

**REVISTA IBRACON DE ESTRUTURAS E MATERIAIS** IBRACON STRUCTURES AND MATERIALS JOURNAL

### **Evaluation of deflection in reinforced concrete structures using damage mechanics**

# Avaliação de deflexões em estruturas de concreto armado utilizando mecânica do dano



J. J. C. PITUBA a julio.pituba@pq.cnpq.br

R. G. DELALIBERA <sup>a</sup> dellacivil@gmail.com

#### Abstract

This work intends to present a contribution about a proposed approach for the estimative of displacements in reinforced concrete structures submitted to service loads. This work is restrictive to C20 up to C35 classes of strength. The approach used in this work consists in the decreasing of cracking element elastic moduli by damage model. That constitutive model takes into account induced anisotropy, plastic deformations and bimodular elastic response and a simplified version is used in order to simulate the concrete behavior, while an elastoplastic behavior is admitted for the reinforcement. Initially, a set of beams are analyzed and some parameters related to the problem are modified, such as: compression strength, span length, cross section, reinforcement rates and support conditions. The numerical responses are compared with the ones obtained by NBR 6118:2007 Procedure. Statistical analyses are carried on in order to identify the major variables in the problem. Finally, some possible proposals to obtain cracking moment and displacement values in RC structures are discussed based on numerical and statistical analyses performed in this work in order to contribute in the improvement to Brazilian Technical Code procedure.

Keywords: reinforced concrete, technical code, damage mechanics.

#### Resumo

Este trabalho visa apresentar uma contribuição sobre uma proposta de abordagem para o cálculo de deslocamentos em estruturas de concreto armado em regime de serviço, sendo restrito o estudo ao caso de concretos C20 a C35. A abordagem utilizada leva em conta a penalização dos módulos elásticos dos elementos fissurados através de um modelo de dano. O modelo em questão leva em conta a anisotropia, deformações plásticas e resposta bimodular induzidas pelo processo de danificação, sendo uma versão mais simplificada usada para simular o comportamento do concreto fissurado, enquanto que um comportamento elastoplástico é admitido para a armadura. Inicialmente, são analisadas séries de vigas com variação de diversos parâmetros relacionados ao problema, tais como: resistência à compressão, arranjo das barras de aço da armadura, dimensões da seção transversal, vão e condições de apoio. As respostas numéricas são confrontadas com aquelas obtidas com o emprego do procedimento sugerido pela NBR 6118:2007. As análises numéricas são complementadas por análises estatísticas dos resultados empregando-se a metodologia ANOVA. Por fim, baseadas nas análises realizadas discutem-se algumas proposições possíveis para o cálculo do momento de fissuração e de deslocamentos em estruturas de concreto armado, como forma a contribuir no aperfeiçoamento do procedimento sugerido pela Norma Brasileira.

Palavras-chave: concreto armado, norma técnica, mecânica do dano.

<sup>a</sup> Department of Civil Engineering, Federal University of Goiás, Catalão, GO, Brasil.

Received: 21 Nov 2012 • Accepted: 25 Jan 2014 • Available Online: 13 Feb 2014

#### 1. Introdução

Este artigo é uma continuação do que vem sendo realizado com o objetivo de propor uma metodologia alternativa ao Procedimento preconizado pela NBR 6118:2007 [1] para o cálculo de deslocamentos em estruturas em concreto armado, [2]. O problema reside no fato de que para o cálculo de deslocamentos em estruturas em concreto armado a utilização do PTV (Princípio dos Trabalhos Virtuais), por exemplo, não é algo trivial. Isso se deve ao fato dos elementos de concreto armado serem heterogêneos compostos por concreto e aço, com módulos de elasticidade distintos acarretando em diferença de rigidez à flexão. Além disso, existe a grande possibilidade de ocorrência de diferentes comportamentos numa mesma estrutura submetida a cargas de pequena intensidade (regime de serviço), ou seja, regiões onde o concreto tracionado possui fissuras (Estádio II) e regiões onde está íntegro (Estádio I), não apresentando fissuras perceptíveis. A existência de fissuras provoca diminuição da inércia, contribuindo para a perda de resistência ao movimento da flexão, onde teoricamente apenas o aço resiste às tensões de tração.

Para a proposição desta metodologia alternativa são usados resultados obtidos de análises numéricas empregando-se um modelo de dano, proposto em [3], associada à comparações com resultados experimentais de estruturas em concreto armado de modo a validar o emprego do modelo em questão. Sendo, portanto, uma forma alternativa aos ensaios experimentais que são caros para serem realizados. Aliada às análises numéricas e experimentais, uma análise estatística baseada na metodologia ANOVA (Análise de Variância) vem sendo utilizada a fim de verificar as principais variáveis envolvidas no problema levando em conta as análises numéricas e analíticas com o emprego do Procedimento da NBR 6118:2007 [1]. Em [2] foram apresentados resultados das análises realizadas em vigas com três diferentes vãos, seções transversais e configurações de armações, no entanto, naquele trabalho abordou-se apenas o caso de concreto com fck= 30MPa e condições de vinculação de vigas biapoiadas e bi-engastadas. Além disso, análises numéricas em conjunto com análises estatísticas levaram a determinação de expressões para o cálculo do momento de fissuração (Mr) dependendo do fck utilizado, contudo tais expressões carecem de uma investigação com mais parâmetros envolvidos no problema.

No presente trabalho, tais parâmetros são levados em conta de modo a obter expressões para Mr que abrangem concretos ditos convencionais de classes C20 a C35. Além disso, uma discussão sobre possíveis proposições de fórmulas para a estimativa de des-locamentos em estruturas de concreto armado encerra o artigo.

O modelo de dano desenvolvido por [3] é empregado em análises de vigas em concreto armado submetidas a carregamento de peso próprio e carga acidental com a variação de condições de apoio, comprimento de vão, resistência à compressão do concreto, seção transversal e arranjo de armaduras. A validação das respostas numéricas obtidas, assim como a identificação paramétrica do modelo de dano, pode ser encontrada em [2], [3] e [4]. A modelagem utilizada descreve o processo de perda de rigidez, traduzida em deslocamentos maiores, através da penalização do módulo de elasticidade do material em dado ponto da estrutura e não na penalização do momento de inércia da seção estudada e, ainda mais, na representação dessa perda por uma inércia equivalente em toda viga, como se toda ela estivesse fissurada de forma homogênea. Sendo este último processo, o considerado pela NBR 6118:2007 [1]. Essas questões juntamente com a confiabilidade das respostas numéricas apresentadas pelo modelo de dano até então, associado ao baixo custo das análises numéricas frente ao elevado custo das análises experimentais, motivou a discussão que segue aqui.

No que segue, o trabalho apresenta sucintamente em seu item 2 os modelos utilizados, tais como: modelo de dano, ANOVA e Procedimento da NBR 6118:2007. Já no item 3, os protótipos ensaiados numericamente são apresentados, assim como informações sobre os concretos empregados na confecção dos protótipos. No item 4, os resultados numéricos e analíticos são apresentados e discussões levando-se em conta a metodologia ANOVA são desenvolvidas, assim como são apresentadas as propostas para o cálculo do momento de fissuração e uma discussão sobre possíveis abordagens para a estimativa de deslocamentos em estruturas em concreto armado. Finalmente, em seu item 5, o trabalho apresenta algumas conclusões.

#### 2. Modelagens utilizadas

#### 2.1 Modelo de dano

O concreto é aqui entendido como um material que pertence à categoria dos meios inicialmente isótropos que passam a apresentar isotropia transversal e resposta bimodular induzidas pelo dano. A formulação do modelo para o concreto tem por base o princípio de equivalência de energia e o formalismo apresentado em [3].

No que segue, o modelo proposto é descrito brevemente, iniciando pela apresentação do tensor de dano para estados predominantes de tração, cuja expressão é dada na forma:

$$\boldsymbol{D}_{T} = f_{1}(D_{1}, D_{4}, D_{3}) (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}) + 2 f_{2}(D_{4}, D_{3}) [(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A})]$$
(1)

sendo  $f_1(D_1, D_4, D_5) = D_1 - 2 f_2(D_4, D_5) = f_2(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4) (1-D_5).$ 

O tensor de dano apresenta duas variáveis escalares na sua composição (D<sub>1</sub> e D<sub>4</sub>) e uma terceira variável de dano D<sub>5</sub>, ativada somente se tiver havido compressão prévia com danificação correspondente. A variável D<sub>1</sub> representa a danificação na direção perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material e D<sub>4</sub> é a variável representativa da danificação gerada pelo cisalhamento entre as bordas das fissuras pertencentes àquele plano.

