SCIENTIÆ studia, São Paulo, v. 11, n. 4, p. 893-936, 2013

Euclides

(século III a.C.)

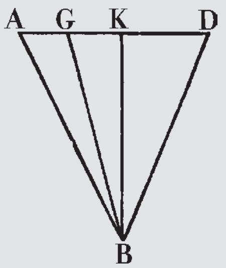
Óptica[1]

Definições [ὅροι]:[2]

1. Seja suposto [Ὑποκείσθω; *ponatur*] que linhas retas traçadas a partir do olho [ἀπὸ τοῦ ὄμματος; *ab oculo*] atravessam uma distância de grande magnitude [φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων; *ferri spatio magnitudinum inmensarum*].
2. E que a figura contida pelos raios visuais [ὑπὸ τῶν ὄψεων; *visibus*] é um cone, cujo vértice encontra-se no olho e sua base nas extremidades daquilo que é visto [τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων; *ad terminos conspectorum*].
3. E que aquilo sobre o qual os raios visuais incidem [αἱ ὄψεις προσπίπτωσι; *visus inciderit*] é visto [ὁρᾶσθαι; *videri*] e aquilo sobre o qual os raios visuais não incidem não é visto.
4. E que, a partir de um ângulo maior, aquilo que é visto [τὰ ὁρώμενα; *visa*] aparece [φαίνεσθαι; *apparere*] maior, a partir de um menor, menor, e a partir de ângulos de visão iguais, igual.
5. E que, a partir de raios visuais mais altos, aquilo que é visto aparece mais alto, a partir de <raios visuais> mais baixos, mais baixo.
6. E, similarmente, que, a partir de raios visuais mais à direita, aquilo que é visto aparece mais à direita, a partir de <raios visuais> mais à esquerda, mais à esquerda.
7. Enfim que, a partir de um maior número de ângulos, aquilo que é visto aparece mais distintamente [ἀκριβέστερον φαίνεσθαι; *perspicacius videri*].
[8. Todos os raios visuais têm a mesma velocidade – *omnes visus aequeveloces esse*.]
[9. Não é a partir de qualquer ângulo que uma coisa é vista – *non sub quocunque angulo rem videri*.][3]

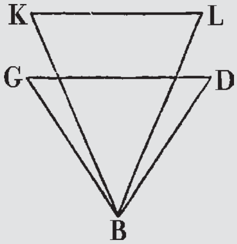
1. | α΄. [1.] Nada do que é visto é visto simultaneamente em sua totalidade.

Seja AD aquilo que é visto e seja B o olho, a partir do qual incidam os raios visuais [προσπιπτέτωσαν ὄψεις; *incidant visus*] BA, BG, BK e BD. Ora, uma vez que são conduzidos através de uma distância <Def. 1>, os raios visuais incidentes não incidem continuamente [συνεχεῖς; *continue*] sobre AD. De modo que existem intervalos [διαστήματα; *spatia*] em AD sobre os quais os raios visuais não incidem. Portanto, AD não será vista simultaneamente em sua totalidade <Def. 3>.[4] Todavia, parece que é vista [δοκεῖ ὁρᾶσθαι; *videtur videri*] simultaneamente <em sua totalidade> porque os raios visuais são velozmente transportados [ταχὺ παραφερομένων; *velociter transportatis*].



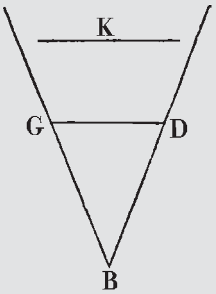
2. | β΄. [2.] Das magnitudes iguais [τῶν ἴσων μεγεθῶν; *aequalium magnitudinum*], as situadas mais próximas <ao olho> são vistas mais distintamente [ἀκριβέστερον ὁρᾶται; *perspicacious videntur*] do que as mais remotas.

Seja B o olho, sejam GD e KL as <magnitudes> que são vistas [ὁρώμενα; *visa*] e que sejam consideradas [νοεῖν; *intelligere*] como iguais e paralelas, das quais seja GD a mais próxima <ao olho>, e incidam os raios visuais BG, BD, BK e BL. Não se pode dizer, pois, que os raios visuais que incidem a partir do olho sobre KL passam pelos pontos G e D; pois, no triângulo BDLKGB, a linha reta KL seria maior do que a linha reta GD, mas foi suposto <que são> iguais. Portanto, GD é vista a partir de um número maior de raios visuais do que KL. Portanto, GD aparecerá [φανήσεται; *apparebit*] mais distintamente do que KL, pois, a partir de um maior número de ângulos de visão, aquilo que é visto aparece mais distintamente <Def. 7>.



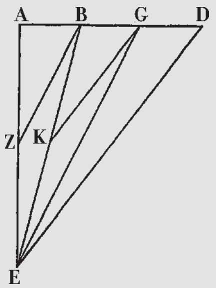
3. | γ΄. [3.] Tudo aquilo que é visto tem uma distância longitudinal [μῆκος ἀποστήματος; *longitudinem spatii*] que, <quando> alcançada, não é mais visto.

Sejam B o olho e GD aquilo que é visto [ὁρώμενον; *res visa*] [a partir de um determinado ângulo de visão mínimo] [*sub minimo angulo visui determinato*].[5] Afirmo que <a magnitude> GD, situada a certa distância <em relação ao olho>, não será mais vista. Pois, seja GD situada no espaço intermediário entre os raios visuais [ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων; *in intermedio spatio visuum*], além do qual seja K situada. Portanto, a partir de B, nenhum dos raios visuais incidirá sobre K. E aquilo sobre o qual os raios visuais não incidem não é visto <Def. 3>. Portanto, tudo aquilo que é visto tem uma distância longitudinal que, <quando> alcançada, não é mais visto.[6]



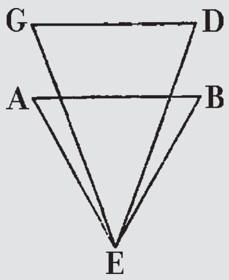
4. | δ΄. [4.] Dos intervalos iguais e situados sobre uma mesma linha reta, aqueles vistos a partir de uma distância maior aparecem menores.

Sejam AB, BG e GD intervalos iguais sobre uma mesma linha reta e seja traçada a perpendicular AE, sobre a qual seja posto [κείσθω; *iaceat*] o olho E. Afirmo que AB aparecerá maior do que BG e BG maior do que GD. Pois incidam os raios <visuais> [προσπιπτέτωσαν γὰρ ἀκτῖνες; *accidant enim radii*] EB, EG e ED e pelo ponto B seja traçada BZ paralela à linha reta GE. Ora, a linha reta AZ é igual à linha reta ZE, pois, uma vez que a linha reta BZ foi traçada paralelamente a GE, <que é> um lado do triângulo AEG,



segue-se que EZ : ZA :: BG : BA <*El.*, vi, Prop. 2>.[7] Portanto, como foi dito, AZ é igual a ZE <pois foi suposto que BG = BA>. Mas BZ é maior do que ZA, portanto, BZ é maior do que ZE <*El.*, v, Def. 5>. E o ângulo ZEB é maior do que o ângulo ZBE, mas o ângulo ZBE é igual ao ângulo BEG, portanto, também o ângulo ZEB é menor do que o ângulo BEG. Portanto, <o intervalo> AB será visto maior do que <o intervalo> BG <Def. 4>. Similarmente, se for traçada, através do ponto G, uma linha reta paralela a DE, <então> BG será visto maior do que GD.

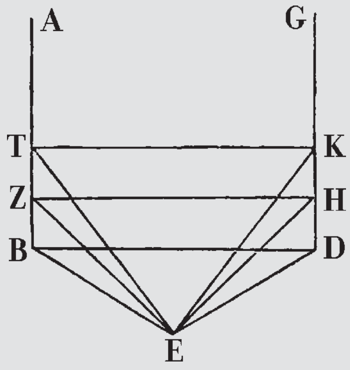
5. | ε΄. [5.] Magnitudes iguais, desigualmente distantes <do olho>, aparecem desiguais, e <aparece> sempre maior aquela que está mais próxima do olho.



Sejam AB e GD duas magnitudes iguais e seja E o olho, a partir do qual estejam essas <duas magnitudes iguais> desigualmente distantes e que seja AB a mais próxima. Afirmo que AB aparecerá maior <do que GD>. Incidam os raios <visuais> EA, EB, EG e ED. Portanto, uma vez que a partir de um ângulo maior aquilo que é visto aparece maior e que o ângulo AEB é maior do que o ângulo GED, AB aparecerá maior do que GD <Def. 4>.

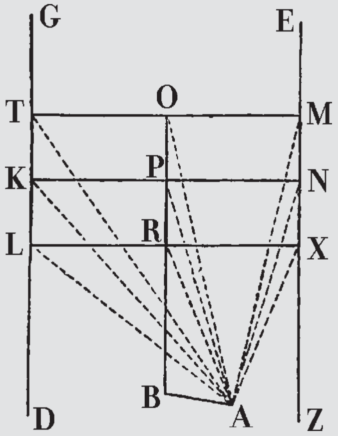
6. | ς΄. [6.] Paralelas, distantemente vistas, aparecem desiguais em latitude [ἀνισοπλατῆ; *inaequalis latitudinis*].[8]

Sejam AB e GD duas magnitudes paralelas e seja E o olho. Afirmo que AB e GD aparecem desiguais em latitude e que o intervalo mais próximo <ao olho> sempre <aparece> maior do que o mais distante. Incidam os raios <visuais> EB, EZ, EQ, ED, EH e EK e sejam unidas as linhas retas BD, ZH e QK. Ora, uma vez que o ângulo sob BED é maior do que o ângulo sob ZEH, então <o intervalo> BD aparece maior do que <o intervalo> ZH <Def. 4>. Novamente, uma vez que o ângulo sob ZEL é maior do que o ângulo sob QEK, então <o intervalo> ZH aparece maior do que <o intervalo> QK <Def. 4>. Portanto, o intervalo BD <aparece> maior do que ZH e <o intervalo> ZH <aparece> maior do que QK. Portanto, <magnitudes> paralelas não são igualmente vistas em seus intervalos, mas desigualmente.



