

Modelo numérico-computacional de ligação semirrígida baseado na Mecânica do Dano

Numerical-Computational Model of semi-rigid connection based on Damage Mechanics

Luiz Antonio Farani de Souza¹ , Amanda Letícia Soares²,
Rodrigo Yukio Mizote Kawamoto², Douglas Fernandes dos Santos², Leandro Vanalli²

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná, R. Marcílio Dias, 635, Jardim Paraíso, 86812-460, Apucarana, PR, Brasil.

²Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Av. Colombo, nº 5790, Campus Universitário, Bloco C67, Pavimento Térreo, Sala 002, 87020-900, Maringá, PR, Brasil.

e-mail: lasouza@utfpr.edu.br, amandaleticiasoares@gmail.com, rodrigo_ymk@hotmail.com, douglassantos88@hotmail.com, lvanalli@uem.br

RESUMO

As ligações de viga – pilar em estruturas de aço são projetadas tradicionalmente supondo seu comportamento idealmente flexível ou totalmente rígido, o que simplifica os processos de análise e de projeto estrutural. No entanto, esses dois casos são extremos, porque a maioria das conexões usadas no campo prático transmitem algum momento parcial. Resultados experimentais obtidos para conexões de viga – pilar mostram que a relação entre a rotação e o momento é não linear e varia dependendo da flexibilidade das mesmas. Nesse contexto, um modelo constitutivo unidimensional de ligação fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo é proposto, o qual leva em conta a redução progressiva da rigidez rotacional. Um código computacional é desenvolvido para a análise estática de pórticos planos com comportamento não linear geométrico e com ligação semirrígida. A variável dano é calculada em função de três parâmetros – rigidez rotacional inicial, deformação rotacional e módulo de dano -, sendo esses obtidos da curva momento – rotação da ligação. Com o objetivo de verificar a formulação proposta, esse modelo é aplicado em dois problemas numéricos - uma viga em balanço e um pórtico com dois andares. As estruturas são discretizadas com a formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos, considerando a teoria de *Euler-Bernoulli* para a flexão de viga. A ligação é simulada por um elemento finito de comprimento nulo, cuja matriz de rigidez elementar considera as rigidezes axial, translacional e rotacional. O sistema de equações não lineares, que descreve o problema estrutural, é solucionado por um procedimento incremental-iterativo de dois passos com convergência cúbica. Os resultados numéricos com o programa *Scilab* mostram a boa concordância entre as trajetórias de equilíbrio obtidas com o modelo proposto e aquelas encontradas na literatura.

Palavras-chave: Formulação Corrotacional; Não linearidade geométrica; Potra-Pták; Comprimento de Arco; Algoritmo.

ABSTRACT

Beam-to-column connections in steel structures are traditionally designed with the assumption of ideally flexible or fully rigid behavior, which simplifies the analysis and structural design processes. However, these two cases are extreme, as most connections used in practical field transmit some partial moment. Experimental results obtained for beam-column connections show that the moment-rotation relation is non-linear and varies depending on connection flexibility. In this context, a connection one-dimensional constitutive model based on Continuous Damage Mechanics is proposed, which takes into account the progressive reduction of rotational stiffness. A computational code is developed for the static analysis of plane frames with geometric nonlinear behavior and semi-rigid connection. The damage variable is calculated as a function of three parameters – initial rotational stiffness, rotational deformation and damage modulus -, being these obtained from the moment – rotation curve of the connection. In order to verify the proposed formulation, this model is applied to two numerical problems – a cantilever beam and

a two-story frame. The structures are discretized with the Co-rotational formulation of the Finite Element Method, considering the *Euler-Bernoulli* theory for beam bending. The connection is simulated by a null-length finite element, whose elementary stiffness matrix considers the axial, translational and rotational stiffnesses. The system of nonlinear equations, which describes the structural problem, is solved by a two-step iterative-incremental procedure with cubic convergence. The numerical results with the *Scilab* program show the good agreement of the equilibrium paths of the structures obtained with the proposed model and those found in the literature.

Keywords: Co-rotational formulation; Geometric nonlinearity; Potra-Pták; Arc-Length; Algorithm.

1. INTRODUÇÃO

No projeto estrutural e na construção de estruturas reticuladas de aço envolvendo um ou mais andares, as ligações entre a viga e o pilar desempenham um papel significativo em sua resposta estrutural. Além disso, elas representam importante parcela do custo total da estrutura e, portanto, o engenheiro projetista deve ter um bom entendimento do comportamento das mesmas [1]. Em projetos estruturais convencionais, é recorrente que essas ligações sejam simplificadas para serem conexões perfeitamente rígidas ou idealmente flexíveis, enquanto que as conexões reais são semirrígidas e com comportamento entre esses dois casos extremos [2]. Com relação à conexão perfeitamente rígida, o ângulo da junta ligando os membros permanece inalterado, o que resulta na suposição de que a rigidez relativa da ligação entre tais membros é muito grande. Por outro lado, a conexão idealmente flexível resulta na condição de que nenhum momento é transmitido da viga para o pilar, porque é assumida que a rigidez da junta é muito pequena quando comparada com as rigidezes desses elementos estruturais [3].

Atualmente, a conexão semirrígida e sua influência na análise de estruturas metálicas são comumente conhecidas. A semirrígidez surge de mudanças do ângulo (θ) entre a viga e o pilar devido ao momento transferido (M). Em alguns casos, as forças axiais e de cisalhamento podem participar da análise, mas esses efeitos são muitas vezes negligenciados devido à falta de dados ou à simplicidade dos modelos adotados. O comportamento da conexão pode ser descrito pelo gráfico momento-rotação, também chamado de curva $M - \theta$ [4]. Na Figura 1 são apresentadas curvas $M - \theta$ de alguns tipos de ligação viga – pilar de estruturas metálicas. Ao comparar as conexões rígidas e semirrígidas, esta última produz uma redução da rigidez total das estruturas de aço e aumentam o deslocamento lateral, causando um efeito de segunda ordem [5]. Assim, a rigidez de uma conexão semirrígida tem um efeito significativo na resistência e na resposta de deslocamento dessas estruturas.

Várias pesquisas têm sido conduzidas com relação a ligações semirrígidas de viga-pilar por meio de modelos numéricos e de investigações experimentais. IHADDOUDÈNE *et al.* [7] apresentaram um modelo mecânico

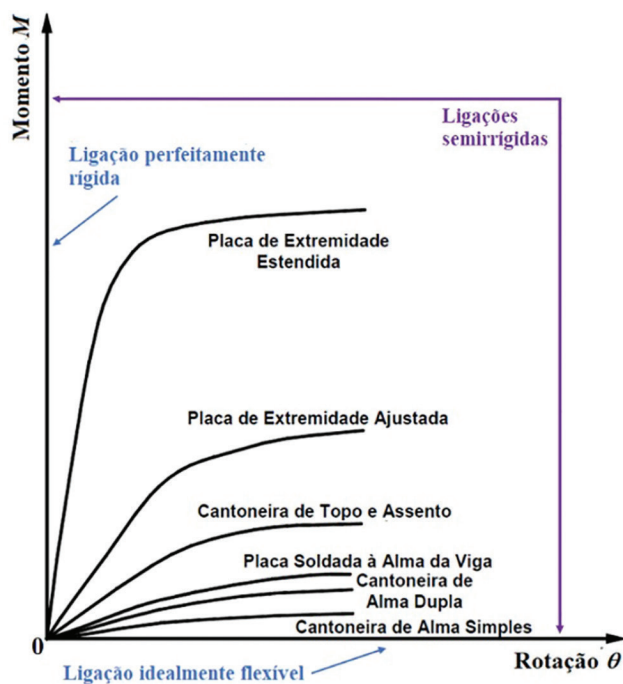


Figura 1: Curvas momento – rotação típicas de algumas ligações. Fonte: adaptada de CHAN e CHUI [6].

baseado na analogia de três molas, o qual leva em consideração a influência das conexões no comportamento de pórticos de aço. LEE e HAN [8] fizeram análises de pórticos espaciais elastoplásticos considerando pequenas e grandes deformações, elementos com seção transversal simétrica e conexões semirrígidas. NGUYEN e KIM [9] propuseram um procedimento numérico baseado no método de viga-coluna, e realizaram análises não lineares elásticas e inelásticas de pórticos de aço semirrígidos tridimensionais. BANDYOPADHYAY *et al.* [10], por sua vez, investigaram o efeito da não linearidade geométrica e material na análise de estruturas de aço com conexões semirrígidas. NGUYEN e KIM [11] apresentaram um procedimento de Elementos Finitos baseado em deslocamentos, para análise de plasticidade distribuída em pórticos planos de aço com conexões viga-coluna semirrígidas, submetidas a cargas estáticas e considerando o efeito de segunda ordem. YE e XU [12] fizeram uma abordagem numérica simples com base no Método dos Elementos Discretos para investigar as respostas estáticas e dinâmicas de estruturas de aço com ligações semirrígidas. HADADE *et al.* [13] apresentaram resultados de investigações experimentais acerca do comportamento semirrígido de ligações típicas viga – pilar em estruturas pré-moldadas de concreto armado. VAN HAI *et al.* [14] propuseram um elemento finito corrotacional de *Euler-Bernoulli* para análise estática de grandes deslocamentos de pórticos planos semirrígidos de aço. Molas rotacionais de comprimento nulo são adicionadas nas extremidades desse elemento. SOUZA *et al.* [15] apresentaram um modelo numérico-computacional para pórticos com comportamento geométrico não linear, por meio do Método Corrotacional de Elementos Finitos, considerando as teorias de viga de *Euler-Bernoulli* e de *Timoshenko* e as ligações viga-pilar semirrígidas. Para caracterizar o desenvolvimento de dano e o estado de falha de conexões semirrígidas em estruturas de concreto pré-moldado, DU *et al.* [16] desenvolveram um modelo experimental de fadiga de baixo ciclo.

