

Análise da influência dos processos de plasticidade e fratura no comportamento mecânico de microestruturas de Compósitos de Matriz Metálica

Analysis of the influence of plasticity and fracture processes on the mechanical behavior of Metal Matrix Composites microstructures

Wanderson Ferreira dos Santos¹, Gabriela Rezende Fernandes²,
José Julio de Cerqueira Pituba²

^{1,2} Departamento de Engenharia Civil – UFG / Regional Catalão CEP: 75704-020, Catalão, GO.
e-mail: wanderson.ufgencivil@gmail.com; gabriela.fernandes@pq.cnpq.br; julio.pituba@pq.cnpq.br

RESUMO

O presente trabalho trata da simulação numérica do comportamento mecânico de microestruturas de Compósitos com Matriz Metálica (CMMs) utilizando uma proposta de modelo de homogeneização computacional baseada numa abordagem multi-escala. Na microestrutura do compósito, as inclusões são consideradas elásticas e o comportamento da matriz é governado pelo modelo de von Mises com endurecimento isotrópico. Um modelo de fratura coesiva é desenvolvido para simular a fase de descolamento da interface matriz/inclusão. Todo o estudo é baseado no conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR), no qual podem ser empregados modelos constitutivos que levam em conta os fenômenos dissipativos de fissuração e plasticidade. Uma série de EVRs com diferentes composições de inclusões elásticas e submetidos a diferentes condições de restrição cinemática foram analisados. Também observou-se a sensibilidade paramétrica do modelo de fratura coesiva e a importância de se considerar a fase de descolamento matriz/inclusão no processo de ruptura da microestrutura. De modo geral, os resultados encontrados contribuem para a discussão acerca do emprego de modelos simples, em termos de formulação e identificação paramétrica, na modelagem da microestrutura de materiais heterogêneos, refletindo assim na acurácia de resultados qualitativos quanto ao seu comportamento macroscópico.

Palavras-chave: Homogeneização, compósitos com matriz metálica, plasticidade, fratura coesiva.

ABSTRACT

This work deals with numerical simulation of the metal matrix composites (MMCs) microstructures mechanical behavior using a proposed computational homogenization modeling based on multi-scale approach. In the microstructure, elastic inclusions are considered and the matrix mechanical behavior is governed by a von Mises model with isotropic strain hardening. Besides, a cohesive fracture and contact model is developed in order to simulate the debonding phase in the matrix/inclusion interface. The study is based on the concept of Representative Volume Element (RVE), in which can be used constitutive models that take into account the dissipative phenomena of cracking and plasticity. A set of RVEs composed of different distributions of elastic inclusions and submitted to different kinematical restrictions are analyzed. Moreover, the parametric sensibility of the cohesive fracture model and the debonding interface relevance in the rupture processes of the microstructure are observed. In general, the results contribute to the discussion about the use of simple constitutive models, in their formulation and parametric identification, for modeling of the heterogeneous materials microstructures, leading to accurate qualitative results related to the macroscopic behavior.

Keywords: Homogenization, metal matrix composites, plasticity, cohesive fracture.

1. INTRODUÇÃO

As propriedades mecânicas determinam o comportamento dos materiais quando sujeitos a esforços mecânicos, definindo assim sua capacidade de resistir ou transmitir tais esforços. Deste modo, o conhecimento da resposta constitutiva de um corpo submetido a um determinado estado de excitação configura-se como uma importante ferramenta para a ciência [1]. A princípio, essa questão foi respondida com o auxílio das teorias constitutivas fenomenológicas [2, 3], cuja resposta pode ser obtida com base na análise de determinadas variáveis do problema. Contudo, os avanços tecnológicos levam à necessidade de respostas constitutivas mais realísticas, o que tornou limitada a utilização das teorias fenomenológicas.

Dentro desse contexto, surgiram nas últimas décadas as teorias multi-escala, as quais relacionam conhecimentos de diferentes escalas na obtenção de respostas sobre o comportamento do material. De acordo com AZIZI [4], as informações necessárias em cada escala são enriquecidas por informações decorrentes do estudo das escalas inferiores, o que permite uma definição detalhada da microestrutura do material e, conseqüentemente, uma análise mais minuciosa de seu comportamento mecânico. O processo de ligação entre as diferentes escalas envolvidas é chamado de homogeneização, permitindo, por exemplo, a transição entre a micro-escala e a macro-escala. A microestrutura do material pode ser modelada baseada no conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR), o qual deve incluir o maior número de heterogeneidades a fim de descrever de forma suficientemente precisa o material [5]. Ademais, o EVR deve ser submetido às devidas condições de restrição cinemática, conforme o modelo empregado.

Em suma, a modelagem multi-escala permite considerar aspectos referentes ao comportamento do material a partir de sua microestrutura, proporcionando assim o entendimento dos fenômenos dissipativos relativos a esta escala e, posteriormente, a obtenção de informações para levar em conta a evolução dos processos para a macro-escala. LOPES [5] também ressalta como benefício a versatilidade na modelagem, pois esta pode ser aplicada a problemas lineares, não-lineares e com dependência do tempo. Diante de tantos aspectos positivos, vem ganhando espaço a utilização da abordagem multi-escala na análise do comportamento constitutivo de diversos materiais, principalmente aqueles caracterizados por uma estrutura heterogênea. Isso ocorre porque na estrutura existem inclusões, diferentes fases e até mesmo vazios, características estas responsáveis por afetar diretamente os resultados obtidos a partir de modelos macroscópicos.

Nesse cenário, FERNANDES *et al.* [6] destacam a análise multi-escala como uma ferramenta atrativa para a simulação do comportamento de estruturas compostas por materiais compósitos reforçados por partículas, levando em conta os diferentes comportamentos mecânicos de seus constituintes e suas inter-relações, fatores que influenciam no comportamento global da estrutura. Em tal situação, os modelos contínuos não são capazes de capturar o comportamento da estrutura de forma satisfatória. Dentro do contexto dos processos dissipativos no âmbito da microestrutura, a modelagem da interface é de suma importância, pois esta região é caracterizada como crítica para o surgimento e propagação de fissuras, implicando assim em reduções significativas de rigidez e resistência [7] do EVR.

Em meio a essa discussão, este trabalho tem como objetivo contribuir para a análise do comportamento de materiais com estrutura heterogênea, em especial com ações voltadas para a modelagem da interface matriz/inclusão restringindo o estudo ao âmbito da microestrutura. Para tal, serão utilizados modelos constitutivos simples empregados na microestrutura utilizando um processo de homogeneização segundo uma abordagem multi-escala, cuja formulação incorpora os conceitos referentes à plasticidade e à fratura. No entanto, destaca-se que as análises aqui realizadas compreendem uma única escala, neste caso a micro-escala representada pelo EVR.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Este item aborda os Compósitos de Matriz Metálica (CMMs) e apresenta as principais considerações e procedimentos empregados para a análise de seu comportamento mecânico. Assim, é definida a equação de equilíbrio para o EVR escrita em termos de flutuação dos deslocamentos, discutem-se os modelos constitutivos a serem adotados nas inclusões, matriz e interface matriz-inclusão, além de definir as expressões para tensão homogeneizada e tensor constitutivo homogeneizado.

2.1 Compósitos de Matriz Metálica (CMMs)

Um material compósito é formado através da combinação de dois ou mais constituintes, os quais formam um material com propriedades particulares. Para SUN *et al.* [8], o desenvolvimento de materiais compósitos está diretamente ligado à necessidade de materiais com padrões mais elevados de desempenho e confiabilidade em serviço. Assim, surge um material com características específicas e com vasta gama de aplicações, principalmente, no âmbito da indústria aeroespacial, civil, biomédica e eletrônica.

O desempenho de um material compósito está relacionado ao tamanho, à distribuição e à fração em

volume dos constituintes, além do comportamento da interface entre os componentes. Conforme OLIVEIRA [9], em grande parte dos casos, o constituinte encontrado em maior quantidade é chamado de matriz e os demais constituintes são denominados reforços. De modo geral, os reforços têm maior dureza e rigidez em relação à matriz e, portanto, são utilizados com o objetivo de transmitir tais propriedades ao material formado. A carga em ação sobre a matriz deve ser transmitida ao reforço através da interface, o que implica na necessidade da criação de uma interface capaz de adequar a rigidez do reforço com a ductilidade da matriz.

Neste trabalho, será realizada uma abordagem específica sobre os CMMs, materiais com potencial de aplicação em diversas situações devido à suas excelentes propriedades mecânicas. AZIZI [4] afirma que aplicação de CMMs está em franco crescimento e ocorre devido à melhora nas propriedades mecânicas do material com a inclusão de reforços, proporcionando significativos ganhos em rigidez, resistência à tensão, resistência à deformação, resistência ao desgaste, o que resulta em materiais com baixa densidade e com uma capacidade de amortecimento maior. ABADI [10] também apresenta como benefício, a melhora na resistência ao choque térmico, situação que é relevante em aplicações nas indústrias civil e aeronáutica. Por outro lado, os CMMs apresentam como característica uma estrutura mais complexa, diferente de diversos materiais convencionais com uma estrutura simplificada, geralmente isotrópica e homogênea. Portanto, justifica-se a proposição e utilização de uma modelagem da microestrutura de CMMs baseada em processo de homogeneização computacional segundo uma abordagem multi-escala para simular o comportamento desta classe de materiais.

2.2. Modelagem da microestrutura de Compósitos com Matriz Metálica

Os modelos multi-escala utilizam informações provenientes da microestrutura do material, objetivando a obtenção de previsões mais realísticas e consistentes sobre o seu comportamento macroscópico. A análise consiste no entendimento da modelagem do EVR, o qual representa a microestrutura do material. Dentro desse contexto, um aspecto de suma importância para a compreensão de tal processo envolve a assimilação das diferenças entre a modelagem convencional e a modelagem multi-escala.

Na modelagem convencional, a aplicação do carregamento na estrutura gera deslocamentos, possibilitando assim descobrir as deformações e tensões em pontos de interesse no sólido. Visando compreender melhor o comportamento do material no macro-contínuo, a estrutura pode ser discretizada, por exemplo, em elementos finitos, ou seja, o meio contínuo é dividido em subdomínios. Caso o material apresente um comportamento linear, isto é, a deformação é constituída apenas pela parcela elástica, a utilização da Lei de Hooke é válida. Por outro lado, a presença de processos dissipativos implica na utilização de modelos constitutivos do material para a obtenção de tensores de tensão e constitutivo em pontos de interesse no sólido.

Já na modelagem multi-escala, o ponto do material no macro-contínuo é representado e analisado como um EVR, que por sua vez pode ser discretizado, por exemplo, em elementos finitos. Nesta análise, a aplicação de uma deformação macroscópica no EVR resulta em tensões em cada ponto de seu volume. Por sua vez, as tensões para pontos de interesse do EVR são obtidas através de modelos constitutivos simples. Deste modo, pode ser obtido o estado homogeneizado de tensões do EVR, que representa na macro-escala o estado de tensões em um ponto do sólido. Uma ilustração esquemática da modelagem multi-escala está indicada na Figura 1.

