scientiæ studia, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 677-81, 2005

Albert Einstein

Geometría no euclídea y física[14]
(1926)

El estudio de las relaciones entre la geometría no euclídea y la física conduce necesariamente al de las relaciones entre la geometría y la física, en general. Estas últimas son las que me propongo examinar en esta ocasión, prescindiendo en lo posible de las cuestiones que son objeto de discusión de la filosofía.

No hay duda alguna que en los tiempos antiguos la geometría era una ciencia semi empírica, una especie de física primitiva. Un punto era un cuerpo de cuya extensión se hacia abstracción, una recta se definía como conjunto de puntos que aparecían confundidos al mirarlos en dirección conveniente, o como imagen de un hilo tenso. Se trataba, pues, de conceptos que, como ocurre siempre con los conceptos, no proceden exclusivamente de la experiencia, ni son consecuencia lógica de ella, pero que se establecen en relación directa con hechos reales. Las propiedades de puntos, rectas, igualdad de segmentos o de ángulos eran al mismo tiempo, desde el punto de vista del conocimiento, propiedades de ciertos fenómenos observados en objetos de la naturaleza.

La geometría así constituida se transformó en una ciencia matemática al ser admitido que la mayor parte de sus propiedades se podían deducir de un cierto número de ellas, los llamados axiomas, por vía puramente lógica, pues toda ciencia que se ocupa exclusivamente con relaciones lógicas entre objetos previamente dados, con arreglo a leyes preestablecidas, es matemática. La deducción de las relaciones adquiere entonces el mayor interés, pues la construcción independiente de un sistema lógico – no influido por la experiencia externa insegura, dependiente del azar– fue siempre un incentivo irresistible para el espíritu humano.

Como no reducibles lógicamente a otros, y testimonios de su origen empírico, quedaron en el sistema de la geometría sólo los conceptos fundamentales, punto, recta, segmento etc., y los llamados axiomas. El número de estos conceptos fundamentales lógicamente irreducibles y de axiomas fue reducido a un mínimo. El esfuerzo realizado para sacar a la geometría de la turbia esfera del empirismo, condujo entonces, inadvertidamente, a una transposición espiritual, análoga, en cierto modo, al proceso de deificación de los más admirados héroes de los tiempos mitológicos. Poco a poco se iban considerando como "evidentes" los conceptos fundamentales y axiomas de la geometría, esto es, como objetos y cualidades de representación dadas en el espíritu humano, de tal suerte que a los conceptos fundamentales de la geometría corresponden objetos de la intuición interna y que una negación de un axioma geométrico no puede realizarse sin agravio del buen sentido. Y ya en este punto se presenta el problema de la adaptabilidad de aquellos fundamentos a los objetos de la realidad, y aun podemos añadir que tal problema es, precisamente, el mismo que da lugar al concepto kantiano del espacio.

Un segundo motivo para el desarrollo de la geometría independientemente de sus fundamentos empíricos lo suministró la física. Según la concepción más depurada de la naturaleza de los cuerpos sólidos y de la luz, no existen objetos naturales cuyas propiedades correspondan exactamente a los conceptos fundamentales de la geometría euclídea. El cuerpo sólido no es rígido, y el rayo de luz no representa con justeza la línea recta ni, más generalmente, una figura unidimensional. Conforme a la ciencia moderna, ninguna experiencia corresponde sólo y exclusivamente a la geometría, sino a la geometría unida a la mecánica, óptica etc. Pero como, por otra parte, la geometría debe preceder a la física, puesto que las leyes de la última no pueden ser expresadas sin el auxilio de la primera, aparece la geometría como precediendo lógicamente a toda experiencia y a toda ciencia experimental. Así se llegó a que, no sólo para los matemáticos y filósofos, sino también para los físicos de principios del siglo XIX, los fundamentos de la geometría euclídea apareciesen como algo absolutamente inamovible.

Se puede añadir que durante todo el siglo XIX, cuando el físico no dirigía su atención directamente a la teoría del conocimiento, se le presentase la situación todavía más simple, más esquemática, más rígida. Su punto de vista inconsciente correspondía a estas dos tesis. Los conceptos y los teoremas fundamentales de la geometría euclídea son evidentes. Tomando ciertas precauciones realizaron el concepto geométrico de segmento por medio de cuerpos sólidos provistos de señales y el de línea recta con rayos de luz.