Recentemente, considerável atenção tem sido dedicada ao problema de se obter a resposta de pórticos com ligações semirrígidas na presença da não linearidade geométrica. Nesse contexto, um modelo constitutivo unidimensional não linear de ligação é proposto neste artigo, cuja formulação matemática é fundamentada na teoria da Mecânica do Dano Contínuo. Essa teoria é utilizada para a análise dos efeitos de deterioração do material em sólidos submetidos à ação de natureza mecânica ou térmica, estudando o efeito de microfissuras na resposta dos mesmos [17]. Os modelos de dano, essencialmente, admitem que a perda progressiva de rigidez e de resistência do material é devida exclusivamente ao processo de microfissuração [18]. O dano não é uma grandeza diretamente mensurável, mas é possível relacioná-lo, para fins de modelagem matemática, com a redução progressiva de características mecânicas globais [19]. Na formulação do modelo proposto, a redução progressiva da rigidez rotacional é associada com um fator de redução escrito em função da variável dano, a qual depende de três parâmetros, a saber: rigidez rotacional inicial, deformação rotacional e módulo de dano. Dependendo do valor do último parâmetro, a ligação pode ter comportamento elastodegradável perfeito, endurecimento ou abrandamento (linear ou exponencial). O cálculo do dano está baseado na formulação apresentada por MANZOLI [20]. Na malha de elementos finitos, a ligação é simulada com um elemento de comprimento nulo proposto por DEL SAVIO *et al.* [21], o qual considera as rigidezes axial, translacional e rotacional representadas por molas.

Com o objetivo de verificar o comportamento do modelo proposto por meio de comparação, o mesmo é aplicado em dois problemas numéricos, sendo uma viga em balanço e um pórtico com dois andares. A partir dos resultados numéricos, pode-se verificar boa concordância entre as trajetórias de equilíbrio obtidas aqui e aquelas encontradas por outros autores. O modelo simula a resposta não linear das conexões semirrígidas a partir da curva momento – rotação ($M - \theta$). As estruturas são discretizadas com a formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos (MEF) [22, 23], considerando a teoria de *Euler-Bernoulli* para a flexão de viga. Na abordagem Corrotacional, a deformação do elemento de viga – pilar no sistema cartesiano global de coordenadas é dividida em duas partes: uma correspondente ao movimento de corpo rígido incluindo translações e rotações; e a outra, à deformação em relação ao sistema local produzindo energia de deformação [24]. As expressões do vetor de força interna e da matriz de rigidez tangente do elemento são fornecidas. O sistema de equações não lineares é resolvido por meio do procedimento incremental e iterativo baseado no método de dois passos de POTRA e PTÁK [25], com convergência cúbica, proposto por SOUZA *et al.* [26]. As trajetórias de equilíbrio das estruturas estudadas são obtidas com a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. O código computacional para as análises estáticas estruturais é desenvolvido com o programa livre *Scilab*, versão 6.1.1 [27].

2. METODOLOGIA

Nesta seção são apresentados: o elemento finito de viga – pilar 2D no contexto da formulação Corrotacional do MEF, considerando a teoria de viga de *Euler-Bernoulli* para a flexão; o elemento finito de ligação de comprimento nulo; o modelo de ligação semirrígida proposto e fundamentado na Mecânica do Dano; e, por fim, o procedimento incremental-iterativo para a solução do sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural.

2.1. Elemento finito corrotacional de viga-pilar 2D

A formulação Corrotacional do MEF para o elemento de viga-pilar 2D, com dois nós e três graus de liberdade por nó, é descrita a seguir. Considere o elemento de viga-pilar em suas configurações inicial e atual, conforme o desenho esquemático na Figura 2. Assume-se que não há deformação de cisalhamento no elemento e , então, a seção transversal permanece plana e normal ao eixo da mesma. Na configuração inicial, as coordenadas dos nós 1 e 2 do elemento no sistema cartesiano global são (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , respectivamente, e seu comprimento inicial (indeformado) L_0 é determinado pela seguinte equação:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \tag{1}$$

Para o elemento na sua configuração atual, as coordenadas nodais globais são $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$ para o nó 1 e $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$ para o nó 2, em que u_i é o deslocamento do nó i na direção X e v_i é o deslocamento do nó i na direção Y , com $i = 1, 2$. O comprimento atual L é:

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2}. \tag{2}$$

O deslocamento axial local (u_l) do elemento é calculado por:

$$u_l = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0}. \tag{3}$$

A deformação específica ε é assumida constante e é determinada por $\varepsilon = u_l/L_0$. A força axial (N) no elemento é então dada por:

$$N = \frac{EAu_l}{L_0} \tag{4}$$

na qual A é a área da seção transversal e E é o módulo de elasticidade longitudinal. Usando a análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga – pilar \bar{M}_1 e \bar{M}_2 são relacionados com as rotações nodais locais (θ_{1l} e θ_{2l}) e são avaliados segundo as expressões, respectivamente:

$$\bar{M}_1 = \frac{2EI}{L_0} (2\theta_{1l} + \theta_{2l}), \tag{5}$$

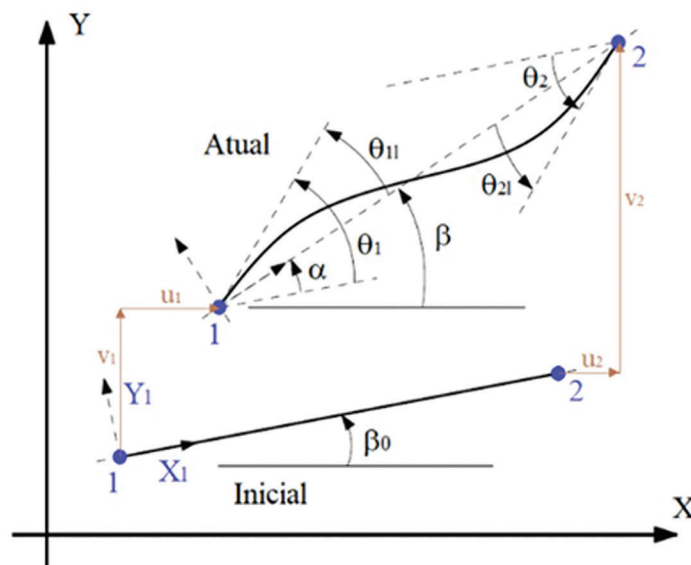


Figura 2: Configurações inicial e atual do elemento de viga-pilar. Fonte: adaptada de YAW [23].

$$\bar{M}_2 = \frac{2EI}{L_0}(\theta_{1l} + 2\theta_{2l}), \quad (6)$$

em que I é o momento de inércia da seção transversal. As rotações θ_{1l} e θ_{2l} são computadas, respectivamente, por:

$$\theta_{1l} = \arctan\left(\frac{\cos\beta\sin\beta_1 - \sin\beta\cos\beta_1}{\cos\beta\cos\beta_1 + \sin\beta\sin\beta_1}\right), \quad (7)$$

$$\theta_{2l} = \arctan\left(\frac{\cos\beta\sin\beta_2 - \sin\beta\cos\beta_2}{\cos\beta\cos\beta_2 + \sin\beta\sin\beta_2}\right), \quad (8)$$

sendo $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$ e $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$. Os ângulos θ_1 e θ_2 são as rotações nodais globais calculadas do sistema de equações globais e as expressões para os ângulos inicial β_0 e corrente da barra β são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \quad (9)$$

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right). \quad (10)$$

A matriz de rigidez tangente elementar \mathbf{K}_{el} é determinada por:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{p} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{p}^T). \quad (11)$$

