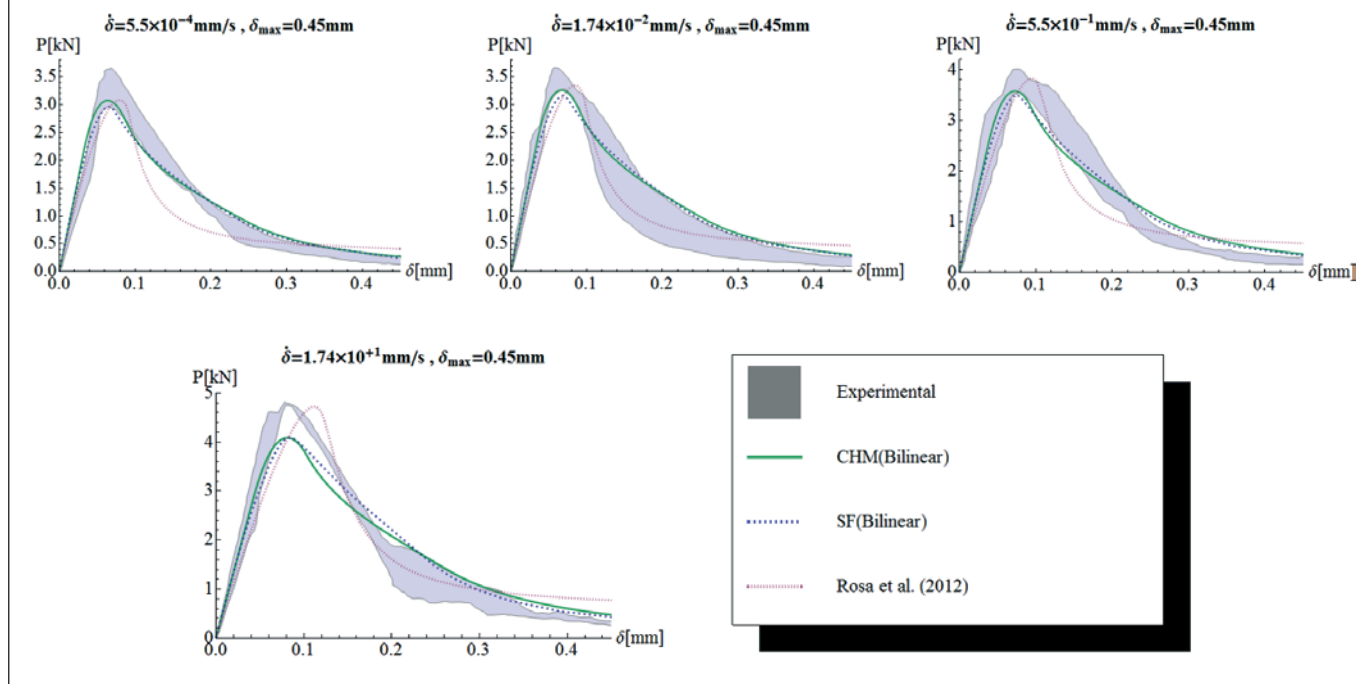


Figura 17 – Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,225 mm utilizando a curva bilinear ajustada na seção 5.3