Na Eq. (1), o tensor I é o tensor identidade de segunda ordem e o tensor A é, por definição, formado pelo produto tensorial do versor perpendicular ao plano de isotropia transversal por ele mesmo. As operações produtos tensoriais entre os tensores de segunda ordem I e A que aparecem na Eq. (1) e que serão utilizadas durante toda a formulação estão descritas em [3].

Para estados predominantes de compressão, propõe-se para o tensor de dano a relação:

 $D_{c}=f_{1}(D_{2}, D_{4}, D_{5})(A \otimes A) + f_{2}(D_{3})[(I \otimes I) - (A \otimes A)]$ +2f\_{3}(D\_{4}, D\_{5})[(A \otimes I + I \otimes A) - (A \otimes A)] (2) sendo  $f_1(D_2, D_4, D_5) = D_2 - 2 f_3(D_4, D_5)$ ,  $f_2(D_3) = D_3 e f_3(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4) (1-D_5)$ .

Notam-se três variáveis escalares na sua composição:  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_5$ , além de  $D_4$ , relacionada a efeitos de tração pré-existentes. A variável  $D_2$  (danificação perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material) penaliza o módulo de elasticidade nessa direção, e juntamente com  $D_3$  (representante da danificação no plano de isotropia transversal) penaliza o coeficiente de Poisson em planos perpendiculares ao de isotropia transversal.

Finalmente, os tensores constitutivos resultantes são descritos por:

$$E_{T} = \lambda_{11} [I \otimes I] + 2 \mu_{1} [I \overline{\otimes} I] - \lambda_{22}^{+} (D_{1}, D_{4}, D_{5}) [A \otimes A]$$
  
$$-\lambda_{12}^{+} (D_{1}) [A \otimes I + I \otimes A] - \mu_{2} (D_{4}, D_{5}) [A \overline{\otimes} I + I \overline{\otimes} A]$$
(3)

$$E_{C} = \lambda_{11}[I \otimes I] + 2\mu_{1}[I \overline{\otimes} I] - \lambda_{22}(D_{2}, D_{3}, D_{4}, D_{5})[A \otimes A] - \lambda_{12}(D_{2}, D_{3})[A \otimes I + I \otimes A]$$
  
$$-\lambda_{11}(D_{3})[I \otimes I] - \frac{(1 - 2\nu_{0})}{\nu_{0}}\lambda_{11}(D_{3})[I \overline{\otimes} I] - \mu_{2}(D_{4}, D_{5})[A \overline{\otimes} I + I \overline{\otimes} A]$$
(4)

onde  $\lambda_{II} = \lambda_{0}$  e  $\mu_{I} = \mu_{0}$ . Os outros parâmetros só existem para dano não-nulo, evidenciando dessa forma a anisotropia e bimodularidade induzidas pelo dano, e são definidos por:

$$\lambda_{22}^{+}(D_{1}, D_{4}, D_{5}) = (\lambda_{0} + 2\mu_{0})(2D_{1} - D_{1}^{2}) - 2\lambda_{12}^{+}(D_{1}) - 2\mu_{2}(D_{4}, D_{5})$$

$$\lambda_{12}^{+}(D_{1}) = \lambda_{0}D_{1}; \mu_{2}(D_{4}, D_{5}) = 2\mu_{0}[1 - (1 - D_{4})^{2}(1 - D_{5})^{2}]$$

$$+ \frac{(\nu_{0} - 1)}{\nu_{0}}\lambda_{11}^{-}(D_{3}) - 2\mu_{2}(D_{4}, D_{5})$$

$$\lambda_{12}^{-}(D_{2}, D_{3}) = \lambda_{0}[(1 - D_{3})^{2} - (1 - D_{2})(1 - D_{3})]$$

$$\lambda_{11}^{-}(D_{3}) = \lambda_{0}(2D_{3} - D_{3}^{2}); \mu_{2}(D_{4}, D_{5}) = 2\mu_{0}[1 - (1 - D_{4})^{2}(1 - D_{5})^{2}]$$
(5)

Em [3] define-se uma hipersuperfície, no espaço das tensões ou das deformações, a ser empregada como critério para a identificação das respostas constitutivas de compressão ou de tração. Neste modelo adota-se uma forma particular para a hipersuperfície no espaço das deformações: um hiperplano g( $\epsilon$ ), caracterizado por sua normal unitária N (||N|| = 1). Para o modelo em questão vale a seguinte relação:

$$g(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{D}_{T},\boldsymbol{D}_{C}) = N(\boldsymbol{D}_{T},\boldsymbol{D}_{C}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{e} = \gamma_{l}(D_{l},D_{2}) \boldsymbol{\varepsilon}_{V}^{e} + \gamma_{2}(D_{l},D_{2}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ll}^{e}$$
(6)

onde  $\gamma_1(D_1, D_2) = \{1+H(D_2)[H(D_1)-1]\}\eta(D_1) + \{1+H(D_1)[H(D_2)-1]\}\eta(D_2) \in \gamma_2(D_1, D_2) = D_1 + D_2.$ 

As funções de Heaveside empregadas na última relação são dadas por:

$$H(D_i) = 1 \text{ for } D_i > 0; H(D_i) = 0 \text{ for } D_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$
(7)

As funções  $\eta(D_1) = \eta(D_2)$  são definidas, respectivamente, para os casos de tração, supondo que não tenha danificação prévia de compressão, e de compressão, supondo que não tenha havido danificação prévia de tração.

$$\eta(D_1) = \frac{-D_1 + \sqrt{3 - 2D_1^2}}{3}; \ \eta(D_2) = \frac{-D_2 + \sqrt{3 - 2D_2^2}}{3}$$
(8)

Com relação ao critério de danificação, é conveniente separálo em critério para início de danificação, quando o material deixa de ser isótropo; e critério para carga e descarga, entendido aqui num sentido de evolução ou não das variáveis de dano, quando o material já apresentar-se como transversalmente isótropo.

O critério para ativação inicial de processos de danificação em tração ou compressão é dado por:

$$f_{T,C}(\sigma) = \frac{W_e^*}{2} - Y_{0T,0C} < 0$$
 (9)

onde  $W_e^*$  é a energia de deformação elástica complementar considerando-se o meio inicialmente íntegro, isótropo e puramente

elástico e 
$$Y_{0T} = \frac{\sigma_{0T}^2}{2E_0}$$
 ou  $Y_{0C} = \frac{\sigma_{0C}^2}{2E_0}$  é um valor de referência obtido

de ensaios uniaxiais de tração, ou de compressão, respectivamente, sendo  $\sigma_{\scriptscriptstyle \partial T}$  e  $\sigma_{\scriptscriptstyle \partial C}$  as tensões dos limites elásticos.

Portanto,  $D_T = 0$  (ou seja,  $D_I = D_4 = 0$ ) para estados predominantes de tração ou  $D_C = 0$  (ou seja,  $D_2 = D_3 = D_5 = 0$ ) para estados de compressão, onde o regime de resposta do material é elástico linear e isótropo.