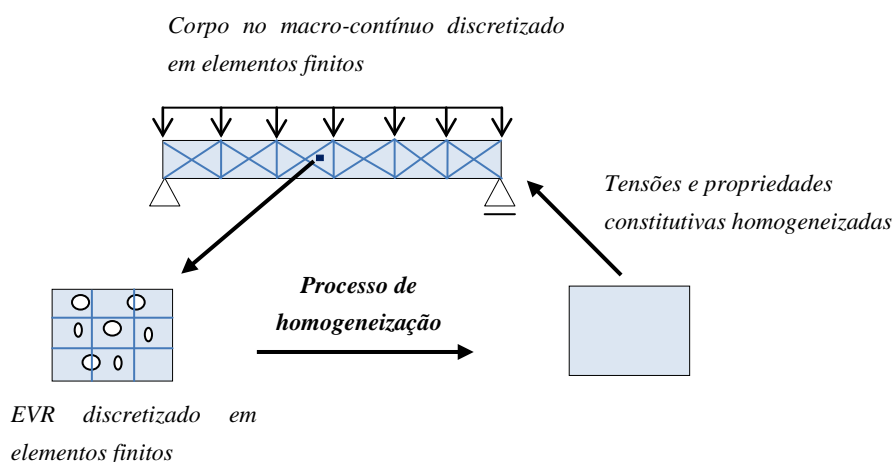


Figura 1: Esquema ilustrativo da modelagem multi-escala.

Conforme apresenta SOUZA [11], na análise multi-escala, em cada ponto do problema macro (EVR) realiza-se uma análise local, considerando aspectos relacionados à heterogeneidade do material, ao desenvolvimento e propagação de microfissuras e outros mecanismos de dissipação e/ou ganho de energia. Posteriormente à análise local, o comportamento macroscópico é obtido pela média dos campos mecânicos através do processo de homogeneização.

SOUZA NETO e FEIJÓO [12] apresentam como princípios básicos da modelagem multi-escala: (1) Equilíbrio do EVR; (2) Média volumétrica dos tensores de deformação e tensão; (3) Princípio da Macro-Homogeneidade de Hill Mandel; e (4) Pressuposto de que o espaço das flutuações de deslocamento cinematicamente admissíveis do EVR é um subespaço do espaço da mínima restrição cinemática sobre as flutuações de deslocamento compatíveis com a proposição da média volumétrica da deformação. Deste modo, a classe de modelos constitutivos empregada é definida pela escolha do espaço funcional dos deslocamentos virtuais do EVR, em que são definidas as restrições cinemáticas.

2.2.1 Caracterização do modelo multi-escala

No âmbito da modelagem multi-escala, para cada ponto x do macro-contínuo, representado por Ω , existe associado um EVR, cujo domínio é representado por Ω_μ . O EVR é caracterizado pela coordenada y em seu domínio e apresenta fronteira definida por $\partial\Omega_\mu$, cujo símbolo de derivada parcial ∂ indica o contorno do domínio analisado.

De modo geral, o EVR é constituído por partes sólidas, representadas por Ω_μ^s , mas também pode ser constituído por vazios, representados por Ω_μ^v . A parte sólida pode ser composta de diferentes fases como, por exemplo, a matriz, aqui denotada por Ω_μ^m , e as inclusões, denotadas por Ω_μ^i . Em relação às dimensões de cada escala, considera-se que o comprimento na micro-escala (l_μ) deve ser muito inferior ao comprimento da macro-escala (l). A Figura 2 apresenta de forma ilustrativa a relação entre a macro-escala e a micro-escala.

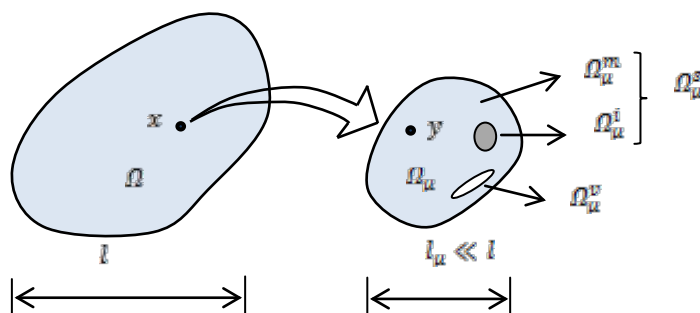


Figura 2: Representação da macro-escala e da micro-escala.

A partir da Figura 2, pode-se definir que o domínio do EVR:

$$\Omega_\mu = \Omega_\mu^v \cup \Omega_\mu^s \tag{1}$$

Por sua vez, o domínio da parte sólida compreende a matriz e o conjunto das inclusões:

$$\Omega_\mu^s = \Omega_\mu^m \cup \Omega_\mu^i \tag{2}$$

2.2.2 Processo de homogeneização

Neste item, o processo de homogeneização segundo uma abordagem multi-escala adotado no presente trabalho será brevemente descrito. Maiores detalhes podem ser encontrados em [6] e [13].

O processo de homogeneização consiste na utilização do conceito de média volumétrica ao longo do domínio do EVR. Dessa forma, os campos macroscópicos associados ao ponto x são obtidos a partir da média volumétrica dos campos relacionados ao EVR caracterizado pela coordenada y .

O modelo multi-escala empregado neste trabalho parte do pressuposto que a tensão σ em um ponto da macro-escala num determinado instante t está relacionada com a deformação acumulada ϵ até este instante:

$$\sigma(t) = D \varepsilon(t) \quad (3)$$

onde: $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ representam a tensão e a deformação no instante t , respectivamente; e D é o tensor constitutivo simétrico.

Cabe ressaltar que como as formulações envolvem o estado plano de tensão, isto é, o sólido é caracterizado por apresentar uma espessura pequena média de referencial xy , a Equação (3) apresentará a seguinte configuração:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

em que, D_{ij} são as componentes do tensor constitutivo simétrico.

Por sua vez, a deformação acumulada $\varepsilon(t)$ ou somente ε é dada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon = \nabla^s u \quad (5)$$

na qual, ∇^s consiste no gradiente simétrico do campo de deslocamento u .

Dentro do conceito de média volumétrica, a deformação na macro-escala $\varepsilon(x, t)$ é dada pela média das deformações na micro-escala em seu volume V_μ :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu(y, t) dV \quad (6)$$

No entanto, conforme a Equação (5), a deformação $\varepsilon_\mu(y, t)$ será dada por:

$$\varepsilon_\mu(y, t) = \nabla^s u_\mu \quad (7)$$

Desse modo, a Equação (6) pode ser reescrita na forma:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \nabla^s u_\mu dV \quad (8)$$

De forma análoga, as tensões macroscópicas são obtidas por:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t) dV \quad (9)$$

Logo, $\sigma(x, t)$ representa a tensão macroscópica homogeneizada e $\varepsilon(x, t)$ compreende a deformação macroscópica homogeneizada.

Por fim, o tensor constitutivo tangente homogeneizado D também passa pelo processo de homogeneização, que de uma forma geral é dada por:

$$D(x, t) = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial \varepsilon(x, t)} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \partial \sigma_\mu(y, t) dV}{\partial \varepsilon(x, t)} = \frac{\frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \partial f_j(\varepsilon_\mu(y, t)) dV}{\partial \varepsilon(x, t)} \quad (10)$$

onde, $f_j(\varepsilon_\mu(y, t))$ é uma função constitutiva que envolve as variáveis internas de acordo com o modelo constitutivo.

2.2.3 Princípio de Hill Mandel

A utilização do princípio de Hill Mandel procura estabelecer a associação entre dois domínios. Nessa conjuntura, por exemplo, pode-se dizer que a potência dos tensores no macro-contínuo é igual à potência dos tensores homogeneizados microscópicos no EVR:

$$\sigma(x, t): \varepsilon(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y, t): \varepsilon_\mu(y, t) dV \quad (11)$$

A Equação (11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{\sigma}(x, t): \bar{\varepsilon}(x, t) = \bar{\sigma}_\mu(y, t): \bar{\varepsilon}_\mu(y, t) \quad (12)$$

em que, $\bar{\sigma}_\mu(y, t)$ e $\bar{\varepsilon}_\mu(y, t)$ representam os tensores de tensão e deformação homogeneizados na micro-escala, respectivamente.

Logo, o processo envolvido engloba considerações energéticas e impõe a existência de um fluxo com a mesma quantidade de energia em ambas as escalas [5].

2.2.4 Campo de deslocamentos cinematicamente admissível

Considerando restrições conferidas pela Equação (8) ao campo de deslocamentos do EVR, pode ser introduzida a condição para que u_μ seja cinematicamente admissível:

$$u_\mu \in K_\mu^*, \quad \text{com } K_\mu^* \equiv \left\{ v / \int_{\Omega_\mu} \nabla^2 v dV = V_\mu \varepsilon \right\} \quad (13)$$

em que, K_μ^* é o conjunto dos deslocamentos microscópicos cinematicamente admissíveis.

Com o objetivo de obter uma condição alternativa para u_μ ser cinematicamente admissível, a seguinte relação é válida para qualquer tensor S :

$$\int_\Omega S(\nabla v)^T dV = \int_{\partial\Omega} S n \otimes v dA - \int_\Omega \text{div}(S) \otimes v dV \quad (14)$$

onde, v é um vetor; $\text{div}(S)$ é o divergente de S ; e n o vetor normal ao contorno $\partial\Omega$ do domínio Ω .

Tomando as seguintes considerações para a Equação (14): $S = I$ (tensor identidade); $v = u_\mu$; $\Omega = \Omega_\mu$; e $\varepsilon(x, t)$ simétrico, pode ser obtida a seguinte expressão:

$$\int_\Omega I(\nabla^2 u_\mu)^T dV = \int_{\partial\Omega_\mu} I n \otimes u_\mu dA - \int_\Omega \text{div}(I) \otimes u_\mu dV \quad (15)$$

Voltando na Equação (8) e assumindo como nulo o segundo termo depois da igualdade referente à Equação (15), pode ser obtida a seguinte expressão:

$$V_\mu \varepsilon = \int_{\partial\Omega_\mu} u_\mu \otimes_S n dA \quad (16)$$

É importante ressaltar que a Equação (13) e a Equação (16) são equivalentes e, portanto, u_μ será um campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis ao satisfazer uma delas.

Por fim, a Equação (16) possibilita outra maneira de definir o campo K_μ^* da Equação (13):

$$K_\mu^* \equiv \left\{ v / \int_{\partial\Omega_\mu} v \otimes_S n dA = V_\mu \varepsilon \right\} \quad (17)$$

2.2.5 Campo de deslocamento e flutuação dos deslocamentos

O campo de deslocamento microscópico u_μ , em função de y , pode ser decomposto de forma aditiva pelas seguintes parcelas: deslocamento de corpo rígido $u(x, t)$; deformação homogênea $\varepsilon(x, t)y$ que varia conforme a coordenada y ; e um campo de flutuação de deslocamento $\tilde{u}_\mu(y, t)$. Logo, a equação será:

$$u_\mu(y, t) = u(x, t) + \varepsilon(x, t)y + \tilde{u}_\mu(y, t) \quad (18)$$

Portanto, a decomposição aditiva dos campos microscópicos estabelece como ocorre o deslocamento no contorno do EVR. Um melhor entendimento sobre tal decomposição pode ser verificado a partir da análise de sua representação geométrica, apresentada na Figura 3.