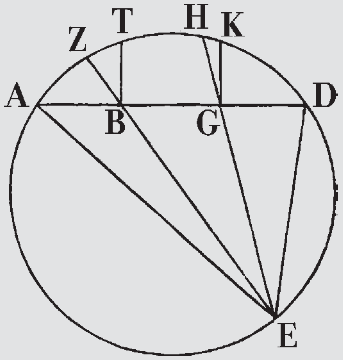
[7.] No caso de intervalos adjacentes elevados, seja baixada, a partir do ponto A, a perpendicular AB sobre o plano subjacente e sejam as paralelas LX, KN e QM. Afirmo que, do mesmo modo, as magnitudes GD e EZ aparecem desiguais <em latitude>.[9]

Pois seja traçada a perpendicular BR a partir do ponto B até LX, seja BR prolongada até O, incidam os raios <visuais> AL, AK, AT, AX, AN e AM e sejam unidas <as linhas retas> AR, AP e AO. Ora, uma vez que a linha reta AR foi unida a partir do ponto elevado A até RX, então AR é perpendicular a RX e AO à OM e AP à PN. Portanto, os triângulos ARX, APN e AOM são retangulares. Ora, uma vez que <os triângulos> são retangulares e que PN é igual a RX e PA é maior do que AR, então o ângulo sob XAR é maior do que o ângulo sob PAN <*El.*, I, Prop. 18>. Portanto, RX é vista maior do que PN <Def. 4>. Similarmente, RL é vista maior do que PK. Portanto, <o intervalo> LX inteiro é visto maior do que <o intervalo> KN inteiro. Portanto, também nesse caso as magnitudes são vistas como desiguais <em latitude>.



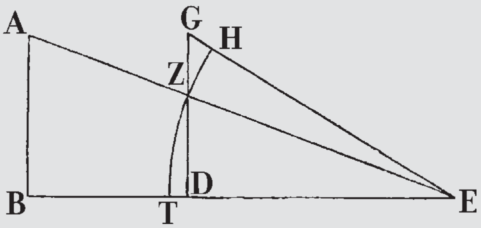
7. | ζ′. [8.] Magnitudes iguais <dispostas> sobre a mesma linha reta, <quando> situadas não uma após a outra e desigualmente distantes do olho,[10] aparecem desiguais.

Sejam AB e GD duas magnitudes iguais sobre a mesma linha reta AD, <dispostas> não uma após a outra e desigualmente distantes do olho E, e incidam os raios <visuais> EA e ED e que EA seja maior do que ED. Afirmo que <a magnitude> GD aparecerá maior do que <a magnitude> AB. Incidam os raios <visuais> EB e EG e seja circunscrito o círculo AED em torno do triângulo AED <*El.*, IV, Prop. 5>. E sejam as linhas retas BZ e GH prolongadas das linhas retas EB e EG e, a partir dos pontos B e G, sejam elevadas, em ângulos retos, as linhas retas iguais BT e GK. Ora, AB é igual a GD, mas também o ângulo sob ABT é igual ao ângulo sob DGK. Portanto, o arco [ἡ περιφέρεια; *periferia*] AT é igual ao arco DK <*El.*, III, Prop. 26>. Portanto, o arco KD é maior do que o arco ZA <*El.*, I, Ax. 8>. Portanto, o arco HD é muito maior do que o arco ZA. Mas o ângulo sob AEZ está <situado> sobre o arco ZA e o ângulo sob HED está sobre o arco HD. Portanto, o ângulo sob HED é maior do que o ângulo sob AEZ. Mas <a magnitude> AB é vista partir do ângulo sob AEZ e <a magnitude> GD é vista a partir do ângulo sob HED. Portanto, GD aparece maior do que AB <Def. 4>.



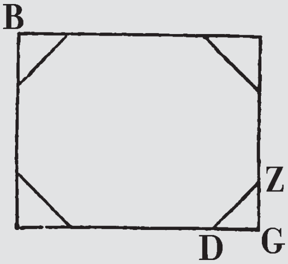
8. | η΄. [9.] Magnitudes iguais e paralelas, desigualmente distantes do olho, não são vistas na razão [ἀναλόγως; *proportionaliter*] de suas distâncias <a partir do olho>.[11]

Sejam duas magnitudes, AB e GD, desigualmente distantes do olho E. Afirmo que não é o caso, tal como parece acontecer [ὡς φαίνεται ἔχον; *sicut apparet habens*], que GD : AB :: BE : ED. Pois incidam os raios <visuais> AE e EG e, com centro E e distância EZ, seja descrito o arco HZT <*El.*, I, Post. 3>. Ora, uma vez que o triângulo EZG é maior do que a parte EZH e que o triângulo EZD é menor do que a parte EZT, então o triângulo EZG está para a parte EZH numa razão maior do que o triângulo EZD está para a parte EZT <*El.*, v, Def. 7>. E, alternadamente [ἐναλλὰξ; *permutatim*], o triângulo EZG está para o triângulo EZD numa razão maior do que a parte EZH está para a parte EZT <*El.*, v, Def. 12>. E, por composição [συνθέντι; *componenti*], o triângulo EGD está para o triângulo EZD numa razão maior do que a parte EHZ está para a parte EZT <*El.*, v, Def. 14>. Mas o triângulo EDG : o triângulo EZD :: a linha reta GD : a linha reta DZ <*El.*, VI, 2>. Ora, a linha reta GD é igual à linha reta AB e AB : DZ :: BE : ED. Portanto, a linha reta BE está para a linha reta ED numa razão maior do que a parte EHT está para a parte EZT. E como a parte de um está para a parte do outro, assim o ângulo sob HET está para o ângulo sob ZET. Portanto, a linha reta BE está para a linha reta ED numa razão maior do que o ângulo HET está para o ângulo ZET. E GD é vista a partir do ângulo sob HET e AB é vista a partir do ângulo sob ZET. Portanto, magnitudes iguais não são vistas na razão de suas distâncias.



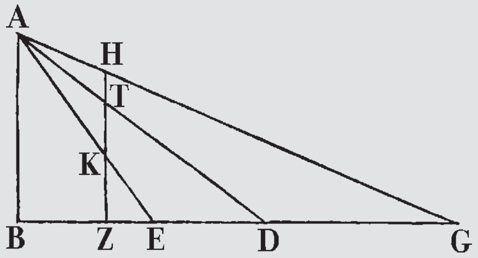
9. | θ΄. [10.] Magnitudes retangulares [Τὰ ὀρθογώνια μεγέθη; *Rectangulae magnitudes*], distantemente vistas, aparecem arredondadas [περιφερῆ; *periferiae*].[12]

Seja o retângulo BG situado em posição elevada e distantemente visto. Ora, uma vez que tudo aquilo que é visto tem uma distância longitudinal que, alcançada, não é mais visto <Prop. 3>, então o ângulo G não é visto, mas somente os pontos D e Z aparecem. Similarmente, isso também acontece em cada um dos ângulos remanescentes. De modo que o todo aparecerá arredondado.



10. | ι´. [11.] As partes mais remotas de planos situados abaixo do olho aparecem mais altas.

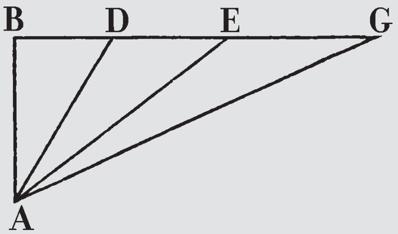
Seja A o olho situado [κείμενον; *iacens*] mais alto do que <o plano> BEG e incidam os raios <visuais> AB, AE, AD e AG, dos quais seja <o raio visual> AB perpendicular sobre o plano subjacente. Afirmo que <a parte> GD aparece mais alta do que DE e DE mais alta do que BE. Pois seja tomado um ponto qualquer Z sobre BE e traçada a perpendicular ZH. Uma vez que os raios visuais [αἱ ὄψεις; *visus*] incidem antes [πρότερον; *primum*] sobre ZH do que sobre ZG, que incida <então>, em ZH, AG no ponto H, AD no ponto T e AE no ponto K. Ora, uma vez que o ponto H é mais elevado do que o ponto T e o ponto T mais do que o ponto K, e que <o ponto> G está na mesma <linha reta> que <o ponto> H, <o ponto> D na mesma <linha reta> que <o ponto> T e <o ponto> E na mesma <linha reta> que <o ponto> K, e que <a parte> DG aparece por <meio dos raios visuais> AG e AD, enquanto <a parte> DE aparece por AD e AE, então <a parte> GD aparece mais alta do que <a parte> DE <Def. 5>. Similarmente, também DE aparecerá mais alta do que BE, pois aquilo que é visto a partir de raios visuais mais altos aparece mais alto.



E <disso> é manifesto [φανερόν; *manifestum*] que aquilo que é visto em um plano elevado aparecerá côncavo.[13]

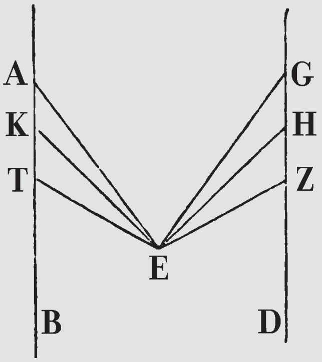
11. | ια´. [12.] As partes mais remotas de planos situados acima do olho aparecem mais baixas.

Seja A o olho situado mais baixo do que o plano BG e incidam os raios <visuais> BA, AD, AE e AG, dos quais seja <o raio> AB perpendicular ao plano subjacente. Afirmo que <a parte> GE aparece mais baixa do que <a parte> ED. Ora, de acordo com o teorema anteriormente exposto, o raio <visual> AG é mais baixo do que AE, AE <mais baixo> do que AD e AD <mais baixo> do que AB <Prop. 10>. Mas <a parte> GE é vista [βλέπεται; *videtur*] por <meio dos raios visuais> GA e AE, enquanto <a parte> ED <é vista> por <meio dos raios visuais> EA e AD, e <a parte> DB <é vista> por <meio dos raios> DA e BA. Portanto, <a parte> GE aparece mais baixa do que <a parte> ED e ED <mais baixa> do que DB <Def. 5>.



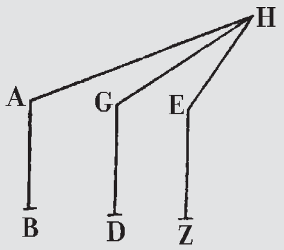
12. | ιβʹ. [13.] Das <magnitudes> que têm longitude [μῆκος ἐχόντων; *habentium longitudinem*],[14] aquelas à direita parecem [δοκεῖ; *videntur*] inclinadas [παρῆχθαι; *educi*] à esquerda e aquelas à esquerda, à direita.