Para o caso de g( $\epsilon$ , $\mathbf{D}_{\mathrm{T}}$ , $\mathbf{D}_{\mathrm{c}}$ ) > 0, a energia elástica complementar do meio danificado é dada pela relação:

$$W_{e_{+}}^{*} = \frac{\sigma_{11}^{2}}{2E_{0}(1-D_{1})^{2}} + \frac{(\sigma_{22}^{2} + \sigma_{33}^{2})}{2E_{0}} - \frac{v_{0}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33})}{E_{0}(1-D_{1})} - \frac{v_{0}\sigma_{22}\sigma_{33}}{E_{0}} + \frac{(1+v_{0})}{E_{0}(1-D_{4})^{2}(1-D_{5})^{2}}(\sigma_{12}^{2} + \sigma_{13}^{2}) + \frac{(1+v_{0})}{E_{0}}\sigma_{23}^{2}$$
(10)

Por outro lado, para estados predominantes de compressão  $(g(\epsilon, D_{\tau}, D_{c}) < 0)$ , a energia elástica complementar é expressa por:

$$W_{e_{-}}^{*} = \frac{\sigma_{11}^{2}}{2E_{0}(1-D_{2})^{2}} + \frac{(\sigma_{22}^{2} + \sigma_{33}^{2})}{2E_{0}(1-D_{3})^{2}} - \frac{v_{0}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{13}\sigma_{33})}{E_{0}(1-D_{2})(1-D_{3})} - \frac{v_{0}\sigma_{22}\sigma_{33}}{E_{0}(1-D_{3})^{2}} + \frac{(1+v_{0})}{E_{0}(1-D_{2})(1-D_{3})} - \frac{(1+v_{0})}{E_{0}(1-D_{3})^{2}}$$
(11)

(16)

Considerando-se, então, uma situação geral de meio danificado em regime predominante de tração, o critério para a identificação de acréscimos de danificação é representado pela seguinte relação:

$$f_T(\sigma) = W_{e_+}^* - Y_{0T}^* \le 0$$
(12)

onde o valor de referência  $Y_{0T}^*$  é definido pela máxima energia elástica complementar determinada ao longo do processo de danificação até o estado atual. Para o meio danificado em regime predominante de compressão, valem relações análogas ao caso de tração.

Nos casos onde se configura carregamento, isto é, onde  $D_T \neq 0$ ou  $\dot{D}_C \neq 0$ , é necessário atualizar os valores das variáveis escalares de dano que aparecem nos tensores  $\mathbf{D}_T \in \mathbf{D}_C$ , considerando-se suas leis de evolução.

Limitando-se a análise ao caso de carregamento monotônico crescente e versão uniaxial do modelo, as leis de evolução propostas para as variáveis escalares de dano são resultantes de ajustes sobre resultados experimentais. A forma geral proposta é:

$$D_{i} = 1 - \frac{1 + A_{i}}{A_{i} + \exp[B_{i}(Y_{i} - Y_{0i})]} \quad \text{com } i = 1, 2$$
 (13)

onde  $A_{\mu}$ ,  $B_{\mu}$  e  $Y_{0i}$  são parâmetros a serem identificados. Os parâmetros  $Y_{0i}$  são entendidos como limites iniciais para a ativação da danificação, os mesmos utilizados na Eq. (9).

Existe ainda a necessidade de definir a localização do plano local de isotropia transversal do material, portanto, admite-se como válida a seguinte afirmação: "No espaço das deformações principais, se duas das três taxas de deformação forem de alongamento, de encurtamento ou nulas, o plano definido por elas será o plano local de isotropia transversal do material."

Tanto no caso de tração uniaxial como compressão uniaxial, resulta que o plano de isotropia transversal é perpendicular à direção da tensão de tração ou de compressão.

Esta versão unidimensional do modelo foi implementada num código de cálculo para a análise de estruturas de barras discretizadas com elementos finitos estratificados, onde para o concreto vale o modelo de danificação em estudo, e para as barras de aço longitudinais admite-se um comportamento elasto-plástico. Na seção transversal em concreto armado discretizada, uma certa camada pode conter aço e concreto. A camada em questão contém um módulo elástico e uma deformação anelástica equivalentes, utilizando-se de regra de homogeneização.

Por outro lado, adotando-se a direção 1 como a direção longitudinal da barra, as relações do modelo em sua versão unidimensional estão a seguir resumidas.

$$E := \begin{cases} E_C & se \quad g(\varepsilon, D_T, D_C) < 0, \\ E_T & se \quad g(\varepsilon, D_T, D_C) > 0, \end{cases}$$
(14)

$$E_{T} = E_{0} (l - D_{1})^{2} (l - D_{2})^{2}$$

$$E_C = E_0 \left( l - D_2 \right)^2$$

$$W_{e_{+}}^{*} = \frac{\sigma_{II}^{2}}{2E_{0}(I - D_{I})^{2}(I - D_{2})^{2}}; \quad W_{e_{-}}^{*} = \frac{\sigma_{II}^{2}}{2E_{0}(I - D_{2})^{2}}$$
(17)

$$\mathbf{Y}_{\tau} = \frac{\partial W_{e^+}^*}{\partial D_1} = \mathbf{Y}_1; \quad \mathbf{Y}_c = \frac{\partial W_{e^-}^*}{\partial D_2} = \mathbf{Y}_2$$
(18)

$$Y_{I} = \frac{\sigma_{II}^{2}}{E_{0}(I - D_{I})^{3}(I - D_{2})^{2}}; \quad Y_{2} = \frac{\sigma_{II}^{2}}{E_{0}(I - D_{2})^{3}}$$
(19)

#### 2.2 Procedimento da NBR6118:2007

Os modelos de avaliação de deslocamentos em estruturas de concreto armado consideram o comportamento dos elementos estruturais submetidos à ação de momento fletor nos Estádios I (seção íntegra, considera-se a contribuição do concreto na região tracionada) e II (peça fissurada despreza-se a contribuição do concreto tracionado para o equilíbrio da seção transversal).

A NBR 6118:2007 [1] apresenta um critério para o cálculo do deslocamento excessivo em elementos fletidos de concreto armado baseado numa ponderação das inércias nos Estádios I (I<sub>1</sub>) e II (I<sub>2</sub>), resultando uma inércia equivalente, I<sub>eq</sub>. Essa inércia equivalente é calculada por meio da Eq. (20). Tal procedimento é válido desde que o momento atuante na seção crítica, M<sub>a</sub>, seja maior que o momento fletor que provoca a primeira fissura, M<sub>r</sub>.

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3\right] \cdot I_2 \le I_c$$
(20)

Na Eq. (20),  $I_c$ , é a inércia da seção íntegra, sem a consideração da contribuição das barras de aço na seção transversal de concreto armado (homogeneização da seção).

O momento que provoca a primeira fissura, denominado momento de fissuração, M<sub>2</sub>, é calculado por meio da Eq. (21). Observa-se na Eq. (21), que a norma brasileira despreza o efeito favorável das barras de aço da seção transversal de concreto armado, diminuindo, portanto, o valor de M<sub>2</sub>.

$$M_{r} = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_{c}}{y_{t}}$$
(21)

O valor de  $\alpha$  da Eq. (21) tem valor igual a 1,2 para seções transversais T ou duplo T e valor igual a 1,5 para seções transversais retangulares. O valor da resistência à tração do concreto (f<sub>d</sub>) é calculado por meio da Eq. (22) e, y<sub>t</sub> é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada da seção transversal.

$$f_{ct} = 0,21 \cdot f_{ck}^{2/3}$$
 (22)

Sendo  $f_{ck}$  a resistência característica do concreto à compressão. Por outro lado, o momento na seção crítica,  $M_a$ , é determinado por meio de uma combinação quase-permanente de ações. Esta combinação reduz a intensidade das ações variáveis acidentais, por meio de um coeficiente estatístico  $\Psi_2$ , cujo valor pode ser igual a 0,3, 0,4 e 0,6, dependendo para qual fim destina-se a utilização da estrutura. A combinação quase-permanente é calculada pela Eq. (23).

$$F_{d,ser} = \sum_{i=1}^{n} F_{gi,k} + \sum_{i=1}^{m} \psi_{2j} \cdot F_{qj,k}$$
(23)

Na Eq. (23),  $F_g$  representa os valores das intensidades das ações permanentes e  $F_q$  representa os valores das intensidades ações variáveis acidentais.

Tendo considerado a rigidez equivalente da viga que representa uma média do comportamento de toda a viga, pode-se proceder à estimativa da flecha imediata  $\delta$  utilizando as equações da Resistência dos Materiais que são válidas para seções constantes ao longo da peça, ou seja:



#### Onde:

- α<sub>c</sub> é um coeficiente qu depende da condição dos vínculos da viga e do tipo de ações atuantes;
- p é a carga aplicada;
- I é o vão da viga.
- (EI)<sub>eq</sub> é uma rigidez equivalente de toda a peça fissurada dada pela multiplicação entre o módulo de elasticidade secante do concreto e o momento de inércia da peça fissurada dada pela equação (20).

#### 2.3 Metodologia ANOVA

A análise de variância (ANOVA) é um teste estatístico amplamente difundido entre os analistas, e visa fundamentalmente verificar se existe diferença significativa entre as médias e se os fatores exercem influência em alguma variável dependente, [5].