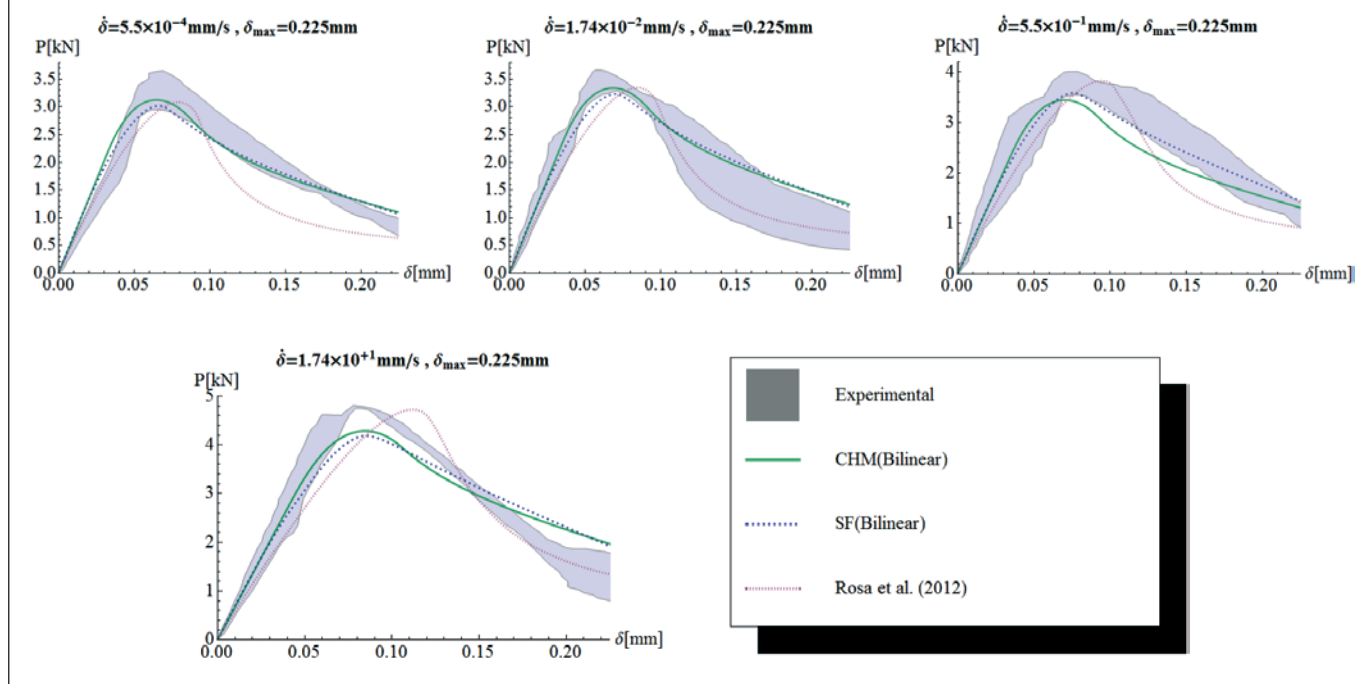
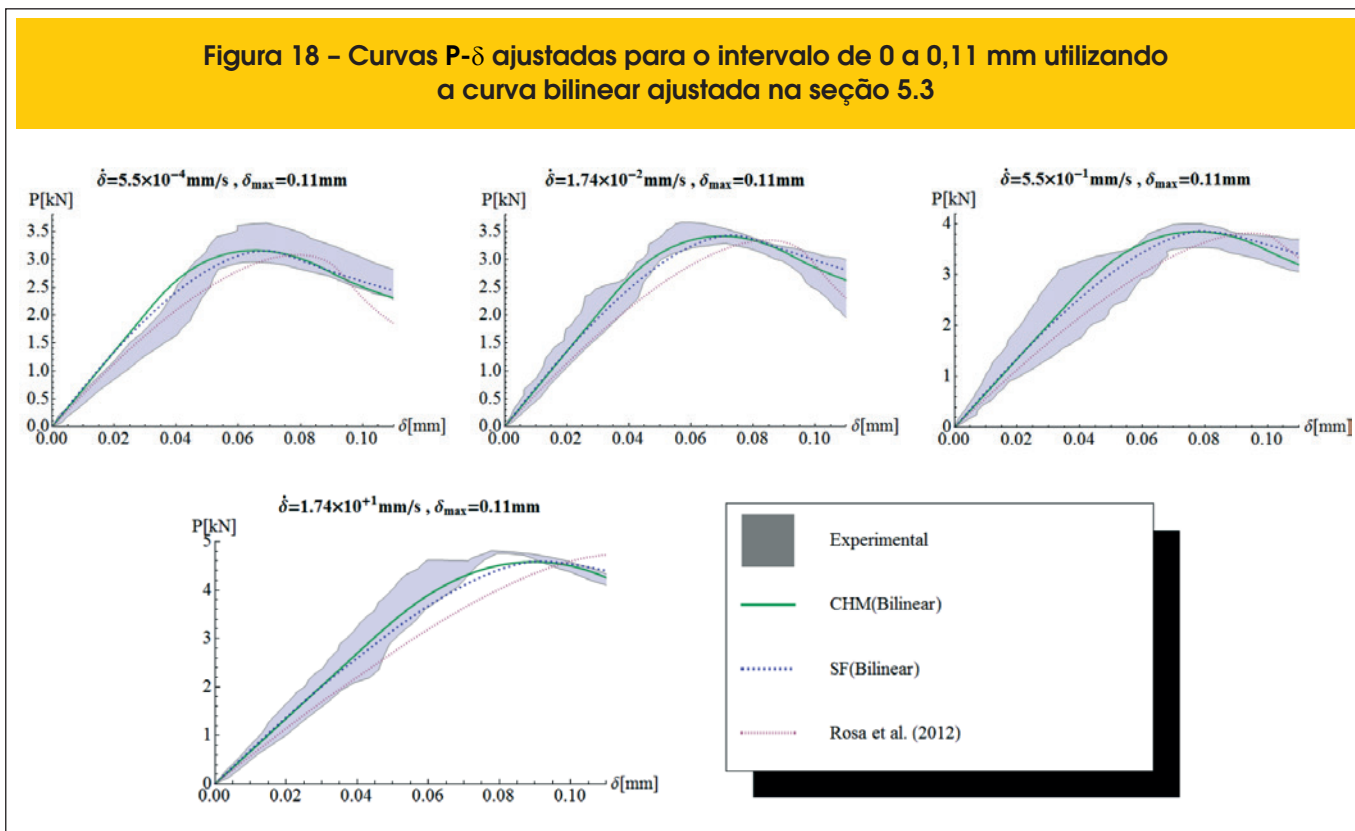


Figura 18 – Curvas P- δ ajustadas para o intervalo de 0 a 0,11 mm utilizando a curva bilinear ajustada na seção 5.3



se mostram melhores que os ajustes da seção 5.2, uma vez que o final da curva $P - \delta$ é bem representado.

5.5 Ajuste simultâneo de parâmetros coesivos e viscosos

As Tabelas de 6 a 9 apresentam os resultados obtidos pelo ajuste simultâneo das curvas coesivas com o modelo viscoso de [1]. Pelas Tabelas 6 e 8 observa-se que os parâmetros variam significativamente entre os intervalos de ajuste. Nas tabelas 7 e 9

observa-se que é significativa a diferença entre os parâmetros determinados numericamente e os correspondentes experimentais. As Figuras de 19 a 24 apresentam a comparação das curvas $P - \delta$ numéricas com as envoltórias experimentais. Esses foram os melhores ajustes obtidos utilizando-se o modelo viscoso de [1].

5.6 Discussão

O modelo de [1] foi proposto e avaliado para os valores de pico das curvas $P - \delta$. Os resultados apresentados na subseção 5.5

Table 6 – Resultados do ajuste simultâneo da visco-coesão utilizando o modelo coesivo de Hordijk (1991) (33)

Modelo	δ_{max} (mm)	f_{ic} (MPa)	G_F (J/m ²)	\dot{w}_0 (mm/s)	n	Resíduo ($\times 10^{-4}$) (kN ² .mm)
CHM	0,450	5,13	63,7	6,92	0,105	9,68
	0,225	4,83	62,6	2,33	0,101	3,95
	0,110	4,31	87,9	1,01	0,127	0,84
SF	0,450	4,38	74,6	0,107	0,094	9,46
	0,225	4,96	70,5	0,0468	0,107	4,46
	0,110	5,01	64,3	0,0501	0,107	0,84
Rosa et al. (2012) (1)	0,450	5,20	128	0,0965	0,16	41,40

demonstram que, embora sendo uma boa primeira aproximação, o modelo de [1] apresentou limitações na representação das curvas $P-\delta$. Os parâmetros f_{ic} e G_F obtidos pelo ajuste simultâneo dos modelos coesivo e viscoso indicaram a necessidade de alterações no modelo para uma melhor representação dos valores experimentais para as taxas de carregamento consideradas.

A análise de materiais quase-frágeis e dúcteis pode levantar uma questão: muitos materiais que apresentam comportamento quase-frágil ou dúctil quando submetidos a carregamento estático podem apresentar comportamento frágil sob carga de impacto. Este comportamento é devido à impossibilidade da redistribuição de tensões durante um período muito curto de deformação [34].