Na Equação (11), \mathbf{D} é a matriz constitutiva dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4k_z^2 & 2k_z^2 \\ 0 & 2k_z^2 & 4k_z^2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

em que $k_z = \sqrt{I/A}$ é o raio de giração e os vetores \mathbf{z} e \mathbf{p} são, respectivamente:

$$\mathbf{z} = [\sin(\beta) \quad -\cos(\beta) \quad 0 \quad -\sin(\beta) \quad \cos(\beta) \quad 0]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{p} = [-\cos(\beta) \quad -\sin(\beta) \quad 0 \quad -\cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad 0]^T, \quad (14)$$

A matriz \mathbf{B} é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta)/L & \cos(\beta)/L & 1 & \sin(\beta)/L & -\cos(\beta)/L & 0 \\ -\sin(\beta)/L & \cos(\beta)/L & 0 & \sin(\beta)/L & -\cos(\beta)/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

As expressões seguintes são utilizadas para calcular os valores do seno e cosseno do ângulo β , respectivamente:

$$\cos(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L}, \quad (16)$$

$$\sin(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L} \tag{17}$$

O vetor elementar de forças internas (F_{el}) é determinado por:

$$F_{el} = B^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T \tag{18}$$

2.2. Elemento finito de ligação semirrígida

A ligação semirrígida é simulada pelo elemento de ligação proposto por DEL SAVIO *et al.* [21] com comprimento nulo. A sua matriz de rigidez K_{lig} pode ser expressa matematicamente por:

$$K_{lig} = \begin{bmatrix} S & -S \\ -S & S \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_A & 0 & 0 \\ 0 & S_T & 0 \\ 0 & 0 & S_R \end{bmatrix}. \tag{20}$$

em que S_A , S_T e S_R são as rigidezes axial, translacional e rotacional, respectivamente. Na Figura 3 é apresentado o elemento de ligação idealizado com a representação das molas, das coordenadas nodais (X_i, Y_i , com $i = 1, 2$) e do comprimento inicial Lm_0 . Esse elemento é inserido nos pontos de interseção entre membros estruturais na malha de Elementos Finitos (viga-pilar e/ou apoio-viga e/ou apoio-pilar), onde se encontram as ligações semirrígidas. Como o elemento tem comprimento zero por hipótese, considera-se um valor suficientemente pequeno para o seu comprimento inicial.

Esse elemento comporta-se adequadamente para qualquer tipo de carregamento e, além disso, permite simular análises elastoplásticas das ligações, dada a curva momento – rotação ($M - \theta$) que descreve o comportamento da ligação. Segundo CHEN *et al.* [28], os esforços axial, de cisalhamento, de flexão e de torção são transmitidos à conexão. Para os exemplos numéricos estudados neste trabalho, contudo, os efeitos das rigidezes axial e translacional são negligenciados e valores numéricos grandes são adotados para essas rigidezes, ou seja, $S_A \cong \infty$ e $S_T \cong \infty$, respectivamente. Considera-se somente o efeito provocado pelo momento fletor, variando-se a rigidez rotacional S_R . No caso de a ligação ser idealmente flexível supõe-se $S_R = 0$ e para ligação totalmente rígida, $S_R \cong \infty$. Nas análises não lineares geométricas, quando se adota o modelo linear de ligação semirrígida, a

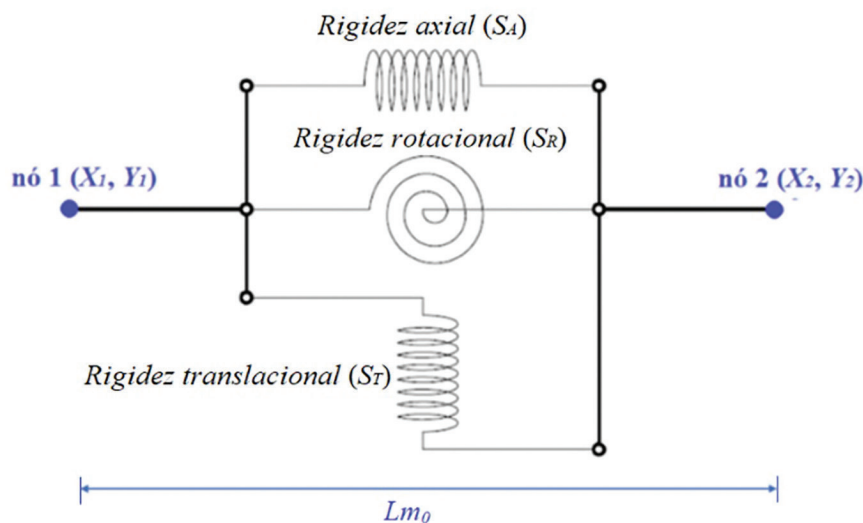


Figura 3: Modelo idealizado de ligação. Fonte: adaptada de DEL SAVIO *et al.* [21].

matriz de rigidez K_{lig} dada pelas Equações (19) e (20) é mantida constante no processo iterativo-incremental (S_A , S_T e S_R permanecem constantes). Diferentemente, para o modelo não linear de ligação (descrito na Seção 2.3), a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração (S_A e S_T permanecem constantes e S_R variável).

2.3. Modelo constitutivo de ligação semirrígida fundamentado na Mecânica do Dano

Com base na teoria do Modelo de Dano Contínuo de LEMAITRE e CHABOCHE [29], propõe-se um modelo constitutivo para descrever o comportamento não linear da ligação semirrígida. A função momento – rotação pode ser escrita como sendo:

$$\bar{M} = S_{R0}\theta, \quad (21)$$

na qual S_{R0} é a rigidez rotacional inicial e θ é a deformação rotacional da conexão. Pode-se definir o limite de dano inicial r_0 pela seguinte equação:

$$r_0 = \frac{M_0}{\sqrt{S_{R0}}}, \quad (22)$$

em que M_0 é o momento de proporcionalidade. A variável τ é calculada na dependência do momento e da rigidez S_{R0} por:

$$\tau(\bar{M}) = \sqrt{\frac{\bar{M}^2}{S_{R0}}} = \theta\sqrt{S_{R0}}. \quad (23)$$

A função de dano $f(\bar{M})$, no espaço dos momentos efetivos, é expressa pela inequação:

$$f(\bar{M}) = \tau(\bar{M}) - r_0 \leq 0. \quad (24)$$

As relações de Kuhn-Tucker estabelecem as condições de carga e descarga na ligação, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{d} &\geq 0, \\ f(\bar{M}) &\leq 0, \\ \dot{f}(\bar{M}) &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

na qual \dot{d} é a taxa de variação da variável de dano d . Sendo assim, caso $f(\bar{M}) \leq 0$ tem-se que $\dot{d} = 0$ e, portanto, não ocorre evolução do dano. O limite de dano r é avaliado pelo máximo valor da variável t durante o processo de carregamento:

$$r = \text{máx}(r_0, \tau). \quad (26)$$

Para um módulo de dano H constante, tem-se a lei linear de dano em função desse parâmetro e do limite de dano (r) [20]:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)}. \quad (27)$$

Modificando o valor que descreve o módulo H na Equação (27), obtém-se as relações entre o momento e a rotação conforme a Figura 4: para $H = 0$, tem-se o regime perfeitamente plástico; para $H > 0$, encruamento linear positivo (endurecimento); para $H < 0$, encruamento linear negativo (abrandamento); e para $H =$ função exponencial, abrandamento exponencial.

A relação entre a rigidez rotacional danificada (S_R) e a rigidez rotacional íntegra (S_{R0}) é dada por:

$$S_R = (1 - d)S_{R0}. \quad (28)$$

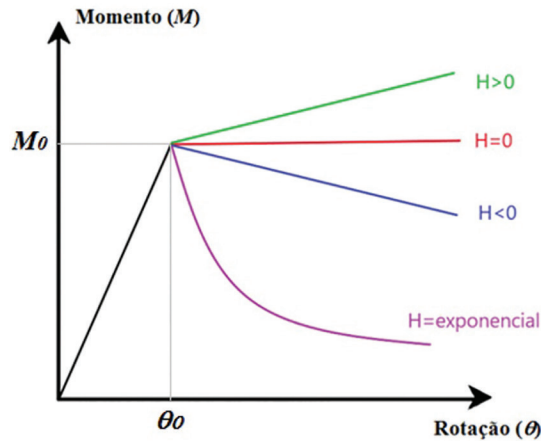


Figura 4: Gráfico rotação versus momento em função de H .