Os fatores propostos podem ser de origem qualitativa ou quantita-



tiva, mas a variável dependente necessariamente deverá ser contínua. A principal aplicação da ANOVA é a comparação de médias oriundas de grupos diferentes, também chamados tratamentos.

Existem dois tipos de problemas a serem resolvidos por meio da ANOVA: fatores fixos ou fatores aleatórios. A aleatoriedade determina a questão do problema. Na grande maioria dos casos trata--se de fatores fixos, afinal o segundo tipo de problema (aleatório) somente surgirá quando ocorrer um estudo envolvendo uma esco-lha aleatória de fatores.

Na análise de variância desenvolvida neste trabalho, utilizaram-se fatores fixos, escolhendo cinco variáveis de estudo: a resistência à compressão do concreto; as condições de apoio; a seção transversal das vigas; o vão efetivo das vigas; a quantidade de barras de aço da armadura longitudinal de flexão. As variáveis escolhidas totalizaram cento e oito casos de combinações, que são eles: vão, área de aço, inércia e correlações entre vão da viga e área da seção transversal das barras de aço, vão da viga e inércia e, por fim, área de aço e inércia. Maiores detalhes da metodologia desenvolvida podem ser vistas em [2].

#### 3. Modelos de ensaio

A versão unidimensional do modelo de dano foi implementada num programa para análise plana de estruturas de barras discretizadas com elementos finitos estratificados. Para o concreto vale o modelo de danificação em estudo, e para as barras de aço longitudinais admite-se um comportamento elasto-plástico. Para efeito de cálculo, o peso-próprio do elemento é levado em conta no modelo em elementos finitos. È assumida perfeita aderência entre os materiais sendo definido para cada camada um módulo de elasticidade e uma deformação inelástica equivalente através de regra de homogeneização. Neste item são descritos os modelos em elementos finitos de vigas utilizados para verificar a influência de alguns parâmetros no cálculo de deslocamentos em vigas. Esses modelos são aqui chamados de "protótipos de ensaios", onde os mesmos foram ensaiados numericamente a fim de se obter os resultados a serem comparados com os preconizados pela NBR 6118:2007 [1]. Neste trabalho foram admitidos como parâmetros de variação o comprimento do vão, a altura da seção transversal, as condições de vinculação, a resistência à compressão do concreto e o arranjo das barras de aço da armadura. Portanto, o conjunto de modelos de ensaio somam um total de 324 casos, onde tem-se três tipos de concretos, três tipos de arranjo de armadura, três diferentes comprimentos de vão, três diferentes alturas da seção transversal e quatro de tipo de vinculações, além das combinações possíveis desses casos. Os protótipos de ensaio estão nomeados segundo as propriedades contidas na Tabela 1 e suas geometrias estão descritas na Figura 1. Ressalta-se que para cada caso de vinculação, obviamente, a Figura 1 representa seus vínculos como engastes ou engaste e apoio ou engaste e livre.

#### Tabela 1 - Propriedades dos modelos em elementos finitos para vigas biapoiadas

Viga	fck (MPa)	Vão (m)	As (cm²)	Viga	fck (MPa)	Vão (m)	As (cm²)	Viga	fck (MPa)	Vão (m)	As (cm²)
V31 - 12x30	30.8	2.4	2.36	V32 - 12x40	30.8	2.4	2.36	V33 - 12x50	30.8	2.4	2.36
V51-12x30	30.8	2.4	3.93	V52 - 12x40	30.8	2.4	3.93	V53 - 12x50	30.8	2.4	3.93
V71 - 12x30	30.8	2.4	5.5	V72 - 12x40	30.8	2.4	5.5	V73 - 12x50	30.8	2.4	5.5
V34 - 12x30	30.8	3	2.36	V35 - 12x40	30.8	3	2.36	V36 - 12x50	30.8	3	2.36
V54 - 12x30	30.8	3	3.93	V55 - 12x40	30.8	3	3.93	V56 - 12x50	30.8	3	3.93
V74 - 12x30	30.8	3	5.5	V75 - 12x40	30.8	3	5.5	V76 - 12x50	30.8	3	5.5
V37 - 12x30	30.8	2	2.36	V38 - 12x40	30.8	2	2.36	V39 - 12x50	30.8	2	2.36
V57 - 12x30	30.8	2	3.93	V58 - 12x40	30.8	2	3.93	V59 - 12x50	30.8	2	3.93
V77 - 12x30	30.8	2	5.5	V78 - 12x40	30.8	2	5.5	V79 - 12x50	30.8	2	5.5
V311 - 12x30	30	2.4	2.36	V322 - 12x40	30	2.4	2.36	V333 - 12x50	30	2.4	2.36
V511-12x30	30	2.4	3.93	V522 - 12x40	30	2.4	3.93	V533 - 12x50	30	2.4	3.93
V711 - 12x30	30	2.4	5.5	V722 - 12x40	30	2.4	5.5	V733 - 12x50	30	2.4	5.5
V344 - 12x30	30	3	2.36	V355 - 12x40	30	3	2.36	V366 - 12x50	30	3	2.36
V544 - 12x30	30	3	3.93	V555 - 12x40	30	3	3.93	V566 - 12x50	30	3	3.93
V744 - 12x30	30	3	5.5	V755 - 12x40	30	3	5.5	V766 - 12x50	30	3	5.5
V377 - 12x30	30	2	2.36	V388 - 12x40	30	2	2.36	V399 - 12x50	30	2	2.36
V577 - 12x30	30	2	3.93	V588 - 12x40	30	2	3.93	V599 - 12x50	30	2	3.93
V777 - 12x30	30	2	5.5	V788 - 12x40	30	2	5.5	V799 - 12x50	30	2	5.5
V3111 - 12x30	) 25	2.4	2.36	V3222 - 12x40	25	2.4	2.36	V3333 - 12x50	25	2.4	2.36
V5111-12x30	25	2.4	3.93	V5222 - 12x40	25	2.4	3.93	V5333 - 12x50	25	2.4	3.93
V7111 - 12x30	25	2.4	5.5	V7222 - 12x40	25	2.4	5.5	V7333 - 12x50	25	2.4	5.5
V3444 - 12x30	) 25	3	2.36	V3555 - 12x40	25	3	2.36	V3666 - 12x50	25	3	2.36
V5444 - 12x30	) 25	3	3.93	V5555 - 12x40	25	3	3.93	V5666 - 12x50	25	3	3.93
V7444 - 12x30	) 25	3	5.5	V7555 - 12x40	25	3	5.5	V7666 - 12x50	25	3	5.5
V3777 - 12x30	25	2	2.36	V3888 - 12x40	25	2	2.36	V3999 - 12x50	25	2	2.36
V5777 - 12x30	25	2	3.93	V5888 - 12x40	25	2	3.93	V5999 - 12x50	25	2	3.93
V7777 - 12x30	) 25	2	5.5	V7888 - 12x40	25	2	5.5	V7999 - 12x50	25	2	5.5

**Nota:** Para o caso das vigas bi-engastadas são acrescidas as letras be ao final da denominação, assim como ea para engaste apoiada e finalmente e para engaste e livre (em balanço).