Table 7 - Comparação dos resultados obtidos do ajuste simultâneo pelo modelo coesivo de Hordijk (1991) (33) com os dados experimentais

Modelo	δ_{max} (mm)	f_{ic} (MPa)	PD f_{ic} (MPa)	G_F ($G_{F(0-0.45)}$) (J/m ²)	PD G_F ($G_{F(0-0.45)}$) (%)
Experimental	-	5,20	-	123 (95)	-
CHM	0,450	5,13	-1,35	63,7	-48,21 (-32,95)
	0,225	4,83	-7,12	62,6	-49,11 (-34,11)
	0,110	4,31	-17,12	87,9	-28,54 (-7,47)
SF	0,450	4,38	-15,77	74,6	-39,35 (-21,47)
	0,225	4,96	-4,62	70,5	-42,68 (-25,79)
	0,110	5,01	-3,65	64,3	-47,72 (-32,32)

Table 8 - Resultados do ajuste simultâneo da visco-coesão utilizando o modelo coesivo bilinear

Modelo	δ_{max} (mm)	f_{ic} (MPa)	G_F (J/m ²)	a_1 (mm ⁻¹)	a_2 (mm ⁻¹)	b_2	\dot{w}_0 (mm/s)	n	Resíduo ($\times 10^{-4}$) (kN ² .mm)
CHM	0,450	4,15	71,6	36,8	7,90	0,428	3,83	0,111	9,39
	0,225	4,03	71,1	35,5	7,81	0,428	2,59	0,111	3,84
	0,110	4,16	67,2	39,3	12,50	0,560	1,35	0,133	0,83
SF	0,450	4,73	74,5	57,8	3,27	0,266	0,0869	0,095	9,21
	0,225	4,63	74,8	55,6	3,36	0,273	0,0855	0,097	3,80
	0,110	4,48	122,7	52,1	0,452	0,135	0,106	0,132	1,03
Rosa <i>et al.</i> (2012) (1)	0,450	5,20	128	50,0	0,43	0,12	0,0965	0,16	41,4

Table 9 - Comparação dos resultados obtidos do ajuste simultâneo pelo modelo coesivo bilinear com os dados experimentais

Modelo	δ_{max} (mm)	f_{ic} (MPa)	PD f_{ic} (%)	G_F ($G_{F(0-0.45)}$) (J/m ²)	PD G_F ($G_{F(0-0.45)}$) (%)
Experimental	-	5,20	-	123 (95)	-
CHM	0,450	4,15	-20,19	71,6	-41,79 (-24,63)
	0,225	4,03	-22,50	71,1	-42,20 (-25,16)
	0,110	4,16	-20,00	67,2	-45,37 (-29,26)
SF	0,450	4,73	-9,04	74,5	-39,43 (-21,58)
	0,225	4,63	-10,96	74,8	-39,19 (-21,26)
	0,110	4,48	-13,85	122,7	-0,24 (-29,16)

Os ensaios analisados em [1] não alcançam velocidades que possam ser consideradas próximas de um impacto, mas se for considerado que o material sofre uma transição gradual em um estágio de carregamento estático para o comportamento com impacto, pode-se assumir que o material se torna cada vez mais frágil.

Buscando observar o aumento de fragilidade do material e verificar o aumento de f_{ic} com o aumento da taxa de carregamento, é realizado um ajuste individual de cada envoltória dos ensaios realizados por [1] no módulo de ajuste coesivo da ferramenta computacional desenvolvida. O módulo de ajuste coesivo não leva em

Figura 19 - Curvas P- δ para o intervalo de 0 a 0,45 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) e modelo viscoso

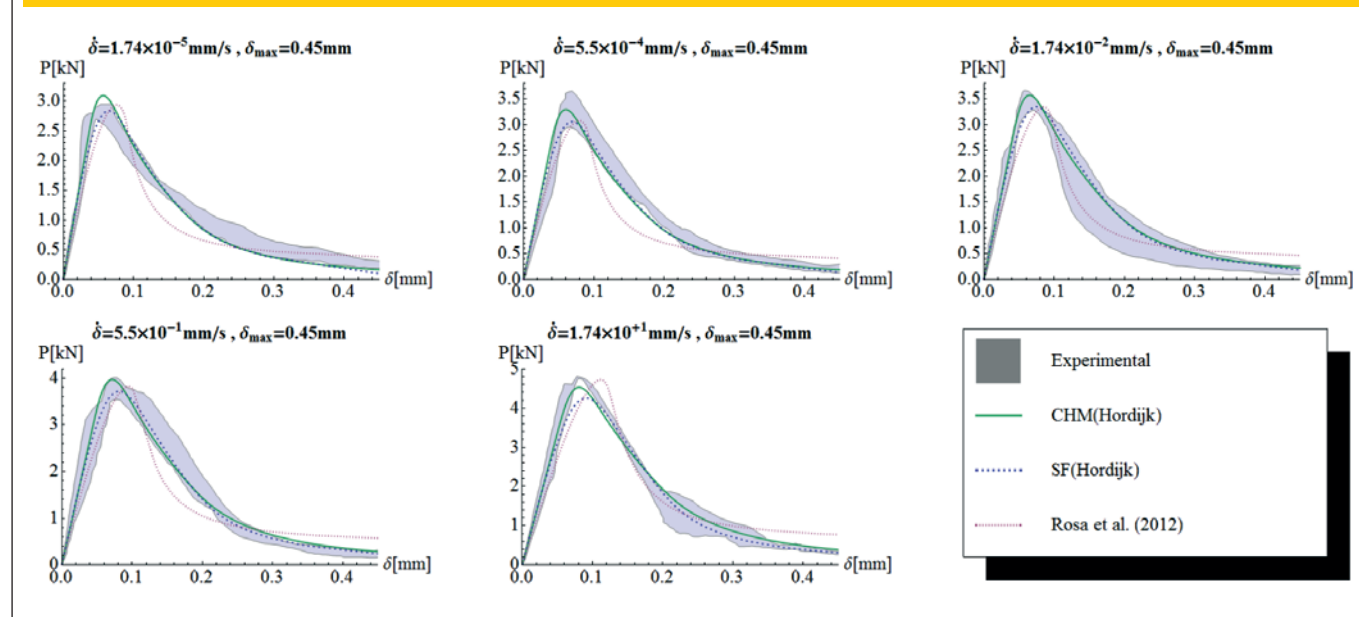
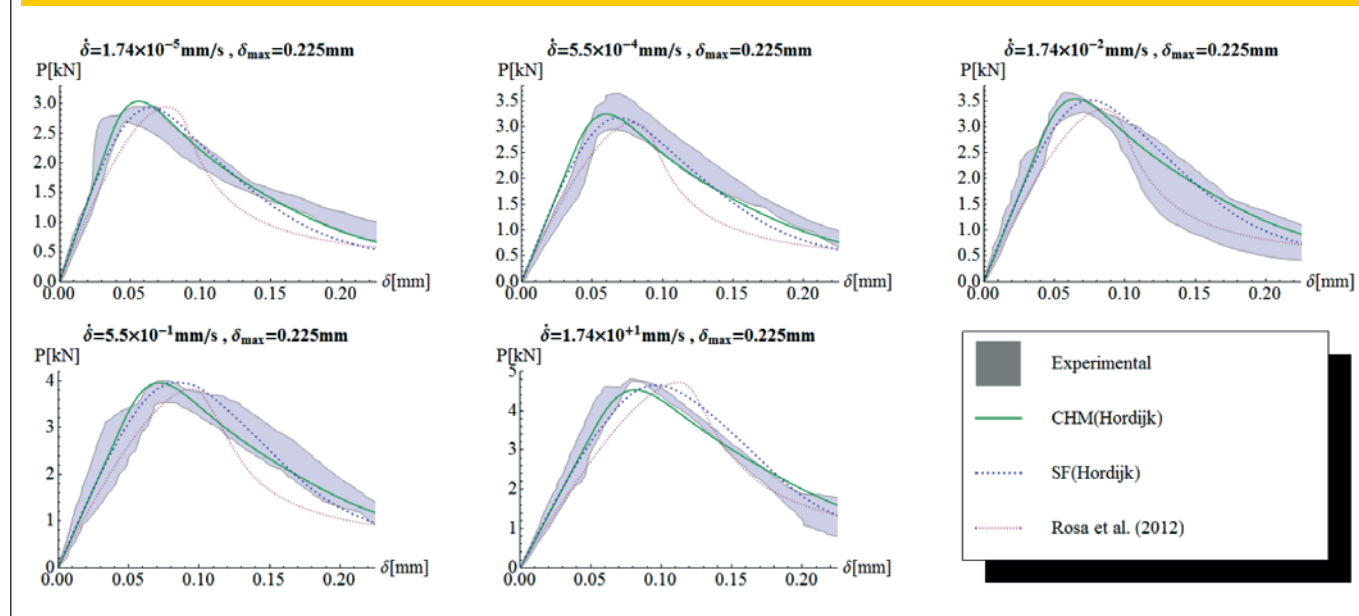