<p>Entrada: $d^{(k)}, H, r^{(k)}, r_0, S_{R0}, S_R^{(k)}, \theta^{(k)}$ Saída: $r^{(k+1)}, d^{(k+1)}, S_R^{(k+1)}$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\tau(\bar{M}) \leftarrow \sqrt{S_{R0}} \theta^{(k)}$ 2. $f(\bar{M}) \leftarrow \tau(\bar{M}) - r_0$ 3. Se $f(\bar{M}) \leq 0$ então 4. $S_R^{(k+1)} \leftarrow S_R^{(k)}$ 5. senão 6. $r^{(k+1)} \leftarrow \tau(\bar{M})$ 7. $d^{(k+1)} \leftarrow \frac{r^{(k+1)} - r_0}{r^{(k+1)}(1+H)}$ 	<ol style="list-style-type: none"> 8. Se $d^{(k+1)} \leq 0$ então 9. $d^{(k+1)} \leftarrow 0$ 10. Fim-Se 11. Se $d^{(k+1)} \geq 1$ então 12. $d^{(k+1)} \leftarrow 1$ 13. Fim-Se 14. $S_R^{(k+1)} \leftarrow (1 - d^{(k+1)})S_{R0}$ 15. Fim-Se
---	---

Figura 5: Algoritmo (sub-rotina) do modelo não linear de dano para a ligação semirrígida.

sendo o dano $d \in [0, 1]$. A ligação é considerada íntegra para $d = 0$ ou totalmente degradada para $d = 1$. Para o caso de um procedimento incremental e iterativo, o parâmetro t na iteração $(k + 1)$ pode ser obtido a partir da rotação θ da iteração (k) e da rigidez rotacional inicial S_{R0} . Na Figura 5 é apresentado o algoritmo (sub-rotina) do modelo não linear de dano para a ligação semirrígida.

2.4. Problema estrutural e método de solução

O sistema de equações não lineares que descreve o equilíbrio estático de um sistema estrutural com não linearidade geométrica é descrito por [30]:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (29)$$

na qual \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u}) e λ é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento do vetor de forças externas \mathbf{F}_r . O sistema dado em Equação (29) tem $(n + 1)$ incógnitas, que são o vetor \mathbf{u} com n elementos e o parâmetro λ , mas somente n equações. Assim, uma equação de restrição $c(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ é adicionada ao sistema.

A solução aproximada desse sistema é obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo em que, para uma sequência do parâmetro de carga λ , determina-se uma sequência do correspondente incremento de deslocamentos \mathbf{u} . O método iterativo de dois passos de POTRA e PTÁK [25], o qual foi desenvolvido para encontrar uma raiz aproximada de uma função não linear do tipo $f(x) = 0$, foi adaptado num procedimento incremental por SOUZA *et al.* [26], cujas equações iterativas são:

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)}, \quad (30)$$

$$\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_1^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})], \quad (31)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k+1)}, \lambda^{(k)})], \quad (32)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}, \quad (33)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k+1)}, \quad (34)$$

sendo $\delta \mathbf{u}_i$, com $i = 1, 2$, o subincremento do vetor de deslocamentos. O superíndice $(k + 1)$ nessas equações indica a iteração corrente e (k) indica a iteração anterior, no passo de carga atual. Apesar da indicação nas Equações (31) e (32) da inversa da matriz de rigidez $[\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1}$, o custo computacional para calcular a mesma é caro e, portanto, costuma ser ineficiente. Sendo assim, esses sistemas de equações lineares são solucionados via decomposição LU, visto que uma única fatoração de \mathbf{K} (em matrizes triangulares inferior e superior) no início do ciclo iterativo é necessária.

Os subincrementos de carga $\delta \lambda_i^{(k+1)}$, com $i = 1, 2$, são determinados de acordo com o método de controle de Comprimento de Arco Linear. Considerando a restrição de hiperplano atualizado [31, 32], a equação de restrição c pode ser escrita por:

$$c = \Delta \mathbf{u}^{(k)T} \delta \mathbf{u}_i^{(k+1)} = 0. \quad (35)$$

Substituindo as Equações (31) e (32) na Equação (35), chega-se nas seguintes expressões (para iteração $k > 0$):

$$\delta \lambda_i^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \delta \mathbf{u}_g^{(k+1)}}{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \delta \mathbf{u}_r^{(k+1)}}, \quad (36)$$

na qual,

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{a}, \lambda^{(k)}), \quad \text{com } \mathbf{a} = \mathbf{u}^{(k)} \text{ ou } \mathbf{y}^{(k+1)}, \quad (37)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (38)$$

O vetor $\delta \mathbf{u}_g^{(k+1)}$ é a parcela de $\delta \mathbf{u}$ referente às forças desequilibradoras \mathbf{g} e o vetor $\delta \mathbf{u}_r^{(k+1)}$ é a parcela de $\delta \mathbf{u}$ referente ao vetor referência de forças externas \mathbf{F}_r . Os parâmetros incrementais de carga ($\Delta \lambda$) e do vetor de deslocamentos nodais ($\Delta \mathbf{u}$) no passo de carga $(t + \Delta t)$ e iteração $(k + 1)$ são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta \lambda^{(k+1)} = \Delta \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k+1)}, \quad (39)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}^{(k+1)}. \quad (40)$$

A expressão para o incremento inicial do parâmetro de carga (solução predita) é dada por ($k = 0$):

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}_r\|}, \quad (41)$$

em que Δl representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de carga corrente de acordo com a expressão:

$$\Delta l = {}^0 \Delta l \left(\frac{k_d}{k} \right)^{0,5}, \quad (42)$$

<p>Entrada: ${}^0\Delta l$, k_d, $NP_{m\acute{a}x}$, tol_1, tol_2, $k_{m\acute{a}x}$, ΔP Saída: NP, k_{total}, λ, u, t, $k_{m\acute{e}d}io$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $u \leftarrow 0$, $\Delta u \leftarrow 0$, $\lambda \leftarrow 0$, $k_{total} \leftarrow 0$, $\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l$ 2. tic() (inicia o cronômetro) 3. $aux_1 \leftarrow tol_1 \cdot \ F_r(\Delta P)\$ 4. Para $NP \leftarrow 1, \dots, NP_{m\acute{a}x}$ faça 5. $k \leftarrow 0$ 6. Calcular a matriz de rigidez K 7. Decompor a matriz K em matrizes Triangulares L e U (Fatoração LU) 8. $aux_2 \leftarrow [L]^{-1}F_r(\Delta P)$ 9. $\delta u_r \leftarrow [U]^{-1}aux_2$ 10. $\Delta\lambda^{(0)} \leftarrow \Delta l / \ \delta u_r\$ 11. Se $\Delta u^T \delta u_r < 0$ então 12. $\Delta\lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta\lambda^{(0)}$ 13. Fim-Se 14. $\delta u \leftarrow \Delta\lambda^{(0)} \delta u_r$ 15. $\Delta u^{(0)} \leftarrow \delta u$ 18. Para $k \leftarrow 1, \dots, k_{m\acute{a}x}$ faça 19. $k = k + 1$ 20. Calcular a matriz de rigidez $K(u + \Delta u)$ 21. Decompor a matriz K em matrizes triangulares L e U (Fatoração LU) 22. $g \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) F_r(\Delta P) - F_{int}(u + \Delta u)$ //passo 1 23. $aux_2 \leftarrow [L]^{-1}g$ 	<ol style="list-style-type: none"> 24. $\delta u_g \leftarrow [U]^{-1}aux_2$ 25. $aux_2 \leftarrow [L]^{-1}F_r(\Delta P)$ 26. $\delta u_r \leftarrow [U]^{-1}aux_2$ 27. $\delta\lambda_1 \leftarrow -(\Delta u^T \delta u_g) / (\Delta u^T \delta u_r)$ 28. $\delta u_1 \leftarrow \delta u_g + \delta\lambda_1 \delta u_r$ 29. $y \leftarrow u + \Delta u + \delta u_1$ //passo 2 30. $g \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) F_r(\Delta P) - F_{int}(y)$ 31. $aux_2 \leftarrow [L]^{-1}g$ 32. $\delta u_g \leftarrow [U]^{-1}aux_2$ 33. $\delta\lambda_2 \leftarrow -(\Delta u^T \delta u_g) / (\Delta u^T \delta u_r)$ 34. $\delta u_2 \leftarrow \delta u_g + \delta\lambda_2 \delta u_r$ 35. $\Delta u \leftarrow \Delta u + \delta u_1 + \delta u_2$ 36. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda_2$ 37. $g \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) F_r(\Delta P) - F_{int}(u + \Delta u)$ 38. Se $\ g\ < aux_1$ ou $\ \delta u_2\ < tol_2 \cdot \ u + \Delta u\$ então 39. Sair do loop 40. Fim-Se 41. Fim-Para 42. $u \leftarrow u + \Delta u$ 43. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$ 44. $\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l (k_d/k)^{0.5}$ 45. $k_{total} \leftarrow k_{total} + k$ 46. Fim-Para 47. $k_{m\acute{e}d}io \leftarrow k_{total} / NP$ 48. $t \leftarrow toc()$ (lê o cronômetro)
--	---

Figura 6: Algoritmo para o método de solução.

na qual ${}^0\Delta l$ representa o incremento de comprimento de arco no passo de carga inicial, k_d é o número desejável de iterações para a convergência do processo iterativo corrente e k é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de carga anterior. São considerados dois critérios de convergência para o ciclo iterativo, sendo um baseado nos deslocamentos e dado por:

$$\|\delta u_2\| \leq tol_1 \|u\|, \quad (43)$$

e o outro, nas forças:

$$\|g\| \leq tol_2 \|F_r\|, \quad (44)$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e tol_1 e tol_2 são as tolerâncias fornecidas pelo usuário. O algoritmo com o procedimento incremental-iterativo associado ao controle de Comprimento de Arco Linear é mostrado na Figura 6.