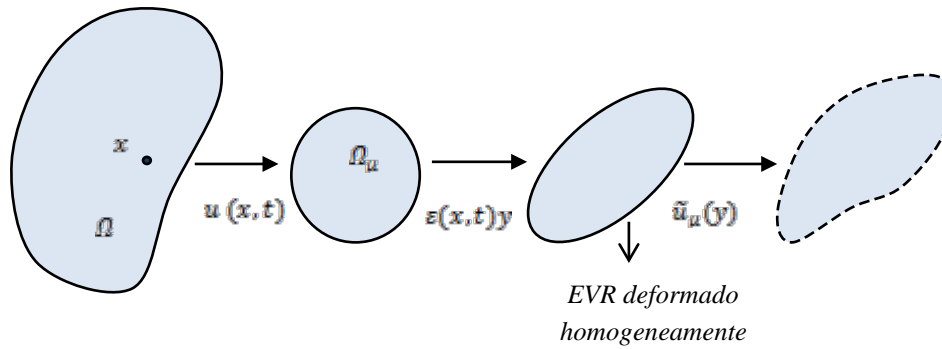


Figura 3: Decomposição dos campos de deslocamento microscópico (Adaptado [1]).

Por simplicidade, a parcela pertinente ao deslocamento rígido pode ser desconsiderada e a Equação (18) resumida em:

$$u_{\mu}(y, t) = \varepsilon(x, t)y + \tilde{u}_{\mu}(y, t) \quad (19)$$

Referente à Equação (19), a parcela \tilde{u}_{μ} é nula quando a deformação do EVR for homogênea. Caso contrário, isto é, se a deformação não for constante, tem-se $\tilde{u}_{\mu} \neq 0$.

Relacionando os deslocamentos com as deformações, pode ser obtida ainda a seguinte relação:

$$\varepsilon_{\mu}(y, t) = \varepsilon(x, t) + \tilde{\varepsilon}_{\mu}(y, t) \quad (20)$$

em que, $\tilde{\varepsilon}_{\mu}(y, t)$ consiste no campo de flutuação das deformações.

2.2.6 Campo de flutuação dos deslocamentos cinematicamente admissível

Realizando a substituição da Equação (19) na Equação (16), pode ser obtida a seguinte expressão:

$$V_{\mu} \varepsilon = \int_{\partial \Omega_{\mu}} u_{\mu}^L \otimes_S n dA + \int_{\partial \Omega_{\mu}} \tilde{u}_{\mu} \otimes_S n dA \quad (21)$$

em que, o termo $u_{\mu}^L = \varepsilon(x, t)y$.

Uma equação equivalente pode ser obtida substituindo a Equação (19) na Equação (8):

$$V_{\mu} \varepsilon = \int_{\Omega_{\mu}} \nabla^S u_{\mu}^L dV + \int_{\Omega_{\mu}} \nabla^S \tilde{u}_{\mu} dV \quad (22)$$

Analisando as Equações (21) e (22), para que a deformação macroscópica ε seja constante, as seguintes parcelas devem ser nulas:

$$\int_{\partial \Omega_{\mu}} \tilde{u}_{\mu} \otimes_S n dA = 0 \quad (23)$$

$$\int_{\Omega_{\mu}} \nabla^S \tilde{u}_{\mu} dV = 0 \quad (24)$$

Considerando-se a Equação (23), tem-se um campo de flutuação dos deslocamentos cinematicamente admissível se este obedecer a condição:

$$\tilde{u}_{\mu} \in K_{\mu}^*, \quad \text{com } K_{\mu}^* \equiv \left\{ v \int_{\partial \Omega_{\mu}} v \otimes_S n dA = 0 \right\} \quad (25)$$

onde, K_{μ}^* é conjunto da mínima restrição cinematicamente admissível para os campos de deslocamentos.

Outra maneira de se estabelecer um campo de deslocamento cinematicamente admissível pode ser ob-

tida a partir das Equações (13) e (19), sendo que deve ser satisfeita a seguinte condição:

$$\mathbf{u}_\mu \in \mathbf{K}_\mu^*, \quad \text{com } \mathbf{K}_\mu^* \equiv \{\mathbf{u}_\mu = \varepsilon \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu / \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathbf{K}_\mu^*\} \quad (26)$$

para \mathbf{K}_μ^* dado pela Equação (25). Deste modo, é plausível afirmar que para uma dada deformação macroscópica ε o conjunto \mathbf{K}_μ^* é uma translação do espaço \mathbf{K}_μ .

Considerando \mathbf{K}_μ o conjunto atual dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis no EVR com $\mathbf{K}_\mu \subset \mathbf{K}_\mu^*$, qualquer restrição imposta na cinemática do EVR deve implicar em \mathbf{K}_μ como uma translação do espaço \mathbf{K}_μ . Diante disso, deve ser observada a seguinte relação:

$$\mathbf{K}_\mu \equiv \{\mathbf{u}_\mu = \varepsilon \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu / \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathbf{K}_\mu\}, \quad \text{com } \mathbf{K}_\mu \subset \mathbf{K}_\mu^* \quad (27)$$

Por fim, a análise da Equação (27) implica que \mathbf{K}_μ é um subespaço de \mathbf{K}_μ^* .

2.2.7 Campos de deslocamentos virtuais no EVR

A definição do campo de deslocamentos virtuais auxilia na resolução do problema de equilíbrio do EVR. Neste caso, é empregada uma estratégia baseada nos conceitos do Princípio dos Trabalhos Virtuais em conjunto com o Método dos Elementos Finitos. Para tal, considera-se \mathbf{V}_μ como o espaço dos deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis no EVR, que está associado ao campo \mathbf{K}_μ dos deslocamentos cinematicamente admissíveis. Assume-se também \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 como os campos de deslocamentos pertencentes a \mathbf{K}_μ . De posse destas informações, \mathbf{V}_μ pode ser definido como:

$$\mathbf{V}_\mu \equiv \{\boldsymbol{\eta} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 / \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{K}_\mu\} \quad (28)$$

Tomando a Equação (19), pode-se definir $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_\mu$ e $\mathbf{v}_2 = \varepsilon \mathbf{y}$, pois esses dois campos de deslocamentos pertencem a \mathbf{K}_μ , isto é: $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\mu - \varepsilon \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{u}}_\mu$. Dessa forma, a seguinte relação pode ser obtida:

$$\mathbf{V}_\mu = \mathbf{K}_\mu \quad (29)$$

Logo, o campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis no EVR é dado pelo campo das flutuações dos deslocamentos cinematicamente admissíveis no EVR. Além disso, a condição $\mathbf{V}_\mu \in \mathbf{K}_\mu^*$ deve ser satisfeita, com \mathbf{K}_μ^* definido na Equação (25).

2.2.8 Classes de modelo multi-escala

A modelagem multi-escala pode ser realizada utilizando diferentes modelos, conforme as restrições sobre os possíveis campos de deslocamentos do EVR. Neste trabalho serão abordados os seguintes modelos: modelo de Taylor ou de Deformações Homogêneas no EVR; modelo de Deslocamento Linear no Contorno do EVR; e modelo de Flutuação Periódica no Contorno do EVR.

O modelo de Taylor ou regra da mistura é tomado como o modelo de resposta mais rígido, visto que o campo de flutuação de deslocamento $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y})$ para todo \mathbf{y} do EVR é desprezado, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu \quad (30)$$

Nesta análise, a deformação microscópica é considerada homogênea com valor igual àquela imposta pelo macro-contínuo. Portanto, não há necessidade de resolver o processo iterativo do EVR em termos de flutuação dos deslocamentos. Observe, porém, que podem ser definidos diferentes modelos constitutivos para as fases, ou seja, as fases não apresentam necessariamente comportamento elástico.

No modelo de Deslocamento Linear, o deslocamento microscópico no contorno do EVR, \mathbf{u}_μ , ocorre linearmente. Assim, existem deslocamentos e deformações para cada ponto do EVR, entretanto não ocorre flutuação em todo \mathbf{y} pertencente ao seu contorno:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu \quad (31)$$

Este modelo permite o cálculo da flutuação de deslocamentos no interior do EVR, gerando respostas

mais flexíveis em relação ao modelo de Taylor.

Por outro lado, no modelo de Flutuação Periódica no Contorno do EVR a flutuação de um ponto y no contorno do EVR ocorre de maneira periódica, isto é:

$$\tilde{u}_\mu(y^+) = \tilde{u}_\mu(y^-) \quad \forall y \in \partial\Omega_\mu \tag{32}$$

É importante ressaltar que nos vértices do EVR, as flutuações são nulas. Segundo [6, 13 e 14], o emprego do modelo de flutuação periódica apresenta resposta mais flexível que o modelo de deslocamento linear, que por sua vez, apresenta resposta mais flexível que o modelo de Taylor. Uma representação ilustrativa do modelo de flutuação periódica está apresentada na Figura 4.

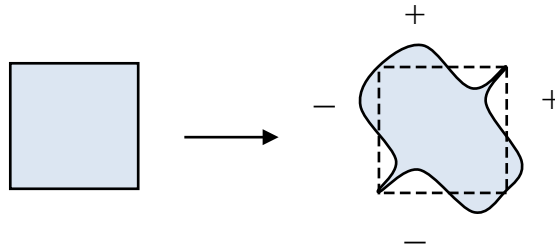


Figura 4: Modelo de Flutuação Periódica no contorno do EVR.

2.2.9 Equilíbrio do EVR

Numa formulação do Método dos Elementos Finitos, considere a tensão em um ponto y do EVR ($\sigma_\mu = \sigma_\mu(y, t)$), o campo de forças de volume que agem no EVR ($b = b(y, t)$) e o campo de forças externas de superfície que atuam no contorno $\partial\Omega_\mu(t^s = t^s(y, t))$. Logo, o Princípio de Trabalhos Virtuais estabelece que o EVR está em equilíbrio se, e somente se, a equação variacional é satisfeita a cada instante:

$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \nabla^s \eta dV - \int_{\Omega_\mu} b \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu} t^s \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in V_\mu \tag{33}$$

em que, V_μ é um campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis, $\partial\Omega_\mu$ é o contorno externo do EVR e Ω_μ é o domínio do EVR. É admitido que possa existir vazios no EVR. Neste caso, a Equação (33) se torna:

$$\int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu : \nabla^s \eta dV - \int_{\Omega_\mu^e} b \eta dV - \int_{\Omega_\mu^e} t^s \eta dA + \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu : \nabla^s \eta dV - \int_{\Omega_\mu^v} b \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in V_\mu \tag{34}$$

Considerando-se que os vazios isolados também estão em equilíbrio, pode-se escrever a Equação (33) para um determinado vazio, obtendo-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu : \nabla^s \eta dV - \int_{\Omega_\mu^v} b \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu^v} t^v \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in V_\mu \tag{35}$$

Assim, a Equação (34) resulta em:

$$\int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu : \nabla^s \eta dV - \int_{\Omega_\mu^e} b \eta dV - \int_{\Omega_\mu^e} t^s \eta dA + \int_{\partial\Omega_\mu^v} t^v \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in V_\mu \tag{36}$$

onde, $\partial\Omega_\mu^v$ é o contorno do vazio e t^v é o campo de forças que atua nos vazios.