Figura 20 - Curvas P- δ para o intervalo de 0 a 0,225 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) (33) e modelo viscoso



conta os efeitos da taxa de carregamento, e a curva coesiva ajustada é a representação matemática de uma curva coesiva “média” que reduz a função a ser minimizada. Desse modo, pretende-se que os ajustes matemáticos realizados evidenciem algum comportamento físico.

São apresentados somente os resultados obtidos utilizando a curva coesiva de Hordijk (1991) [33] com o modelo numérico CHM pois as demais combinações geram resultados de comportamento similar. A Tabela 10 apresenta o resumo dos resultados. Como mostra a tabela, f_{tc} aumenta com o aumento de velocidade do

Figura 21 - Curvas P- δ para o intervalo de 0 a 0,11 mm ajustando simultaneamente Hordijk (1991) (33) e modelo viscoso

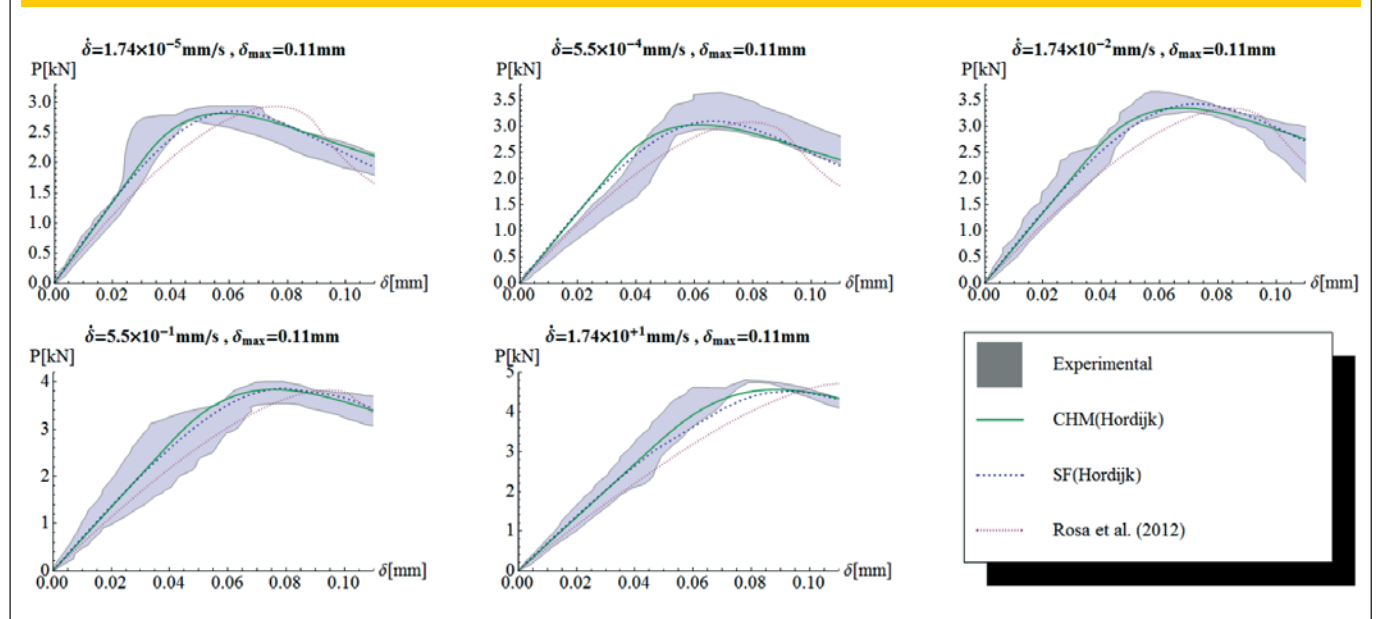


Figura 22 - Curvas P- δ para o intervalo de 0 a 0,45 mm ajustando simultaneamente bilinear e modelo viscoso