Os dados de entrada no algoritmo são: comprimento inicial de arco ${}^0\Delta l$; número máximo de iterações em cada passo de carga $k_{m\acute{a}x}$; número desejável de iterações em cada passo de carga k_d ; tolerâncias tol_1 e tol_2 ; incremento de carga ΔP ; e número máximo de passos de carga ($NP_{m\acute{a}x}$). As saídas do algoritmo são: vetor de deslocamentos nodais (u); parâmetro de carga total λ ; número total de passos de carga (NP); número total de iterações acumuladas até a convergência para a solução (k_{total}); e número médio de iterações por passo de carga ($k_{m\acute{e}d}io$).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos encontrados na literatura, sendo uma viga em balanço e um pórtico com dois andares, cujo o objetivo é verificar o modelo de dano proposto para simular a ligação semirrígida. O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. As simulações foram efetuadas com o programa livre *Scilab*, versão 6.1.1 [27], em um *notebook* com processador Intel(R) Core (TM) i7 – 10510U, CPU @ 1.80GHz 2.30 GHz e com 8 GB de memória RAM.

3.1. Viga em balanço sujeita a uma força concentrada na extremidade livre

Seja a viga em balanço submetida a uma força concentrada P na extremidade livre ilustrada na Figura 7a. A malha de elementos finitos consiste de quatro elementos de viga-pilar e um elemento de ligação, sendo este

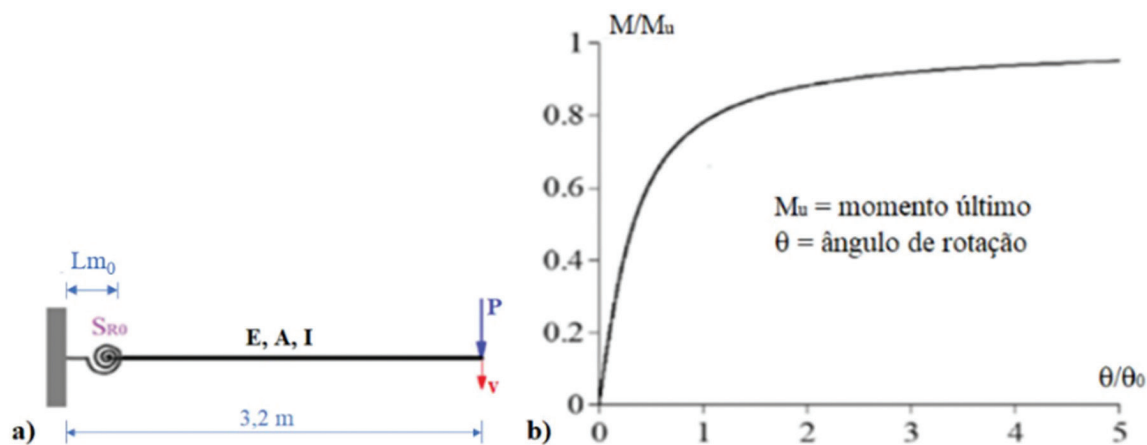


Figura 7: a) Modelo estrutural da viga em balanço e b) curva momento *versus* rotação [14].

Tabela 1: Propriedades da viga e parâmetros do modelo de dano da ligação.

VIGA	LIGAÇÃO
$E = 210 \text{ GPa}$ $A = 0,01 \text{ m}^2$ $I = 8,3333 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	$M_0 = 3,2 \times 10^5 \text{ N m}$ $H = 0,45$ $S_A = S_T = 1,0 \times 10^{15} \text{ kN m/rad}$

elemento inserido para simular o comportamento semirrígido do apoio e com comprimento inicial $Lm_0 = 0,01 \text{ m}$. O regime elastodegradável com endurecimento ($H > 0$) é considerado para o comportamento da ligação. As propriedades geométricas e material da viga, bem como os parâmetros do modelo de dano da ligação, são apresentadas na Tabela 1. Essa viga foi estudada por ARISTIZÁBAL-OCHOA [33] e VAN HAI *et al.* [14]. A curva momento *versus* rotação utilizada por esses autores aparece na Figura 7b. Três tipos de análise são considerados:

1. Linear (hipótese de deformações infinitesimais): apoio semirrígido ($S_{RO} = EI/3,2$);
2. Não linear geométrica (NGL): apoio rígido ($S_{RO} = 1,0 \times 10^{15} \text{ kN m/rad}$) e modelo de ligação linear; e
3. Não linear geométrica (NGL): apoio semirrígido ($S_{RO} = EI/3,2$) e modelo não linear de dano.

Nas simulações são utilizados os seguintes parâmetros para o procedimento de solução com o método de Potra-Pták: $^0\Delta l = 0,1$; $kd = 5$; $k_{m\acute{a}x} = 150$; $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-6}$; e $\Delta P = 1,0 \text{ N}$. Na Figura 8 são apresentadas as curvas obtidas com o programa desenvolvido, comparando-as com pontos de equilíbrio obtidos por VAN HAI *et al.* [14], havendo razoável concordância. Na Figura 9a é mostrada a curva dano (d) *versus* rotação θ e na Figura 9b, a curva rotação θ *versus* rigidez rotacional (S_R). Se o valor da função de dano $f(\bar{M})$ for maior que zero (Equação (24)), há variação da variável de dano r , a qual assume o valor do parâmetro τ calculado conforme a Equação (23). Como τ depende da rotação θ , o dano obtido pela Equação (27) passa a variar com o valor da rotação, como pode ser observado na Figura 9a.

Vê-se, no seguimento “a-b” na curva da Figura 9b, que a rigidez rotacional S_R é igual à rigidez rotacional inicial S_{RO} , uma vez que não há evolução do dano ($\dot{d} = 0$). Nesse caso, a conexão está íntegra ($d = 0$). A partir do ponto “b”, a ligação entra no regime elastodegradável ($\dot{d} \neq 0$ e $d > 0$) e a rigidez rotacional S_R , devido ao fator de redução $(1 - d)$ na Equação (28), assume valores menores do que S_{RO} . No ponto “c” tem-se o fim da análise, com $d = 0,379$, $S_R = 339,355 \text{ kN m/rad}$ e $\theta = -1,301 \text{ rad}$. Na Figura 10 são apresentadas a configuração indeformada ($NP = 0$) e as configurações deformadas ($NP = 5, 20, 40$ e 53) da viga.

Na Tabela 2 aparecem os resultados numéricos obtidos das análises não lineares geométricas, com relação aos seguintes parâmetros: números totais de passos de carga (NP) e iterações acumuladas (k_{total}) até a convergência para a solução aproximada; número médio de iterações por passo de carga ($k_{m\acute{e}dio}$); e tempo de processamento em segundos (t).

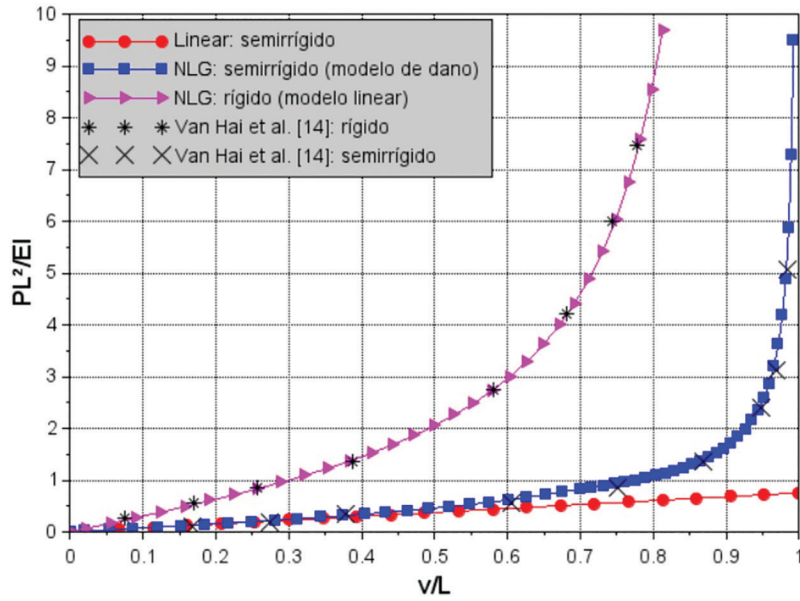


Figura 8: Viga em balanço – trajetórias de equilíbrio.