Por outro lado, a tensão microscópica $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y, t)$ em um ponto y qualquer do EVR é relacionada com a deformação microscópica $\varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu(y, t)$, através da função constitutiva $f_y(\varepsilon_\mu(y, t))$ que envolve as variáveis internas de acordo com o modelo constitutivo. De modo análogo à Equação (3), σ_μ pode ser definido como:

$$\sigma_{\mu}(y, t) = f_y(\varepsilon_{\mu}(y, t)) \quad (37)$$

Considerando a Equação (7), fica:

$$\sigma_{\mu}(y, t) = f_y(\nabla^s u_{\mu}(y, t)) \quad (38)$$

Substituindo-se a Equação (38) na Equação (36) chega-se à seguinte relação, que representa o problema de equilíbrio microscópico (maiores detalhes podem ser encontrados em FERNANDES *et al.* [13]):

$$\int_{\Omega_{\mu}^s} f_y(\nabla^s u_{\mu}(y, t)) : \nabla^s \eta dV + \int_{\partial\Omega_{\mu}^s} t^{\nu}(y, t) \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in V_{\mu} \quad (39)$$

A partir das Equações (7) e (39), tem-se:

$$\int_{\Omega_{\mu}^s} f_y(\varepsilon(x, t) + \nabla^s \tilde{u}_{\mu}(y, t)) : \nabla^s \eta dV + \int_{\partial\Omega_{\mu}^s} t^{\nu}(y, t) \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in V_{\mu} \quad (40)$$

Em função da restrição cinemática adotada, obtêm-se diferentes tipos de modelos. Se não houver vazios, que é o caso a ser tratado nesse trabalho, a equação de equilíbrio se torna:

$$\int_{\Omega_{\mu}^s} f_y(\varepsilon(x, t) + \nabla^s \tilde{u}_{\mu}(y, t)) : \nabla^s \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in V_{\mu} \quad (41)$$

Discretizando o domínio do EVR em elementos finitos e fazendo-se a discretização no tempo, para um determinado incremento n e discretização h , deve-se encontrar o vetor de flutuações $\tilde{u}_{\mu}^{n+1} \in V_{\mu}^h$ que satisfaça a seguinte equação (maiores detalhes em [1], [6], [12], [13]):

$$\left\{ \int_{\Omega_{\mu}^h} B^T f_y(\varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_{\mu}^{n+1}) dV \right\} \cdot \eta = 0 \quad \forall \eta \in V_{\mu} \quad (42)$$

onde, B é a matriz que relaciona deslocamentos com deformações (para um elemento $\{\varepsilon\}_e = [B]_e \{U\}_e$) e f_y é o funcional que calcula as tensões microscópicas. Para um campo η qualquer a Equação (42) sempre será satisfeita se:

$$G^{n+1} = \int_{\Omega_{\mu}^h} B^T f_y(\varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_{\mu}^{n+1}) dV = 0 \quad (43)$$

Aplicando o Método de Newton-Raphson à Equação (43), numa determinada iteração k do incremento n o equilíbrio é alcançado se a seguinte equação é satisfeita:

$$G^{k-1} + \frac{dG^{k-1}}{d\tilde{u}_{\mu}^{k-1}} \delta\tilde{u}_{\mu}^k = 0 \quad (44)$$

$$\int_{\Omega_{\mu}^h} B^T f_y(\varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_{\mu}^{k-1}) dV + \left[\int_{\Omega_{\mu}^h} B^T D^{k-1} B dV \right] \delta\tilde{u}_{\mu}^k = 0 \quad (45)$$

Referente à Equação (45), D^{k-1} é a matriz constitutiva tangente consistente dada por:

$$D^{k-1} = \left(\frac{df_y}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_{\mu}^{k-1}} \right) \quad (46)$$

A Equação (45) pode ser escrita como:

$$F^{k-1} + K^{k-1} \delta\tilde{u}_{\mu}^k = 0 \quad (47)$$

onde,

$$F^{k-1} = \int_{\Omega_h} B^T f_y(\varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_\mu^{k-1}) dV \quad (48)$$

$$K^{k-1} = \int_{\Omega_h} B^T D^{k-1} B dV \quad (49)$$

sendo K a matriz de rigidez tangente e F o vetor das forças internas; no caso de se ter uma discretização com N_e elementos, K é dada por: $K^{k-1} = \sum_{e=1}^{N_e} B_e^T D_e^{k-1} B_e V_e$

Resolvendo-se o sistema de equações definido na Equação (47), chega-se ao valor de $\delta\tilde{u}_\mu^k$, a partir do qual calcula o vetor das flutuações de tentativa na iteração k : $\tilde{u}_\mu^k = \tilde{u}_\mu^{k-1} + \delta\tilde{u}_\mu^k$.

2.3 Modelagem constitutiva do material

Conforme abordado anteriormente, a classe de materiais estudada compreende os CMMs, os quais são caracterizados por uma estrutura heterogênea. Neste caso, os EVRs são constituídos de uma parte denominada matriz, a qual é definida com comportamento elasto-plástico, e pelas inclusões, definidas com um comportamento elástico. A interface consiste a região de transmissão de esforços entre a matriz/reforço, o que justifica a importância de uma análise adequada de seu comportamento.

Para a modelagem, são utilizados conceitos da Teoria da Plasticidade e também considerações envolvendo a Mecânica da Fratura e a Mecânica do Contato. A teoria da plasticidade será empregada visando analisar o surgimento de deformações irreversíveis na microestrutura dos CMMs. No que tange à Mecânica da Fratura, é utilizado um modelo de fratura com o objetivo representar o comportamento de fissuras na região da interface. Por sua vez, a Mecânica do Contato fornece a base para tratar dos aspectos relacionados à penetrabilidade entre as superfícies dos corpos no modelo.

Neste trabalho, a metodologia utilizada para a simulação do comportamento mecânico dos CMMs consiste no procedimento de discretização em elementos finitos. Dessa forma, as inclusões são consideradas com comportamento elástico e são constituídas por elementos triangulares. Por sua vez, a matriz será formada por elementos triangulares, cujo comportamento é descrito pelo modelo de von Mises. A utilização de elementos finitos triangulares justifica-se pela facilidade de implementação no código computacional e, principalmente, por ser consistente com a utilização de elementos finitos de fratura e contato apresentados neste trabalho. Por fim, a interface matriz/reforço é composta de elementos de contato e fratura coesiva. A modelagem da microestrutura em elementos finitos toma por base o que foi preconizado por PITUBA e SOUZA NETO [14], cuja representação esquemática está indicada na Figura 5.

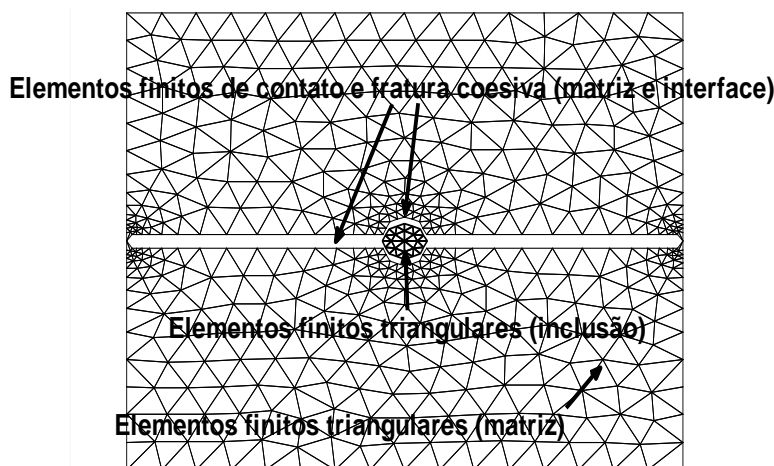


Figura 5: Modelo utilizado para a análise do comportamento de microestruturas de CMMs.

2.3.1 Modelo de von Mises

O critério de plasticidade de von Mises é bastante utilizado para descrever o processo de evolução das deformações plásticas em metais. Por se tratar de um modelo bastante difundido na literatura, apresenta-se aqui o modelo de forma bastante resumida. Maiores detalhes podem ser encontrados em SOUZA NETO *et al.* [15].

O armazenamento da energia de deformação elástica em seu estado genérico pode ser decomposto de forma aditiva em uma contribuição volumétrica U_v e outra contribuição distorcional U_d , onde esta última parcela é de interesse para o modelo em questão.

No critério de von Mises, a produção plástica ocorre quando o invariante de tensão J_2 alcança um valor crítico, o qual pode ser representado matematicamente na forma:

$$J_2 = R(\alpha) \quad (50)$$

onde, R consiste no valor crítico e é definido como função de uma variável interna de endurecimento α .

Por sua vez, o critério de plastificação de von Mises pode ser escrito na forma:

$$\phi(\sigma) = q(\sigma) - \sigma_y \quad (51)$$

em que, σ_y é a tensão de escoamento uniaxial e $q(\sigma)$ é denotada tensão efetiva ou equivalente.

Ainda referente à Equação (51), a tensão de escoamento uniaxial e a tensão efetiva são dadas, respectivamente, por:

$$\sigma_y \equiv \sqrt{3R} \quad (52)$$

$$q(\sigma) = \sqrt{3J_2(s(\sigma))} \quad (53)$$

2.3.2 Modelo de Contato e Fratura Coesiva

A interface matriz/inclusão é submetida a altos níveis de tensões locais e, conseqüentemente, tem maior propensão a sofrer nucleação do dano. A seguir é apresentada a formulação do modelo de Contato e Fratura Coesiva com o objetivo analisar a decoesão na interface matriz/inclusão de CMMs. O modelo em questão é proposto tomando por base o trabalho de CIRAK *et al.* [16].

Este modelo descreve a lei coesiva de deformação finita irreversível. Nesse contexto, a aplicação de determinado carregamento na estrutura acarreta deslocamentos e a energia coesiva liberada φ pode ser escrita como:

$$\varphi = \varphi(\delta_n, \delta_s, q) \quad (54)$$

em que, δ_n corresponde ao deslocamento de abertura normal das faces fissura, δ_s representa o deslocamento de abertura por cisalhamento das faces da fissura e q consiste em uma variável responsável pelos processos inelásticos de decoesão.

Por simplicidade, pode-se considerar que a parcela referente ao deslizamento na abertura independe da direção da superfície da fissura, ou seja:

$$\delta_s = |\delta_s| \quad (55)$$

No que diz respeito à formulação da lei coesiva dos modos mistos, é introduzido um deslocamento de abertura efetivo δ , dado por:

$$\delta = \sqrt{\beta^2 \delta_s^2 + \delta_n^2} \quad (56)$$

onde, β varia de 0 a 1 e assume valores diferentes conforme os valores das deformações normal e por deslizamento.