Tabela 2 – Parâmetros do modelo de dano para os concretos utilizados neste trabalho									
	Concreto co	m fck = 25.0 MPa	Concreto com	n fck = 30.8 MPa	Concreto co	om = 30.0 MPa			
	Tração	Compressão	Tração	Compressão	Tração	Compressão			
Y <sub>01</sub> / Y <sub>02</sub> (MPa)	1.137x10 <sup>-₄</sup>	$Y_{02} = 0,5 \times 10^{-5}$	$Y_{01} = 0.72 \times 10^{-4}$	$Y_{02} = 0.5 \times 10^{-3}$	$Y_{01} = 0.72 \times 10^{-4}$	$Y_{02} = 1,7 \times 10^{-3}$			
$A_1 / A_2$	A <sub>1</sub> = 5,33	$A_2 = -0,0086$	$A_1 = 50$	$A_2 = -0.9$	$A_1 = 50$	$A_2 = -0.8$			
$B_{1}/B_{2}$ (MPa <sup>-1</sup> )	B <sub>1</sub> = 5660	$B_2 = 5,71$	B <sub>1</sub> = 6700	$B_2 = 0.4$	$B_1 = 6700$	$B_2 = 1, 1$			

Com intuído de aferir o deslocamento vertical calculado por meio do modelo numérico apresentado neste trabalho, calculou-se analiticamente os deslocamentos verticais das vigas de concreto armado submetidas à ação de momento fletor, utilizando os critérios sugeridos pela NBR 6118:2007 [1], mostrados no item 2.2 deste trabalho, considerando-se como ações permanentes o peso próprio das vigas e como ações variáveis acidentais, o valor das forças  $F_r e 3 \times F_r$ , aplicadas às distâncias de I/3 e 2×I/3 medidas a partir do apoio da esquerda da viga (ver figura 1). O valor da força  $F_r$  foi obtido em função do valor do momento de fissuração (Eq. (7)) e calculado por meio de Eq. (25).

$$F_{\rm r} = \left(M_{\rm r} - \frac{g \cdot \ell^2}{8}\right) \cdot \frac{2}{\ell}$$
(25)

Na Eq. (25),  $F_r$  é o valor da intensidade da força que provoca o momento de fissuração, g representa o peso próprio das vigas de concreto armado e I é o vão livre da viga.

A identificação paramétrica do modelo de dano para os concretos

#### Tabela 3 – Valores dos deslocamentos obtidos com o Procedimento da NBR 6118:2007 e com os ensaios numéricos para Fr. (Viga em balanço, 30,8 MPa)

Viga	P = Fr									
viga	Fr NBR (KN)	Fr Num (KN)	Desl. NBR (cm)	Desl. Num (cm)	Diferença (%)					
V31e-12x30	2,24	1,84	0,20	0,105	47,50					
V51e-12x30	2,24	1,88	0,20	0,105	47,50					
V71e - 12x30	2,24	1,90	0,20	0,105	47,50					
V34e - 12x30	1,30	1,51	0,29	0,170	41,38					
V54e - 12x30	1,30	1,50	0,29	0,162	44,14					
V74e - 12x30	1,30	1,51	0,29	0,162	44,14					
V37e - 12x30	3,08	2,22	0,14	0,080	42,86					
V57e - 12x30	3,08	2,28	0,14	0,080	42,86					
V77e - 12x30	3,08	2,30	0,14	0,080	42,86					
V32e - 12x40	4,46	3,27	0,15	0,083	44,67					
V52e - 12x40	4,46	3,31	0,15	0,082	45,33					
V72e- 12x40	4,46	3,36	0,15	0,082	45,33					
V35e - 12x40	2,92	2,60	0,23	0,127	44,78					
V55e - 12x40	2,92	2,60	0,23	0,124	46,09					
V75e - 12x40	2,92	2,52	0,23	0,119	48,26					
V38e - 12x40	5,87	3,87	0,11	0,060	45,45					
V58e - 12x40	5,87	3,82	0,11	0,060	45,45					
V78e - 12x40	5,87	3,87	0,11	0,060	45,45					
V33e - 12x50	7,41	5,02	0,12	0,067	44,17					
V53e - 12x50	7,41	5,12	0,12	0,069	42,50					
V73e - 12x50	7,41	5,21	0,12	0,069	42,50					
V36e - 12x50	5,12	4,01	0,19	0,110	42,11					
V56e - 12x50	5,12	3,94	0,19	0,101	46,84					
V76e - 12x50	5,12	4,00	0,19	0,101	46,84					
V39e - 12x50	9,55	5,76	0,09	0,050	44,44					
V59e - 12x50	9,55	5,90	0,09	0,050	44,44					
V79e - 12x50	9,55	6,00	0,09	0,050	44,44					

com resistências à compressão de 25MPa, 30 MPa e 30,8 MPa utilizados neste trabalho está apresentada em [2] E [4], assim como a utilização do modelo na análise de vigas e pórticos de concreto armado com o intuito de comprovar a boa concordância com respostas experimentais de tais estruturas analisadas experimentalmente por [6], [7] E [8]. Os parâmetros do modelo estão apresentados na tabela 2.

De acordo com dados experimentais constantes em [6], o primeiro concreto tem resistência à tração de 2,3 MPa e módulo de elasticidade de 32,3 GPa. Já o segundo concreto tem resistência à tração de 2,25 MPa e módulo de elasticidade de 29200,00 MPa, [8]. O terceiro concreto, de acordo com [7], possui um modulo de eleasticidade de 30400,00 MPa. Já o aço utlizado na armadura dos protótipos tem módulo de elasticidade de 196000,00 MPa e tensão de escoamento de 500 MPa. Ressalta-se que tais modelos em elementos finitos já foram testados até se chegar numa objetividade de cada malha nas referências [2] e [4]. A discretização longitudinal foi composta por 16 elementos finitos e a seção transversal foi dividida em 15 camadas, onde as camadas representantes das áreas de aço ao longo da altura da seção são localizadas segundo o baricentro de suas áreas.

#### 4. Resultados numéricos, analíticos e estatísticos

Devido ao grande volume de resultados, nas tabelas a seguir são descritos alguns deles obtidos para deslocamentos no meio dos vãos de cada protótipo com o emprego do Procedimento da NBR6118:2007 [1], assim como aqueles obtidos nas análises numéricas. Foram considerados os valores para P=F<sub>r</sub> e P=3F<sub>r</sub> no intuito de averiguar o comportamento do Procedimento sugerido pela NBR6118:2007 [1] em relação à evolução do processo de danificação das vigas.

Os valores percentuais da diferença entre os deslocamentos foram calculados admitindo como valores de referência os preconizados pela NBR6118:2007 [1].

Observando as tabelas acima, retifica-se a observação do conservadorismo do procedimento de cálculo da NBR6118:2007 [1], sendo refletido, na maioria dos casos, em diferenças da ordem de 30 a 50%. No caso de vigas bi-engastadas, a diferença se torna ainda mais relevante (Tab. (4)) Em geral, observa-se ainda que as diferenças entre os valores dos deslocamentos diminuem com o aumento da carga aplicada Fr. O modelo adotado

#### Tabela 4 – Valores dos deslocamentos obtidos com o Procedimento da NBR 6118:2007 e com os ensaios numéricos para Fr. (Viga bi-engastada, 30,0 MPa)

	P = Fr									
viga	Fr NBR (KN)	Fr Num (KN)	Desl. NBR (cm)	Desl. Num (cm)	Diferença (%)					
V311be-12x30	13,85	12,06	0,10	0,018	82,00					
V511be-12x30	13,85	12,33	0,10	0,018	82,00					
V711be - 12x30	13,85	12,44	0,10	0,018	82,00					
V344be - 12x30	10,72	11,47	0,15	0,032	78,67					
V544be - 12x30	10,72	11,71	0,15	0,032	78,67					
V744be - 12x30	10,72	11,80	0,15	0,032	78,67					
V377be - 12x30	16,92	19,02	0,07	0,017	75,71					
V577be - 12x30	16,92	19,18	0,07	0,017	75,71					
V777be - 12x30	16,92	15,53	0,07	0,014	80,00					
V322be - 12x40	24,99	28,04	0,07	0,020	71,43					
V522be - 12x40	24,99	28,50	0,07	0,020	71,43					
V722be-12x40	24,99	28,63	0,07	0,020	71,43					
V355be - 12x40	19,50	15,98	0,11	0,034	69,18					
V555be - 12x40	19,50	16,36	0,11	0,022	80,00					
V755be - 12x40	19,50	16,58	0,11	0,022	80,00					
V388be - 12x40	30,38	27,37	0,05	0,017	66,00					
V588be - 12x40	30,38	27,56	0,05	0,011	78,00					
V788be - 12x40	30,38	27,41	0,05	0,017	66,00					
V333be - 12x50	39,38	36,54	0,06	0,022	63,33					
V533be - 12x50	39,38	36,66	0,06	0,022	63,33					
V733be - 12x50	39,38	36,63	0,06	0,022	63,33					
V366be - 12x50	30,9	32,07	0,09	0,025	72,22					
V566be - 12x50	30,9	32,73	0,09	0,025	72,22					
V766be - 12x50	30,9	33,18	0,09	0,025	72,22					
V399be - 12x50	47,75	47,14	0,04	0,017	57,50					
V599be - 12x50	47,75	47,57	0,04	0,017	57,50					
V799be - 12x50	47,75	47,73	0,04	0,017	57,50					