Superar esta situación era un trabajo duro que exigió un siglo aproximadamente. Es digno de notarse que dicho trabajo tuvo su origen en investigaciones matemáticas puras bastante antes de que el ropaje de la geometría euclídea fuese demasiado estrecho para la física. A los problemas del matemático pertenece el de fundar la geometría sobre un *minimum* de axiomas. Entre los axiomas de Euclides se encontró uno que pareció a los matemáticos de menor evidencia inmediata que los restantes y que se pretendió referir a éstos, es decir, demostrarlo por medio de ellos. Era el llamado axioma de las paralelas. Pero al ver que todos los esfuerzos encaminados a lograr tal demostración fracasaban, debió de surgir poco a poco la sospecha de que dicha demostración era imposible, es decir, que este axioma era independiente de los demás. Y, en efecto, se llegó a demostrar esta sospecha, pues se construyó un edificio sin contradicción lógica, el cual se distinguía de la geometría euclídea tan sólo en haber sustituido por otro el axioma de las paralelas. Haber acogido firmemente estos pensamientos y haberlos desarrollado con plena convicción será siempre mérito imperecedero de Lobatschewski por un lado y de Bolyai (padre e hijo) por otro.

De esta manera se afirmó en los matemáticos la convicción de que, junto a la geometría euclídea, existen otras con igual derecho lógico de existencia, y forzosamente habría de planearse la cuestión de si la física necesita tener como fundamento, precisamente, la geometría euclídea y no otra. También se presentó el problema en la forma más precisa: ¿es válida la geometría euclídea en el mundo físico o lo es otra geometría?

Se ha discutido mucho sobre si esta última pregunta tiene sentido. Para dilucidar la cuestión debe aceptarse con todas sus consecuencias uno de los dos puntos de vista. Puede aceptarse que el "cuerpo" geométrico es prácticamente realizado en principio por medio de los sólidos naturales, aunque con relación a la temperatura, exigencias mecánicas etc., hayan de tenerse en cuenta ciertas reglas; este es el punto de vista de los físicos prácticos. Entonces, al segmento de la geometría le corresponde un objeto natural, y con ello todos los teoremas de la geometría adquieren el carácter de enunciados sobre los cuerpos reales. Helmholtz fue el representante más caracterizado de este punto de vista y puede añadirse que sin él la teoría de la relatividad hubiera sido prácticamente imposible.

Pero se puede negar en principio la existencia de objetos que corresponden a los conceptos fundamentales de la geometría. En este supuesto, la geometría sola no contiene ningún enunciado sobre objetos reales; a éstos se refiere la geometría, conjuntamente con la física. Esta concepción, que permite la exposición sistemática de una física acabada del modo más perfecto, fue aceptada especialmente por Poincaré. Desde este punto de vista, el contenido total de la geometría es convencional: cuál sea la geometría preferida depende de cómo se pueda presentar una física "sencilla", concordante en sus aplicaciones con la experiencia.

Adoptaremos el primer punto de vista como el más en armonía con el estado actual de nuestro conocimiento. Desde él la pregunta relativa a la validez o invalidez de la geometría euclídea tiene un sentido claro. La geometría euclídea, y en general la geometría, mantiene, como antes, el carácter de ciencia matemática, cuando la deducción de sus teoremas a partir de los axiomas queda reducida a pura lógica; pero se convierte en una ciencia física cuando los axiomas contienen afirmaciones sobre objetos naturales, acerca de cuya exactitud tan sólo la experiencia puede decidir. Pero siempre tenemos necesidad de demostrar el hecho de que la idealización que existe en la ficción de los cuerpos rígidos (medibles) como cuerpos naturales pueda reconocerse un día que es injustificada o por lo menos que sólo está justificada en ciertos fenómenos naturales. La teoría general de la relatividad ya ha demostrado la no justificación de este concepto para un espacio de extensión tal que, en sentido astronómico, no sea pequeño. La teoría de los cuantos eléctricos podría demostrar la no justificación del concepto para extensiones del orden de magnitud atómica. Ya Riemann había reconocido la posibilidad de ambas cosas.

El mérito de Riemann con respecto al desarrollo de nuestras ideas sobre las relaciones entre la geometría y la física es doble. Primero creó la geometría elíptico-esférica, frente a la hiperbólica de Lobatschewski, mostrando así por vez primera la posibilidad de que el espacio geométrico pueda ser de extensión finita en sentido métrico. Esta idea fue comprendida pronto y condujo a la cuestión, muchas veces planteada, de si el espacio físico es finito.