Sejam AB e GD duas magnitudes visíveis [ὁρώμενα μεγέθη; *conspectae magnitudines*] e E o olho, a partir do qual incidam os raios <visuais> ET, EK, EA, EZ, EH e EG. Afirmo que <os raios visuais> EZ, EH e EG parecem desviar-se [μετῆχθαι; *protractae*] à esquerda e ET, EK e EA, à direita. Ora, uma vez que EZ está mais à direita do que EH e EL mais à direita do que EG, então EG parece desviar-se à esquerda de EL e EH à esquerda de EZ <Def. 6>. Similarmente, <os raios visuais> EA, EK e ET parecem desviar-se à direita.



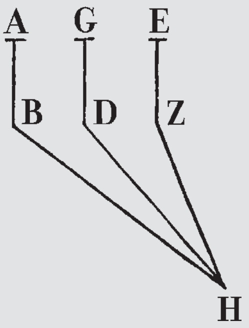
13. | ιγʹ. [14.] Das magnitudes iguais e situadas abaixo do mesmo olho [τὸ αὐτο ὄμμα; *eodem oculo*], as mais afastadas aparecem mais altas.

Sejam AB, GD e EZ magnitudes iguais, seja o olho H situado acima das magnitudes e incidam os raios <visuais> HA, HG e HE. Afirmo que AB aparece mais alta do que GD e GD mais alta do que EZ. Pois uma vez que <o raio visual> HA é mais alto do que HG e que HG é mais alto do que HE e que os pontos A, G e E estão sobre o mesmo <plano> que os raios HA, HG e HE e que as magnitudes AB, GD e EZ estão no mesmo <plano> que os pontos A, G e E, então <a magnitude> AB aparece mais alta do que GD e GD mais alta do que EZ <Prop. 10>.



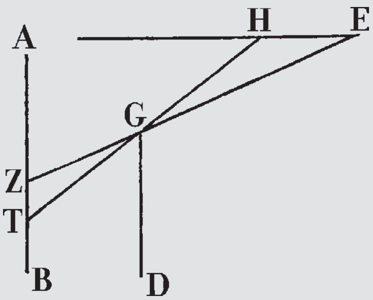
14. | ιδʹ. [15.] Das magnitudes iguais e situadas acima do olho, as mais afastadas aparecem mais baixas.

Sejam AB, GD e EZ magnitudes iguais situadas acima do olho H. Afirmo que AB aparece mais baixa do que GD e GD mais baixa do que EZ. Pois incidam os raios <visuais> HB, HD e HZ. Ora, uma vez que o raio <visual> HB é mais baixo do que HD e HD mais baixo do que HZ, mas os pontos B, D e Z estão sobre o mesmo <plano> que <os raios> HB, HD e HZ e as magnitudes AB, GD e EZ <estão> no mesmo <plano> que <os pontos> B, D e Z, então AB aparece mais baixa do que GD e GD mais baixa do que EZ <Prop. 11>.



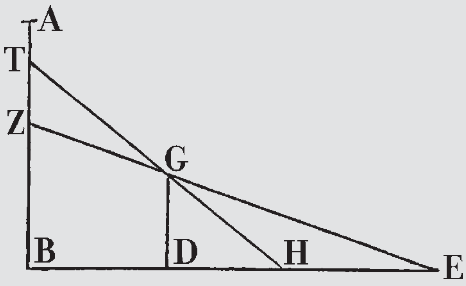
15. | ιε΄. [16.] Quaisquer <magnitudes> situadas abaixo do mesmo olho, uma mais alta do que a outra, quando o olho se aproxima, a <magnitude> que aparece mais alta [τὸ ὑπερφαινόμενον; *superapparens*] aparece [φαίνεται; *apparet*] maior por uma <magnitude> maior, e quando <o olho> se afasta, <a magnitude que aparece mais alta aparece maior> por uma <magnitude> menor.

Sejam AB e GD duas magnitudes desiguais, das quais AB seja a maior, e seja E o olho, a partir do qual incida o raio <visual> EZ que passa por G. Ora, uma vez que ZB e GD aparecem abaixo do olho e abaixo do raio EZ, então AB aparece acima de GD pela magnitude AZ. Seja o olho movido [μετακείσθω; *transmoveatur*] para mais próximo <das magnitudes> e que seja H, a partir do qual incida o raio HT que passa por G. Ora, uma vez que GD e TB aparecem abaixo do olho e abaixo do raio HT, então <a magnitude> AB aparecerá mais alta do que <a magnitude> GD pela magnitude AT. E, a partir de E, AB era vista maior pela AZ, e AT é maior do que AZ. Portanto, quando o olho se aproxima, a <magnitude> que aparece mais alta aparece maior por uma <magnitude> maior e, quando o olho se afasta, <a magnitude que aparece mais alta aparece maior> por uma <magnitude> menor.



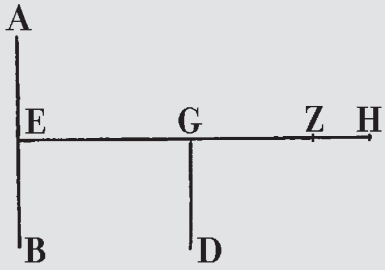
16. | ις΄. [17.] Quaisquer magnitudes desiguais situadas acima do olho, uma mais alta do que a outra, quando o olho se aproxima, a magnitude que aparece mais alta aparece maior por uma <magnitude> menor, e quando <o olho> se afasta, <a magnitude que aparece mais baixa aparece maior> por uma <magnitude> maior.

Sejam AB e GD magnitudes desiguais, das quais AB seja a maior, e seja E o olho, a partir do qual incida o raio <visual> EZ que passa por G. Ora, uma vez que as magnitudes ZB e GD estão contidas [ἀπολαμβάνεται; *continetur*] sob o raio EZ, então <as magnitudes> BZ e GD aparecem iguais entre si <Def. 4>. Portanto, a magnitude AB aparece maior do que a magnitude GD pela magnitude AZ. Seja o olho movido para mais próximo <das magnitudes> e que seja H, a partir do qual incida o raio HT que passa por G. Ora, uma vez que <as magnitudes> BT e GD estão contidas sob o raio HT e <as magnitudes> ZB e GD estão contidas sob o raio EZ e que <a magnitude> ZA é maior do que AT, então, quando o olho se aproxima, a <magnitude> que aparece mais alta aparece maior por uma <magnitude> menor, mas quando <o olho> se afasta, por uma maior.



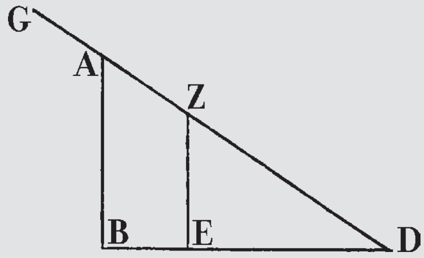
17. | ιζ΄. [18.] Quaisquer <magnitudes> desiguais, uma mais alta do que a outra, ao se aproximar e afastar o olho da magnitude menor em linha reta, a <magnitude> que aparece mais alta sempre parece [ἀεὶ δόξει; *semper videbitur*] exceder a <magnitude> menor por uma <magnitude> igual.

Sejam AB e GD duas magnitudes desiguais, das quais AB seja a maior, e seja situado o olho Z em linha reta com a extremidade [τῷ πέρατι; *termino*] G da magnitude GD. Afirmo que, ao aproximar e afastar em linha reta o olho Z, parecerá que AB aparece mais alta do que GD por uma <magnitude> igual. Pois incida o raio <visual> ZE que passa por G. Portanto, AB aparece mais alta do que GD por <a magnitude> AE. Seja o olho movido para mais distante e em linha reta, e que seja H. Portanto, a partir do olho H, o raio <visual> incidente [ἡ ἀκτὶς προσπίπτουσα; *radius accidens*] passa pelo ponto G e continua até o ponto E, e <assim> AB aparecerá mais alta do que GD pela mesma <magnitude>.



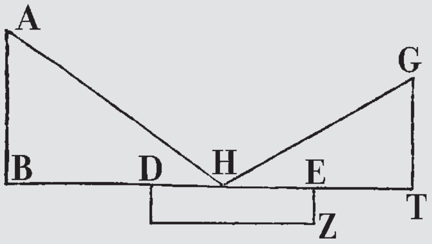
18. | ιη΄. [19.] Conhecer [γνῶναι; *cognoscere*] qual o tamanho [πηλίκον ἐστίν; *quanta sit*] de uma dada altitude quando o Sol está aparente [φαίνοντος; *apparente*].

Seja AB a dada altitude e seja requerido conhecer o quanto é seu tamanho. Seja D o olho, seja GA um raio de Sol [ἡλίου ἀκτὶς; *solis radius*] que coincide com a extremidade da magnitude AB e seja <esse raio> prolongado até o olho D. E seja DB a sombra de AB. E seja posta outra magnitude, EZ, que não seja iluminada de modo algum pelo raio <de Sol> e que com este coincida em sua extremidade Z. Assim, outro triângulo, EZD, foi aplicado no triângulo ABD. Portanto, DE : ZE :: DB : BA <*El*., VI, 2>. Mas a razão [ὁ λόγος; *proportio*] de DE para EZ é conhecida [γνώριμος; *nota*]; portanto, a razão de DB para BA também é conhecida. E DB é conhecida. Portanto, AB também é conhecida.



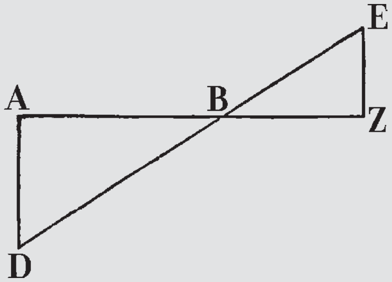
19. | ιθ΄. [20.] Conhecer qual o tamanho de uma dada altitude quando não há Sol <aparente>.

Seja a altitude AB, seja G o olho e que seja requerido conhecer o quanto é o tamanho de AB quando não há Sol. Seja posto um espelho [κάτοπτρον; *speculum*] DZ e seja DB prolongada em linha reta até coincidir com a extremidade B da magnitude AB. E, a partir do olho G, incida o raio <visual> GH, o qual seja refletido [ἀντανακεκλάσθω; *refringatur*] até coincidir com a extremidade A da magnitude AB, seja prolongada <a linha reta> DE até ET e, a partir de G, seja traçada GT perpendicular sobre ET. Ora, GH é o raio <visual> incidente e HA é o raio <visual> refletido e as reflexões são em ângulos iguais [πρὸς ἴσας γωνίας ἀνακεκλασμέναι εἰσίν; *ad aequales angulos repercussi erunt*], como é dito na *Catóptrica* [ὡς ἐν τοῖς Κατοπτρικοῖς λέγεται; *sicut in catoptricis dicitur*].[15] Portanto, o ângulo sob GHT é igual ao ângulo sob AHB. Mas também o ângulo sob ABH é igual ao ângulo sob GTH; portanto, o <ângulo> restante sob HGT é igual ao <ângulo> restante sob HAB <*El.*, i, Prop. 26>. Portanto, o triângulo AHB é equiângulo com o triângulo GHT. E os lados de triângulos equiângulos são proporcionais. Portanto, GT : TH :: AB : BH <*El.*, vi, Prop. 4>. Mas a razão de GT para TH é conhecida; portanto, a razão de BA para BH também é conhecida. E HB é conhecida. Portanto, AB também é conhecida.