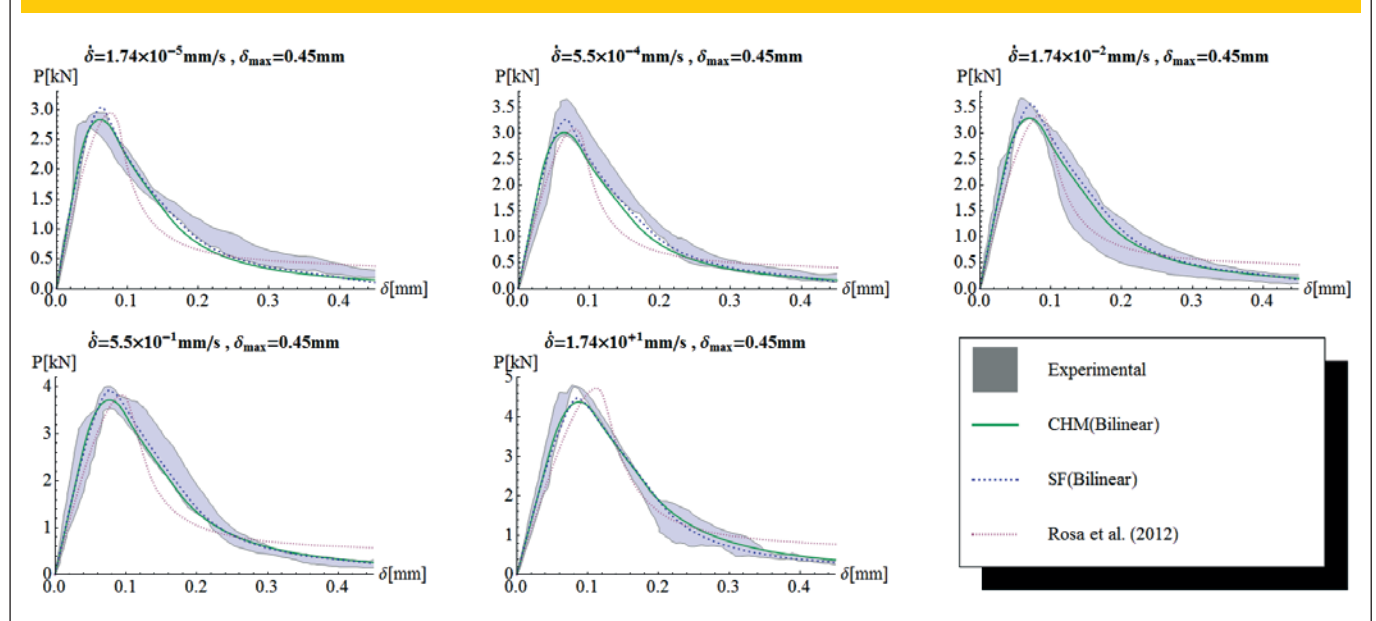


Figura 23 – Curvas P- δ para o intervalo de 0 a 0,225 mm ajustando simultaneamente bilinear e modelo viscoso

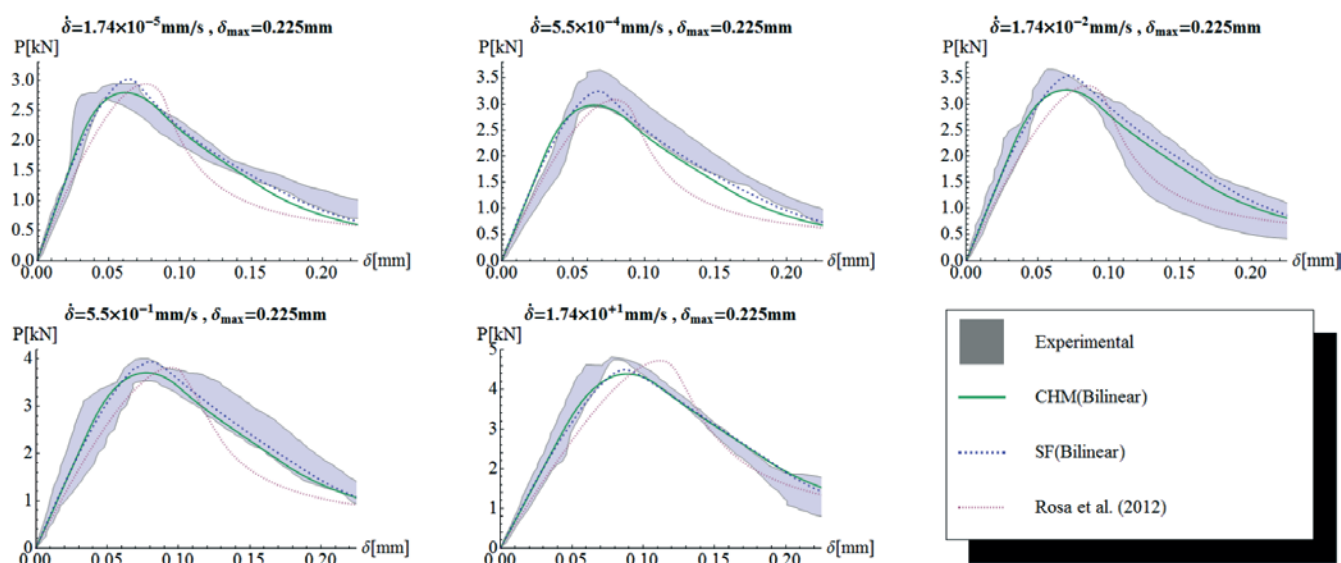


Figura 24 – Curvas P- δ para o intervalo de 0 a 0,11 mm ajustando simultaneamente bilinear e modelo viscoso

