scientiæ studia, São Paulo, v. 7, n. 4, p. 595-617, 2009

Construcción, necesidad e intuición de esencias en geometría

Álvaro Julio Peláez Cedrés

RESUMEN

En este artículo considero el antiguo problema de la dependencia de la geometría sintética de los diagramas y la demanda de necesidad y universalidad para sus resultados. Defiendo que la fuente de esa necesidad no puede ser sino *a priori*, constituyendo una clase especial de intuición que, paralelamente a la intuición empírica ordinaria, restringida a la aprehensión de las características particulares de los objetos, pasa de éstas a la captación de las propiedades esenciales compartida por una cierta clase de objetos. Intentaré sugerir que la postulación de esta clase de intuición no es un mero artificio filosófico, sino que encuentra evidencia en la propia práctica de la geometría, especialmente en el desarrollo que esta disciplina tuvo en el siglo xix de la mano de Poncelet y Klein, entre otros.

Palabras-clave • Geometría sintética. Construcción. Esquemas. Invariancias. *A priori*.

"La geometría se jacta de producir
tanto con tan poco tomado de fuera"
(Isaac Newton, 1999 [1687], Prefacio).

Introducción

La geometría con la que estamos familiarizados desde nuestra temprana niñez, la geometría euclidiana, así como la extensa tradición a la que ella dio origen, descansa en la efectuación real de construcciones. Una parte fundamental de la demostración de un teorema en el sistema de Euclides, la εκθέσις (cuya traducción latina fue *expositio*), indica la manera en que es posible construir, por así decirlo, un "ejemplar" de la figura que se enuncia en la πρότασις. De acuerdo con Euclides, la fuerza y conclusividad de una prueba consiste en la posibilidad de exhibir la figura en cuestión.[1]

1 Este principio fue adoptado y generalizado a la totalidad de las matemáticas por filosófos como Kant y Peirce. Este último dice en 1902: "[en matemáticas] es necesario hacer algo. En geometría, se dibujan líneas auxiliares. En

Como es bien sabido, esta apelación a la construcción de diagramas[2] con fines demostrativos dio lugar a un problema filosófico que dura hasta nuestros días, a saber, ¿cómo se pretende que conclusiones matemáticas con un pretendido valor de necesidad y universalidad, descansen en el trazado de figuras particulares? Las posibles respuestas a esta pregunta incluyen las siguientes: (1) los diagramas constituyen meras herramientas heurísticas, es decir, ayudas para hacer más fácil la comprensión de un argumento expresado en enunciados, lugar desde donde genuinamente surge la prueba; (2) que el alcance del diagrama está determinado por las intenciones de un sujeto, extendiendo las condiciones del diagrama original a otros posibles; (3) que el alcance del diagrama está determinado por el procedimiento de construcción especificado en el texto del argumento.

En este artículo, deseo defender una variante de (2). Es claramente una variante dado que parto del reconocimiento de que tal como está el criterio es abiertamente insuficiente, pues las intenciones que determinarían el alcance del diagrama pueden variar de sujeto a sujeto, lo que conduciría al mismo problema con el que comenzamos. Lo que necesitamos es que la extensión de la validez de las propiedades dadas en el diagrama particular sea algo independiente de condiciones subjetivas, de modo tal a obtener la universalidad y necesidad requeridas en el orden de las propiedades matemáticas atribuibles a una clase de objetos geométricos. Esta fuente de necesidad no puede ser sino *a priori*, constituyendo una clase especial de intuición que, paralelamente a la intuición empírica ordinaria, restringida a la aprehensión de las características particulares de los objetos, pase de éstas a la captación de las propiedades esenciales compartida por una cierta clase de objetos.

Esta idea de una intuición de esencias – o intuición sofisticada, como también la llamaré siguiendo una terminología propuesta por Felix Klein –, que acompaña la intuición empírica y que está dirigida a las propiedades universales y necesarias que hacen que una representación particular sea lo que es, no es nueva por supuesto. Se remonta al menos a Platón y a la fundamentación filosófica de la geometría euclidiana por parte del neoplatónico Proclo en el siglo v d.C. Está también en Kant y se articula abiertamente en la filosofía de Husserl.

álgebra se practican transformaciones permitidas. A continuación entran en juego las facultades de observación" (Peirce, 1974 [1902], p. 4). La idea fundamental de Peirce es que las matemáticas no proceden únicamente siguiendo cadenas estrictamente deductivas, lo que él llama "pensamiento corolario", sino realizando construcciones e investigando las propiedades de las mismas, lo que llama "pensamiento teoremático".

2 Uso "diagrama" para referirme a las figuras geométricas trazadas en el papel por cualquiera implicado en la práctica geométrica. Así, también utilizo simplemente el término "figura" para mentar lo mismo.

Dado que la versión de esta idea que defenderé aquí se nutre especialmente de las perspectivas de estos dos últimos filósofos,[3] mi proceder será histórico-filosófico. Expondré parte de la historia de esta noción al mismo tiempo que argumentaré a su favor. Intentaré sugerir que la postulación de esa clase de intuición no es un mero artificio filosófico, sino que encuentra evidencia en la propia práctica de la geometría.

1 La Φαντασια en el conocimiento geométrico antiguo

En la geometría, hay una antigua distinción entre dos tipos de métodos de demostración. Por un lado, está el método que consiste en suponer un resultado deseado que se puede alcanzar, por ejemplo, en suponer que hemos tenido éxito en hacer una cierta construcción, en el sentido corriente de "construcción". Luego, a partir de estas suposiciones se argumenta "hacia atrás", por así decirlo, hacia las condiciones a partir de las cuales la construcción es posible y hacia las maneras en las que se puede realizar. Este método se llama analítico. A veces fue atribuido a Platón, pero no se empleó en gran escala, explícita y sistemáticamente, hasta la geometría analítica de Descartes, cuyo mismo nombre se deriva del método "analítico" en cuestión. El otro método era el método sintético. Su aplicación consiste en tratar de producir el resultado deseado mediante la efectuación real de construcciones, y lo que es más importante, que dicha construcción procede desde elementos simples a partir de un conjunto fijo de reglas. Aquello que distingue a los dos métodos, por lo tanto, es de manera general el hecho de que en el método analítico no se hacen construcciones mientras que el método sintético se basa en el empleo de construcciones reales de acuerdo con reglas fijas.[4]

El paradigma clásico de la utilización del método sintético en geometría se encuentra en los *Elementos* de Euclides. Estos comienzan con 23 definiciones, en las cuales se definen la mayoría de los términos básicos, cinco postulados y cinco nociones comunes. Los postulados posibilitan que se realicen ciertas construcciones geométricas: unir dos puntos con una línea, trazar un círculo con cualquier radio y con centro en cualquier punto etc. Las nociones comunes son deducciones permisibles o reglas de inferencia aplicables fuera de las matemáticas: dos cosas que son iguales a una ter-

3 También en Peirce, en la forma en que concibe los diagramas como una subclase especial de los signos, hay algo semejante a esta capacidad de intuir relaciones esenciales. Por razones de espacio, sólo consideraré aquí las aportaciones de Kant y Husserl y dejaré a Peirce para otra oportunidad.

4 Para aclarar aun más la diferencia entre los métodos sintético y analítico en geometría, podría utilizarse la terminología de causas y efectos. En el razonamiento sintético, se procede desde las causas a sus efectos, en el analítico de los efectos a sus causas.

cera, son iguales entre sí; si cantidades iguales se agregan a cantidades iguales, los resultados son iguales etc.