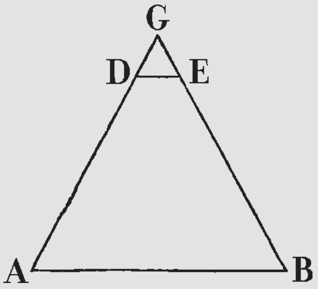
20. | κ΄. [21.] Conhecer qual o tamanho de uma dada profundidade.

Seja AD a dada profundidade, seja E o olho e que seja requerido conhecer o quanto é o tamanho da profundidade. Incida na visão o raio de Sol [προσπιπτέτω τῇ ὄψει ἡλίου ἀκτὶς; *accidat solis radius*] ED que coincide com o plano no ponto B e com a profundidade em D. E, a partir de B, seja BZ prolongada em linha reta e, a partir de E, seja traçada EZ perpendicular à linha reta BZ. Ora, uma vez que o ângulo EZB é igual ao ângulo BAD e o ângulo ABD é igual ao ângulo EBZ, então também o terceiro ângulo BEZ é igual ao ângulo ADB <*El.*, i, Prop. 26>. Portanto, o triângulo ADB é equiângulo com o triângulo BEZ. Portanto, os lados serão proporcionais. Portanto, EZ : ZB :: DA : AB <*El.*, vi, Prop. 4>. Mas a razão de EZ para ZB é conhecida; portanto, a razão de DA para AB também é conhecida. E AB é conhecida. Portanto, AD também é conhecida.



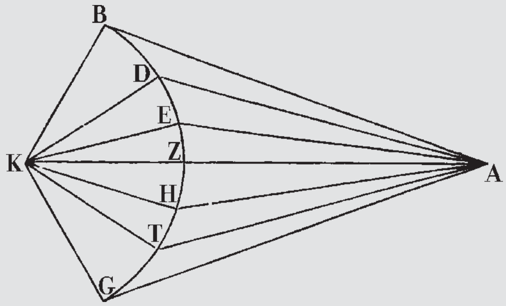
21. | κα΄. [22.] Conhecer qual o tamanho de uma dada longitude.

Seja AB a longitude dada, seja G o olho e que seja requerido conhecer o quanto é o tamanho da longitude AB. Incidam os raios <visuais> GA e GB, seja tomado, próximo ao olho G, um ponto qualquer D sobre o raio e seja traçada, a partir do ponto D, a linha reta DE paralela a AB. Ora, uma vez que DE foi traçada paralelamente a BA, um dos lados do triângulo ABG, então GD : DE :: GA : AB <*El.*, vi, Prop. 2>. Mas a razão de GD para DE é conhecida; portanto, a razão de AG para AB também é conhecida. E AG é conhecida. Portanto, AB também é conhecida.



22. | κα΄. [23.] Se um arco de círculo [κύκλου περιφέρεια; *periferia circuli*] for posto no mesmo plano em que está o olho, o arco de círculo aparece como uma linha reta.

Seja BG um arco de círculo situado no mesmo plano que o olho A, a partir do qual incidam os raios <visuais> AB, AD, AE, AZ, AH, AT e AG. Afirmo que o arco BG aparece como uma linha reta. Seja tomado o centro do arco de círculo <*El.*, iii, Prop. 1>, e que seja K, e sejam unidas as linhas retas KB, KD, KE, KZ, KH, KT e KG. Ora, uma vez que <a linha reta> KB é vista a partir do ângulo sob KAB e <a linha reta> KD <é vista> a partir do ângulo sob KAD, então KB aparecerá maior do que KD, KD <aparecerá maior> do que KE e KE <aparecerá maior> do que KZ <Def. 4>; e, do outro lado, <a linha reta> KG aparecerá maior do que KT, KT do que KH e KH do que KZ.†[16] Por isso, KA permanecendo em linha reta, BG é sempre perpendicular. E o mesmo acontecerá também do <lado> côncavo do arco.



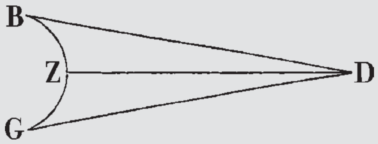
Alternativamente.

Também é possível dizer sobre esses mesmos raios visuais que o menor é aquele <que está> entre o olho A e o diâmetro e que o <o raio visual> mais próximo <ao menor raio visual> é sempre menor do que o <raio visual> mais afastado. O mesmo acontece quando AZ é perpendicular <ao diâmetro>. Por isso, o arco envia o aspecto[17] de uma <linha> reta [φαντασίαν εὐθείας ἀποστέλλει ἡ περιφέρεια; *phantasiam rectae emittit periferia*], sobretudo se <o arco> aparece a uma distância tão grande <de modo> que não percebemos [μὴ συναισθάνεσθαι; *non percipimus*] sua convexidade. Por isso, cordas não muito esticadas, <quando> vistas de lado, parecem ceder, mas <quando> vistas de baixo, aparecem retas, e também são retas as sombras das argolas situadas no mesmo plano que aquilo que as ilumina [τῷ φωτίζοντι; *illuminanti*].

Alternativamente.

Se um arco de círculo for posto no mesmo plano que o olho, o arco de círculo aparece como uma linha reta.

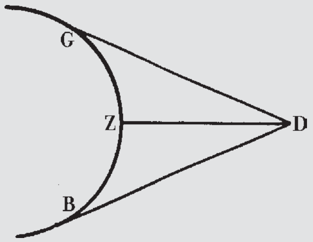
Seja BG o arco de círculo e, no mesmo plano que o arco BG, seja D o olho, a partir do qual incidam os raios <visuais> DB, DZ e DG. Assim, uma vez que nada do que é visto é visto simultaneamente em sua totalidade <Prop. 1>, então BZ é uma linha reta. Similarmente, também ZG <é uma linha reta>. Portanto, todo o arco BG parecerá uma linha reta.[18]



*

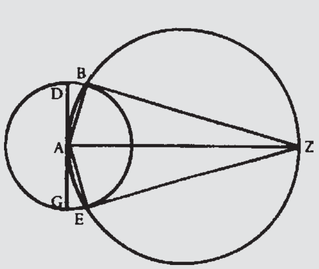
[24. Se uma circunferência [*periferia*] for posta no mesmo plano que o olho, não aparece todo um semicírculo [*semicircumferencia*].

Ora, se BZG fosse um semicírculo, com <as linhas retas> DB e DG sendo linhas tangentes ao círculo, <então> cada uma dessas <linhas retas> formaria um ângulo reto com o diâmetro BG, de acordo com o <teorema> 17 do terceiro <livro> de Euclides. Portanto, o triângulo BGD terá dois ângulos retos, o que é impossível.[19]



25. O mais longo raio <visual> [*longior radius*] que alcança uma esfera será como uma linha reta tangente [*quasi linea contingens erit*].

Seja DG uma esfera vista pelo olho Z e com centro <em A> e distante do olho, seja prolongada uma linha reta a partir do centro da esfera até o olho, seja produzido um círculo e seja seu diâmetro a linha reta AZ, e que prossigam os raios <visuais> ZE e ZB até as interseções entre os círculos [*ad sectiones circulorum*]. Afirmo que esses <raios> são mais longos do que aqueles <raios> que não são tangentes à esfera. Sejam prolongadas, a partir do centro da esfera até as extremidades dos raios <visuais> tangentes, duas linhas retas e que façam dois

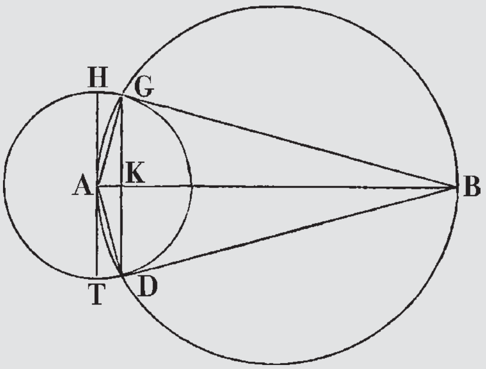


ângulos retos com os raios aplicados [*radiis applicatis*]. Assim, cada um dos ângulos cai em um semicírculo <*El*., III, Prop. 31>.[20] Portanto, as linhas retas aplicadas à circunferência lhe serão tangentes, uma vez que fazem ângulos retos com as retas traçadas a partir do centro <*El*., III, Prop. 16, Corol.>. Portanto, prolongadas, elas não serão secantes ao círculo.[21] Pois, se caíssem dentro <do círculo>, seria em frente à cauda de pavão [*esset contra caudam pavonis*]. Mas, se caíssem fora <do círculo>, uma vez que as duas *et cetera*. Portanto, se um raio <visual> mais longo <do que as linhas retas tangentes> alcançasse <o círculo>, <então> duas linhas retas compreenderiam uma superfície, o que é impossível <*El*., I, Ax. 9>. Portanto, resta <a hipótese de> que as linhas retas mais longas <que alcançam o círculo> são tangentes.][22]

*

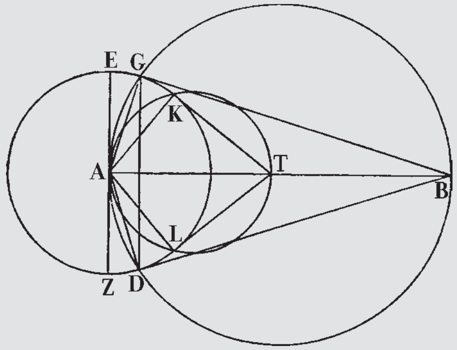
23. | κγʹ. [26.] Uma esfera vista de qualquer maneira [ὁπωσδηποτοῦν ὁρωμένης; *qualitercunque visae*] por um olho aparece sempre menor do que um hemisfério e a própria parte vista da esfera aparece como uma circunferência de círculo [κύκλου περιφέρεια; *circulo contenta*].