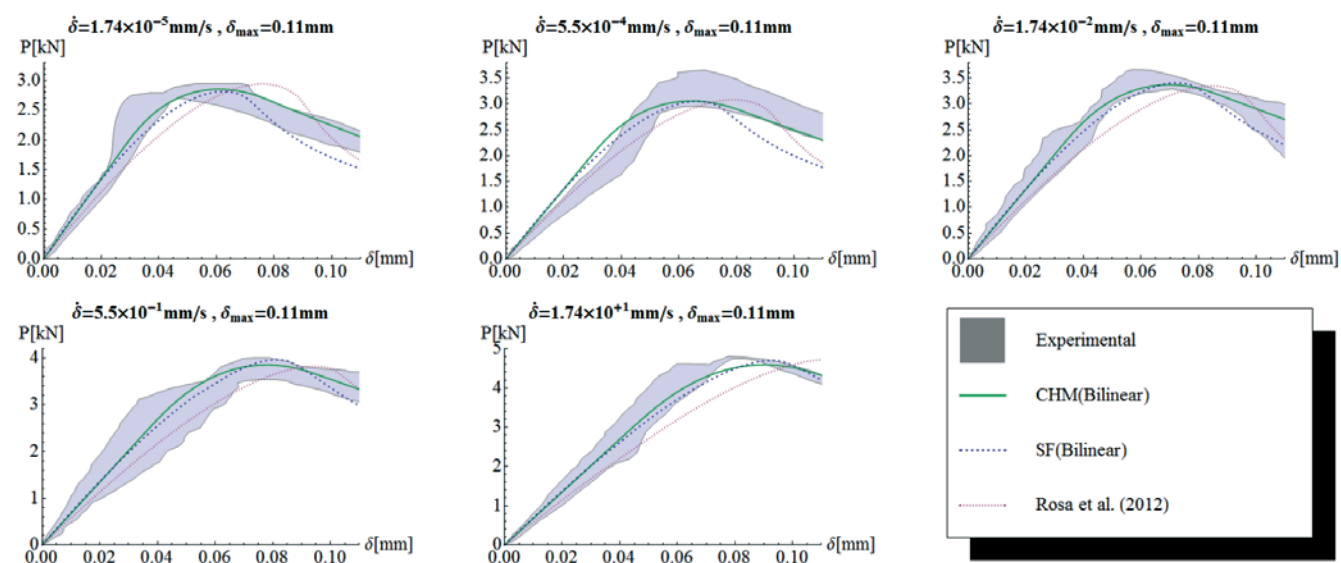


Table 10 – Ajuste das curvas coesivas de (33) utilizando CHM

Taxa de carregamento (mm/s)	f_{tc} (MPa)	G_f (J/m ²)
$1,74 \times 10^{-5}$	5,03	98,0
$5,5 \times 10^{-5}$	6,67	97,1
$1,74 \times 10^{-5}$	7,37	79,0
$5,5 \times 10^{-5}$	8,14	96,3
$1,74 \times 10^{-5}$	10,5	109,0

Figura 25 – Ajuste da curva coesiva Hordijk (1991) utilizando o CHM para cada envoltória experimental

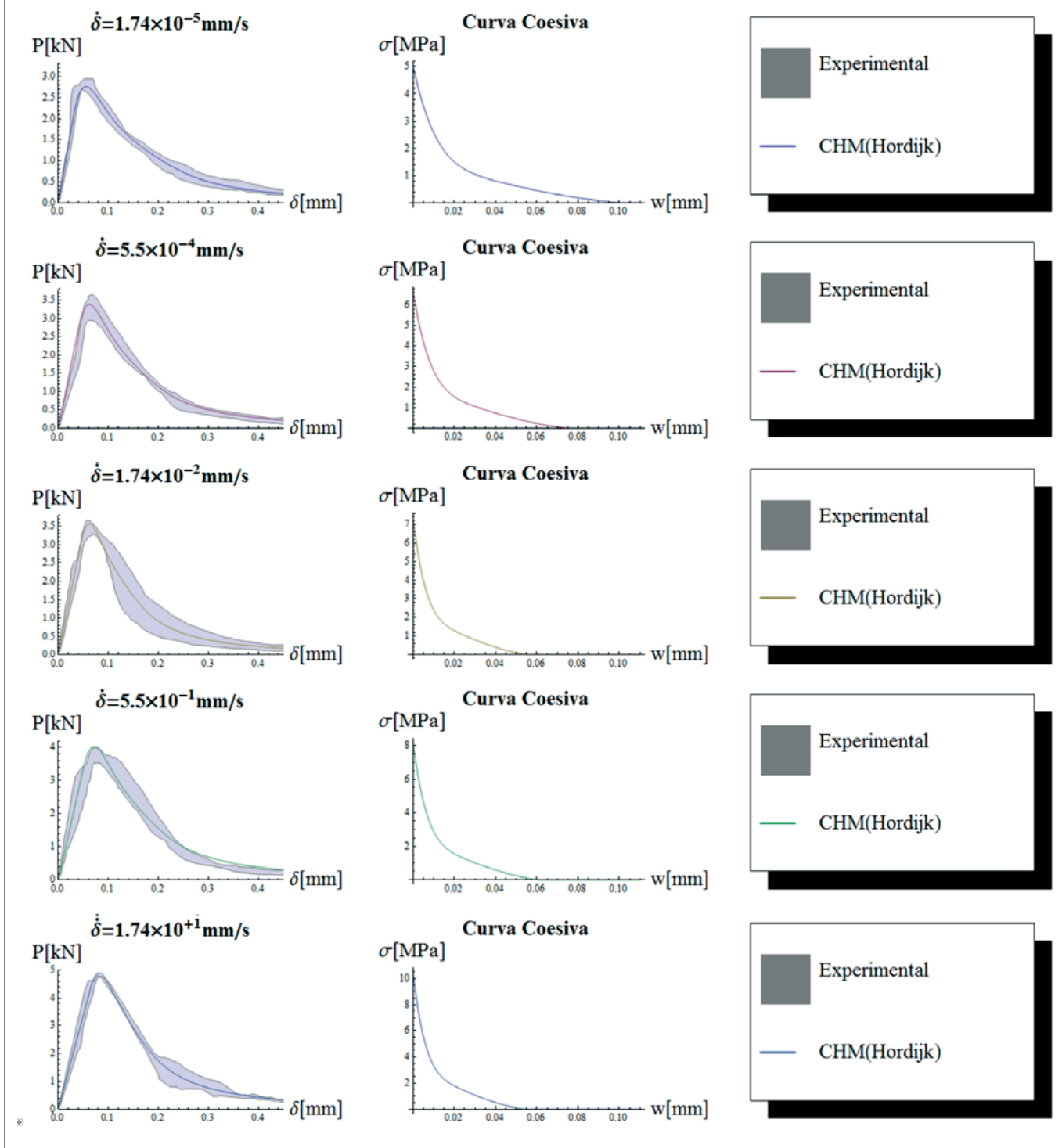
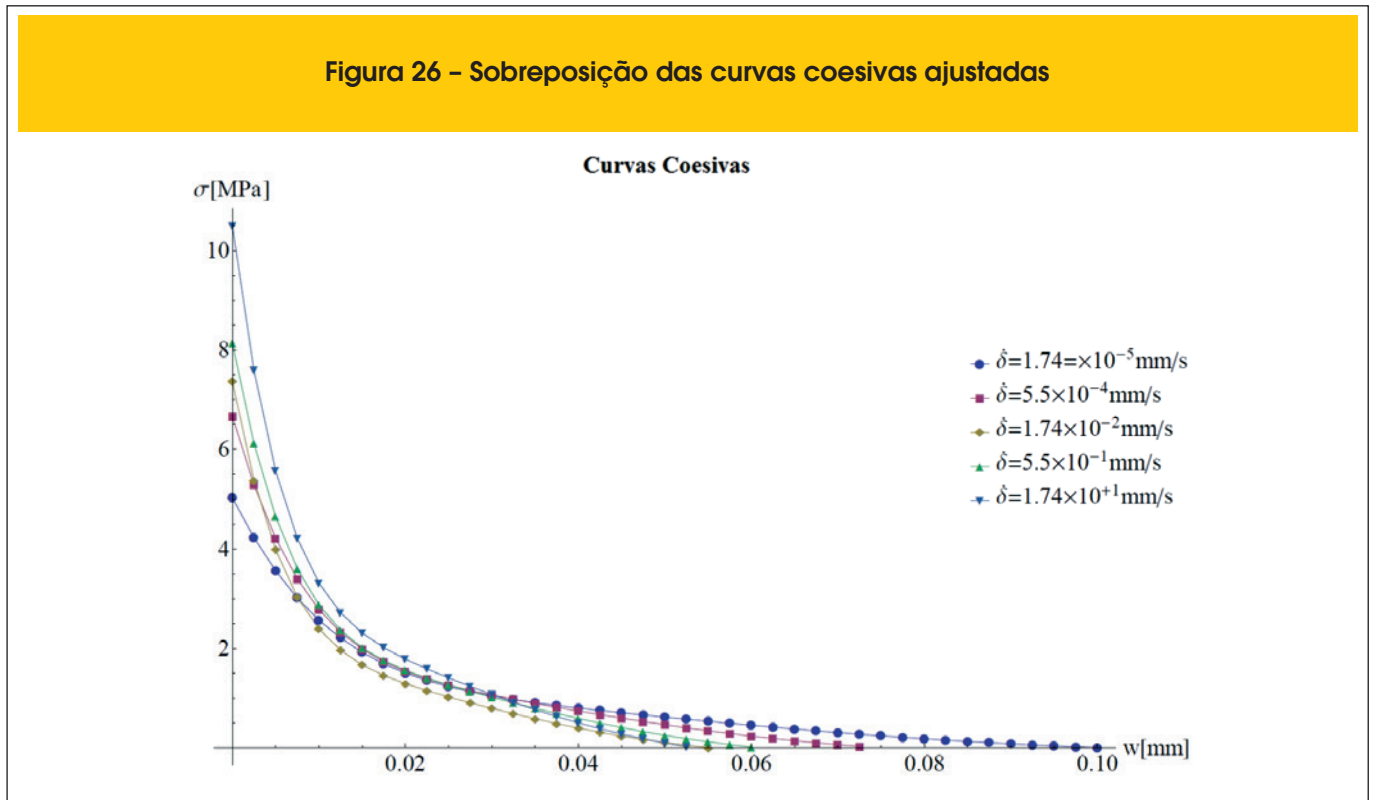