¿Cuál es la estructura de una proposición en la geometría de Euclides? Primero hay una enunciación de una proposición general. Por ejemplo, en la proposición 20 de los *Elementos*, dice: "en todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante" (Euclides, 2000, p. 43). Esta parte de la proposición fue llamada πρότασις. Pero Euclides jamás procede únicamente sobre la base de la enunciación. En cada proposición, indica a continuación la manera en que es posible construir, por así decir, un "ejemplar" de la figura que se enuncia en la πρότασις. Esta construcción equivale a una verdadera demostración de la proposición en cuestión. Dice a continuación de la proposición 20: "pues, sea ΑΒΓ un triángulo. Digo que dos lados del triángulo ΑΒΓ tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, los lados ΒΑ, ΑΓ (mayores que) ΒΓ, los lados ΑΒ, ΒΓ (mayores que) Α, y los lados ΒΓ, ΓΑ (mayores que) ΑΒ" (Euclides, 2000, p. 43). Esta parte de una proposición euclidiana era llamada εκθέσις o exposición.

La exposición o εκθέσις está estrechamente ligada con la parte que sigue, o tercera parte, de una proposición euclidiana, la *construcción auxiliar.* Esta parte era a menudo llamada de *preparación* u *organización* (καθασκευη). Consistía en declarar que la figura construida en la exposición tenía que ser completada mediante el trazado de algunas líneas, puntos y círculos adicionales. En nuestro ejemplo, la preparación dice así: "Prolónguese por el otro lado ΒΑ hasta el punto Δ, y hágase ΑΔ igual a ΓΑ y trácese ΔΓ" (Euclides, 2000, p. 43).

La construcción era seguida por la αποδειξις o prueba propiamente dicha. En esta no se realizaban más construcciones. Allí tenía lugar una serie de inferencias que concernían a la figura que había sido introducida en la exposición y completada en la construcción auxiliar. Estas inferencias hacían uso de axiomas, proposiciones anteriores y de las propiedades de la figura que se seguían del modo en que la figura estaba construida.

Después de haber alcanzado la conclusión deseada acerca de la figura particular, Euclides regresaba otra vez a la enunciación general, diciendo, por ejemplo, "por consiguiente, en todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante" (2000, p. 44).

Como mencioné en la introducción, el método de la geometría sintética antigua, que acabo de exponer, heredado a sus desarrollos posteriores, presentaba una característica peculiar: por un lado, se reconocía la fundamental importancia que las construcciones jugaban en el establecimiento de las verdades geométricas y, por el otro, se creyó firmemente que sus resultados carecían de la ambigüedad y falta de determinación característica del conocimiento sensible, es decir, que sus resultados se seguían con necesidad y certeza absolutas.

Los primeros que reflexionaron acerca de este problema fueron Platón y Aristóteles. De la consideración de esos dos aspectos del conocimiento geométrico, Platón derivó una concepción que sostenía que las proposiciones de la geometría tratan acerca de objetos de un mundo inmaterial y eterno, y cuyo conocimiento se obtenía a través de de una facultad que, utilizando las representaciones sensibles, se concentraba en las propiedades esenciales de las mismas. Así, dice en un pasaje de *República*:

> Sabes, por consiguiente, que se sirven de figuras visibles y hacen discursos acerca de ellas, aunque no pensando en éstas sino en aquellas cosas a las cuales éstas se parecen, discurriendo en vista al cuadrado en sí y a la diagonal en sí, y no en vista de la que dibujan, y así con lo demás. De las cosas mismas que configuran y dibujan hay sombras e imágenes en el agua, y de estas cosas que dibujan se sirven como imágenes, buscando divisar aquellas cosas en sí que no podrían divisar de otro modo que con el pensamiento (Platón, 1986, p. 336).

Es decir, bajo la influencia del desarrrollo que el método sintético había tenido desde Tales y Pitágoras hasta el siglo v a.C., el cual podía ser visto como un desarrollo progresivo de la capacidad operativa de construir figuras, Platón no dudaba que sobre esas construcciones descansaba la naturaleza del procedimiento geométrico mismo, pero al mismo tiempo creía que las verdades geométricas no podian serlo de un mundo de apariencias cambiantes, por lo que postula esa "mirada del pensamiento" que atiende a los modelos o ideas puras que esas construcciones sensibles se encuentran representando. Lo que interesa señalar es que este *ver con los ojos de la mente* no equivale a una mera contemplación de verdades ya hechas, sino a una construcción de las mismas siguiendo un procedimiento estrictamente deductivo.

Desde el punto de vista de Aristóteles, en tanto, las construcciones son esenciales para el conocimiento geométrico, porque todo conocer es en acto, implica la actualización de una serie de propiedades que no existen más que potencialmente en una situación dada. En la *Metafísica*, dice:

> El acto también nos revela los teoremas geométricos, ya que estos se hallan dividiendo. Si se presentaran como divisiones ya hechas, los veríamos inmediatamente, pero sólo se dan en potencia. ¿Por qué los ángulos del triángulo equivalen a dos rectos? Porque los ángulos formados alrededor de un solo punto son iguales a dos ángulos rectos. Por lo tanto, si se trazara la línea paralela respecto a

> un lado, con un simple vistazo resultaría obvio el teorema. Así pues, es evidente que las figuras en potencia se revelan ante nuestros ojos cuando las hacemos pasar al acto. La causa de ello es que su actualización es el pensamiento; por lo tanto, el acto procede de la potencia y, por eso, el conocimiento se adquiere construyendo (Aristóteles, 2008a, p. 289-90).

Pero, desde el punto de vista de Aristóteles, ¿sobre qué versa el conocimiento geométrico? En su opinión, los objetos matemáticos son cosas que surgen por, en o a través de un proceso de eliminación. En el capítulo v de libro 1 de los *Analíticos segundos* (2008b), Aristóteles comienza con una figura geométrica perceptible particular. Lo que es eliminado es su particularidad misma y todo lo que viene con ella, incluyendo su ser perceptible. Lo que queda es un universal de alguna clase.

Mucho se ha discutido acerca de si el resultado de ese proceso de abstracción constituye una entidad de alguna clase, o se trata simplemente de la misma entidad original aunque considerada desde otro punto de vista, a saber, desde el punto de vista de la expresión de propiedades universales. Esta última interpretación es la que parece ser más plausible. Parece que Aristóteles estaba concibiendo este "pensar por eliminación" como una facultad especial que considera a las propiedades particulares de una figura como incidentales, como meros accidentes. De acuerdo con Heath (1949), para Aristóteles, el término γράφειν significa también "probar" y, por lo tanto, no sólo trazar una figura. El arte de trazar figuras está esencialmente conectado con un movimiento inferencial de carácter descriptivo que implica una prueba intelectual con alcance universal, pues el proceso mismo de descubrimiento o construcción está acompañado por uno de eliminación de las propiedades accidentales.

Pero quien llevó a cabo una fundamentación filosófica detallada del procedimiento constructivo de Euclides en el mundo antiguo fue Proclo, a quien quiero referirme a continuación.