Seja uma esfera com centro em A e seja B o olho. E seja unida AB e prolongado o plano que passa por BA. Portanto, <o plano> produzirá como seção um círculo.[23] Seja produzido o círculo GDTH e, em torno do diâmetro AB, seja descrito o círculo GBD e unidas as linhas retas GB, BD, AD e AG. Ora, uma vez que AGB é um semicírculo, então o ângulo AGB é reto <*El*., III, Prop. 31>; e, similarmente, também o ângulo BDA <é reto>. Portanto, GB e BD são tangentes <*El*., III, Prop. 16, Corol.>.[24] Seja unida GD e seja traçada HT paralela a GD através do ponto A <*El*., I, Prop. 31>. Portanto, são retos os <ângulos> em K. Assim, se o triângulo BGK for girado [περιενεχθέν; *circumagatur*] em torno do ângulo reto K, enquanto <a linha reta> AB permanece fixa, e for conduzido para a mesma posição na qual começou a girar, <então> BG tocará a esfera em um ponto e KG produzirá como seção um círculo. Portanto, um arco de círculo será visto na esfera. Afirmo, então, que <o arco visto> é menor do que um hemisfério. Pois, uma vez que HT é um semicírculo, GD é menor do que um semicírculo. E a mesma parte da esfera é vista pelos raios <visuais> BG e BD. Portanto, GD é menor do que um hemisfério e é vista a partir dos raios <visuais> BG e BD.



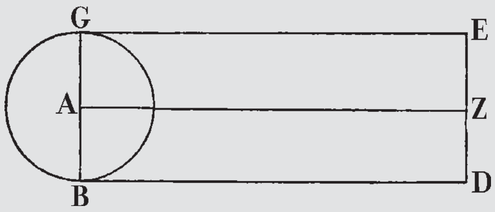
24. | κδ΄. [27.] Quando o olho se aproxima da esfera, a parte vista <da esfera> será menor, mas parecerá que é vista maior.

Seja uma esfera com centro em A e seja B o olho, a partir do qual seja unida a linha reta AB. E seja o círculo GBD circunscrito em torno de AB, seja traçada, a partir do ponto A, a linha reta EZ perpendicular à linha reta AB e seja prolongado o plano que passa por EZ e AB. Portanto, <esse plano> produzirá como seção um círculo. Seja GEZD <esse círculo> e sejam unidas GA, AD, DB, BG e GD. Ora, de acordo com o <teorema> anterior, são retos os <ângulos com vértices> nos pontos G e D. Portanto, <as linhas retas> BG e BD, que são raios <visuais>, são tangentes e, a partir do olho B, a parte GD da esfera é vista <Prop. 23>. Seja o olho movido para mais próximo da esfera, que seja T, a partir do qual seja unida a linha reta TA, seja descrito o círculo ALK e sejam unidas <as linhas retas> TK, KA, AL e LT. Similarmente, a partir do olho T, a parte KL da esfera é vista, enquanto que, a partir de B, <a parte> GD era vista. E KL é menor do que GD. Portanto, quando o olho se aproxima <da esfera>, aquilo que é visto é menor, mas parece que aparece maior [δοκεῖ δὲ μεῖζον φαίνεσθαι; *videtur autem maius apparere*], pois o ângulo sob KTL é maior do que o ângulo sob GBD <Def. 4>.



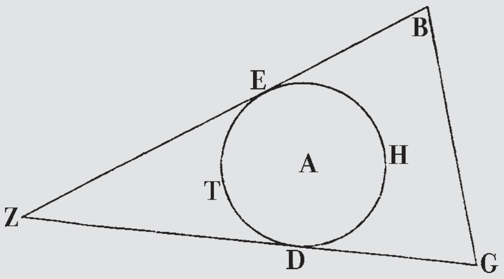
25. | κε΄. [28.] De uma esfera vista pelos dois olhos, se o diâmetro da esfera for igual à linha reta que separa os olhos um do outro, <então> todo seu hemisfério será visto.

Seja uma esfera com centro em A, seja descrito na esfera, em torno do centro A, o círculo BG, seja traçado seu diâmetro BG, sejam traçadas, a partir de B e G, as perpendiculares BD e GE e seja a linha reta DE <traçada> paralela a BG, sobre a qual sejam postos os olhos D e E. Afirmo que todo o hemisfério será visto. Através do ponto A, seja traçada AZ paralela a cada uma das linhas retas BD e GE. Portanto, ABZD é um paralelogramo <*El*., 1, Def. 22>. Assim, se <o paralelogramo> for girado, enquanto <a linha reta> AZ permanece fixa, e for conduzido para a mesma posição na qual começou a girar, <então o paralelogramo> começará <a girar> a partir de B e chegará a G e <novamente> em B, e <portanto> a figura descrita pela linha reta AB será um círculo que passa pelo centro da esfera. Portanto, a partir dos olhos D e E, um hemisfério será visto.



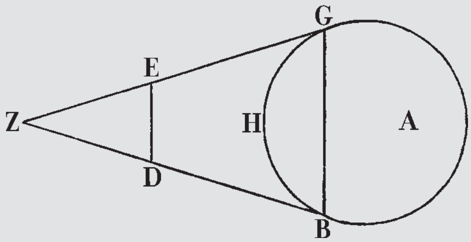
26. | κς΄. [29.] Se a distância entre os <dois> olhos for maior do que o diâmetro da esfera, <então> mais do que seu hemisfério será visto.[25]

Seja uma esfera com centro em A, seja circunscrito o círculo ETDH em torno do centro A, sejam B e G os olhos, seja a distância entre os raios visuais B e G maior do que o diâmetro da esfera e seja <a linha reta> BG unida. Afirmo que mais do que um hemisfério será visto. Incidam os raios <visuais> BE e GD e sejam prolongados até as partes [τὰ μέρη; *partes*] E e D <do círculo>; esses <raios> encontram-se mutuamente [συμβάλλουσι δὴ ἀλλήλαις; *concurrent vero adinvicem*] porque o diâmetro <do círculo> é menor do que BG <*El*., I, Post. 5>. Que se encontrem no ponto Z. Ora, uma vez que as linhas retas ZE e ZD tocam a circunferência <do círculo> a partir de um ponto exterior ao círculo, então <o arco> DTE é menor do que um semicírculo. Portanto, EHD é maior do que um semicírculo. Mas EHD é visto a partir de B e G. Portanto, mais da metade do círculo será visto a partir de B e G. Portanto, da esfera, o mesmo será visto.



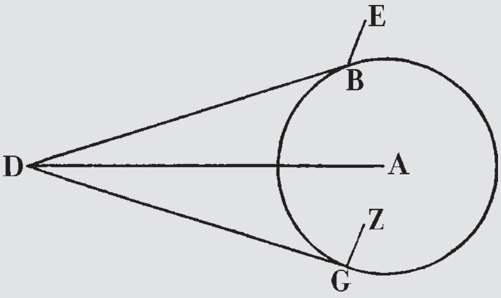
27. | κζ΄. [30.] Se a distância entre os <dois> olhos for menor do que o diâmetro da esfera, <então> menos do que seu hemisfério será visto.

Seja uma esfera com centro no ponto A, seja circunscrito o círculo BG em torno do ponto A, seja a distância entre os olhos DE menor do que o diâmetro da esfera, a partir da qual sejam traçadas as tangentes DB e EG e que essas mesmas <tangentes> também sejam os raios <visuais>. Afirmo que menos do que um hemisfério será visto. Sejam BD e GE prolongadas; elas encontrarão as partes G, H e B <da esfera>, pois DE é menor do que o diâmetro da esfera <*El*., I, Post. 5>. Que se encontrem no ponto Z. Assim, uma vez que as linhas retas ZG e ZB incidem a partir do ponto Z, então BHG será menor do que um semicírculo. Mas a seção BHG é também a seção da esfera. Portanto, <os raios visuais DB e EG> compreendem [ἀπολαμβάνουσιν; *continent*] menos do que um hemisfério.



28. | κη΄. [31.] De um cilindro visto de qualquer maneira por um olho, menos do que um semicilindro será visto.

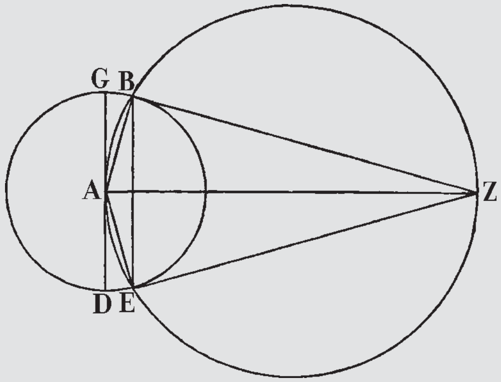
Seja um cilindro com o centro de sua base em A, seja circunscrito o círculo BG em torno de A, seja posto o olho D no mesmo plano que a base BG do cilindro, seja DA unida a partir de D até A, sejam traçados os raios <visuais> DB e DG e que sejam tangentes ao círculo, sejam traçadas, a partir dos pontos B e G e em ângulos retos com os lados do cilindro, <as linhas retas> BE e GZ e seja prolongado o plano que passa por DB e BE e também o plano que passa por DG e GZ. Portanto, nenhum dos dois <planos> corta o cilindro, pois DB e DG, e também BE e GZ, são tangentes <ao cilindro>. Portanto, visto a partir dos raios <visuais> BD e DG, <a seção> BG é menor do que um semicírculo. Da mesma maneira, também será visto menos do que um semicilindro.



[32.] Se <um cilindro> é visto pelos dois olhos, <então> é manifesto que acontece o mesmo que aquilo dito da esfera.

Alternativamente.

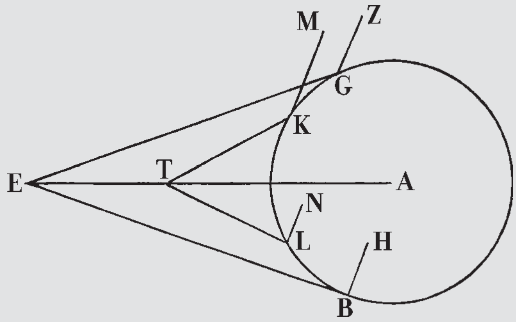
Seja um círculo com centro em A, seja um ponto exterior Z, seja unida <a linha reta> AZ a partir de A até Z e seja traçada <a linha reta> GD a partir de A e em <ângulo> reto com AZ em cada um de seus lados; portanto, GD é o diâmetro do círculo. E seja circunscrito o círculo ABZE em torno de AZ e unidas <as linhas retas> AB, BZ, ZE e EA. Portanto, ZB e ZE são tangentes, uma vez que os <ângulos> sob os pontos B e E são retos <*El.*, III, Prop. 16, Corol.>. Portanto, uma vez que os raios <visuais> BZ e ZE incidem sobre o arco do círculo a partir do ponto Z, a parte BE do círculo será vista <Def. 3>. E GBED é um semicírculo. Portanto, BE é menor do que um semicírculo.