Figura 26 – Sobreposição das curvas coesivas ajustadas



atuador, o que está de acordo com a formulação de [1].

A Figura 25 apresenta as curvas ajustadas e suas respectivas curvas coesivas. A Figura 26 apresenta a sobreposição das curvas coesivas. Se considerarmos que um material idealmente frágil é aquele cujo a curva coesiva apresenta $w_c = 0$, ou seja, ao atingir f_{ic} o material se rompe. Com base na observação anterior, seria possível dizer que quanto menor for w_c mais próximo se está de um material frágil. Observando a Figura 26 e mantendo a observação anterior, o material se torna mais frágil no sentido de $1,74 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$ a $1,74 \times 10^{-2} \text{ mm/s}$, menos frágil de $1,74 \times 10^{-2} \text{ mm/s}$ a $5,5 \times 10^{-1} \text{ mm/s}$ e novamente volta a ser mais frágil.

Desse modo, o modelo proposto por [1] aparentemente necessita de uma complementação para considerar a fragilidade do material com o aumento de f_{ic} . Os demais modelos de curvas visco-coesivas apresentados na subseção 1 não desempenham o comportamento buscado, e mesmo que seja possível a combinação do modelo de [1] com o modelo de [24], tal combinação não tenderia ao resultado esperado, uma vez que este último aumenta o valor de w_c com o aumento da taxa de carregamento.

A sugestão que fica após essas observações é que seja investigada uma formulação que contemple a fragilidade do material com a taxa de carregamento e que esta complemente o modelo de [1].

6. Conclusões

O objetivo principal deste trabalho é avaliar a capacidade do modelo visco-coesivo de [1] em representar o comportamento do concreto sob o efeito da taxa de carregamento utilizando uma ferramenta computacional para o ajuste de curvas carga versus deslocamento do ponto de aplicação (P- δ) obtidas em ensaios com

vigas prismáticas ranhuradas em flexão em três pontos (*Three-Point-Bend Test*).

Pelos ajustes observou-se que o modelo não é capaz de representar completamente os dados experimentais e que existe uma grande dependência em relação ao intervalo de ajuste. Quando realizados os ajustes simultâneos do modelo de viscosidade com o modelo coesivo, os resultados deste não reproduzem os valores de f_{ic} e G_f determinados experimentalmente.

Na seção 5.6 foi realizada uma observação sobre a teoria de impacto na qual materiais quase-frágeis se comportariam de forma frágil em carregamentos de impacto [34]. Buscando-se alguma conexão entre o comportamento quase-frágil com o comportamento em condições de impacto, observou-se que o material se torna mais frágil com o aumento da taxa de carregamento.

Desta forma sugere-se necessária uma complementação do modelo de [1] de modo que este considere também a fragilidade do material com o aumento da taxa de carregamento.

7. Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Gonzalo Ruiz da Universidad de Castilla-La Mancha (UCLM) pela disponibilização dos dados experimentais. Ao Prof. Dr. Alair Leandro Rosa, da Faculdade de Engenharia de Sorocaba (FACENS) pelas discussões e sugestões a este trabalho.

8. Referências bibliográficas

- [1] ROSA, A. L., YU, R. C., RUIZ, G., SAUCEDO, L., SOUSA, J. L. A. O. A loading rate dependent cohesive model for

- concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 82, p.195-208, 2012
- [2] BARENBLATT, G. I. The formation of equilibrium cracks in brittle fracture. General ideas and hypothesis, axially symmetrical cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 23, p.622-636, 1959.
- [3] BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, v. 7, p.55-129, 1962.
- [4] HILLERBORG, A., MODEER, M., PETERSSON, P. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, v. 6, p.173-182, 1976.
- [5] BAZANT, Z. P., OH, B. H. Crack band theory for fracture concrete. *Materials and Structures*, v. 16, n. 93, p.155-157, 1983.
- [6] JENQ, Y. S., SHAH, S. P. Two-parameter fracture model for concrete. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, v. 111, n. 10, p.1227-1241, 1985.
- [7] NALLATHAMBI, P., KARIHALOO, B. L. Determination of specimen size independent fracture toughness of plain concrete. *Magazine of Concrete Research*, v. 38, n. 135, p.67-76, 1986.
- [8] TANG, T., OUYANG, C., SHAH, S. P. A simple method for determining material fracture parameters from peak loads. *ACI Materials Journal*, v. 93, n. 2, p.147-157, 1996.
- [9] RÜSH, H. Research toward a General Flexural Theory for Structural Concrete. *ACI Materials Journal*, v. 57, p.1-28, 1960.
- [10] AL-KUBAISY, M. A., YOUNG, A. G. Failure of concrete under sustained tension. *Magazine of Concrete Research*, v. 27, p.171-178, 1975.
- [11] NISHIBAYASHI, S. Tensile creep of concrete. *Proceedings of the 1978 RILEM Colloquium on Creep of Concrete*. A.M. Neville and J.J. Brooks (Eds.), University of Leeds, England, p.274-287, 1978.
- [12] GETTU, R., BAZANT, Z. P., KARR, M. E. Fracture properties and brittleness of high-strength concrete. *ACI Materials Journal*, v. 87, p.608-618, 1990.
- [13] REINHARDT, H.W., WEERHEIJM, J. Tensile fracture of concrete at high loading rates taking into account of inertia and crack velocity effects. *International Journal of Fracture*, v. 51, p.31-42, 1991.
- [14] ROSSI, P., VAN MIER, J. G. M., BOULAY, C., LE MAOU, F. The dynamic behaviour of concrete: influence of free water. *Materials and Structures*, v. 25, p.509-514, 1992.
- [15] BAZANT, Z. P., GETTU, R. Rate effects and load relaxation in static fracture of concrete. *ACI Materials Journal*, v. 89, p.456-468, 1992.
- [16] BAZANT, Z. P., JIRASEK, M. R-curve modelling of rate and size effects in quasi-brittle fracture. *International Journal of Fracture*, v. 62, p.355-373, 1993.
- [17] ROSSI, P., VAN MIER, J. G. M., TOUTLEMONDE, F., LE MAOU, F., BOULAY, C. Effect of loading rate on the strength of concrete subjected to uniaxial tension. *Materials and Structures*, v. 27, p.260-264, 1994.
- [18] BAZANT, Z. P., LI, Y. N. Cohesive crack with rate-dependent opening and visco-elasticity I: Mathematical model and scaling. *International Journal of Fracture*, v. 86, p.247-265, 1997.
- [19] BAZANT, Z. P., CANER, F. C., ADLEY, M. D., AKERS, S. A. Fracturing rate effect and creep in microplane model for dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 126, p.962-970, 2000.
- [20] BINDIGANAVILE, V., BANTHIA, N. Size effects and the dynamic response of plain concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v.18, p.485-491, 2006
- [21] BRARA, A., KLEPACZCKO, J. R. Fracture energy of concrete at high loading rates in tension. *International Journal of Impact Engineering*, v. 34, p.424-435, 2007.
- [22] WEERHEIJM, J., VAN DOORMAAL, J. Tensile fracture of concrete at high loading rates: new test data on strength and fracture energy from instrumented spalling tests. *International Journal of Impact Engineering*, v. 34, p.609-626, 2007.
- [23] TANDON, S., FABER, K. T., BAZANT, Z. P., LI, Y. N. Cohesive crack modeling of influence of sudden changes in loading rate on concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 52, n. 6, p.987-997, 1995.
- [24] ZHOU, F., MOLINARI, J., SHIOYA, T. A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, v.72, p.1383-1410, 2005.
- [25] TARIFA, M., POVEDA, E., YU, R. C., ZHANG, X., RUIZ, G. Effect of loading rate on high-strength concrete: numerical simulations. *VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, FraMCoS-8*, 2013.
- [26] GUINEA, G. V., PLANAS, J., ELICES, M. A general bilinear fit for the softening curve of concrete. *Materials and Structures*, v. 27, p.99-105, 1994.
- [27] SOUSA, J. L. A. O., GETTU, R. Determining the tensile stress-crack opening curve of concrete by inverse analysis. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, v. 132, p.141-148, 2006.
- [28] LEVENBERG, K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. *Applied Mathematics*, v. 2, p.164-168, 1944.
- [29] MARQUARDT, D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of Applied Mathematics*, v. 11, p.431-441, 1963.
- [30] SOUSA, J. L. A. O. A Levenberg-Marquardt algorithm for fitting $\sigma - w$ curves from three-point-bend tests for plain and fiber reinforced concretes. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v.4, n.4, p.691-694, 2011.
- [31] OLESEN, J. F. Fictitious crack propagation in fiber-reinforced concrete beams. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 127, n. 3, p.272-280, 2001.
- [32] PLANAS, J., ELICES, M. A. Nonlinear fractures of cohesive materials. *International Journal of Fractures*, v. 51, p.139-157, 1991.
- [33] HORDIJK, D. A. Local approach to fatigue of concrete. *Doctoral thesis, Delft University of Technology, The Netherlands*, 1991.
- [34] SANTOS, R. M. Comportamento de vigas de concreto armado reforçadas com CFC sujeitas a carga de impacto. *Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro*, 2008.