## Tabela 5 - Valores dos deslocamentos obtidos com o Procedimento daNBR 6118:2007 e com os ensaios numéricos para 3Fr. (Viga bi-apoiada, 30,8 MPa)

			D _ 2 E		
Viga	Fr NBR (KN)	Fr Num (KN)	P = 3.Fr Desl. NBR (cm)	Desl. Num ( <u>cm)</u>	Diferença (%)
V31-12x30	27.42	18.84	0.57	0.35	38.60
V32 - 12x40	49,83	31,17	0,5	0,31	38,00
V33 - 12x50	78,87	61,05	0,45	0,38	15,56
V34 - 12x30	20,85	14,67	0,85	0,53	37,65
V35 - 12x40	38,40	23,55	0,75	0,43	42,67
V36 - 12x50	61,26	46,17	0,69	0,55	20,29
V37 - 12x30	33,78	22,11	0,40	0,24	40,00
V38 - 12x40	60,96	50,76	0,35	0,31	11,43
V39 - 12x50	96 <i>,</i> 12	53,79	0,32	0,18	43,75
V51-12x30	27,42	19,32	0,44	0,26	40,91
V52 - 12x40	49,83	31,98	0,37	0,21	43,24
V53 - 12x50	78,87	62,67	0,33	0,26	21,21
V54 - 12x30	20,85	14,73	0,66	0,38	42,42
V55 - 12x40	38,40	24,15	0,56	0,31	44,64
V56 - 12x50	61,26	47,37	0,51	0,38	25,49
V57 - 12x30	33,78	22,68	0,31	0,18	41,94-
V58 - 12x40	60,96	75,42	0,26	0,33	26,92
V59 - 12x50	96,12	55,11	0,23	0,13	43,48
V71 - 12x30	27,42	19,53	0,40	0,23	42,50
V72 - 12x40	49,83	32,46	0,32	0,18	43,75
V73 - 12x50	78,87	63,78	0,28	0,22	21,43
V74 - 12x30	20,85	14,91	0,60	0,33	45,00
V75 - 12x40	38,40	24,51	0,49	0,26	46,94
V76 - 12x50	61,26	48,21	0,43	0,31	27,91
V77 - 12x30	33,78	22,92	0,28	0,16	42,86
V78 - 12x40	60,96	53,07	0,23	0,18	21,74
V79 - 12x50	96,12	56,01	0,2	0,1	50,00

pela NBR6118:2007 [1] aproxima a rigidez da viga como um todo, acarretando em altos valores de deslocamento. Já o modelo de dano penaliza seletivamente o módulo de elasticidade longitudinal de cada camada composta de concreto e/ou aço ao longo de toda a viga, dando um panorama mais realista da danificação na viga, com isso acarreta, geralmente em deslocamentos menores que os obtidos com o modelo analítico da NBR6118:2007 [1]. Observa-se que o concreto tracionado entre fissuras é levado em conta na resistência ao movimento de flexão segundo o modelo de dano, fato este que não ocorre na formulação do modelo utilizado pela NBR6118:2007 [1].

Observa-se ainda que a NBR6118:2007 [1] fornece um único valor de  $M_r$  independente do arranjo de armadura disposto na viga. Já nas análises numéricas tal fato não ocorre, havendo uma variação do valor de  $M_r$ , o que seria mais natural, já que o comportamento da viga do início do processo de fissuração até seu

	Tabela 6 - Viga biapoiada, fck=25 MPa, valores analíticos, F = Fr									
	Bi-Apoiada C25 F=F <sub>R</sub> Analítico									
		Força û	íltima							
Fatores	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média dos quadrados	Fo	F <sub>crítico, 0,5</sub> N=26					
ł	8,6 x 10 <sup>-3</sup>	2	4,3 x 10 <sup>-3</sup>	4,3 x 10 <sup>-3</sup>	3,37					
A <sub>s</sub>	0	2	0	0	3,37					
A <sub>c</sub>	4,2 x 10 <sup>-3</sup>	2	2,1 x 10 <sup>-3</sup>	2,1 x 10 <sup>-3</sup>	3,37					
ℓ X A <sub>s</sub>	0	4	0	0	2,74					
<b>ℓ</b> X A <sub>c</sub>	4 x 10 <sup>-4</sup>	4	10 x 10⁵	10 x 10⁵	2,74					
$A_s X A_c$	0	4	0	0	2,74					
Erro	0	8	0	0	-					
Total	0,0013	26	-	-	-					

colapso, obviamente será influenciado pelo arranjo de armadura, entre outros fatores, [2].

Em [2] constam as análises estatísticas realizadas com a metodologia ANOVA para o caso das vigas bi-apoiadas e bi-engastadas com os parâmetros de variação já mencionados na introdução deste artigo. Naquele trabalho observou-se que a seção transversal e comprimento do vão são as mais importantes variáveis no problema quando a viga está submetida a cargas de serviço de valor moderado. Entretanto, quando as cargas aumentam de valor, a seção transversal da viga permanece a mais importante variável, mas a distribuição de armadura torna-se uma variável mais importante que o comprimento do vão. Essa mudança é devida ao processo de danificação bastante intenso que ocorre na viga neste estágio de carregamento.

Neste trabalho foram introduzidos mais alguns parâmetros, tais como: mais um concreto com resistência à compressão de 25 MPa e mais as condições de vinculação de vigas engastadas e livres (em balanço) e vigas engastadas e apoiadas. Além disso,

Tabela 7 – Viga biapoiada, fck=25 MPa, valores numéricos, F = Fr								
	Bi-Apoia	ida C25	F=F <sub>R</sub>	Numérico				
		Força ü	íltima					
Fatores	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média dos quad	drados F <sub>o</sub>	F <sub>crífico, 0,5</sub> N=26			
ł	1,064 x 10 <sup>-3</sup>	2	5,32 x 10	0 <sup>-4</sup> 8,02	3,37			
A <sub>s</sub>	3,5 x 10⁵	2	1,733 x 1	0 <sup>-5</sup> 0,261	3,37			
A <sub>c</sub>	1,026 x 10 <sup>-3</sup>	2	5,13 x 10	0 <sup>-4</sup> 7,734	3,37			
ℓXA <sub>s</sub>	3,653 x 10⁴	4	9,133 x 1	0 <sup>-5</sup> 1,377	2,74			
<b>ℓ</b> X A <sub>c</sub>	7,06 x 10 <sup>-₄</sup>	4	1,765 x 1	0 <sup>-4</sup> 1,015	2,74			
$A_s X A_c$	2,693 x 10⁴	4	6,733 x 1	0 <sup>-5</sup> 2,661	2,74			
Erro	5,307 x 10 <sup>-₄</sup>	8	6,633 x 1	0-5 –	-			
Total	3,996 x 10 <sup>-3</sup>	26	-	-	-			

Tabela 8 – Viga biapoiada, fck=25 MPa, valores analíticos, F = 3 Fr								
	Bi-apoia	da C25	F=3F <sub>R</sub> Ar	nalítico				
		Força ü	íltima					
Fatores	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média dos quadrados	Fo	F <sub>crítico, 0,5</sub> N=26			
ł	0,391	2	0,195	1,407 x 10⁴	3,37			
A <sub>s</sub>	0,123267	2	0,062	4,438 x 10 <sup>3</sup>	3,37			
A <sub>c</sub>	0,051	2	0,026	1,854 x 10 <sup>³</sup>	3,37			
$l X A_s$	0,011	4	2,694 x 10 <sup>-3</sup>	194	2,74			
$l X A_{c}$	4,489 x 10 <sup>-3</sup>	4	1,122 x 10 <sup>-3</sup>	3,2	2,74			
$A_s X A_c$	1,778 x 10⁴	4	4,444 x 10 <sup>.5</sup>	80,8	2,74			
Erro	1,111 x 10⁴	8	1,389 x 10⁵	-	_			
Total	0,581	26	-	-	-			

	Tabela 9 - Vig	a biapoiada, fck=2	5 MPa, valores numér	icos, F = 3Fr	
	Bi-apoia	da C25	F=3F <sub>R</sub> Nur	nérico	
		Força	última		
Fatores	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média dos quadrados	Fo	F <sub>crítico, 0,5</sub> N=26
ł	0,122	2	0,061	96,974	3,37
A <sub>s</sub>	0,072634	2	0,036	57,826	3,37
A <sub>c</sub>	0,032	2	0,016	25,656	3,37
<b>ℓ</b> X A <sub>s</sub>	0,01	4	2,558 x 10 <sup>3</sup>	4,073	2,74
<b>ℓ</b> X A <sub>c</sub>	0,029	4	7,248 x 10 <sup>-3</sup>	4,392	2,74
A <sub>s</sub> X A <sub>c</sub>	0,011	4	2,758 x 10 <sup>-3</sup>	11,541	2,74
Erro	0,005024	8	6,28 x 10⁴	-	_
Total	0,282	26	-	-	-







procurando-se contornar uma lacuna deixada no trabalho [2], procurou-se trocar o vão de 4m para 2m, dando aos casos de vigas em balanço, respostas analíticas e numéricas possíveis, de modo a contribuir para as análises estatísticas.