Según Proclo, los objetos matemáticos no son objetos intelectuales puros, sino que ocupan una posición intermedia entre aquéllos, los cuales tienen el atributo de la simplicidad absoluta, y los objetos sensibles. Son inferiores a los primeros en la medida en que poseen una clase de extensión y pluralidad, pero son superiores a los segundos en tanto que son más precisos y reflejan más cuidadosamente el mundo intelectual. En virtud de su pluralidad y extensión, poseen un aspecto sensible, pero, en tanto carentes de materialidad, constituyen imágenes "que imitan en su forma dividida lo indivisible y, en su naturaleza multiforme, los patrones uniformes del ser" (Proclo, 1970, p. 4). Esto excluye, desde el punto de vista de Proclo, cualquier posibilidad de que dichos objetos sean derivados de los sentidos, por alguna clase de proceso de abstracción o inducción.

Los dos principales argumentos que Proclo esgrime contra la posibilidad de que los objetos matemáticos provengan de los sentidos son, en primer lugar, la notoria precisión, estabilidad y falta de ambigüedad de las formas matemáticas como opuesto al carácter cambiante, impreciso e indeterminado de los objetos sensibles; en segundo lugar, y de mayor importancia para nuestro asunto, el carácter general de las formas matemáticas, que posibilita extraer de ellas en los razonamientos conclusiones también de carácter general, en tanto opuesto a la particularidad de los objetos sensibles. Proclo encuentra ininteligible pensar que las pruebas matemáticas no posean un alcance universal, lo cual quedaría excluido si se considera, en sus premisas, objetos sensibles particulares. Dice sobre esto:

> Si un hombre demuestra que el triángulo isósceles tiene la suma de sus ángulos igual a la de dos ángulos rectos, y que lo mismo es cierto de los triángulos escalenos y equiláteros, él no comprende propiamente esas proposiciones; antes bien, es él quien demuestra acerca de cualquier triángulo, sin calificación, lo que sabe en el sentido estricto del término (Proclo, 1970, p. 12).

Ahora bien, si los objetos matemáticos no derivan de los sentidos, ¿de dónde lo hacen? Responde Proclo: "Si las formas matemáticas no existen por abstracción de cosas materiales o por la reunión de caracteres comunes a los particulares, ni nacen y son derivadas de objetos sensibles, por necesidad el alma debe obtenerlas o bien de sí mismas o del *nous*, o de ambas mediante una clase de inteligencia superior" (1970, p. 13).

Dado que, desde su punto de vista, los objetos matemáticos exhiben una estructura normativa, estos no pueden surgir únicamente del entendimiento, sino que el *nous* debe participar en su generación. Asimismo, debido a que las formas encerradas en el *nous* poseen esa naturaleza normativa, lo que significa que ofician como patrones para todas las cosas, existe una necesidad constitutiva mediante la cual las formas en el *nous* se actualizan en los objetos matemáticos. Existe, en opinión de Proclo, una relación profunda entre entendimiento y *nous* según la cual este último siempre determina el contenido del primero. El entendimiento reproduce en sus propios términos, esto es, de manera discursiva, el contenido intelectual del *nous*.

En el caso específico de la geometría, Proclo mobiliza el rol jugado por la imaginación. Esta se vuelve necesaria debido a que ocupa una posición intermedia entre las formas de conocimiento superiores y las inferiores, esto es, entre el conocimiento intelectual y la percepción sensorial. Dado que, según Proclo, los objetos matemáticos en su aspecto puro se encuentran, por así decirlo, "encerrados" en la inteligencia, es necesario, para volverlos manifiestos y verdaderos objetos de conocimiento, una facultad que les provea de una forma sensible pero que, a la vez, capture las propiedades formales puras de dichos objetos. Esa facultad es la facultad de imaginación, que es capaz de producir esas representaciones en virtud de su naturaleza híbrida. Dice Proclo:

> Cuando traza sus objetos desde el centro indivisible de su vida, los expresa en el medio de la división, extensión y figura. Por esta razón, todo lo que concibe es una imagen o una forma de su pensamiento. Concibe al círculo como extenso, y aunque este círculo es libre de materia externa, posee una materia inteligible suministrada por la imaginación misma. Esta es la razón por la que hay más de un círculo en la imaginación, como hay más de un círculo en el mundo sensible; porque con la extensión también aparecen diferencias en medida y número entre círculos y triángulos. Si, entonces, en los círculos sensibles hay un universal que hace a cada uno de ellos un círculo y a todos semejantes entre si debido a que se conforman a una idea simple, difiriendo, sin embargo, en la medida y en su objeto subyacente, del mismo modo, en los círculos imaginarios hay un elemento común en el cual ellos participan y en virtud del cual todos tienen la misma forma" (1970, p. 42).

La imaginación, entonces, debe poseer, de acuerdo con Proclo, un elemento intelectual normativo, dado que produce esa clase de representaciones que, aunque con caracteres particulares, exhiben un rasgo común que las hace pertenecer a una clase de objetos. El razonamiento geométrico, basado en la imaginación o en esa clase de "intuición sofisticada", facilita que los conceptos encerrados en la inteligencia sean desplegados para ser conocidos. Esto justifica también el uso de los diagramas. Dice Proclo: "y esto es por lo que usamos diagramas para ilustrar la estructura y construcción de figuras, sus divisiones, posiciones y yuxtaposiciones" (1970, p. 45).

Así, para Proclo, los objetos matemáticos poseen, por un lado, en virtud de su evidente pluralidad, un aspecto sensible aunque no material y, por el otro, en virtud de que se encuentran determinados por las formas puras provenientes del *nous*, uno intelectual. Esto garantiza que las demostraciones que se llevan a cabo en dicha disciplina tengan un alcance universal.

2 Intuición pura, imaginación y esquemas en la filosofía de la geometría de Kant

En esta sección deseo sugerir una interpretación de la filosofía de la geometría de Kant que abogará a favor de mi tesis original acerca de la necesidad de pensar una facultad especial de intuición como fuente de necesidad del conocimiento geométrico. Como he dicho antes, dado que mi interés consiste en mostrar cómo dicho requerimiento se explica en función de la producción de una clase específica de conocimiento geométrico, comenzaré con una breve exposición sobre el estado de la investigación en dicha disciplina en el siglo xviii.

Al comienzo de la sección anterior caracterizamos el método de la geometría sintética como aquél que parte de ciertos elementos primitivos y se eleva, mediante el recurso a las construcciones reales, hacia el establecimiento de ciertas verdades sobre un determinado dominio de figuras geométricas. Asimismo, señalamos allí que este recurso a las construcciones, aunado a la creencia de que los resultados allí obtenidos tenían un *estatus* no empírico, condujo a labores de fundamentación filosófica que echaron mano del recurso a la postulación de una clase de facultad que explicara, tanto la apelación al trazado de los diagramas, como el *estatus* de necesidad de sus resultados.

Ahora bien, ulteriores problemas surgieron cuando los geómetras se percataron de que esta dependencia de las construcciones literales, es decir, de los particulares que se construyen con regla y compás en el encerado, conducía a dos hechos inaceptables *prima facie*, a saber, que aquellas cosas que manifestaban características visibles diferentes no pudieran ser subsumidas bajo un concepto simple; y la carencia de unidad en los principios constructivos de la geometría.

Esta situación comenzó a revertirse con el trabajo de Descartes, quien planteó de una manera explícita el principio de que todas las expresiones particulares del pensamiento han de presentar un orden y conexión definida. No es el contenido de un pensamiento dado lo que determina su valor cognoscitivo, sino la necesidad mediante la cual se deduce desde primeros principios en una secuencia ininterrumpida. La primera regla de todo el conocimiento racional es, entonces, que las cogniciones sean ordenadas formando una serie autocontenida dentro de la cual no hay transiciones no-mediadas. Ningún miembro puede ser introducido como un elemento enteramente nuevo, sino que cada uno ha de surgir paso a paso desde miembros anteriores de acuerdo con una regla.