Assumindo que φ depende de δ , a lei coesiva pode ser escrita na forma:

$$T = \frac{t}{\delta} (\beta^2 \delta_s + \delta_n \mathbf{n}) \quad (57)$$

em que, \mathbf{n} é o vetor normal à fissura, δ_s é o vetor de abertura por cisalhamento nas faces da fissura e

\mathbf{T} é denominado de vetor de tensão coesiva ao longo da fissura.

O escalar t representa a tensão efetiva dada por:

$$t = \sqrt{\beta^{-2}|t_s|^2 + t_n^2} \quad (58)$$

A mudança na lei coesiva proposta objetivou simular um comportamento de fratura em materiais dúcteis. Sendo assim, as expressões obtidas são dadas por:

$$t = \sigma_c e^{-\delta/\delta_c}, \text{ se } \delta = \delta_{\max} \text{ e } \delta \geq 0 \quad (59)$$

$$t = \frac{t}{\delta_{\max}} \delta, \text{ se } \delta < \delta_{\max} \text{ ou } \delta < 0 \quad (60)$$

onde, σ_c é a máxima tensão coesiva e δ_c representa a abertura crítica.

Outro aspecto de suma importância para a simulação da decoesão na interface matriz/inclusão compreende a modelagem de como se desenvolve o contato nesta região. Uma alternativa consiste na utilização do fator de penalidade λ_p , um parâmetro utilizado para criar uma rigidez suficiente entre os elementos, a fim de evitar que uma face adentre outra, o que é fisicamente impossível. Nos regimes de tensão, o fator de penalidade substitui a porção rígida inicial da lei coesa por uma resposta linear rígida na forma:

$$t = \lambda_p \delta \text{ se } \lambda_p \delta \leq \sigma_c \quad (61)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

No que segue, estão os resultados obtidos quanto ao emprego da modelagem proposta para a simulação do comportamento mecânico de microestruturas de CMMs considerando os processos de plastificação da matriz e o processo de descolamento na interface matriz/inclusão.

Os valores iniciais dos parâmetros referentes às propriedades dos materiais foram definidos a partir do trabalho de AZIZI [4]. Para a matriz adotou-se um coeficiente de Poisson $\nu_m = 0.3$ e um módulo de elasticidade E_m , para o qual é atribuído valor de acordo com o tipo de material. No que concerne às inclusões, utilizou-se um coeficiente de Poisson $\nu_i = 0.17$ e a seguinte relação para o módulo de elasticidade $E_i = 5.7 E_m$. O modelo de von Mises com encruamento isotrópico foi adotado em todas as análises numéricas, assim como foi considerado estado plano de tensão.

Em relação à quantidade de inclusões, foram utilizados EVRs compostos por uma (1) inclusão, quatro (4) inclusões e oito (8) inclusões com distribuição diversificada.

3.1 EVR com uma inclusão

Neste caso, foram realizadas simulações em relação ao tipo de modelo multi-escala empregado, além de análises quanto à influência dos parâmetros β , λ_p , δ_c e σ_c referentes ao modelo de Contato e Fratura Coesiva. Em relação ao material da matriz, foi adotada uma tensão de plastificação de 200 MPa e módulo de encruamento de 500 MPa . Também para a matriz foi considerado um módulo de elasticidade $E_m = 69000 \text{ MPa}$, o que implica em um módulo de elasticidade para as inclusões de $E_i = 393300 \text{ MPa}$.

Nas direções x e y , considerou-se as seguintes deformações macroscópicas genéricas aplicadas $\epsilon_x = 0.003$ e $\epsilon_y = -0.0006$, respectivamente. Também foi aplicada uma deformação distorcional de $\gamma_{xy} = 0.0002$. Outros valores a serem destacados correspondem às características dos elementos de fratura, tais como: $\sigma_c = 0.1 \text{ MPa}$, $\beta = 0.707$, $\lambda_p = 3000000$ e $\delta_c = 0.02 \text{ mm}$, onde são parâmetros de referência foram adotados tomando como base os trabalhos de CIRAK *et al.* [16] e FERNANDES *et al.* [13]. Foram utilizados 580 elementos finitos triangulares e 16 elementos finitos de contato e fratura coesiva e 339 nós na malha correspondente à modelagem.

3.1.1 Modelagem empregada

A análise inicial foi voltada para verificar a resposta do EVR de acordo com modelo multi-escala empregado. Para tanto, foram adotados dois modelos: o modelo de Deslocamento Linear e o modelo Flutuação Periódica. Não foi apresentada a resposta para o modelo de Taylor, pois este caracteriza-se por ser o modelo mais rígido (restrito). Contudo, a formulação de Taylor está presente nos outros modelos em questão e, portanto, é impor-

tante para as análises, como visto no item (2.2.8). Os resultados para a tensão homogeneizada de cisalhamento e para a tensão homogeneizada normal estão apresentados na Figura 6 e na Figura 7, respectivamente.

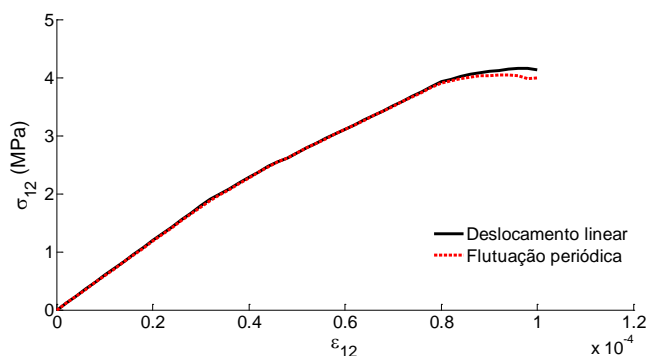


Figura 6: Tensão de cisalhamento (σ_{12}) x Deformação distorcional (ϵ_{12}).

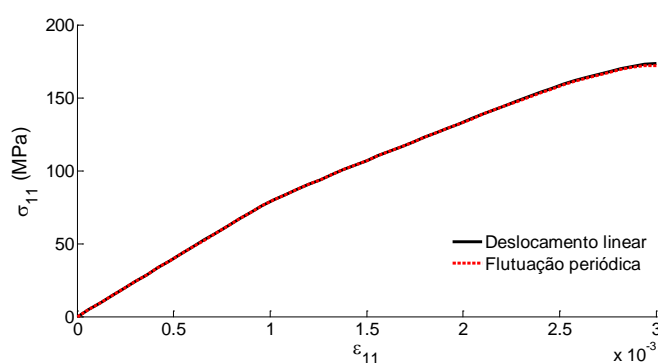


Figura 7: Tensão normal (σ_{11}) x Deformação normal (ϵ_{11}).

Em relação ao gráfico da tensão homogeneizada de cisalhamento, verifica-se que o modelo de Flutuação Periódica foi capaz de capturar de forma mais pronunciada os fenômenos dissipativos perante o modelo de Deslocamento Linear no Contorno, evidenciado principalmente quando a fase descolamento da interface matriz/agregado tem início. Por outro lado, no gráfico referente à tensão homogeneizada normal ambos modelos apresentaram resultados próximos. Dessa forma, mesmo com uma suave diferença, o modelo de Flutuação Periódica proporcionou uma resposta mais flexível e realística sobre o comportamento da microestrutura do material, assim como sugerem FERNANDES *et al.* [13]. Ademais, diante dos resultados obtidos, optou-se por utilizar o modelo de Flutuação Periódica no restante das análises.

3.1.2 Parâmetro β

Outra questão verificada envolveu a interferência nos resultados de β , parâmetro que estabelece a relação entre a abertura normal e a abertura por cisalhamento. Neste caso, os resultados dos gráficos para as tensões homogeneizadas de cisalhamento e normal estão presentes na Figura 8 e Figura 9, respectivamente.

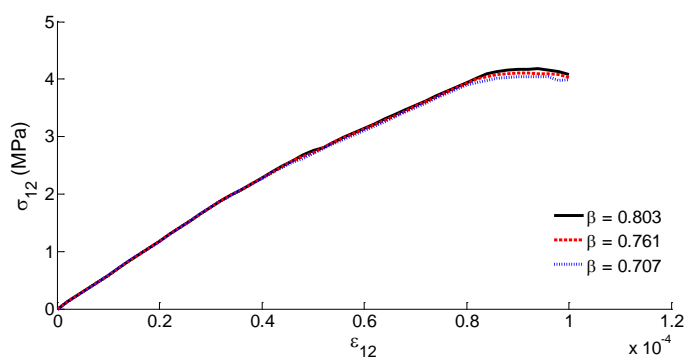


Figura 8: Tensão de cisalhamento (σ_{12}) x Deformação distorcional (ϵ_{12}).

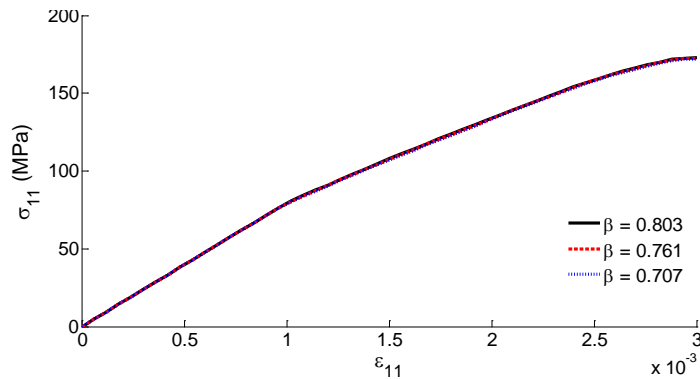


Figura 9: Tensão normal (σ_{11}) x Deformação normal (ϵ_{11}).

Como esperado para um material que apresenta ductilidade, o valor de β influencia apenas no gráfico da tensão homogeneizada de cisalhamento. Isso ocorre porque β está relacionado de forma mais efetiva ao escorregamento entre as faces das fraturas. Neste caso, uma diminuição no seu valor implica em perda de rigidez e resistência, acompanhada de um maior processo de fratura. O gráfico de tensão homogeneizada normal apresentou curvas bastante próximas e, portanto, o parâmetro em questão não interferiu de forma expressiva os resultados.

3.1.3 Fator de penalidade (λ_p)

O fator de penalidade, λ_p , consiste em um parâmetro utilizado para criar uma rigidez suficiente entre as faces dos elementos de contato e fratura coesiva. Na Figura 10 é possível observar os resultados para o gráfico da tensão homogeneizada de cisalhamento. Por outro lado, na Figura 11 estão os resultados obtidos para a tensão homogeneizada normal.

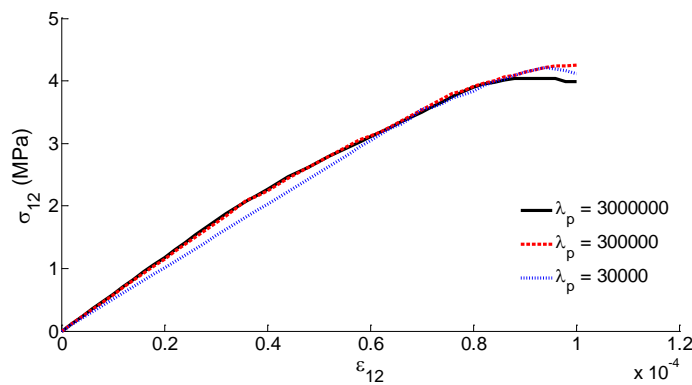


Figura 10: Tensão de cisalhamento (σ_{12}) x Deformação distorcional (ϵ_{12}).