Novamente, aqui se faz necessária a apresentação de algumas tabelas com resultados das análises estatísticas referentes ao concreto C25 em vigas biapoiadas. Na realidade, as análises levaram a confecção de 48 tabelas com resultados.

Em suma, relata-se aqui que os resultados das análises estatísticas não mostraram nenhuma evidente mudança de comportamento das variáveis do problema quando introduzimos os novos parâmetros abordados neste artigo. Portanto, no início do processo de fissuração em F = F, a seção transversal da viga continua sendo a variável mais influente no problema seguida do comprimento do vão. Quando o processo de fissuração está em estágio mais evoluído com F = 3F, a área de aço da armadura longitudinal começa a

Tabela 10 – Valores dos coeficientes de vinculação							
Vinculação	βι	$\beta_2$					
biengastada/ biapoiada	8	4,5					
engastada/ engaste-apoio	6	2					

ganhar importância, haja vista que o concreto já não resiste tão bem aos esforços, principalmente na região tracionada da viga.

4.1 Discussão sobre propostas para a estimativa do cálculo de deslocamento em estruturas de concreto armado

Baseado nos resultados obtidos até então, tanto neste trabalho como em anteriores [2], de forma resumida, na Fig. (2) é ilustrado um gráfico contendo a inércia da seção transversal versus o momento de fissuração das análises numéricas para o caso do concreto C25 e trabalhando com vigas no domínio 2 (5ø10.0mm). Para cada caso de vinculação adotou-se uma regressão de forma mais simples possível (linear) para se obter uma expressão para a estimativa do momento de fissuração relacionado à inércia inicial da seção transversal, pensando-se sempre na aplicabilidade prática do estudo. O mesmo procedimento foi realizado quando se tratando do concreto C30 (Figura 3) e concreto com resistência à compressão de 30,8 MPa (Figura 4). Portanto, as equações abaixo são propostas para serem utilizadas para concretos ditos convencionais, ou seja, concretos pertencentes as classes C20 até C35. Tal afirmação é justificada pelas resistência utilizadas neste trabalho, onde pode-se extrapolar os resultados obtidos para concretos em classes nas vizinhanças dos concretos abordados aqui.

 $M_r = 0.00004I_c + \beta_1 \text{ p/ concretos C20 e C25}$  (26)

Tabela 11 – Valores de momento de fissuração da presente proposta e da NBR6118:2007 (KN.m)											
l <sub>c</sub> (cm⁴)	Vinculação	Proposta C20/C25	NBR C20	NBR C25	dif. para C25 (%)	dif. para C20 (%)	Proposta C30/C35	NBR C30	NBR C35	dif. para C30 (%)	dif. para C35 (%)
27x10 <sup>3</sup>	biengastada	9,08	5,97	6,93	-31,11	-52,14	8,55	7,82	8,67	-9.33	1,35
64x10 <sup>3</sup>	biengastada	10,56	10,61	12,31	14,23	0,47	14,1	13,90	15,41	-1.42	8,49
125x10 <sup>3</sup>	biengastada	13	16,58	19,24	32,42	21,58	23,25	21,72	24,07	-7.03	3,43
27x10 <sup>3</sup>	engastada	7,08	5,97	6,93	-2,233	-18,63	6,05	7,82	8,67	22.64	30,19
64x10 <sup>3</sup>	engastada	8,56	10,61	12,31	0,474	19,32	11,6	13,90	15,41	16.57	24,71
125x10 <sup>3</sup>	engastada	11	16,58	19,24	2,82	33,65	20,75	21,72	24,07	4.48	13,81
27x10 <sup>3</sup>	engaste-apoio	7,08	5,97	6,93	-2,233	-18,63	6,05	7,82	8,67	22,64	30,19
64x10 <sup>3</sup>	engaste-apoio	8,56	10,61	12,31	0,474	19,32	11,6	13,90	15,41	16,57	24,71
125x10 <sup>3</sup>	engaste-apoio	11	16,58	19,24	2,82	33,65	20,75	21,72	24,07	4,48	13,81
27x10 <sup>3</sup>	biapoiada	9,08	5,97	6,93	-31,11	-52,14	8,55	7,82	8,67	-9,33	1,35
64x10 <sup>3</sup>	biapoiada	10,56	10,61	12,31	14,23	0,47	14,1	13,90	15,41	-1,42	8,49
125x10 <sup>3</sup>	biapoiada	13	16,58	19,24	32,42	21,58	23,25	21,72	24,07	-7,03	3,43

$$M = 0.00015I + \beta_{3}$$
 p/ concretos C30 e C35



onde nas equações acima, os valores são expressos em kN.m para M<sub>r</sub> e cm<sup>4</sup> para I<sub>c</sub>. Os valores de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são dados na Tabela 10. As equações propostas foram empregadas nos casos estudados neste trabalho e comparados com os valores preconizados pela NBR6118:2007 (ver Tabela 11). Em geral, os valores obtidos pela proposta são menores, no entanto, enfatiza-se aqui que as análises numéricas foram realizadas com o emprego de um modelo que considera a fissuração distribuída em todo o elemento estrutural, o que é natural a contribuição dos vínculos nesse panorama de fissuração.

Percebe-se pela tabela acima, que em geral, a proposta de M<sub>r</sub> da presente pesquisa apresenta valores ligeiramente superiores aos da NBR para os casos de pequenas inércias da seção transversal, se aproxima mais nos casos de inércias medianas e apresenta valores menores que a NBR nos casos de inércias maiores. Ressalta-se que a proposta para C30/C35 apresentou um melhor comportamento que a proposta C20/C25 quando comparados com os valores apresentados pela NBR.

Por outro lado, no caso da estimativa de deslocamentos, segundo a Resistência dos Materiais, tal cálculo em estruturas pode-se ser uma função dada, de maneira geral, por:

$$\delta = \frac{\alpha_{ap} \cdot p \cdot l^3}{EI_c}$$
(28)

onde  $\alpha_{ap}$  é uma constante dependente do tipo de vinculação, p é o carregamento atuante, l o vão efetivo da estrutura, l<sub>c</sub> é a inércia da seção integra e E o módulo de elasticidade do concreto. Observa-se que os principais parâmetros envolvidos no problema, segundo os resultados da metodologia ANOVA, estão contemplados na Eq. (28),

Atualmente, a NBR6118:2007 [1] utiliza um procedimento no qual a inércia da seção transversal é penalizada quando há o surgimento de fissuras, refletindo essa penalização de maneira homogênea em toda a peça. Neste trabalho, o foco da penalização da rigidez da peça está voltado para o módulo de elasticidade segundo uma abordagem semelhante feita pela Mecânica do Dano.

Observa-se que quando há um processo de fissuração em andamento, o Módulo de Elasticidade E é função de uma variável que define o estágio de fissuração do concreto. Esta variável pode ser entendida como dano (D). No entanto, a própria danificação é dependente da deformação da peça estrutural e tensões correlatas. Tais estados de tensões e de deformações dependem do nível de carregamento aplicado na estrutura, ou seja, há uma relação nãolinear em todo esse processo.