Este pensamiento fundamental de Descartes demandó y condicionó una nueva concepción de la geometría. El conocimiento geométrico, en sentido estricto, no se encuentra donde los particulares son estudiados como objetos aislados, sino sólo donde la totalidad de esos objetos puede ser constructivamente generada de acuerdo a un proceso dado. La geometría sintética antigua viola este postulado, porque su objeto es la figura espacial aislada cuyas propiedades se aprehenden en la intuición sensible inmediata, pero cuya conexión sistemática con otras figuras nunca puede ser representada completamente. En este punto, de acuerdo con Descartes, la geometría sólo puede ser completada a través de su determinación por medios aritméticos. El fin del método filosófico consiste en concebir a todos los objetos con la misma conexión sistemática que poseen los objetos aritméticos.

Ahora bien, en el desarrollo posterior, la geometría nunca se iba a apartar de este principio cartesiano fundamental. Sin embargo, sí lo haría en relación a otro punto de fundamental importancia, a saber, la algebrización cartesiana de la geometría, con la consiguiente restauración del papel de la intuición en las cuestiones propiamente geométricas. Ya Leibniz había criticado a la geometría analítica por introducir un elemento arbitrario en la determinación de las figuras espaciales, a saber, los diferentes sistemas de coordenadas y sus diferentes ecuaciones, orientando su propia investigación al campo de lo propiamente geométrico.[5] Desde el punto de vista de la que luego se llamaría, en el siglo XIX, geometría de la posición o proyectiva, y que en el siglo XVII no se distinguía nominalmente de la geometría euclidiana, lugar desde donde se operó la divergencia con la geometría analítica, no es cuando limitamos la intuición y buscamos reemplazarla por meras operaciones de cálculo que obtenemos las verdaderas construcciones lógica y estrictamente deductivas de la ciencia del espacio, sino cuando colocamos a la intuición en su completo alcance e independencia.

El problema fundamental al cual se enfrentaron los geómetras del siglo XVII, problema que, por otra parte, ya había sido planteado por Alberti, fue: ¿qué propiedades geométricas tienen en común dos secciones de la misma proyección de una figura actual? El primero que dio una respuesta a esta pregunta en términos sistemáticos fue Girard Desargues (1591-1661).

Un aspecto importante de su sistema geométrico fue la introducción de elementos imaginarios[6] en el plano euclidiano. Esto fue posible por su tratamiento de las líneas paralelas, las cuales concibió como un caso de líneas que se intersecan en un punto en común, el punto de intersección, el cual era trasladado al infinito. A su vez, esto lo condujo a uno de sus resultados más conocidos, el ahora llamado "teorema de Desargues". A este deben agregarse, entre otros resultados, el concepto de involución (que había sido introducido por Papo de Alejandría), y el de conjunto armónico de puntos.

En mi opinión, la cuestión acerca de la introducción de elementos imaginarios en el sistema geométrico no tiene únicamente una importancia fundamental desde el punto de vista de la historia de las matemáticas, sino también desde un punto de vista

5 En una carta a Christian Huygens, de 1679, Leibniz dice: "[...] pero, a pesar de los progresos que he hecho en esas materias, no estoy todavía satisfecho con el álgebra, debido a que no provee con los métodos más breves o las construcciones más bellas de la geometría. Esto es por lo que creo que, en la medida en que la geometría está implicada, necesitamos otro análisis que sea distintivamente geométrico o lineal y que exprese la *posición* (*sytus*) directamente al igual que el álgebra expresa directamente la *magnitud*" (Leibniz, 1970, p. 249). Su propia aportación al campo se encuentra en el proyecto de un *Analysis situs*. Cfr. el ensayo del mismo nombre en (1970).

6 El concepto de *puntos al infinito* había sido introducido explícitamente por primera vez por Kepler en su obra de 1604, *La parte óptica de la astronomía*.

epistemológico. Dicha importancia radica en que revolucionó el modo de entender la cuestión de la naturaleza de las representaciones geométricas. Por ejemplo, si consideramos un círculo y una línea recta que lo interseca, podemos transformar este sistema geométrico mediante desplazamientos continuos de una manera tal que finalmente la línea recta queda completamente fuera del círculo, de modo que las intersecciones y las direcciones de los radios que corresponden a ellas han de ser expresadas por valores imaginarios. La coordinación de la figura deducida con la original ya no conecta elementos que son actualmente presentes y observables, sino elementos meramente intelectuales; se ha resuelto en una *correlación ideal.* En esta visión, el objeto real de la investigación geométrica no es la forma individual en su existencia sensorial, sino las diversas clases de dependencia que pueden subsistir entre las formas.

Con este contexto en mente, veamos ahora algunas ideas de Kant acerca de la fuente y justificación del conocimiento geométrico. De acuerdo con la distinción entre los usos de la razón que Kant establece en la *Doctrina transcendental del método*, el conocimiento filosófico es conocimiento racional derivado de conceptos, mientras que el conocimiento matemático lo es por *construcción* de conceptos.[7] Veamos un poco más de cerca qué nos dice Kant acerca de esas construcciones. Dice:

> Para construir un concepto hace falta, pues, una intuición *no empírica* que, consiguientemente, es, en cuanto intuición, un objeto *singular*, a pesar de lo cual, en cuanto construcción de un concepto (representación universal), tiene que expresar en su representación una validez universal en relación con todas las posibles intuiciones pertenecientes al mismo concepto (Kant, 1988, A714-B742).

De acuerdo con un presupuesto fundamental de la filosofía kantiana, a todo concepto debe corresponderle una intuición, la cual, por supuesto, viene suministrada por la sensibilidad. En el caso de las matemáticas, que procede constructivamente en relación a todos sus conceptos, sus intuiciones han de proveerse *a priori*. Dado que la misma constituye el objeto que otorga significado al concepto y así el objeto al que este refiere, esta no puede ser una mera representación particular, sino, como dice Kant, una que exprese las propiedades compartidas por todas las intuiciones pertenecientes al mismo concepto. Al hablar de propiedades compartidas, aclara Kant unas líneas más abajo, no nos referimos a las propiedades prescindibles de una cierta clase de objetos,

7 Jaakko Hintikka ha afirmado correctamente que Kant recibió una inspiración directa del proceder de la geometría sintética no sólo para articular su elucidación del conocimiento matemático, sino también de su modelo epistemológico en general. No obstante, como se notará a continuación, discrepo con su interpretación de Kant, la cual hace énfasis en que Kant está pensando en particulares cuando habla de construcciones en la intuición pura. Para una discusión más detallada del punto de vista de Hintikka, véase Cedrés, 2008.

como serían, en un triángulo, la magnitud de los lados y de los ángulos, sino a las propiedades universales y necesarias de los mismos. Esta intuición, según él, "apunta siempre al simple acto de construir el concepto" (A714-B742), esto es, constituye una representación cuyo fin es la expresión de un concepto. Por ello no puede ser meramente particular.

Esta representación intuitiva pero determinada conceptualmente, la cual constituye el objeto del concepto, y es construida, en palabras de Kant "sin tomar el modelo de una experiencia" (A714-B742), es el esquema del concepto. Así lo expresa Kant en el mismo apartado: "Por ello, así como este singular se halla determinado por ciertas condiciones universales de la construcción, así también el objeto del concepto, al que dicho singular corresponde como su mero esquema, tiene que concebirse como universalmente determinado" (A714-B742).