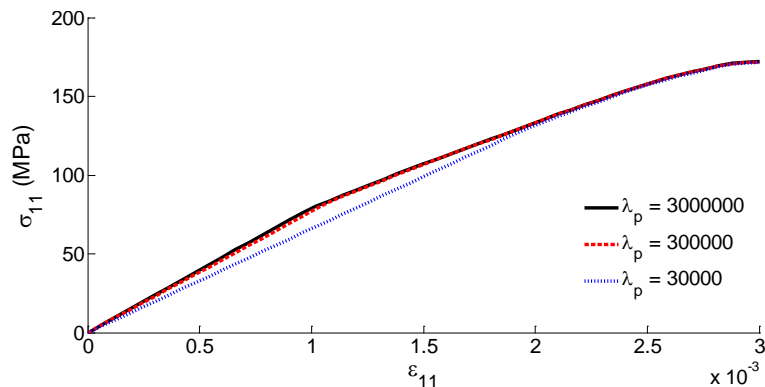
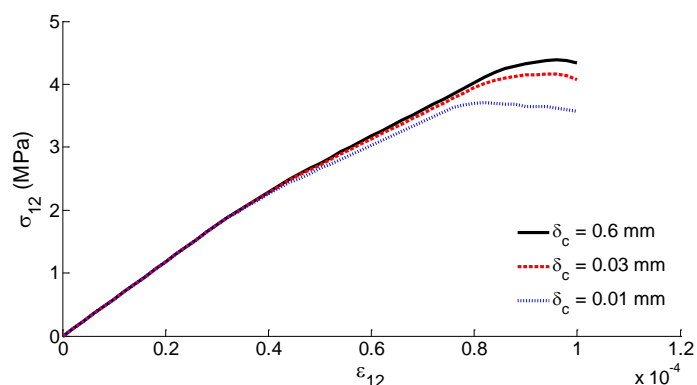
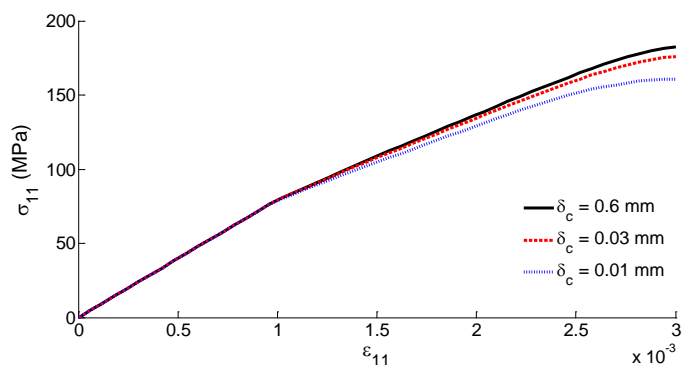


Figura 11: Tensão normal (σ_{11}) x Deformação normal (ϵ_{11}).

Logo, λ_p influencia nos resultados tanto no gráfico da tensão homogeneizada de cisalhamento quanto no gráfico da tensão homogeneizada normal. Em ambos os gráficos, no início e na região intermediária ocorre uma diferença significativa entre as curvas e no final essa diferença vai diminuindo. O fator de penalidade maior implica numa contenção do processo de fratura, o que leva a uma resposta mais rígida. Cabe ainda ressaltar que, em regime de falha (com fase de descolamento na interface proeminente) referente à tensão homogeneizada de cisalhamento, a curva com λ_p menor apresenta uma resistência superior em comparação com a curva com λ_p maior.

3.1.4 Abertura crítica (δ_c)

Outro parâmetro analisado compreende a abertura crítica δ_c , que é responsável por caracterizar abertura permitida para que comece a ocorrer a fratura do material. Os resultados para os gráficos das tensões homogeneizadas de cisalhamento e normal estão indicados na Figura 12 e Figura 13, respectivamente.

**Figura 12:** Tensão de cisalhamento (σ_{12}) x Deformação distorcional (ϵ_{12}).**Figura 13:** Tensão normal (σ_{11}) x Deformação normal (ϵ_{11}).

Logo, a mudança no valor de δ_c interfere de forma expressiva nos resultados. De modo geral, a diminuição do seu valor implica na perda de rigidez e resistência tanto no gráfico da tensão homogeneizada de cisalhamento quanto no gráfico de tensão homogeneizada normal, acompanhada de um maior índice de fratura do material.

3.1.5 Máxima tensão coesiva (σ_c)

A influência da máxima tensão coesiva, σ_c , também foi verificada. Os resultados para a tensão homogeneizada de cisalhamento e para a tensão homogeneizada normal estão apresentados na Figura 14 e na Figura 15, respectivamente.

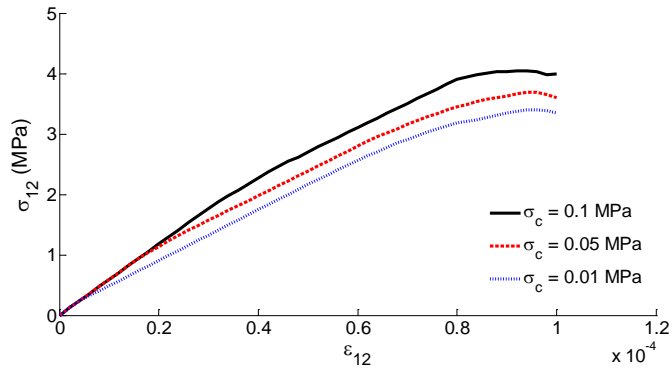


Figura 14: Tensão de cisalhamento (σ_{12}) x Deformação distorcional (ϵ_{12}).

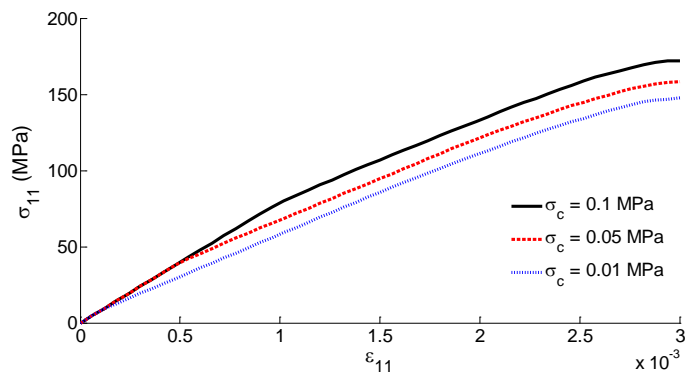


Figura 15: Tensão normal (σ_{11}) x Deformação normal (ϵ_{11}).

Diante dos resultados obtidos, é perceptível que a variação do valor de σ_c interfere na resposta final. Logo, uma diminuição do seu valor implica na perda de rigidez e resistência do material, influenciando no início da fratura do mesmo. Em ambos os gráficos, observa-se inclusive uma tendência de *softening* (amolecimento) da curva tensão x deformação para valores inferiores de σ_c . Assim, conforme os resultados deste trabalho e os apresentados por SEGURADO e LLORCA [7], reforços fortemente ligados à matriz (consideração de perfeita aderência) são capazes de produzir elevada rigidez e resistência, enquanto uma interface fraca resulta em baixa rigidez e resistência. A Figura 16 apresenta o EVR deformado para cada valor de σ_c .

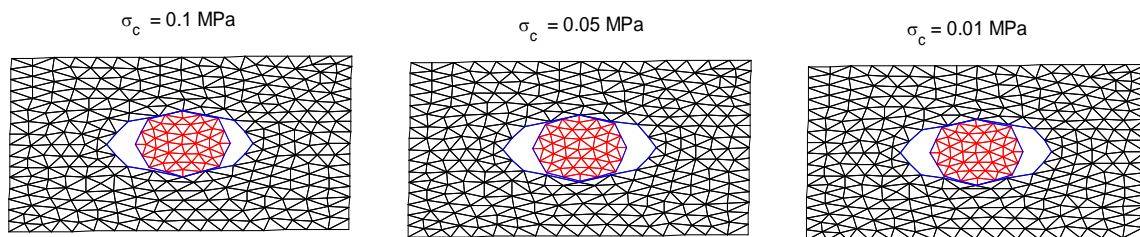


Figura 16: EVR deformado com fator de amplificação para visualização.

3.2 EVRs com quatro e oito inclusões

Neste caso, as seguintes análises visam verificar a influência do comportamento da interface matriz/reforço na resposta de EVRs compostos por quatro e oito inclusões. É importante salientar que no EVR com 4 inclusões a fração em seu volume de inclusões corresponde a cerca de 12%, enquanto que no EVR com 8 inclusões a porcentagem de inclusões é maior e corresponde a aproximadamente 14%. Inicialmente, foi realizada uma análise na qual a modelagem empregada considerou a matriz governada pelo modelo de von Mises, assumindo assim a existência de uma perfeita aderência entre a matriz e o reforço. Posteriormente, foram realizadas análises cuja modelagem considerou o processo de descolamento da interface matriz/inclusão, além da

plasticidade da matriz, inclusive com resultados obtidos para a variação da máxima tensão coesiva σ_c , parâmetro responsável por descrever a interação entre as faces da matriz/inclusão e que, conforme o Item 3.1.5, influencia significativamente nos resultados.

Para a matriz, foi adotada uma tensão de plastificação de 50 MPa e módulo de encruamento de 700 MPa . Também para a matriz foi considerado um módulo de elasticidade $E_m = 69000 \text{ MPa}$, resultando assim em um módulo de elasticidade para as inclusões de $E_i = 393300 \text{ MPa}$. Para as deformações genéricas macroscópicas, considerou-se nas direções x e y as seguintes deformações $\varepsilon_x = 0.0009$ e $\varepsilon_y = -0.00003$, respectivamente. Neste caso, a deformação distorcional correspondeu à $\gamma_{xy} = 0.000004$. Os outros valores correspondem às características dos elementos de fratura, tais como: $\beta = 0.7$, $\lambda_v = 200000$ e $\delta_c = 0.0568 \text{ mm}$. Os parâmetros foram escolhidos de modo a demonstrar claramente os diferentes comportamentos dos EVRs ao se considerar o descolamento da interface em diferentes distribuições de inclusões. No EVR com quatro inclusões foram utilizados 798 elementos finitos triangulares e 64 elementos finitos de contato e fratura coesiva e 496 nós na malha correspondente à modelagem do EVR com quatro inclusões. Por outro lado, no EVR com oito inclusões foram utilizados 1184 elementos finitos triangulares e 128 elementos finitos de contato e fratura coesiva e 767 nós.

3.2.1 EVR composto por quatro inclusões

Os resultados obtidos para o EVR com quatro inclusões considerando a modelagem sem fratura e também a modelagem com fratura para diferentes valores de σ_c estão apresentados a seguir. Na figura 17 estão os resultados encontrados para a tensão homogeneizada de cisalhamento. Já os resultados obtidos para a tensão homogeneizada normal estão presentes na Figura 18.