Pero en segundo lugar tuvo Riemann el atrevido pensamiento de crear una geometría incomparablemente más general que la de Euclides y que las no euclídeas en sentido estricto. Así creó la "geometría de Riemann", la cual (como las geometrías no euclídeas en sentido estricto) sólo es euclídea en lo infinitamente pequeño: dicha geometría constituye la extensión de la teoría de superficies de Gauss a un continuo de un número cualquiera de dimensiones. Con respecto a esta geometría más general, las propiedades métricas del espacio y, en consecuencia, las posibilidades de situación de infinitos sólidos infinitamente pequeños en un campo finito no están determinadas por los axiomas de la geometría exclusivamente. En lugar de desanimarse por tal conocimiento, y para concluir una interpretación física de su sistema, Riemann tuvo el atrevido pensamiento siguiente: la manera de comportarse los cuerpos en presencia de realidades físicas podía ser condicionada por medio de fuerzas. Llegó, así, por medio de una especulación matemática pura al pensamiento de la inseparabilidad de la geometría y la física, cuyo pensamiento, setenta años más tarde, adquirió realidad con la teoría general de la relatividad, en virtud de la cual geometría y teoría de la gravitación se hunden en una sola unidad.

Después de que la geometría de Riemann fue simplificada por Levi-Civita con la introducción del concepto del corrimiento paralelo infinitesimal, ha sido más generalizada aún por Weyl y Eddington, con la esperanza de que con el nuevo sistema más amplio de conceptos pudiera tener cabida en ella las leyes electromagnéticas. Cualquiera que sea el éxito que se logre con estos esfuerzos, siempre podrá decirse con plena razón: las ideas derivadas de la geometría no euclídea se han comportado en la física teórica moderna como eminentemente fructíferas.

Notas

1 Esta tradução foi feita a partir de A. Einstein, "Induction and deduction in physics" (1919). Trad. do alemão por A. M. Adam. *Journal for General Philosophy of Science*, 31, p. 34-5, 2000.
2 Este é o texto de uma conferência proferida perante a Academia Prussiana de Ciências em 27 de janeiro de 1921. A parte final apareceu pela primeira vez em um *reprint* pela Springer, Berlim, 1921. Esta tradução foi feita a partir de Einstein, A. "Geometry and experience". In: Einstein, A. *Ideas and opinions*. Trad. por Sonja Bargmann. Baseado em *Mein Weltbild*, ed. por Carl Seelig. New York, Wings Books, s/d, p. 232-246. Esta tradução foi possibilitada por uma bolsa de pós-doutorado da FAPESP. (N. do T.)
3 Schlick, M. *Allgemeine Erkenntnislehre*, publicado em 1918, segunda edição revista publicada em 1925. Tradução em inglês: Schlick, M. *General theory of knowledge*. Trad. por Albert E. Blumberg. [Introdução por A. E. Blumberg e H. Feigl.] Chicago/LaSalle, Illinois, Open Court, 2002. (N. do T.)
4 O texto inglês usa "corpo" no singular – "*o corpo* da geometria axiomática", "*o corpo* praticamente rígido" – uso que foi mantido na tradução, embora em português seja mais natural empregar o plural: "a relação entre *os corpos* da geometria e *os corpos* praticamente rígidos". (N. do T.)
5 O texto inglês aqui diz *should* em vez de *could*, mas a idéia de Poincaré é que tanto uma modificação nas leis físicas quanto uma modificação na geometria são possibilidades admissíveis. (N. do T.)
6 O texto inglês traz *sub specie aeterni*. (N. do T.)
7 No texto inglês, o termo utilizado é *tract*. (N. do T.)
8 Em inglês, *intervals of clock-time*. (N. do T.)
9 Utilizamos a expressão "massa gravitante" para traduzir a expressão inglesa "*gravitating mass*", no sentido de massa que sente os efeitos da gravidade, visando distingui-la da noção de "massa gravitacional" (*gravitational mass*), que remete à questão da igualdade entre massa gravitacional e massa inercial. (N. do T.)
10 O texto inglês traz "above, beside, and behind one another". (N. do T.)
11 O texto inglês traz a expressão "to move a two-foot rule about on the plane *E*". (N. do T.)
12 "Coincidir" (no inglês, *coincide*) não no sentido de estarem superpostas, mas no sentido de ficarem adjacentes uma à outra. (N. do T.)
13 Em inglês, *crutch*. (N. do T.)
14 Este texto foi originalmente publicado pela *Revista Matemática Hispano-Americana*, série 2, p. 72-6, 1926. Ele é o resultado de uma comunicação feita por Einstein em 16 de abril de 1625 na Sociedad Científica Argentina, ancestral da Academia Argentina de Ciencias, de Buenos Aires. Trata-se de uma tradução ao espanhol do original em alemão, lido em francês pelo autor.