Desde el punto de vista de los desarrollos en geometría proyectiva que comentamos anteriormente, esto tiene pleno sentido. En tanto objetos concretos, las figuras geométricas son diferentes, pero a nivel abstracto son las mismas. Por ejemplo, el cubo y el octaedro son objetos intuitivamente diferentes. No obstante, sus respectivos grupos de automorfismos tienen la misma estructura algebraica, por lo que decimos que uno es el dual del otro. Y lo mismo ocurre con el dodecaedro y el icosaedro. Constituyen, al igual que los puntos al infinito que mencionamos antes, objetos imaginarios, ideales, constructos abstractos que expresan propiedades universales determinadas conceptualmente.

Por ello, también es natural que Kant considere el papel de la imaginación en la construcción de los objetos matemáticos. En las *Observaciones generales sobre la estética trascendental*, Kant se pregunta acerca de las proposiciones de la geometría: "¿de dónde sacamos semejantes proposiciones y en qué se apoya nuestro entendimiento para llegar a tales verdades absolutamente necesarias y universalmente válidas?" (B64-A47). Y la respuesta es que un conocimiento de ese tipo sólo podría obtenerse de dos fuentes, a saber, intuiciones o conceptos. Una vez que ambos están dados *a priori* o *a posteriori*, debemos considerar cada una de estas opciones. Es claro que, si como Kant parece creer (y nadie en el siglo XVIII creería lo contrario),[8] la geometría es una disciplina constituida por verdades universales y necesarias, no podría derivar sus proposiciones de conceptos empíricos y de sus intuiciones correspondientes, pues dicha cosa convertiría a la geometría en una disciplina irremediablemente empírica. Sólo que-

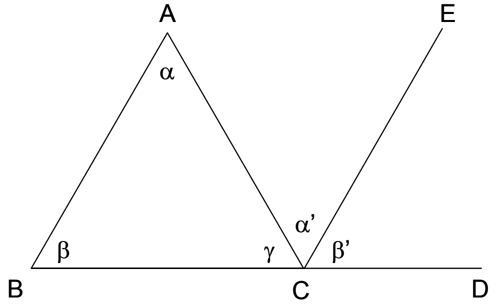
8 En el siglo XIX en cambio, el surgimiento de las geometrías no-euclideanas hizo pensar a algunos que la geometría podría ser empírica. Lobachevsky llevó a cabo un experimento con datos astronómicos para determinar la constante de su geometría. Usó un triángulo formado por Sirio, Rigel y la estrella 29, pero el defecto era demasiado pequeño para ser significativo. Sobre ese punto, Cfr. Torretti (1978), p. 63-4.

dan las opciones de que el conocimiento geométrico se derive o bien de conceptos o bien de intuiciones *a priori*. Lo primero es desechado apelando a la definición de analiticidad y a la imposibilidad de explicar un juicio de la geometría en base a dicha idea. Entonces, la única opción que queda es considerar que las proposiciones de la geometría se derivan de intuiciones puras. Pero aquí Kant plantea una distinción, dice: "Pero, ¿de qué clase de intuición pura se trata: *a priori* o empírica?" (A48-B65). En mi opinión, una intuición pura empírica sería una representación inmediata de un momento particular del tiempo o un espacio particular no actual, por ejemplo, la representación que puedo tener en el momento en que escribo este trabajo de las turbias aguas del Río de la Plata. Se trata de una representación independiente de la experiencia del caso, pero no independiente de toda experiencia. Y es posible por la intervención de la facultad de imaginación, aunque de una imaginación puramente reproductiva. Asimismo, se trataría de una representación que no es universalmente válida, sino de una que tiene una validez puramente subjetiva. Por otro lado, una intuición pura *a priori* sería una representación que surge como una necesidad de la forma pura de la sensibilidad, independientemente de los caracteres sensibles pasados o actuales, aunque no completamente independiente de toda clase de representación sensible. La facultad que interviene en esta construcción es también la imaginación, aunque en este caso su naturaleza es esencialmente productiva. Dice Kant: "en esta síntesis sucesiva de la imaginación productiva se basan, para producir las figuras, las matemáticas de la extensión (geometría) con sus axiomas" (B204). Es decir, la geometría procede desde ciertos elementos básicos o primitivos, regida por sus axiomas, para producir objetos imaginarios, ideales, representaciones que aprehenden las propiedades universales de una clase de figuras. Construye, para volver nuevamente a la terminología específica kantiana, *esquemas*. Veamos un ejemplo de Kant que ilustra, tanto su énfasis en la necesidad de las construcciones, como el carácter universal del resultado obtenido.

El ejemplo es extraído de la *Doctrina trascendental del método*, de su discusión sobre la diferencia entre método filosófico y método matemático. Allí dice:

> Demos al filósofo el concepto de triángulo y dejémosle que halle a su manera la relación existente entre la suma de sus ángulos y un ángulo recto. [...] Dejémos que sea ahora el geómetra el que se ocupe de esta cuestión. Comienza por construir en seguida un triángulo. Como sabe que la suma de dos ángulos rectos equivale a la de todos los ángulos adyacentes que pueden trazarse desde un punto sobre una línea recta, prolonga un lado del triángulo y obtiene dos ángulos adyacentes que, sumados, valen dos rectos. De estos dos ángulos divide el externo trazando una paralela al lado opuesto del triángulo y ve que surge de este modo un ángulo adyacente externo igual a uno interno; y así sucesivamente (A717-B745).

Lo que Kant está describiendo aquí es la siguiente construcción:



Dado un triángulo ABC, se prolonga el lado BC a D y luego se traza CE paralela a AB. Entonces uno nota que $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$, de modo que $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$ = dos rectos. Luego agrega Kant: "A través de una cadena de inferencias y guiado siempre por la intuición, el geómetra consigue así una solución evidente y, a la vez, universal del problema" (A717-B745).

Permítaseme, para terminar mi argumento acerca del carácter no particular de las representaciones asociadas con las construcciones en geometría, considerar algunas de las observaciones de Kant sobre la naturaleza de dichos esquemas. En la sección sobre el esquematismo de los conceptos puros del entendimiento de la *Crítica de la razón pura,* Kant parte del reconocimiento de que los esquemas son producto de la imaginación, pero enfatiza de inmediato que, dado que la imaginación tiene aquí la función de sintetizar una multiplicidad de intuiciones, su resultado no puede ser una intuición particular. Así, un esquema ha de ser distinguido cuidadosamente de una imagen, la cual en sentido estricto lo es siempre de un objeto particular. En el ejemplo que proporciona Kant, los cinco puntos – • • • • • – constituyen una imagen, una representación sensible del numero cinco, lo que no quiere decir que constituya, desde su punto de vista, la intuición relacionada con el concepto de cinco. A favor de ello, alega Kant que dicha representación particular nunca podría ser *comparada* con el concepto. Es decir, nunca podría constituir el objeto genuino de referencia del concepto. Y ejemplifica una vez más con un caso tomado de la geometría:

> Ninguna imagen de un triángulo se adecuaría jamás al concepto de triángulo en general. En efecto, la imagen no alcanzaría la universalidad conceptual que hace que el concepto sea válido en relación con todos los triángulos, sean rectángulos, oblicuángulos, etc., sino que siempre estaría limitada a una sola parte de esa esfera. El esquema del triángulo no puede existir más que en el pensamiento, y

significa una regla de síntesis de la imaginación respecto de figuras puras en el espacio (A141-B180).