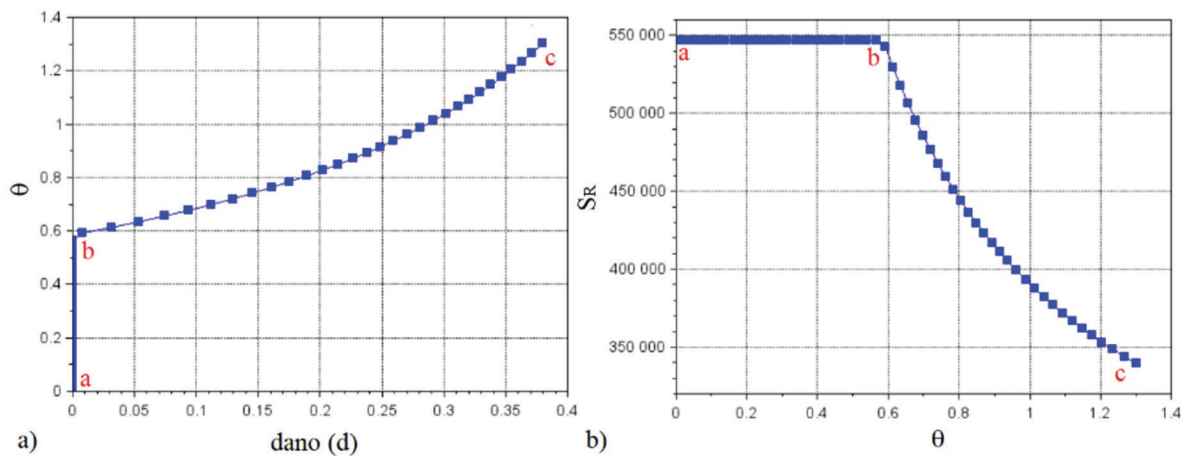


Figura 9: Viga em balanço – a) Curva dano d versus rotação θ ; e b) Curva rotação θ versus rigidez rotacional S_R .

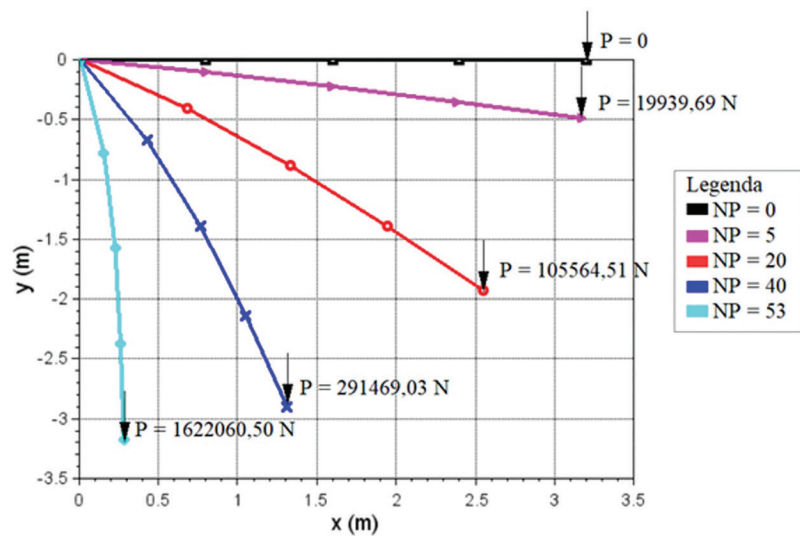


Figura 10: Viga em balanço – configuração indeformada ($NP = 0$) e as configurações deformadas ($NP = 5, 20, 40$ e 53).

Tabela 2: Resultados numéricos da viga em balanço (número total de incógnitas: 19).

ANÁLISE	NP	K_{TOTAL}	$K_{MÉDIO}$	T (S)
NLG e apoio rígido (modelo linear)	31	62	2,0000	0,4200
NLG e apoio semirrígido (modelo de dano)	53	152	2,8679	1,1695

Tabela 3: Propriedades das vigas e dos pilares do pórtico com dois andares.

VIGAS	PILARES
$I_1 = 2,01 \times 10^4 \text{ cm}^4$	$I_2 = 3,48 \times 10^4 \text{ cm}^4$
$A_1 = 91,0 \text{ cm}^2$	$A_2 = 182,0 \text{ cm}^2$
$E = 2,0 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$	$E = 2,0 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$

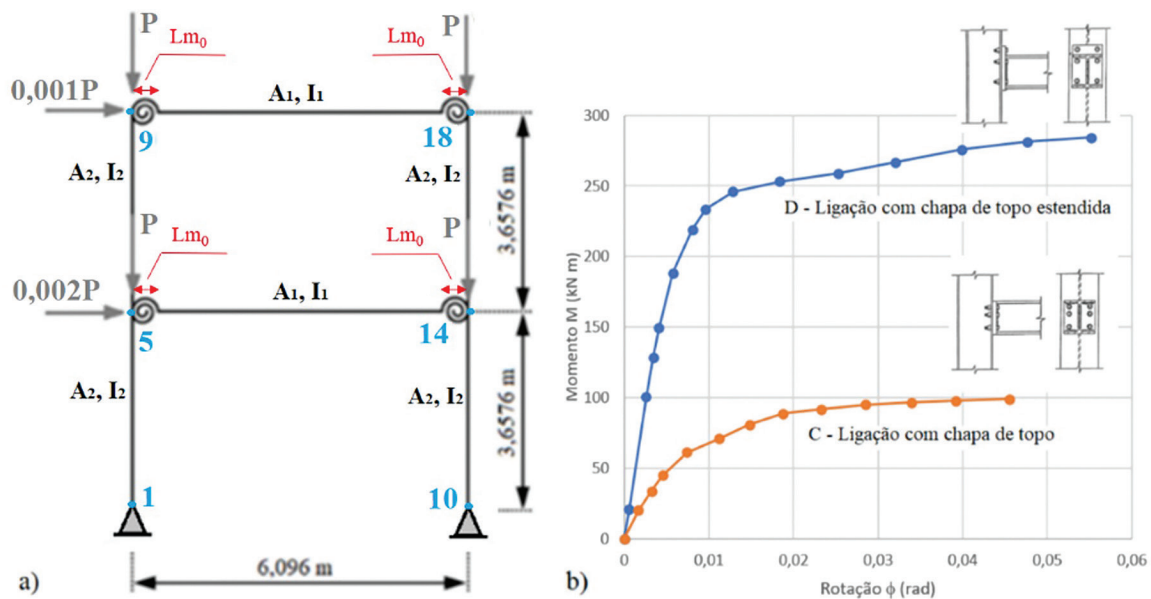


Figura 11: Pórtico com dois andares – a) esquema estrutural; e b) curvas rotação *versus* momento utilizadas por PINHEIRO e SILVEIRA [3].

3.2. Pórtico com dois andares

Considere o problema de um pórtico com dois andares e apoios do tipo pino analisado por PINHEIRO e SILVEIRA [3], LUI e CHEN [34] e REIS e CODA [35], conforme é apresentado na Figura 11a. As propriedades geométricas e material das vigas e dos pilares são mostradas na Tabela 3. As forças concentradas são aplicadas nos nós indicados do pórtico. As curvas rotação *versus* momento, que descrevem o comportamento das ligações semirrígidas, são mostradas na Figura 11b. Na análise não linear geométrica (NLG) são considerados três tipos de ligação viga – pilar: rígida (modelo linear – $S_{RO} = 1,0 \times 10^{12} \text{ kN cm}$); com chapa de topo estendida (modelo não linear, $S_{RO} = 3,8797 \times 10^6 \text{ kN cm/rad}$, $M_0 = 1,0043 \times 10^4 \text{ kN cm}$ e $H = 10$); e com chapa de topo (modelo não linear, $S_{RO} = 1,2148 \times 10^6 \text{ kN cm/rad}$, $M_0 = 2,0217 \times 10^3 \text{ kN cm}$ e $H = 2,5$). Adotam-se os valores das rigidezes axial S_A e translacional S_T iguais a $1,0 \times 10^{12} \text{ kN cm/rad}$. Nas simulações são utilizados os seguintes parâmetros para o método de solução de Potra-Pták: $^0\Delta l = 0,9$; $kd = 5$; $k_{m\acute{a}x} = 150$; $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-7}$; e $\Delta P = 1,0 \text{ kN}$.