Este teorema é para cones e cilindros. Pois, se os lados dos cilindros forem traçados em ângulos retos a partir dos pontos B e E, <então> os raios <visuais> lhes serão tangentes nas partes em que incidem e <,portanto,> a parte BDE ficará excluída da visão [ἀποκλεισθήσεται τῆς ὄψεως; *excludetur visus*] e a parte BE do semicírculo será vista [θεωρηθήσεται; *videbitur*]. Portanto, dos cones, essa mesma parte menor será vista.

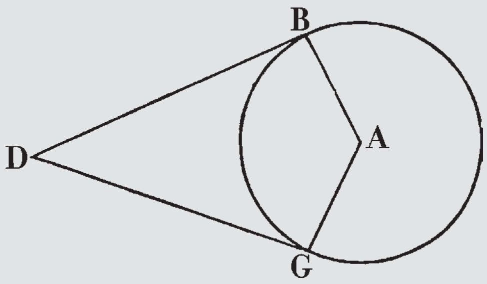
29. | κθ΄. [33.] Quando o olho se aproxima do cilindro, aquilo que do cilindro é interceptado pelos raios <visuais> [τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ἀκτίνων; *quod sub radiis intercipitur*] é menor, mas parecerá que é visto maior.

Seja um cilindro com <sua> base no círculo BG e centro em A, seja E o olho, a partir do qual seja unida <a linha reta> EA até o centro <do círculo>, incidam os raios <visuais> EB e EG e sejam traçadas GZ e BD a partir dos pontos B e G e em ângulos retos com <a base de> o cilindro. Pelo <teorema> anterior, <a parte> HBGZ é menor do que um semicilindro e é vista a partir do olho E. Seja o olho movido para mais próximo <do cilindro>, <que seja> para T. Afirmo que a parte interceptada a partir do olho T parece que aparece maior do que ZBGH, mas é menor. Incidam os raios <visuais> TK e TL e sejam traçadas KM e LN a partir dos pontos K e L e em ângulos retos com os lados do cilindro [αἱ πλευραὶ τοῦ κυλίνδρου; *latera chilindri*]. A partir dos raios <visuais> TK e TL, a parte MKLN do cilindro será vista. E <a parte> ZGBH é <vista> a partir de <os raios viuais> EB e EG. E <a parte> ZGBH é maior do que <a parte> MKLN, mas parece que aparece menor, pois o ângulo em T é maior do que o ângulo em E <Def. 4>.



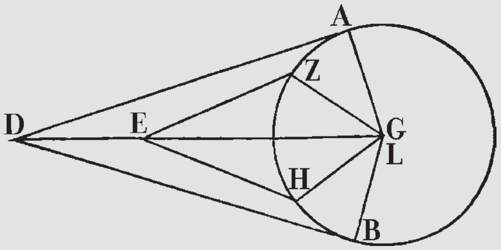
30. | λ΄. [34.] De um cone que tem como base um círculo em ângulos retos com seu eixo, visto por um olho, menos do que um semicone será visto.

Seja um cone com <sua> base no círculo BG e vértice no ponto A e seja D o olho, a partir do qual incidam os raios <visuais> DB e DG. E uma vez que os raios DG e DB são tangentes a BG, então BG é menor do que um semicírculo, de acordo com o que já foi anteriormente demonstrado <Prop. 23>. Sejam traçados, a partir do vértice A do cone e até os pontos B e G, os lados AB e AG do cone. Portanto, aquilo que é interceptado [τὸ ἐμπεριλαμβανόμενον; *intercepta*] pelas linhas retas AB e AG e pela parte BG é menor do que um semicone, uma vez que BG é menor do que um semicírculo. Portanto, menos do que um semicone será visto.



31. | λα΄. [35]. Quando o olho se aproxima do plano em que está a base do cone, a parte <do cone> interceptada pelos raios visuais [τὸ ὑπὸ τῶν ὄψεων ἐμπεριλαμβανόμενον μέρος; *quae sub visibus intercipitur pars*] será menor, mas parecerá que é vista maior.

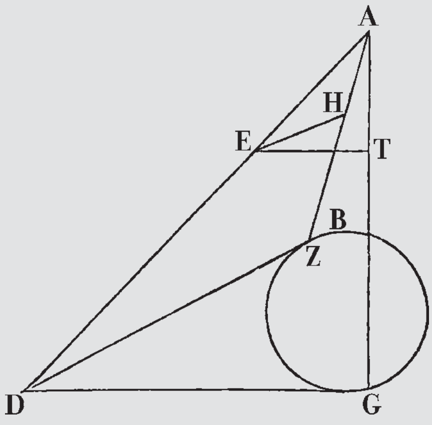
Seja um cone com <sua> base no círculo AB e vértice no ponto G, seja D o olho, seja tomado o centro L do círculo, seja unida a linha reta DL, incidam os raios <visuais> DA e DB e sejam unidos os lados AG e GB do cone. Assim, a parte ABG do cone é interceptada [ἐμπεριλαμβάνεται; *includetur*] pelo olho D e pelos raios DA e DB, e ela é menor do que um semicone. Seja o olho movido para mais próximo <do cone>, <que seja> para E, incidam os raios <visuais> EZ e EH e sejam unidos os lados ZG e GH <do cone>. Novamente, a parte ZGH do cone é interceptada pelo olho E e pelos raios <visuais> EZ e EL. E <a parte> ZGH é menor do que <a parte> ABG, mas parece que aparece maior, pois o ângulo sob ZEH é maior do que o ângulo sob ADB <Def. 4>.



É evidente que, no caso do cone visto pelos dois olhos, também acontece o mesmo que no caso da esfera e do cilindro vistos da mesma maneira.

32. | λβ΄. [36.] Se, a partir do olho, raios <visuais> incidirem sobre a base do cone e se, a partir desses raios incidentes e tangentes e a partir de seus pontos de contato <com a base do cone>, forem traçadas linhas retas sobre a superfície do cone até seu vértice e se, a partir das linhas retas traçadas, os raios <visuais> que incidem a partir do olho até a base do cone forem prolongados no mesmo plano e se o olho for posto sobre seu contato, isto é, sobre a seção comum dos planos, <então> o que é visto do cone será visto totalmente o mesmo <isto é, a mesma parte será vista> se os raios <visuais> permanecerem em um plano paralelo ao plano subjacente.

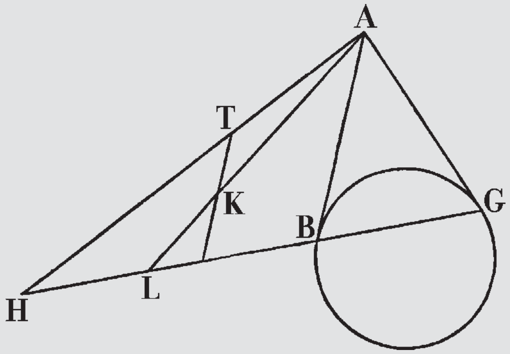
Seja um cone com <sua> base no círculo BG e vértice no ponto A, seja D o olho, a partir do qual incidam os raios <visuais> DZ e DG, sejam traçados, a partir dos pontos de contato Z e G até o vértice A do cone, os lados ZA e GA do cone e seja prolongado o plano que passa por DZ e ZA e <também> o <plano> que passa por GD e GA. Assim, uma linha reta será produzida como seção comum <*El*., XI, Prop. 3>. Que seja AED. Afirmo que, se o olho for movido



sobre AED, será visto do cone o mesmo <isto é, a mesma parte> que era visto a partir dos raios <visuais> DG e DZ. Seja o olho posto sobre AED, que seja E, a partir do qual incidam raios <visuais> até o cone. Eles passarão por AZ e AG, uma vez que o olho está posto sobre um plano paralelo e que os raios <visuais> são movidos em linhas retas <Def. 1>. Pois, se incidissem fora de AG e AZ, os raios visuais seriam quebrados [κλασθήσονται αἱ ὄψεις; *franguntur visus*], o que é impossível [ἄτοπον; *quod locum non habet*].[26] Sejam, pois, ET e EH. Ora, uma vez que os raios visuais movem-se em linha reta sobre um plano paralelo e que, a partir de ângulos iguais, aquilo que é visto aparece igual, e uma vez que os raios <visuais> dispostos paralelamente sobre a linha reta AED contêm ângulos iguais, portanto, do cone, o mesmo <isto é, a mesma parte> será visto <Def. 4>. E se o mesmo <isto é, a mesma parte do cone> é visto, <então> é visto menos <isto é, uma parte menor> do cone; portanto, do cone, menos será também visto.

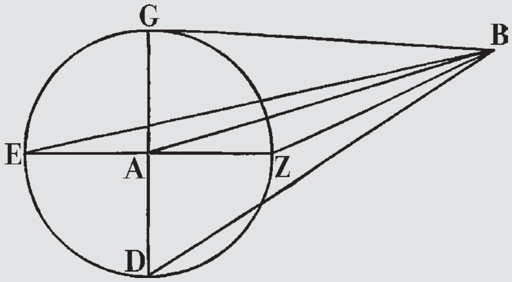
33. | [λγ΄.] 37. Todavia, se o olho for movido de uma posição mais baixa para uma mais alta, <então> aquilo que do cone é visto será maior, mas parecerá que aparece menor, enquanto que, se <o olho> for movido para baixo, <então a parte vista do cone> será menor, mas parecerá que aparece maior.

Seja um cone com <sua> base no círculo BG e vértice no ponto A e sejam os lados BA e AG do cone. Seja unida BG, seja BH prolongada a partir de BG e, através do ponto T, tomado como se queria [τυχόντος; *contingens*], seja traçada TK paralela a AB. Afirmo que, se o olho for posto sobre o ponto T, o que é visto do cone será maior, mas será visto menor do que se <o olho for> posto sobre K. Sejam unidas <as linhas retas> AK e AT e sejam prolongadas AT a partir de H e AK a partir de L. Assim, posto o olho sobre H e sobre L, o que é visto <isto é, a parte vista> do cone será desigual, e será maior o que é visto a partir de H, mas, apesar de menor, o que é visto a partir de L será maior. E o que é visto a partir de H é o mesmo que o que é visto a partir de T e o que é visto a partir de L é o mesmo que o que é visto a partir de K, como foi demonstrado na <proposição> precedente. Portanto, posto o olho sobre T, o que é visto do cone será maior do que aquilo que é visto se o olho for posto sobre K, mas parecerá menor.