Desde mi punto de vista, aunque Kant se muestre ciertamente pesimista en torno a la cuestión de qué sean esos esquemas y cual sea la clave de su comprensión, el enunciado final del párrafo citado es profundamente significativo. En mi opinión, no sólo explica algunos de los avances, aunque incipientes, en el desarrollo de la geometría de su época, sino que dicha explicación puede aplicarse a desarrollos posteriores en la misma línea.

3 El desarrollo de la geometría proyectiva en el siglo xix y el concepto de *Wesenerschauung* de Husserl

Permítaseme retomar la historia que inicié en las secciones anteriores. Los siguientes nombres de importancia en el desarrollo de la geometría de la posición o proyectiva fueron los de Poncelet, Plücker, Gergonne, Grassman y von Staudt; el problema al que se enfrentaron, el mismo que había preocupado a Desarges y Pascal, la justificación de los elementos imaginarios. Por mor de la brevedad, sólo consideraré al primero de dichos nombres. Poncelet hizo esfuerzos importantes por justificar la introducción de los elementos imaginarios en los sistemas geométricos, pero problematizó al mismo tiempo la dependencia de la geometría sintética de los diagramas explícitamente trazados. Reconociendo la superioridad de los métodos algebraicos en el tratamiento de los problemas geométricos, pero interesado al mismo tiempo por retornar al ideal de lo geométrico como la teoría de lo propiamente espacial, se preguntó si la geometría sintética no podría incorporar métodos tan potentes y efectivos como los del álgebra, embarcándose en una reinterpretación de los contenidos de la geometría.

El primer rasgo importante que Poncelet observó en el álgebra es que esta opera con signos abstractos. Dice al respecto:

> El álgebra emplea signos abstractos, representa magnitudes absolutas mediante caracteres que no tienen valor en sí mismos, y que permiten a dichas magnitudes toda la indeterminación posible; por consiguiente, operan y razonan forzosamente tanto sobre signos de no-existencia como sobre cantidades absolutas y reales: a y b, por ejemplo, representan dos cantidades cualesquiera, y es imposible en el curso del cálculo, recordar y reconocer cuál es el orden de sus magnitudes numéricas; a pesar de ello, somos llevados a razonar sobre las expresiones

> a – b, $\sqrt{a-b}$ etc., como si se trataran de cantidades siempre absolutas y reales. Los resultados deben, por consiguiente, participar de esta generalidad, y se extiende a todos los casos posibles, a todos los valores de las letras que se introducen; de esta manera, son estas formas extraordinarias, estos seres de razón, que parecen ser la posesión exclusiva del álgebra" (Poncelet, 1822, p. xx-xxi).

Poncelet agrega que todas las disciplinas que empleen este mismo tipo de signos abstractos estarán en situación de explotar las ventajas del análisis algebraico y, si no lo han hecho, como la geometría sintética, es porque se ha estado aferrado dogmáticamente al uso y significado de los diagramas. Sin embargo, no se trata finalmente de borrar la frontera entre geometría sintética y analítica, sino de reinterpretar el uso y la significación de los diagramas empleados en la primera.[9] El paso dado por Poncelet consiste en no tomar a un diagrama particular dado como el objeto de estudio de la geometría, sino antes bien como un signo complejo cuyos componentes pueden ser operados sin tomar en cuenta las particularidades que se siguen de sus caracteres visualizables, y de allí obtener propiedades generales de las figuras. Más específicamente, Poncelet argumentó que en los casos en los cuales una forma persiste, pero el objeto que la acompaña se desvanece, se deben postular nuevos elementos de acuerdo al principio general de persistencia de la forma, el cual podría parafrasearse de la siguiente manera: si suponemos que una figura dada cambia su posición al sufrir cada uno de sus puntos un movimiento continuo sin violar las condiciones que inicialmente se sostienen entre ellos, las propiedades que se sostienen para la primera posición de la figura, se sostienen todavía en una forma generalizada para todas las figuras derivadas.

La fuerza y conclusividad de toda prueba geométrica descansa en los invariantes del sistema, no en lo que es peculiar a los miembros individuales como tales. El único postulado que está implicado puede ser formulado diciendo que es posible mantener la validez de ciertas relaciones, definidas de una vez y para siempre, a pesar del cambio en el contenido de los términos particulares. Comenzamos considerando a la figura en una conexión general, y no la analizamos al comienzo en sus partes individuales, sino que permitimos ciertos cambios dentro de una cierta esfera definida por las condiciones del sistema. Si esos cambios proceden continuamente desde un punto de partida definido, las propiedades sistemáticas que hemos descubierto en una figura serán transferibles a cada "fase" sucesiva, de modo que las determinaciones finales que se

9 Uno de los primeros que vieron la necesidad de reformular el sentido de lo que se entendía por "intuición" fue Jacob Steiner, quien sostuvo que el significado de la intuición no es la adherencia a una figura sensorialmente dada, sino que es la libre generación constructiva de figuras de acuerdo a un principio unitario. Los diferentes casos de figuras sensorialmente dadas no son, como en la geometría antigua, individualmente concebidos y estudiados, sino que todo el interés se concentra en la manera en la cual ellas proceden mutuamente unas de otras.

encuentran en un caso individual, pueden ser progresivamente extendidas a todos los miembros sucesivos. Como Poncelet enfatiza, nunca son las meras propiedades particulares de una figura desde las cuales comienza el tratamiento proyectivo, sino desde las propiedades de un "género", donde "género" significa nada más que una conexión de condiciones mediante las cuales todo lo individual es ordenado. Todas las formas que pueden surgir una de otra en esta forma son consideradas como una unidad indivisible, son expresiones diferentes de uno y el mismo concepto. Obviamente, "pertenecer a un concepto" no significa aquí el que los particulares compartan ciertas semejanzas genéricas, sino la presuposición de un cierto principio de transformación que se mantiene idéntico.

Ahora bien, esta aportación original de Poncelet fue desarrollada por nombres tan importantes como el de von Staudt y Plücker. El primero, a través de la introducción de la idea de "concepto-objeto" para entender los elementos imaginarios; el segundo, con su teoría de los duales. Pero, desde mi punto de vista, el paso decisivo hacia una formulación completa del concepto geométrico en tanto que estructura que persiste a través de los cambios en sus aplicaciones particulares lo fue la introducción de la teoría de grupos[10] en la geometría debida a F. Klein. En el concepto de grupo se obtiene un principio general de clasificación mediante el cual los diferentes tipos de geometrías pueden ser unificados bajo un punto de vista simple. Si planteamos la pregunta acerca de qué debemos considerar como una geometría, la respuesta es: aquellas propiedades que permanecen invariantes a través de ciertas transformaciones espaciales. Es decir, aquellas estructuras que persisten cuando variamos la posición absoluta de esta estructura en el espacio, cuando aumentamos o disminuimos proporcionalmente la magnitud absoluta de sus partes, o cuando finalmente revertimos la ordenación de las partes individuales, como cuando sustituimos la figura original por otra que se relaciona con ella como con su imagen en un espejo. Así, por ejemplo, la geometría euclideana es el estudio de las propiedades invariantes bajo el grupo de los así llamados movimientos rígidos, a saber, traslación, rotación y reflexión. La propiedad esencial preservada por este grupo de movimientos es la distancia, es decir, la característica de la isometría.[11]

De este modo, los verdaderos objetos de consideración e importancia para el geómetra no son los particulares, sino las propiedades que, a través de ciertos grupos de transformaciones, permanecen invariantes. Esto no significa que los geómetras

10 Un grupo se define como un conjunto G no vacío junto con una operación binaria (*), tal que: para cualesquiera g_1 y g_2 de G, $g_1 * g_2$ es un elemento de G; la operación es asociativa; el grupo contiene el elemento de identidad; y para cada elemento existe un inverso.