Na Figura 12 aparecem as trajetórias de equilíbrio (curva deslocamento horizontal no nó 9 *versus* força P), havendo boa concordância entre as curvas obtidas aqui e os pontos de equilíbrio obtidos por PINHEIRO e SILVEIRA [3]. A malha de EF utilizada consiste de 28 elementos de viga – pilar e quatro elementos de ligação (inseridos na interseção entre os pilares e as vigas). Supõe-se o comprimento inicial dos elementos de ligação $Lm_0 = 0,01 \text{ cm}$. Considerando a análise com a ligação semirrígida do tipo D, nas ligações localizadas nos nós 5, 9 e 14 da malha de EF ocorre a danificação durante a análise, conforme a evolução do dano em função da rotação nas ligações na Figura 13a; no entanto, a ligação no nó 18 permanece íntegra ao longo de toda a simulação, não

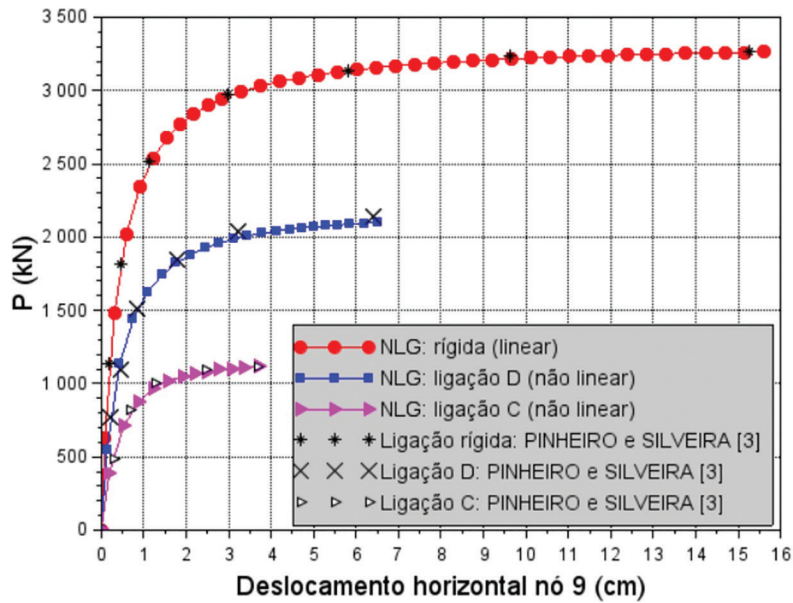


Figura 12: Pórtico com dois andares – trajetórias de equilíbrio.

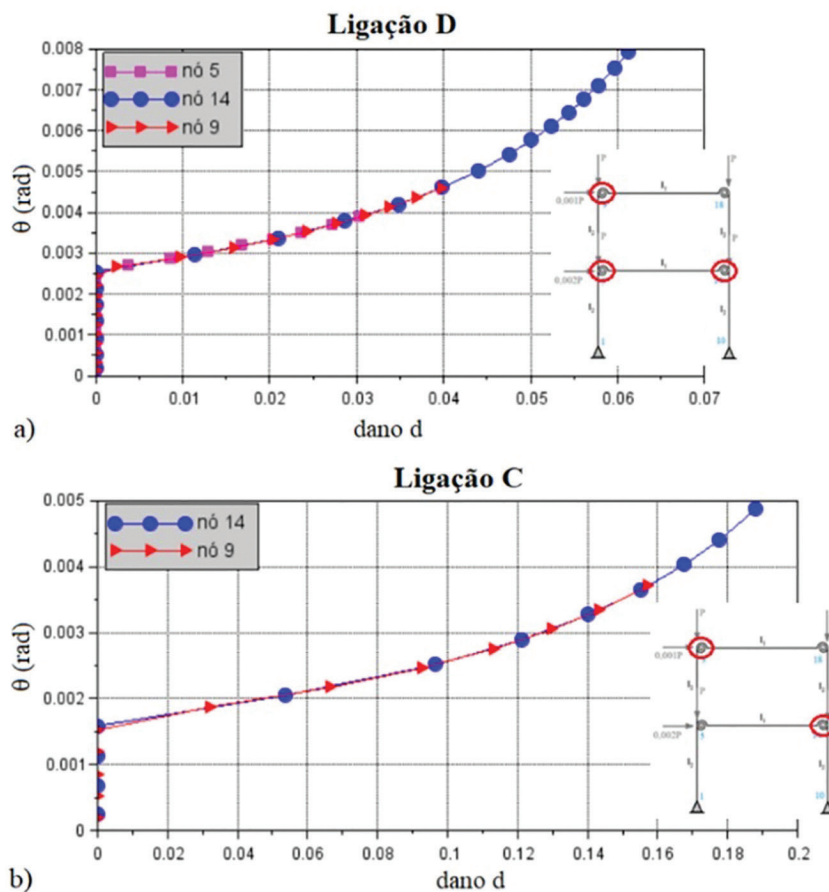


Figura 13: Pórtico com dois andares – a) curvas dano versus rotação para a ligação D; e b) curvas dano versus rotação para a ligação C.

ocorrendo a perda de rigidez. No caso da análise com a ligação semirrígida do tipo C, somente as ligações nos nós 9 e 14 danificam (Figura 13b).

Os resultados numéricos (NP , k_{total} , $k_{médio}$ e t) obtidos das análises não lineares geométricas com os modelos de ligação linear e de dano são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4: Resultados numéricos referentes ao pórtico com dois andares (número total de incógnitas: 97).

ANÁLISE	NP	K_{TOTAL}	$K_{MÉDIO}$	T (S)
NLG e ligação rígida (modelo linear)	38	47	1,2368	2,2711
NLG e ligação semirrígida do tipo C (modelo de dano)	12	29	2,4166	1,1417
NLG e ligação semirrígida do tipo D (modelo de dano)	21	47	2,2380	1,8521

3.3. Discussão dos resultados obtidos

Pode-se observar a influência do tipo de ligação (totalmente rígida ou semirrígida) nas trajetórias de equilíbrio da viga em balanço na Figura 8, alterando completamente o comportamento mecânico da mesma. No caso das simulações com a conexão semirrígida, as trajetórias obtidas das análises linear e não linear geométrica ficam próximas ao se considerar os primeiros estágios de carregamento. Contudo, quando as deformações aumentam na viga, evidencia-se o efeito de segunda ordem na mesma.

Com relação às curvas deslocamento *versus* força do pórtico na Figura 12, nota-se que à medida que a rigidez S_r das ligações diminui a estrutura torna-se mais flexível (aumentam os deslocamentos na mesma) e, conseqüentemente, a carga de colapso também diminui. Na hipótese de ligação rígida, o ângulo entre os membros estruturais adjacentes permanece inalterado e o momento fletor é totalmente transferido. Já nas ligações semirrígidas, o momento fletor é transmitido parcialmente entre a viga e o pilar e é resultante da rotação relativa. Verifica-se que, com a alteração das rigidezes das ligações do pórtico em decorrência do tipo de conexão (ligação C ou D), os esforços nas barras modificam-se, fazendo com que ligações fiquem mais solicitadas que outras. Isso justifica ligações terem sofrido degradação (diminuição da rigidez rotacional S_r em função do dano d) e outras não, conforme pode ser observado na Figura 13. Sendo assim, na análise global de uma estrutura, o tipo de ligação interfere não apenas nos deslocamentos, bem como na distribuição e na magnitude dos esforços internos de toda a estrutura.

O elemento de ligação aqui utilizado e proposto por DEL SAVIO *et al.* [21] é um elemento independente, inserido nos pontos de interseção entre membros estruturais. Esse elemento possibilita a consideração dos efeitos das forças axiais e cisalhantes na deformação da ligação, além daqueles oriundos do momento fletor. Contudo, os efeitos das rigidezes estão desacoplados nesse elemento. Pode-se modificar a sua matriz de rigidez, dada pelas Equações (19) e (20), levando-se em conta a interação entre as rigidezes.

O comportamento real de uma ligação pode ser incorporado dentro da análise global da estrutura usando a curva momento – rotação ($M - \theta$), o qual é conseguido por meio da determinação das propriedades mecânicas da mesma em termos da rigidez rotacional, do momento resistente e da capacidade rotacional, partindo de suas propriedades geométricas e mecânicas [36]. Dependendo das características da ligação semirrígida, a evolução do dano no modelo proposto pode prever diferentes comportamentos após atingir o valor do momento de proporcionalidade M_0 (elastodegradável perfeito, endurecimento ou abrandamento), conforme as curvas momento – rotação mostradas na Figura 4.

O modelo constitutivo de dano proposto é isotrópico, uma vez que a influência das alterações internas provocadas pelos microdefeitos na ligação é considerada macroscopicamente por meio da variável escalar dano d . Esses microdefeitos contribuem para a resposta não linear da ligação, sendo evidenciada pela redução da rigidez rotacional. Contudo, modelos anisotrópicos podem ser conseguidos por meio do emprego de uma variável tensorial de dano. A essa variável, podem-se associar diferentes processos, como fadiga, dano dúctil ou dano frágil.