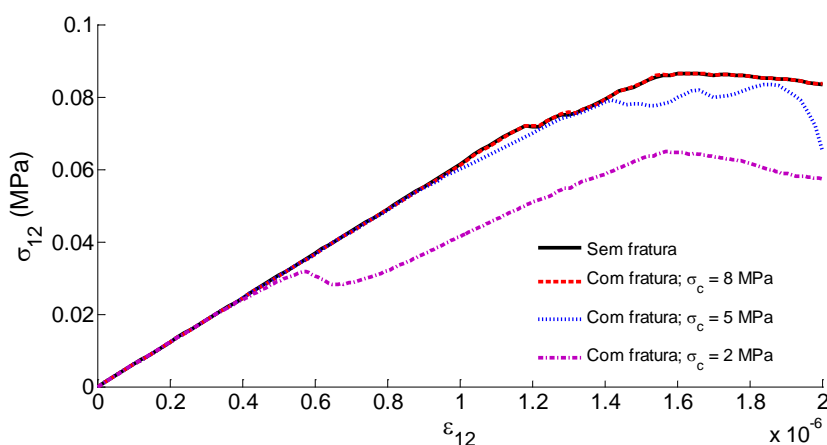


Figura 17: Tensão de cisalhamento (σ_{12}) x Deformação distorcional (ε_{12}).

No que tange à tensão homogeneizada de cisalhamento, verifica-se que a modelagem sem a presença de fratura apresenta uma resposta bastante próxima da modelagem com fratura para um valor elevado da máxima tensão coesiva ($\sigma_c = 8 \text{ MPa}$), que implica em inclusões fortemente ligadas à matriz. Já a utilização do modelo de Contato e Fratura Coesiva para valores baixos da tensão máxima coesiva σ_c , o que caracteriza interfaces fracas, acarreta na perda de rigidez e resistência na curva tensão x deformação. Para o caso com $\sigma_c = 2 \text{ MPa}$, em determinado momento ocorreu uma perda de rigidez e resistência significativa, entretanto o fato das inclusões serem elásticas contribuiu para que ainda ocorresse um ganho nestas propriedades, o que está de acordo com os resultados apresentados por AZIZI [4].

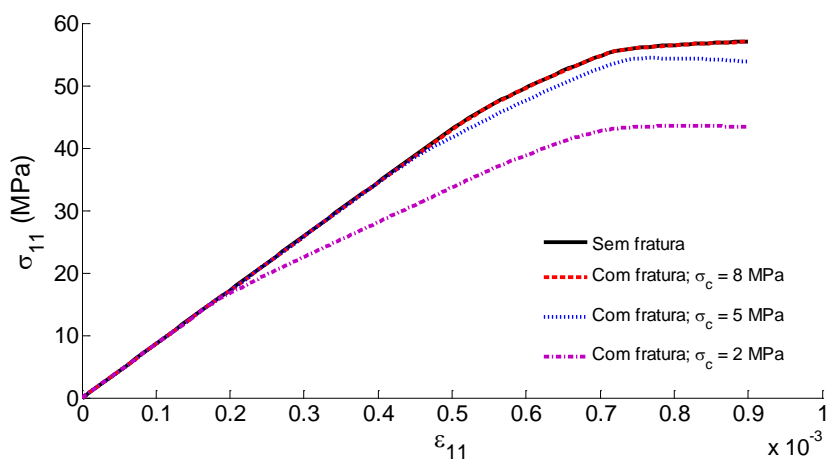


Figura 18: Tensão normal (σ_{11}) x Deformação normal (ϵ_{11}).

No gráfico da tensão homogeneizada normal, os resultados também são próximos tanto na resposta sem fratura quanto na resposta com fratura para $\sigma_c = 8 \text{ MPa}$. No entanto, à medida que a máxima tensão coesiva diminui, ocorre uma perda significativa de rigidez e resistência do material. A Figura 19 apresenta o EVR deformado considerando cada valor de σ_c .

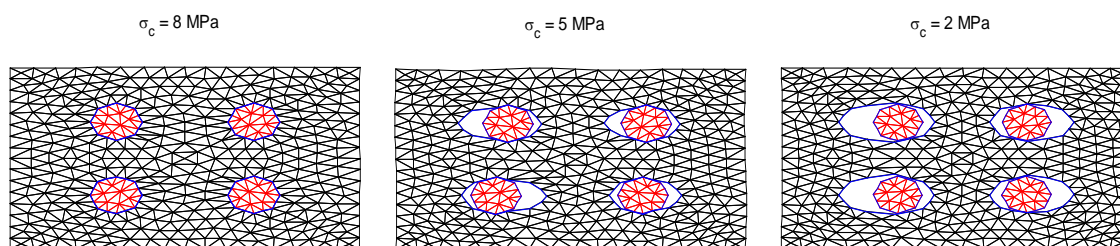


Figura 19: EVR deformado com fator de amplificação para visualização.

3.2.2 EVR composto por oito inclusões

Para o EVR com oito inclusões também foram obtidos resultados considerando a modelagem sem fratura e a modelagem com fratura para diferentes valores de σ_c . Os resultados para as tensões homogeneizadas de cisalhamento e normal estão indicados na Figura 20 e na Figura 21, respectivamente.

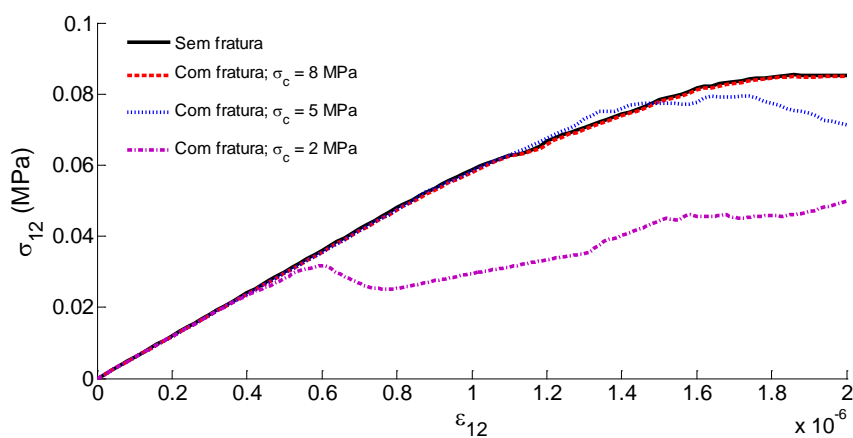


Figura 20: Tensão de cisalhamento (σ_{12}) x Deformação distorcional (ϵ_{12}).

Em relação ao comportamento em cisalhamento, os resultados são próximos para a modelagem sem

fratura e a modelagem com fratura considerando $\sigma_c = 8 \text{ MPa}$. Contudo, a diminuição da aderência entre a interface matriz/inclusão ($\sigma_c = 5 \text{ MPa}$) acarreta, principalmente, uma diminuição na resistência. Para um valor ainda menor ($\sigma_c = 2 \text{ MPa}$) ocorre a perda de resistência e também a perda de rigidez. Neste caso, assim como no EVR com quatro inclusões (Figura 17), em determinado momento ocorre uma diminuição bastante acentuada de rigidez e resistência, mas as inclusões elásticas contribuem para que ainda ocorra um ganho em tais propriedades, cumprindo assim o seu papel de reforço num material compósito. Observe que neste caso, em alguns pontos da interface há um desenvolvimento do fenômeno de contato de modo mais evidente capturado pelo elemento de fratura e contato (vide Figuras 19 e 22 para os casos com $\sigma_c = 2 \text{ MPa}$). Isso gera uma transmissão de tensões tangenciais entre inclusão e matriz, propiciando o ganho de rigidez e de resistência relatado.

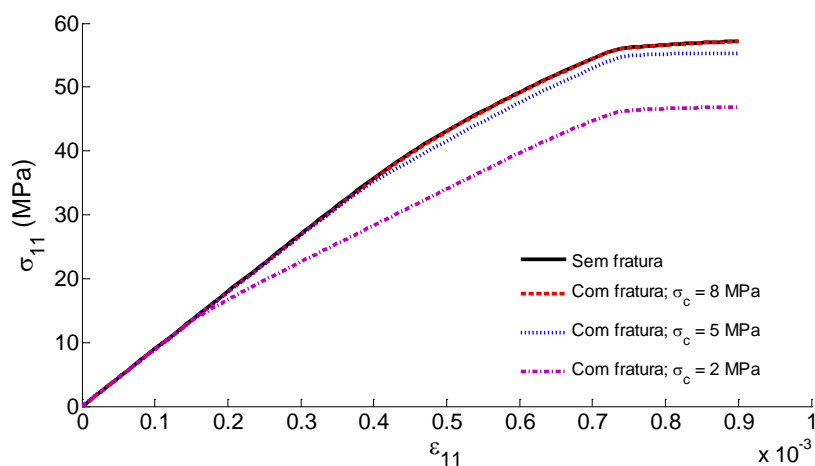


Figura 21: Tensão normal (σ_{11}) x Deformação normal (ϵ_{11}).

Para a tensão homogeneizada normal, a resposta obtida é bastante próxima para o modelo sem fratura e o modelo com fratura e $\sigma_c = 8 \text{ MPa}$. No entanto, uma diminuição mais sensível na máxima tensão coesiva ($\sigma_c = 2 \text{ MPa}$) implica na perda considerável de rigidez e resistência, pois essa é a direção tracionada pela deformação macroscópica imposta. Vale ressaltar que um estudo sobre o refinamento da malha em elementos finitos encontra-se em PITUBA e SOUZA NETO [14], onde constatou-se que as malhas utilizadas já são suficientes para convergir para a resposta encontrada. A Figura 22 apresenta o EVR deformado para cada valor de σ_c .

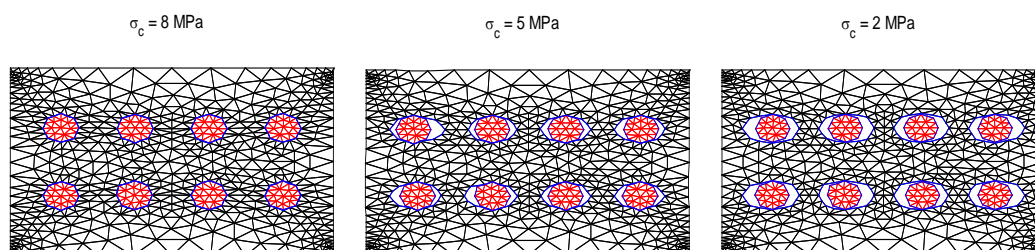


Figura 22: EVR deformado com fator de amplificação para visualização.

3.2.3 Estudo comparativo

Outro objetivo das análises consistiu em realizar a comparação entre os resultados do EVR com oito inclusões e o EVR com quatro inclusões. Nesse sentido, a Figura 23 apresenta os resultados relativos à tensão homogeneizada de cisalhamento e a Figura 24 os resultados relativos à tensão homogeneizada normal.