11 Una transformación f es una isometría de A sobre B si preserva las distancias. Para cualesquiera dos puntos P_1, P_2 de A, la distancia desde P_1 a P_2 es igual a la distancia desde $f(P_1)$ a $f(P_2)$.

implicados en estos desarrollos consideraran que los diagramas debían ser completamente desechados del campo de lo geométrico. Con lo que lucharon, antes bien, fue con la actitud antigua de restringirse a un único conjunto de representaciones diagramáticas para expresar el contenido de lo geométrico. Esto es, rechazaron el punto de vista de que cuando hablamos de puntos, rectas o planos, asociemos un único conjunto de representaciones intuitivas. En lugar de ello, podemos usar diversos diagramas para representar una relación abstracta, siendo la única condición que los mismos satisfagan dichas condiciones. Es más, tanto en el principio de continuidad de Poncelet, como en la teoría de los invariantes de Klein, la presencia de una variedad cambiante de figuras resulta esencial, dado que de allí es que emergen las propiedades compartidas por las mismas y que las caracterizan a todas como pertenecientes a una clase.

Entonces, si, como parecen proponer los geómetras, un diagrama particular es un signo complejo que expresa un conjunto de determinaciones abstractas, válidas para una clase de objetos, cabe preguntarse, ¿necesitamos algún tipo de facultad en orden a abstraer las condiciones particulares expresadas en el diagrama y *leer* las propiedades estructurales que el diagrama expresa? La respuesta, desde mi punto de vista, es si. Necesitamos pensar una clase de intuición que, al lado de la intuición meramente empírica, restringida a la aprehensión de las propiedades meramente incidentales de los diagramas, se oriente hacia las propiedades abstractas que los diagramas se encuentran instanciando. ¿Cómo podríamos caracterizar esta clase de intuición sofisticada? En este contexto, asumiré como mías algunas ideas de Husserl, aunque intentaré, al mismo tiempo, darles un sentido más claro relacionándolas con parte de la práctica geométrica a la que he referido hace un momento.

Según este autor, a toda ciencia le corresponde un dominio de objetos como campo de sus investigaciones, y a los conocimientos de esos objetos, esto es, a los juicios que se forman sobre ellos les corresponden, como fuente de su validez, ciertas intuiciones en las que esos objetos se dan de manera inmediata. En todas las ciencias empíricas, el modo mediante el cual los objetos se dan es la percepción. Y en la percepción los objetos aparecen individualizados desde el punto de vista espacio-temporal. En este "darse" espacio-temporal se manifiesta, para Husserl, la contingencia del ser individual, es decir, el hecho de que los objetos aparecen en determinadas relaciones y sin embargo podrían hacerlo de otras. Por ejemplo, un objeto que se da en determinado punto del tiempo podría muy bien darse en cualquier otro. Si bien podemos afirmar la validez de ciertas leyes naturales, estas no expresan más que ciertas regularidades fácticas que podrían ser enteramente de otra forma. Sin embargo, afirma Husserl, detrás de esta contingencia de los hechos naturales, existe un tipo de *necesidad esencial* que remite a una *universalidad esencial.* Esta necesidad no tiene que ver con las relaciones meramente empíricas en las que los objetos aparecen, sino con el conjunto de propiedades esenciales que definen a cada existente y que permanecen invariantes a través de los diferentes modos de aparecer los objetos. Dice Husserl:

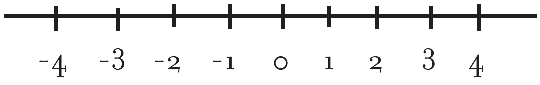
> Un objeto individual no es meramente individual; un "eso que está allí", un objeto que sólo se da una vez, tiene, en cuanto constituido en "sí mismo" de tal o cual manera, *su índole peculiar,* su dosis de predicables esenciales que necesitan convenirle (en cuanto "es tal como es en sí mismo") para que puedan convenirle otras determinaciones secundarias y relativas (Husserl, 1949, p. 19).

Es decir, que cada individuo posee un sustrato de propiedades esenciales común a muchos otros individuos y en virtud de las cuales pertenece a una determinada "región" o "categoría" de objetos. Por ejemplo, toda cosa material individual tiene su propia forma esencial que consiste en la "cosa material en general", con una determinación temporal, una figura y una materialidad en general.

De acuerdo con Husserl, al igual que los individuos y sus relaciones pueden ser aprehendidos en la intuición empírica, esto es, en la percepción, podemos también, partiendo de esa misma intuición empírica, aprehender los rasgos esenciales que dominan los hechos mediante un tipo de *intuición de esencias* (*Wesenerschauung*). En *Ideas* Husserl es ciertamente críptico a la hora de caracterizar el proceso de intuición eidética o ideación, utilizando principalmente analogías con la intuición empírica. Sin embargo, desde trabajos posteriores podemos hacernos una idea más cabal de lo que tenía en mente.

En la sección 9 de *Psicología fenomenológica* (1977) y en el capítulo 2 de la tercera parte de *Experiencia y juicio* (1973), el proceso de ideación es descrito como compuesto de los siguientes momentos: (1) comenzamos con un ejemplo o "modelo"; (2) se recorren activamente a una multiplicidad de variaciones del ejemplo; (3) se encuentra que ocurre un traslape como una "unidad sintética" a través de las variaciones; y (4) se identifica activamente esta unidad sintética como un invariante a través de las variaciones. Es en este estadio del proceso en el que hay una conciencia de una esencia, siendo esta aquello que todas las variaciones tienen en común, es decir, aquello que permanece invariante a través de las variaciones.

Tratemos de darle sentido a estas ideas de Husserl con un ejemplo sencillo que involucra puntos y líneas en la geometría euclidiana. Obsérvese los puntos sobre una línea numérica en la siguiente figura:



Podemos expresar las transformaciones de los puntos P_x sobre esta línea en términos de sus coordenadas ya que existe un isomorfismo entre los puntos y sus coordenadas. Ahora imagínese la siguiente transformación: muévase cada punto 4 unidades a la derecha. Bajo esta variación (técnicamente conocida como traslación) todos los puntos son cambiados. -2 se vuelve 2, -1 se vuelve 3, 0 se vuelve 4, 1 se vuelve 5, 2 se vuelve 6 etc. ¿Qué es lo que todos estos cambios tienen en común? Podríamos escribir una pequeña ecuación para expresarlo: la coordenada x' del punto correspondiente al punto P_x se relaciona a la coordenada x mediante la ecuación $x' = x + 4$. Bajo esta transformación no hay puntos invariantes. Si queremos podríamos generalizar desde esta base: cada ecuación de la forma $x' = x + a$ representa una traslación de los puntos P_x a los puntos $P_x' = P_x + a$. Pero ahora podemos preguntar, ¿hay algo que permanezca invariante bajo esta transformación? La respuesta es si. La *distancia* permanece invariante, pues $x_1 - x_2 = x'_1 - x'_2$ dado que vemos que esta última ecuación se sostiene aunque todos los puntos cambien de acuerdo a la fórmula $x' = x + a$.