A busca por modelos constitutivos que tentem equilibrar a simplicidade com a robustez de resultados é algo desejável. Modelos com número excessivo de parâmetros podem tornar a identificação paramétrica complexa e com a necessidade de ensaios bastante elaborados. A formulação matemática do modelo proposto é simples, visto que a variável dano depende de três parâmetros somente: a rigidez rotacional inicial S_{R0} , o módulo H e o momento de proporcionalidade M_0 . Esses parâmetros são obtidos da curva momento – rotação ($M - \theta$) da ligação. Além disso, o algoritmo do modelo mostrado na Figura 5 é de fácil implementação em códigos de cálculo.

4. CONCLUSÃO

O objetivo desta pesquisa foi propor um modelo constitutivo baseado na teoria da Mecânica do Dano como alternativa para simular o comportamento mecânico de ligações semirrígidas. A formulação e o algoritmo (sub-rotina) desse modelo foram apresentados. Para verificar o comportamento numérico do mesmo, dois problemas estruturais planos com não linearidade geométrica foram estudados. Os resultados numéricos obtidos aqui e

aqueles encontradas na literatura tiveram boa concordância, no que diz respeito às trajetórias de equilíbrio das estruturas.

A metodologia implementada com o programa livre *Scilab* para a análise não linear de estruturas planas reticuladas com ligações semirrígidas pode ser útil na estimativa da carga última e de seu modo de colapso, quando se considera os efeitos de segunda ordem. O elemento de ligação de comprimento nulo pode ser aplicado para os diferentes tipos de ligação. Esse elemento é inserido nos pontos de interseção entre membros estruturais e leva em consideração os efeitos das rigidezes axial, translacional e rotacional.

Como propostas para implementações futuras, sugerem-se: a consideração da não linearidade física dos materiais que constituem as vigas e os pilares da estrutura (modelos constitutivos elastoplásticos); a aplicação do modelo proposto em estruturas cuja trajetória de equilíbrio apresente pontos limites de força e de deslocamento; a adaptação do código implementado para análises dinâmicas; a modificação da matriz de rigidez do elemento de ligação considerando os efeitos das rigidezes de maneira acoplada; e a implementação de modelos constitutivos em que considerem o dano e a plasticidade para simular o comportamento não linear da ligação.

5. AGRADECIMENTOS

Este estudo foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código financeiro 001.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] SILVA, A.R., BATELO, E.A., SILVEIRA, R.A., *et al.*, “On the nonlinear transient analysis of planar steel frames with semi-rigid connections: from fundamentals to algorithms and numerical studies”, *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 15, n. 3, e28, 2018.
- [2] YE, J., XU, L., “Member discrete element method for static and dynamic responses analysis of steel frames with semi-rigid joints”, *Applied Sciences*, v. 7, n. 7, pp. 714, 2017.
- [3] PINHEIRO, L., SILVEIRA, R.A.M., “Computational procedures for nonlinear analysis of frames with semi-rigid connections”, *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 2, n. 4, pp. 339-367, 2005.
- [4] ALVARENGA, A.R., “Plastic-zone advanced analysis–Formulation including semi-rigid connection”, *Engineering Structures*, v. 212, 110435, 2020.
- [5] NGUYEN, P.C., KIM, S.E., “Second-order spread-of-plasticity approach for nonlinear time-history analysis of space semi-rigid steel frames”, *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 105, pp. 1-15, 2015.
- [6] CHAN, S.L., CHUI, P.P.T., *Non-Linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier Science Ltd., 2000.
- [7] IHADDOUDÈNE, A.N.T., SAIDANI, M., CHEMROUK, M., “Mechanical model for the analysis of steel frames with semi rigid joints”, *Journal of constructional Steel research*, v. 65, n. 3, pp. 631-640, 2009.
- [8] LEE, K.S., HAN, S.E., “Semi-rigid elastoplastic post buckling analysis a space frame with finite rotation”, *Advanced Steel Construction*, v. 7, n. 3, pp. 274-301, 2011.
- [9] NGUYEN, P.C., KIM, S.E., “Nonlinear elastic dynamic analysis of space steel frames with semi-rigid connections”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 84, pp. 72-81, 2013.
- [10] BANDYOPADHYAY, M., BANIK, A.K., DATTA, T.K., “Numerical modeling of compound element for static inelastic analysis of steel frames with semi-rigid connections”, In: Y. Matsagar (ed), *Advances in Structural Engineering*. New Delhi, Springer, 2015.
- [11] NGUYEN, P.C., KIM, S.E., “Advanced analysis for planar steel frames with semi-rigid connections using plastic-zone method”, *Steel and Composite Structures*, v. 21, n. 5, pp. 1121-1144, 2016.
- [12] YE, J., XU, L., “Member discrete element method for static and dynamic responses analysis of steel frames with semi-rigid joints”, *Applied Sciences*, v. 7, n. 7, pp. 714, 2017.
- [13] HADADE, M.A.S., CATOIA, B., FERREIRA, M.A., *et al.*, “Experimental characterization of the moment-rotation relationship of the beam-column connection in precast concrete”, *Matéria (Rio J.)*, v. 23, n. 3, e12164, 2018.
- [14] VAN HAI, N., NGHIEM, D.N.T., CUONG, N.H., “Large displacement elastic static analysis of semi-rigid planar steel frames by corotational Euler-Bernoulli finite element”, *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-NUCE*, v. 13, n. 2, pp. 24-32, 2019.
- [15] SOUZA, L.A.F., VANALLI, L., VANDERLEI, R.D., *et al.*, “Nonlinear numerical model of plane frames considering semi-rigid connection and different beam theories”, *Matéria (Rio J.)*, v. 26, n. 3, e13037, 2021.

- [16] DU, B., JIANG, W., HE, Z., *et al.*, “Development of a modified low-cycle fatigue model for semi-rigid connections in precast concrete frames”, *Journal of Building Engineering*, v. 50, 104232, 2022.
- [17] PITUBA, J.J.C., “Validação de um modelo de dano para a análise não-linear de estruturas em concreto armado”, *Acta Scientiarum. Technology*, v. 32, n. 3, pp. 251-259, 2010.
- [18] PITUBA, J.J.C., PROENÇA, S.P.B., “Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo”, *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v. 7, n.23, pp. 33-60, 2005.
- [19] VAN DO, V.N., “The behavior of ductile damage model on steel structure failure”, *Procedia engineering*, v. 142, pp. 26-33, 2016.
- [20] MANZOLI, O.L., *Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecánica de sólidos*. Tese (Doutorado), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.
- [21] DEL SAVIO, A.A., ANDRADE, S.A.L., MARTHA, L.F., *et al.*, “Um sistema não-linear para análise de pórticos planos semirrígidos”, *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural (Passo Fundo)*, v. 2, n. 1, pp. 97-125, 2005.
- [22] CRISFIELD, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 1991. v. 1.
- [23] YAW, L.L., *2D Corotational Beam Formulation*, Walla Walla University, 2009.
- [24] TANG, Y.Q., ZHOU, Z.H., CHAN, S.L., “Nonlinear beam-column element under consistent deformation”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 15, n. 5, 1450068, 2015.
- [25] POTRA, F.A., PTÁK, V., *Nondiscrete induction and iterative processes*. Boston, MA, Pitman Advanced Publishing Program, 1984. v. 103.
- [26] SOUZA, L.A.F., CASTELANI, E.V., SHIRABAYASHI, W.V.I., *et al.*, “Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order”, *TEMA (São Carlos)*, v. 19, n. 1, pp. 161-179, 2018.
- [27] SCILAB, versão 6.1.1, ESI Group, 2020.
- [28] CHEN W.F., GOTO Y., LIEW J.R., *Stability design of semi-rigid frames*. New York, USA, John Wiley & Sons, 1996.
- [29] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L., *Mechanics of solid materials*. Cambridge, University Press, 1985.
- [30] MAXIMIANO, D.P., SILVA, A.R.D.D., SILVEIRA, R.A.D.M., “Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches”, *REM: Revista Escola de Minas*, v. 67, n. 2, pp. 143-150, 2014.
- [31] RAMM, E., “Strategies for tracing the nonlinear response near limit points”, In: Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K. (eds), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer-Verlag, 1981.
- [32] RIKS, E., “An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, n. 7, pp. 529-551, 1979.
- [33] ARISTIZÁBAL-OCHOA, J.D.I.O., “Large deflection stability of slender beam-columns with semirigid connections: Elastica approach”, *Journal of engineering mechanics*, v. 130, n. 3, pp. 274-282, 2004.
- [34] LUI, E.M., CHEN, W.F., “Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames”, *International Journal of Solids Structures*, v. 24, n. 9, pp. 893-913, 1988.
- [35] REIS, M.C.J., CODA, H.B., “Physical and Geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM”, *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 11, n. 7, pp. 1163-1189, 2014.
- [36] DÍAZ, C., MARTÍ, P., VICTORIA, M., *et al.*, “Review on the modelling of joint behaviour in steel frames”, *Journal of constructional steel research*, v. 67, n. 5, pp. 741-758, 2011.