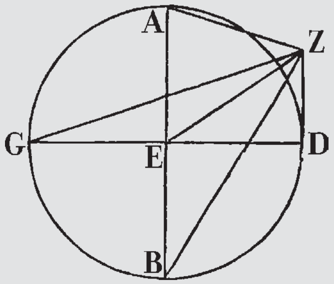
34. | λδ′. [38.] Se uma linha reta for elevada a partir do centro de um círculo em ângulos retos com o plano do círculo e se o olho for posto sobre essa <linha reta>, <então> todos os diâmetros traçados sobre o plano do círculo aparecerão iguais.

Seja um círculo com centro no ponto A, a partir do qual seja elevada, em ângulo reto com o plano do círculo, a linha reta AB <*El*., XI, Prop. 12>, sobre a qual seja posto o olho B. Afirmo que os diâmetros aparecerão iguais. Sejam GD e EZ dois diâmetros e sejam unidas <as linhas retas> BG, BE, BD e BZ. Ora, uma vez que ZA é igual a AG <*El*., I, Def. 15>, enquanto AB é comum e os ângulos são retos, então a base ZB é igual à base BG e também os ângulos sob as bases <são iguais> <*El*., I, Prop. 4>. Portanto, o <ângulo> sob ZB e BA é igual ao <ângulo> sob AB e BG. Similarmente, também o <ângulo> sob EBA é igual ao <ângulo> sob ABD. Portanto, o <ângulo> sob GB e BD é igual ao <ângulo> sob EB e BZ. E, a partir de ângulos iguais, aquilo que é visto aparece igual <Def. 4>. Portanto, GD é igual a EZ.

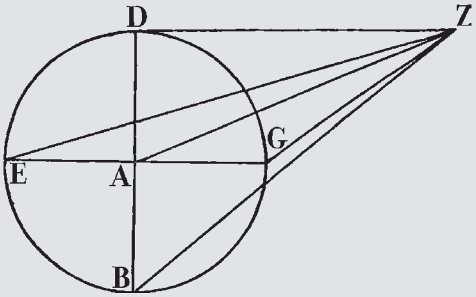


[39.] E se a linha reta traçada a partir do centro <de um círculo> não for perpendicular ao plano, mas igual à <linha reta> do centro,[27] <então> todos os diâmetros aparecerão iguais.

Seja o círculo ABGD, sejam nele traçados dois diâmetros, AB e GD, seja traçada <a linha reta> ZE a partir do ponto E e não em ângulos retos <com o plano do círculo>, mas igual a cada uma das <linhas retas> do centro <do círculo>, e sejam unidos os raios <visuais> ZA, ZG, ZB e ZD. Ora, uma vez que BE é igual a EZ, mas também EA é igual a EZ, então as três linhas retas, EZ, EA e EB, são iguais <*El*., I, Ax. 1>. Portanto, o semicírculo descrito em torno do diâmetro AB no plano que passa por AB e EZ passará por Z. Portanto, o <ângulo> sob AZ e ZB é reto <*El*., VI, Prop. 31>. Do mesmo modo, também o <ângulo> sob GZ e ZD é reto. E os <ângulos> retos são iguais <entre si> <*El*., I, Post. 4> e aquilo que é visto a partir de ângulos iguais aparece igual <Def. 4>. Portanto, AB aparecerá igual a GD.



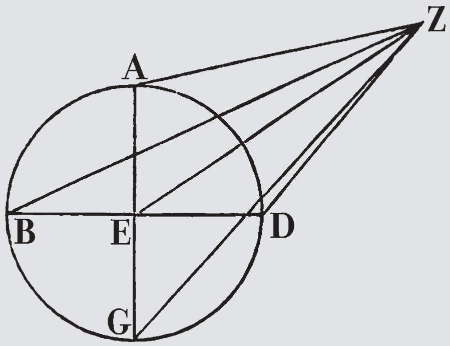
E se AZ não for igual à linha reta do centro nem perpendicular ao plano do círculo, mas faça iguais os ângulos sob DAZ e sob ZAG e também os <ângulos> sob EAZ e sob ZAB. Afirmo que, também nesse caso, os diâmetros que fazem ângulos iguais aparecerão iguais.



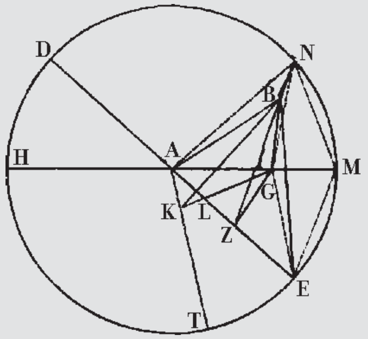
Pois uma vez que GA e AZ são iguais a AD e ZA, enquanto AZ e BA são iguais a ZA e AE e os ângulos são iguais, então a base ZD é igual à base ZG; de modo que também o <ângulo> sob DZA é igual ao <ângulo> sob AZG <*El*., 1, Prop. 4>. Similarmente, mostraremos [δείξομεν; *demonstrabimus*] que também o <ângulo> sob EZA é igual ao <ângulo> sob AZG. Portanto, o <ângulo> todo sob DZB é igual ao <ângulo> sob EZG <*El*., 1, Ax. 2>. Portanto, os diâmetros DB e EG aparecerão iguais <Def. 4>.

35. | λε´. [40.] Se a linha reta que incide no centro do círculo a partir do olho não for perpendicular ao plano do círculo nem igual à <linha reta> do centro nem compreenda [περιέχουσα; *continens*] ângulos iguais, <então> os diâmetros com os quais <a linha reta> faz ângulos desiguais aparecerão desiguais.

Seja o círculo ABGD, sejam traçados dois diâmetros, AG e BD, que se cortam mutuamente em ângulos retos no ponto E e, a partir do ponto E, seja elevada <a linha reta> ZE, sobre a qual seja posto o olho, de modo que <a linha reta> não seja perpendicular ao plano nem igual à <linha reta> do centro <isto é, ao raio do círculo> nem compreenda ângulos iguais com <as linhas retas> AG e DB. Afirmo que os diâmetros BD e AG serão vistos [ἄνισοι ὀφθήσονται; *inaequales apparebunt*] desiguais. Sejam unidas <as linhas retas> ZG, ZA, ZD e ZB. Ora, EZ é maior do que a <linha reta> do centro ou é menor. Por isso, ou o <ângulo> sob DZ e ZB é maior do que o <ângulo> sob GZ e ZA, ou o <ângulo> sob GZ e ZA é maior do que o <ângulo> sob DZ e ZB, como mostraremos a seguir. Portanto, os diâmetros serão vistos desiguais <Def. 4>.



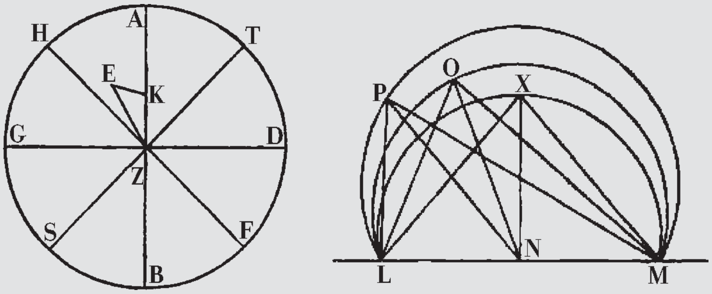
Lema.



Seja um círculo com centro no ponto A, seja B o olho, a partir do qual seja baixada a perpendicular ao <plano do> círculo de modo a não cair sobre o centro A, mas fora, e que <tal perpendicular> seja BG e sejam unidas AG a partir de A até G e AB a partir de A até B. Afirmo que, de todos os ângulos compreendidos pelas linhas retas que passam pelo ponto A e que fazem um ângulo com a linha reta AB, o menor é o <ângulo> sob GA e AB. Seja traçada, através de A, a linha reta DAE. Afirmo que o <ângulo> sob GAB é menor do que o <ângulo> sob EAB. A partir de G até DE, seja traçada, no plano subjacente, a perpendicular GZ e seja BZ unida. Portanto, ZB também é perpendicular a AE <*El.*, xi, Prop. 4>. Ora, uma vez que o <ângulo> sob GZA é reto, então o <ângulo> sob AGZ é menor do que um <ângulo> reto <*El.*, i, Prop. 17>. E o maior lado <de todo triângulo> é subtendido pelo maior ângulo <*El.*, i, Prop. 19>. Portanto, AG é maior do que AZ. Mas os <ângulos> sob AG e GB e sob BZ e ZA são retos, de modo que <as linhas retas> GB e BZ são desiguais.[28] E, portanto, o <ângulo> sob ZA e AB é maior do que o <ângulo> sob GA e AB <*El.*, i, Prop. 18>. Similarmente, será demonstrado que, de todos os ângulos compreendidos pelas linhas retas traçadas através de A e que produzem um ângulo com a linha reta AB, o menor é o <ângulo> sob GA e AB.

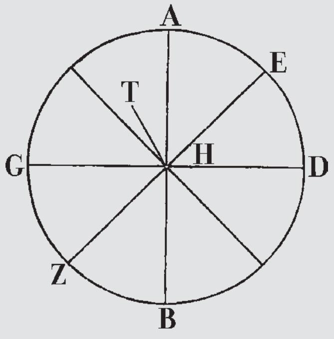
E é manifesto que, se qualquer outra linha reta for traçada através de A, como AT, que está mais afastada de AG do que de AZ, <então> o <ângulo> sob BAT será maior do que o <ângulo> sob BAZ. Assim, novamente, se GK for traçada perpendicular a AT, então BK, uma vez unida, será similarmente perpendicular a AT. Ora, uma vez que AL é maior do que AK (pois subtende o <ângulo> reto sob AKL) <*El.*, i, Prop. 18>, então AZ é muito maior do que AK. E os <ângulos> sob BZA e BKA são retos. Portanto, BZ é menor do que BK, porque a soma dos <quadrados> sobre BZ e sobre ZA e <também> a <soma> dos <quadrados> sobre BK e sobre KA são iguais ao <quadrado> sobre BA e também <são iguais> entre si <*El.*, i, Prop. 47>, e também porque o <ângulo> sob BAK é maior do que o <ângulo> sob BAZ. E, uma vez prolongada GA até H, de todos os ângulos formados sob a linha reta BA e as linhas retas que passam através de A, o maior é o <ângulo> sob BAH, pois também o menor de todos <os ângulos> é o <ângulo> sob BAG. E são iguais as <linhas retas> igualmente distantes de ambos os lados da linha reta MA, a <linha reta> que compreende, com BA, o ângulo menor. Assim, seja MN igual a EM e sejam unidas EM, MN, EG, GN, BA, BN e AN. Ora, uma vez que MN é igual a ME, enquanto MG é comum, e compreende ângulos iguais, então EG também é igual a GN. E GB é comum e perpendicular <a EG e a GN>. Portanto, EB também é igual a BN <*El.*, i, Prop. 4>. Mas EA também é igual a NA, e AB é comum. Portanto, o ângulo sob EAB também é igual ao ângulo sob NAB <*El.*, i, Prop. 4>.