Husserl dice que intuir un universal o esencia, que es una clase de conciencia de más alto nivel, debe relacionarse a una multiplicidad de variaciones. Si hay conciencia de una esencia debe darse una coincidencia entre las variaciones, la cual surge del acto de recorrer dichas variaciones en tanto tales. $x_1 - x_2 = x'_1 - x'_2$ (la distancia) surge como invariante para nosotros una vez que vemos, en el caso donde $x' = x + 4$ que hay una coincidencia entre las variaciones 4 - 2 y 8 - 6, 2 - 1 y 6 - 5, etc. Hay algo que esos diferentes pares de expresiones tienen en común aunque seamos conscientes de ellas en diferentes momentos. Contra este trasfondo de variaciones $x_1 - x_2 = x'_1 - x'_2$ emerge como una unidad sintética. Lo que tenemos aquí, en palabras de Husserl, es una "síntesis de identidad". La identidad es sintética en el sentido en que surge o puede producirse desde actividades mentales que están teniendo lugar en momentos diferentes. Debido a que esas actividades mentales tienen duración temporal y ocurren en diferentes momentos, debe haber alguna función cognitiva sintetizadora que está teniendo lugar a través de ellas. Husserl agrega que debe haber una identificación activa de esta unidad sintética como un invariante a través de las variaciones.

Conclusiones

A lo largo de estas páginas he intentado defender la compatibilidad entre el uso de diagramas en geometría y el carácter necesario de las pruebas basadas en los mismos, apelando a una clase especial de intuición. Esta intuición sofisticada, como la llamó Felix Klein,[12] no se concentra en las características particulares de los diagramas geométricos, sino en las propiedades esenciales que ellos se encuentran instanciando.

Mi argumento ha procedido a través del recurso al propio desarrollo de la geometría. Como hemos visto, esta se ha conducido hacia niveles siempre crecientes de abstracción aunque sin abandonar el recurso a los diagramas. La introducción de elementos imaginarios, entidades de razón, como las llamó Poncelet, objetos representados por una variedad de diagramas particulares que exhiben una regla de conexión que los unifica conceptualmente, así como los invariantes exhibidos a través de las transformaciones, habla a las claras del uso extendido de los diagramas en la propia práctica geométrica.[13] No obstante, como ya se habían planteado los antiguos, este recurso a las construcciones trae consigo el problema no menor de explicar cómo es posible que las pruebas obtenidas mediante ellas sean válidas universalmente. Es decir, ¿cómo extender el campo de validez del resultado obtenido mediante cierta construcción geométrica al campo total al que esa construcción pertenece? Aquí es donde entra la idea de una facultad especial de intuición que extiende la validez del resultado obtenido a través del diagrama particular a la clase completa de dichos objetos. Este diagrama particular, como representante de una clase, expresa las propiedades definitorias de la misma, las cuales son aprehendidas mediante una intuición que, por supuesto, no puede ser empírica. A su vez, este carácter no empírico de la intuición de esencias es lo que hace que la posible vaguedad de los diagramas no sea un obstáculo para la aprehensión de dichas propiedades, pues aun en la percepción ordinaria, podemos, mediante el recurso a la imaginación o aún en un estado de alucinación, reconocer las propiedades empíricas que posibilitan identificar un objeto. Por supuesto, habrá condiciones mínimas que un diagrama deberá cumplir en orden a ser considerado una instancia de una clase. La vaguedad del diagrama no puede ser tal que violente la regla contenida en el concepto del cual emana. En este sentido, los diagramas pueden ser diversos, pues no hay una única forma de instanciar un concepto. Como dijimos antes comentando la posición de Poncelet, diferentes figuras, desde el punto de vista sensible, pueden expresar un mismo concepto. Cuando vemos, mediante un grupo de transformaciones contínuas definidas *a priori* que una figura se convierte en otra pero que en esta última se preservan ciertos relaciones estructurales entre sus elementos que estaban en la primera, entonces decimos que ambas figuras expresan las propiedades de una misma clase. Para volver a mi ejemplo anterior, si somos capaces de comprender, a través de la apelación a los diagramas, que la distancia se preserva a través de traslaciones continuas, entonces en ese acto hemos aprehendido una esencia.

12 La expresión está tomada de su 1996 [1911].

13 Ha habido una interpretación generalizada de la obra de Hilbert, la cual proviene de la lectura de algunos empiristas lógicos, que afirma que desde el punto de vista del eminente matemático, la geometría hace completa abstracción de todo contenido intuitivo. Como ha mostrado cierta reciente revisión de la obra de Hilbert esta lectura es completamente infundada. Cfr. especialmente Majer (1995).

Agradecimientos. Agradezco al árbitro anónimo de *Scientiae Studia* por los valiosos comentarios realizados a la versión anterior de este trabajo.

Álvaro Julio Peláez Cedrés
Profesor de Filosofía del Departamento de Humanidades,
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa, México.
alvpelaez@hotmail.com

ABSTRACT

In this paper I consider the ancient problem of the dependence of synthetic geometry of the diagrams and the demand of necessity and universality for its results. I defend that the source of this necessity is *a priori*, a special kind of intuition that, in analogy to ordinary empirical intuition, restricted to the apprehension of the particular features of the objects, pass trough those to the apprehension of the shared properties of a class of objects. I will try to suggest that the postulation of that kind of intuition is not a mere philosophical device, but that it find evidence in the geometrical practice, especially in the development this discipline suffered in the nineteenth century, in hands of Poncelet and Klein, between others.

Keywords • Synthetic geometry. Construction. Schemata. Invariances. *A priori*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aristóteles. *Metafísica.* Madrid: Alianza Editorial, 2008a.
____. *Analíticos segundos*. Madrid: Gredos, 2008b.
Cedrés, A. J. P. A. Geometría, esquemas, e idealización: una módica defensa de la filosofía de la geometría de Kant. *Revista de Filosofía*, 64, p. 65-77, 2008.
Euclides. *Elementos de geometría.* Madrid: Gredos, 2000.
Ewald, W. (Ed.). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1996.
Heath, T. L. *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Clarendon Press, 1949.
Husserl, E. *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica*. México: FCE, 1949.
____. *Experience and judgment*. Evanston: Northwestern University Press, 1973.
____. *Phenomenological psychology*. Haag: Nijhoff, 1977.
Kant, I. *Crítica de la razón pura.* Madrid: Alfaguara, 1988.
Klein, F. On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences. In: Ewald, W. (Ed.). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1996 [1911]. p. 958-65.
Leibniz, G. W. *Philosophical papers and letters.* Dordrecht: Reidel, 1970.
Majer, U. Geometry, intuition and experience: from Kant to Husserl. *Erkenntnis,* 42, p. 261-85, 1995.
Newman, J. R. (Ed.). *La forma del pensamiento matemático.* Grijalbo: Barcelona, 1974 [1902].

Newton, I. *Mathematical principles of natural philosophy*. Berkeley: University of California Press, 1999 [1687].

Peirce, C. S. La esencia de las matemáticas. Traducción M. Sacristán. In: Newman, J. R. (Ed.). *La forma del pensamiento matemático.* Grijalbo: Barcelona, 1974 [1902]. p. 30-46.

Poncelet, J. V. *Traité de proprietés projectives des figures*. Paris: Bachelier, 1822.

Platón. *República*. Madrid: Grédos, 1986.

Proclo. *A commentary on the first book of Euclid's* Elements*.* Princeton: Princeton University Press, 1970.

Torretti, R. *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré.* Dordrecht: Reidel, 1978.