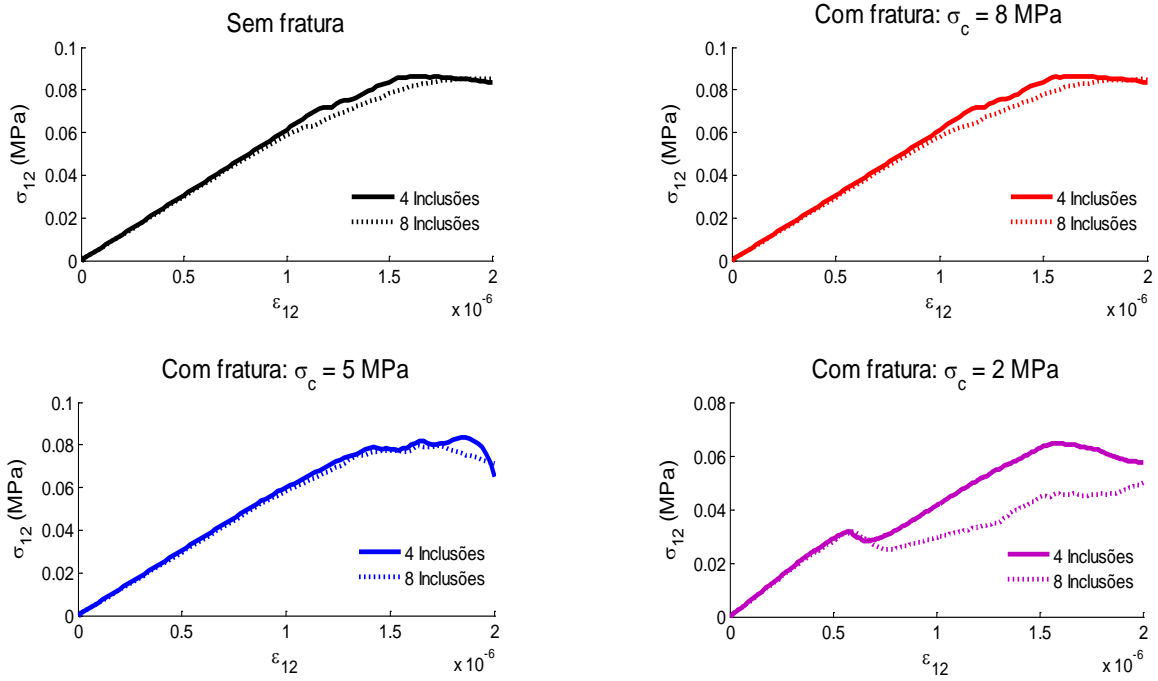


Figura 23: Tensão de cisalhamento (σ_{12}) x Deformação distorcional (ϵ_{12}).

De forma geral, as respostas referentes à tensão homogeneizada de cisalhamento mostram que o percentual em volume das inclusões, aqui modeladas como elásticas, não foi um aspecto determinante, pois o EVR com oito inclusões (volume de inclusões = 14%) apresentou uma diminuição de rigidez e resistência quando comparado com o EVR com quatro inclusões (volume de inclusões = 12%). Dessa forma, o quantitativo de inclusões foi o fator responsável por influenciar nos resultados, sendo que no EVR com a presença de mais inclusões (EVR com oito inclusões) ocorreu um processo mais intenso de fratura, o qual pode ser justificado pelo processo de descolamento nas interfaces matriz/inclusão.

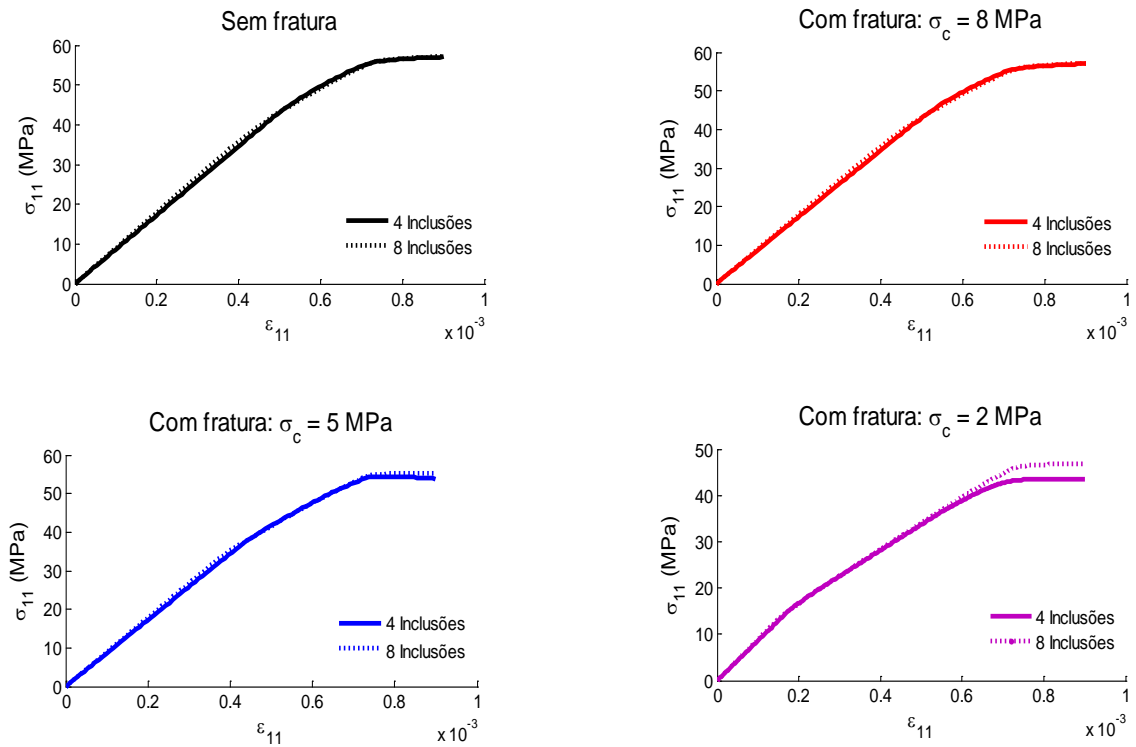


Figura 24: Tensão normal (σ_{11}) x Deformação normal (ϵ_{11}).

Em relação à tensão homogeneizada normal, os resultados obtidos foram bastante próximos, dificultando assim afirmação sobre qual fator foi preponderante: a quantidade de inclusões ou a sua fração em volume. No entanto, analisando com um olhar mais criterioso percebe-se que o EVR com oito inclusões apresentou uma resposta levemente mais rígida em comparação com o EVR de quatro inclusões. Além disso, também é perceptível o ganho de resistência do EVR com oito inclusões no caso com fratura e $\sigma_c = 2 \text{ MPa}$. Neste caso, a fração em volume de inclusões foi o fator dominante para a obtenção dos resultados, em que o EVR com 14% do volume de inclusões promoveu um ganho de rigidez e resistência perante o EVR com 12% do volume de inclusões.

4. CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos, conclui-se que o entendimento dos mecanismos apresentados nas escalas inferiores configura-se como uma alternativa para compreender e proporcionar melhorias no desempenho de diversos materiais, principalmente aqueles caracterizados por apresentarem uma estrutura heterogênea, como os CMMs. Desse modo, a utilização da modelagem multi-escala é justificada, pois permite através da utilização de modelos constitutivos simples a obtenção de respostas complexas sobre o comportamento mecânico do material. Por sua vez, a incorporação dos conceitos referentes à Teoria da Plasticidade e Fratura consiste em um aspecto de suma importância neste processo. Isso é evidenciado pelos resultados obtidos, sendo que a consideração dos fenômenos dissipativos de energia relacionados ao desenvolvimento das deformações permanentes e ao descolamento na interface matriz/inclusão implicou na perda de rigidez e resistência na resposta dos EVRs. Logo, a abordagem empregada permitiu uma modelagem mais detalhada da microestrutura do material, levando assim a uma análise mais consistente de seu comportamento mecânico em relação à consideração de perfeita aderência entre matriz e inclusão.

Por fim, os resultados coerentes obtidos até então servirão de base para a consideração de análises acopladas entre escalas utilizando a metodologia descrita nos trabalhos [6] e [13], com o intuito de modelar o comportamento mecânico de estruturas compostas por CMMs considerando a fase de descolamento entre inclusão e matriz.

5. AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo suporte financeiro fornecido durante a realização do trabalho.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] GIUSTTI, S. M., *Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi-escalas*, Tese D.Sc., Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 2009.
- [2] PITUBA, J. J. C., FERNANDES, G. R. “Anisotropic damage model for concrete”, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 137, pp. 610-624, 2011.
- [3] POH, L. H., PEERLINGS, R. H. J., GEERS, M. G. D., *et al.*, “An implicit tensorial gradient plasticity model – Formulation and comparison with a scalar gradient model”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 48, pp. 2595-2604, 2011.
- [4] AZIZI, R. “Micromechanical modeling of damage in periodic composites using strain gradient plasticity”, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 92, pp. 101-113, 2012.
- [5] LOPES, I. A. R., *Análise do dano dúctil baseada em modelos multi-escala*, Dissertação de M.Sc., Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2013.
- [6] FERNANDES, G. R., PITUBA J. J. C., SOUZA NETO, E. A. “FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 54, pp. 47-59, 2015.
- [7] SEGURADO, J., LLORCA, J. “A computacional micromechanics study of the effect of interface decohesion on the mechanical behavior of composites”, *Acta Materialia*, v. 53, pp. 4931-4942, 2005.
- [8] SUN, L. Z., JU, J. W., LIU, H. T. “Elastoplastic of metal matrix composites with evolutionary particle deboning”, *Mechanic of Materials*, v. 35, pp. 559-569, 2003.
- [9] OLIVEIRA, J. A. D. *Modelação micromecânica do comportamento de materiais Compósitos de Matriz de Alumínio*, Dissertação de M.Sc., Universidade de Aveiro, 2006.
- [10] ABADI, M. T. Effects of Microstructure on Fiber-Matrix Debonding of Metal Matrix Composites under Transverse Loading. *ICQNM 2012: The Sixth International Conference on Quantum, Nano and Micro Technologies*, Rome, 2012.

- [11] SOUZA, F. V., *Modelo multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos suscetíveis ao dano*, Dissertação M.Sc., Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.
- [12] SOUZA NETO, E. A., FEIJÓO, R. A., *Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: small and large strain kinematical formulation*, Report, National Laboratory for Scientific Computing (LNCC), Brazil, 2006.
- [13] FERNANDES, G. R., PITUBA J. J. C., SOUZA NETO, E. A. “Multi-scale modelling for bending analysis of heterogenous plates by coupling BEM and FEM”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 51, pp. 1-13, 2015.
- [14] PITUBA, J. J. C., SOUZA NETO, E. A. “Modeling of unilateral effect in brittle materials by a mesoscopic scale approach”, *Computers and Concrete*, v. 15, pp. 735-758, 2015.
- [15] SOUZA NETO, E. A., PERIC, D., OWEN, D. R. J., *Computational Methods for Plasticity – Theory and Applications*, Chichester, John Wiley, 2008.
- [16] CIRAK, F., ORTIZ, M., PANDOLFI, A. “A cohesive approach to thin-shell fracture and fragmentation. Comput”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, pp. 2604-2618, 2005.