Pode-se perceber que uma relação que penaliza seletivamente a rigidez da peça através da medida do módulo de elasticidade do concreto fissurado em diferentes etapas até seu colapso, é algo desejável. Mais ainda se os parâmetros envolvidos nesta relação forem de uso corrente no cálculo estrutural. Portanto, propõe-se de uma maneira geral, que o módulo de elasticidade a ser utilizado na Eq. (28) seja dado na forma geral abaixo:

$$E = (1 - D)E_0$$
<sup>(29)</sup>

onde  $E_0 \in 0$  módulo de elasticidade do concreto íntegro obtido pela NBR 6118:2007 [1]. Por outro lado, o processo de danificação é dependente das variáveis envolvidas no problema, tais como: momento de fissuração, resistência à tração e à compressão do concreto. Propõe-se ainda que a variação da danificação seja dada por uma relação não-linear ilustrada na Fig. (5) e que seja dependente da classe do concreto utilizado.

Contudo, têm-se dois caminhos a seguir: pode-se propor uma equação para a variável D com os parâmetros de importância obtidos pelo ANOVA ou, pode-se propor uma equação para D baseada numa regressão tomando-se como base os resultados numéricos obtidos até aqui.

Optou-se pela primeira opção por trabalhar com parâmetros com significado físico mais palpável para os engenheiros, lembrando sempre ser essa a filosofia empregada aqui. Além disso, a segunda opção demanda a complexidade de trabalhar em várias dimensões com uma gama enorme de resultados, ficando como uma proposta de objeto de estudo futuro.



Portanto, seguindo a opção escolhida, numa opção mais pontual do estado de esforços x deslocamentos da estrutura, pode-se calcular a rigidez do elemento estrutural mantendo-se o momento de inércia da seção inalterado e utilizando o módulo de elasticidade atualizado pela Eq. (29) para um dado momento fletor atuante M<sub>a</sub> na seção mais solicitada, desde que o momento atuante seja superior ao momento de fissuração do elemento estrutural calculado pelas Eqs. (26) e (27), conforme o caso. Após alguns estudos e, tendo como base um modelo de dano simples, porém eficiente, propõe-se a seguinte expressão para a estimativa da variável D:

$$D = I - \frac{M_r(I - A)}{M_a} - \frac{A}{e^{\left[\frac{f_{cm}}{I000}(M_a - M_r)\right]}}$$
(30)

Onde  $M_a e M_r$  são dados em KN.m, o parâmetro A é um valor dependente da classe do concreto que se deseje modelar e  $f_{ctm}$  é a resistência à tração direta média ou característica do concreto dada pela Eq. (31) em MPa.



da presente proposta, experimental e da NBR6118:2007								
M <sub>a,exp</sub>	M <sub>r,exp</sub>	M <sub>r,nbr</sub>	M <sub>r,proposto</sub>	δ <sub>exp</sub>	δ <sub>nbr</sub>	$\boldsymbol{\delta}_{proposto}$		
-	19,69	8,66	9,35	-	-	-		
10,64	-	-	-	0,8	1,3	1,16		
19 <i>,</i> 69	-	-	-	2,3	2,8	2,29		
32,02	-	-	-	3,0	4,6	3,93		
55,77	-	-	-	7,0	8,1	7,36		
81,89	_	_	-	11,5	11,9	11,62		

Tabela 12 - Valores dos momentos de fissuração e atuante (KN.m) e deslocamento (mm
da presente proposta, experimental e da NBR6118:2007

$f_{ctm} = 0.3 f_{ck}^{2/3}$	<mark>(31)</mark>
------------------------------	-------------------

A Fig. (6) apresenta um gráfico D x M<sub>a</sub> para um concreto classe C25, M<sub>cr</sub> = 9,35 KN.m e A = 0,9. O emprego da Eq. (30) nos leva a perceber uma penalização da rigidez numa forma não muito acentuada, o que gera uma configuração mais realista do comportamento estrutural.

Por fim, a proposta é empregada ao caso da viga ensaiada na referência [6]. Tal viga foi escolhida, pois há informações detalhadas sobre a realização do ensaio, assim como sobre os valores obtidos, dando uma confiabilidade maior para a comparação dos resultados. Na Tabela 12, os valores obtidos experimentalmente para  $M_{a,exp}$ (momento atuante),  $M_{r,exp}$  (momento de fissuração),  $\delta_{exp}$  (deslocamento no meio do vão), são comparados com os valores obtidos analiticamente pela NBR 6118:2007 ( $M_{_{\Gamma NBR}}, \delta_{_{NBR}}$ ) e pela metodologia proposta ( $M_{r,proposto}, \, \delta_{proposto}$ ).

Observa-se a maior coerência da resposta obtida com o emprego do modelo proposto em relação ao ressultado experimental que a obtida com o emprego do procedimento sugerido pela NBR. Contudo, deve-se pensar na existência de alguma reserva de segurança na estimativa dos deslocamentos.

Por fim, a Fig. (7) ilustra a comparação dos resultados obtidos experimentalmente, pela NBR e pela metodologia proposta neste trabalho. Ressalta-se que a proposição para a estimativa de deslocamentos em estruturas depende de um estudo mais aprofundado sobre os resultados obtidos até então para os concretos ditos convencionais (C20 a C35). Nesse sentido, faz-se necessária a obtenção de resultados experimentais confiáveis para uma validação da proposta deste trabalho, assim como para estudos sobre a sua limitação de emprego e verificação em relação à segurança do



emprego de tal proposição. Tal abordagem será realizada em trabalho futuro.

#### 5. Conclusões

Neste trabalho, um modelo de dano para o concreto proposto por [3] foi utilizado na estimativa de deslocamentos em estruturas de concreto armado.

De posse dos parâmetros envolvidos no problema e suas combinações, um total de 324 protótipos foram analisados numericamente utilizando o modelo de dano e, analiticamente, utilizando o Procedimento da NBR6118:2007. A aplicação da metodologia ANOVA confirma as conclusões obtidas em [2], mesmo com a inclusão de novos parâmetros no problema. Ou seja, observa-se que o momento de fissuração não leva em conta a distribuição da armadura. Além disso, observa-se que os deslocamentos obtidos pelas análises analíticas são maiores que aqueles obtidos através das análises numéricas e experimentais. Isto é devido ao fato da NBR6118:2007 [1] estimar um valor médio para a rigidez de toda a viga levando a valores altos de deslocamentos. Por outro lado, o modelo de dano penaliza a rigidez de uma maneira seletiva sendo possível levar em conta a contribuição do concreto tracionado entre fissuras. Entretanto, a existência de uma reserva de segurança tem sempre que ser pensada.

De uma maneira geral, a metodologia ANOVA mostra um indicativo das variáveis que devem estar contidas numa eventual formulação alternativa ao procedimento da NBR 6118:2007 [1]. Tal proposta de formulação foi apresentada no final deste atigo, onde o foco da penalização da rigidez passa a ser o módulo de elasticidade, seguindo o raciocínio preconizado pela Mecânica do Dano. Testes iniciais mostraram a viabilidade de utilização da metodologia proposta, porém sua efetiva validação e estudo de limitação de emprego serão objetos de estudos futuros com o intuito de, inclusive, verificar a segurança de emprego da proposta em aplicações práticas da Engenharia Estrutural.

#### 6. Agradecimentos

Os autores desejam agradecer ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico)

#### 7. Referências

- [01] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118:2007, Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.
- [02] PITUBA, J. J. C., DELALIBERA, R. G., and RODRIGUES, F. S.. Numerical and statistical analysis about displacements in reinforced concrete beams using damage mechanics. Computers and Concrete, an International Journal, Vol. 10(3), 307-330, 2012.
- [03] PITUBA, J. J. C. and FERNANDES, G. R. An anisotropic damage for the concrete. Journal of Engineering Mechanics - ASCE, Vol. 137(9), 610-624, 2011.
- [04] PITUBA, J. J. C. and LACERDA, M. M. S. Simplified damage models applied in the numerical analysis of reinforced concrete structures. IBRACON Structures and Materials Journal, Vol. 5(1), 26-37, 2012.

- [05] MONTGOMERY, D. C. Design and analysis of experiments, Arizona State University, 4th Edition, John Wiley & Sons, 1996.
- [06] DELALIBERA, R. G.. Análise teórica e experimental de vigas de concreto armado com armadura de confinamento. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2002.
- [07] VECCHIO, F. J. and Emara, M. B. Shear deformations in reinforced concrete frames. ACI Structural Journal, Vol. 89, n. 1, p. 46-56, 1992.
- [08] ÁLVARES, M. S.. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação e emprego do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.