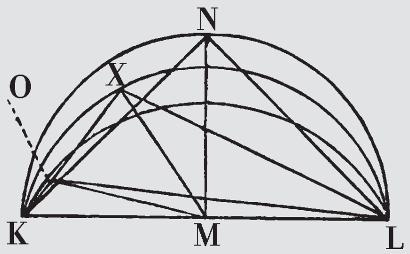
Seja o círculo ABGD com centro Z e no qual sejam traçadas as linhas retas que se cortam perpendicularmente entre si ao passarem por A, B, G e D, seja E o olho, a partir do qual a linha reta que o une ao centro em ângulos retos com GD contenha com AB um ângulo qualquer, e seja essa linha reta, EZ, maior do que a <linha reta> do centro <isto é, maior do que o raio do círculo>. Afirmo que os diâmetros AB e GD aparecerão desi-



guais, que GD aparecerá maior e AB menor, que sempre o <diâmetro> mais próximo ao menor aparecerá menor do que o mais afastado e que somente dois diâmetros aparecerão iguais, <a saber,> aqueles igualmente distantes de ambos os lados do <diâmetro que aparece> menor. Pois uma vez que GD é perpendicular a ambas, a AB e a EZ, então também todos os planos prolongados que passam por GD são perpendiculares aos planos que passam por EZ e AB <*El.*, XI, Prop. 18>. De modo que o plano subjacente do círculo, no qual está GD, também é <perpendicular aos planos EZ e AB>. Seja, pois, a partir do ponto E, traçada uma perpendicular ao plano subjacente. Portanto, <essa linha reta perpendicular> cai [πίπτει; *cadet*] sobre AB, a seção comum dos planos <*El.*, XI, Prop. 19>. Que caia, pois, e que seja EK, e seja prolongada LM igual ao diâmetro do círculo <isto é, igual a GD> e dividida em duas <partes iguais> no ponto N, seja a linha reta NX elevada a partir de N e em <ângulo> reto com LM e seja NX igual a EZ. Portanto, a seção descrita em torno de LM <isto é, o arco LM> e que passa por X é maior do que um semicírculo, pois NX é maior do que cada uma das linhas retas LN e NM.[29] Seja <o arco> LXM e sejam unidas <as linhas retas> XL e XM. Portanto, o ângulo no ponto X compreendido pelas linhas retas LX e XM é igual ao ângulo no ponto E compreendido pelo ponto E e pelos pontos G e D. Seja constituído [συνεστάτω; *constituatur*], na linha reta LN e no ponto N, o <ângulo> sob LN e NO igual ao <ângulo> sob HZ e ZE <*El.*, I, Prop. 23>, seja NO igual a EZ <*El.*, I, Prop. 2>, sejam unidas <as linhas retas> LO e OM <*El.*, I, Post. 1> e seja descrita a seção LOM em torno do triângulo LOM <*El.*, III, Prop. 33>. Portanto, o ângulo no ponto O será igual ao ângulo em E sob HET.[30] Seja constituído, ainda, na linha reta LN e no mesmo ponto N, o ângulo AZE igual ao <ângulo> sob LN e NP, seja NP igual a EZ, sejam unidas LP e PM e seja descrita, em torno do triângulo LPM, a seção de círculo LPM. Portanto, o ângulo no ponto P será igual ao ângulo sob AEB. Portanto, uma vez que o <ângulo> em X é maior do que o <ângulo> em O, mas o <ângulo> no ponto X é igual ao <ângulo> sob GED e o <ângulo> em O é igual ao <ângulo> sob HEF, <então> GD aparecerá maior do que HF <Def. 4>. Novamente, uma vez que o ângulo no ponto O é igual ao <ângulo> sob HEF e o <ângulo> em P é igual ao <ângulo> sob AEB, mas o <ângulo> em O é maior do que o <ângulo> em P, então o <ângulo> sob HEF também será maior do que o <ângulo> sob AEB. Portanto, HF aparecerá maior do que AB <Def. 4>. Portanto, de todas as linhas retas traçadas que passam por Z e que fazem ângulos com EZ, a maior <linha reta> vista será GD e a menor será AB, pois, dos ângulos constituídos em E, GED é o maior e AEB o menor, e somente um único outro <ângulo> será constituído igual ao ângulo HEF, <a saber,> o <ângulo> sob FES, <constituído> ao se tomar AT igual a HA, unir TZ e prolongá-la até S. E isso é manifesto a partir dos ângulos em X, O e P. E desses o menor é P, pois o <ângulo> sob PNL é igual ao <ângulo> sob EZA, o ângulo menor, enquanto que o <ângulo> maior é X, pois é perpendicular a NX, a maior das linhas retas traçadas através de N na seção LXM, e porque, ao ser posta uma <linha reta> igual, <ela> cai acima da seção LXM e porque <o ponto> X é o que cai mais para dentro, enquanto P é o que cai mais para fora, de modo que nenhum ângulo é menor do que o <ângulo> sob PNL. E uma vez que o <ângulo> sob EZT é igual ao <ângulo> sob EZH, como foi demonstrado anteriormente, então também o <ângulo> adjacente, o <ângulo> sob EZS, é igual ao <ângulo> sob EZF, ou seja, <igual> ao <ângulo> sob ONM. De modo que cada um dos <ângulos> sob TES e HEF é igual ao <ângulo> em O. Portanto, HF aparecerá igual a TS <Def. 4>.

Seja a <linha reta> unida a partir do olho até o centro <do círculo> menor do que a <linha reta> do centro <isto é, menor do que o raio do círculo>. Nesse caso, acontecerá o contrário em relação aos diâmetros; o que aparecia antes maior aparecerá agora menor, enquanto que o <que aparecia> menor, <aparecerá agora> maior. Seja o círculo ABGD, sejam prolongados dois diâmetros, AB e GD, que se cortam mutuamente em <ângulos> retos, seja prolongado qualquer outro diâmetro, EZ, e seja T o olho, a partir

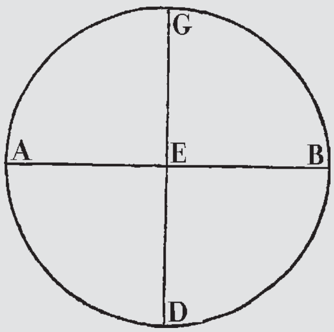




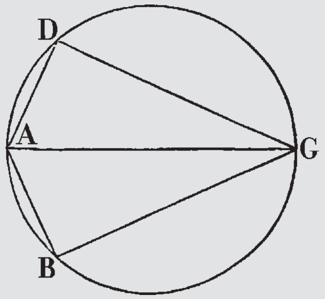
do qual seja a <linha reta> prolongada até o centro, HT, menor do que qualquer uma das <linhas retas> do centro <isto é, menor do que o raio do círculo>. E seja posta <a linha reta> KL igual ao diâmetro do círculo e seja dividida em duas partes <iguais> em M, seja traçada, a partir do ponto M, a perpendicular MN, seja MN igual a TH e seja descrita, em torno de KN e do ponto N, a seção de círculo NKL. Assim, MN é menor do que um semicírculo, uma vez que é menor do que a <linha reta> até o centro <isto é, menor do que o raio do círculo>. E o ângulo em N compreendido pelas linhas retas KN e LN será igual ao ângulo em T compreendido pelas linhas retas GT e TD. E seja, ainda, o <ângulo> sob KMX igual ao <ângulo> sob EHT, seja MX igual a HT e seja descrita, em torno de KL e do ponto X, a seção KXL. Portanto, o ângulo no ponto X, compreendido sob KXL, é igual ao ângulo no ponto T compreendido sob ZTE. E seja, ainda, o <ângulo> sob KM e MO igual ao <ângulo> sob AH e HT, seja MO igual a HT e seja circunscrita uma seção em torno de KL e do ponto O. Assim, o ângulo em O, compreendido sob KOL, será igual ao ângulo em T compreendido sob ATB. Ora, uma vez que o <ângulo> em O é maior do que o <ângulo> em X e que o <ângulo> em O é igual ao <ângulo> em T compreendido sob ATB e que o <ângulo> em X é igual ao <ângulo> em T contido sob ETZ, portanto AB aparecerá maior do que EZ <Def. 4>. E, novamente, uma vez que o <ângulo> em T compreendido sob ET e TZ é maior do que o <ângulo> em T compreendido sob GTD, portanto EZ será vista maior do que GD <Def. 4>.

36. | λς΄. [41.] As rodas dos carros [Τῶν ἁρμάτων οἱ τροχοὶ; *curruum rotae*] aparecem algumas vezes circulares, algumas vezes oblongas [παρεσπασμένοι; *parespamini*].

Seja ABGD uma roda, sejam traçados os diâmetros BA e GD que se cortam mutuamente em <ângulos> retos no ponto E e que o olho não seja posto no plano do círculo. Portanto, se a linha reta unida a partir do olho até o centro <do círculo> for perpendicular ao plano ou igual à <linha reta> do centro <isto é, igual ao raio do círculo>, então todos os diâmetros aparecerão iguais <Prop. 34>; de modo que a roda aparece circular. Mas se a linha reta traçada a partir do olho até o centro não for perpendicular ao plano nem igual à <linha reta> do centro <isto é, igual ao raio do círculo>, então os diâmetros aparecerão desiguais, um grande e outro pequeno, e de todos os outros <diâmetros> traçados entre o grande e o pequeno, somente um <diâmetro> será visto igual, <a saber,> aquele traçado sobre ambos os lados <Prop. 35, Lema>; de modo que a roda aparece oblonga.



37. | λζ΄. [42.] Existe um lugar [῞Εστι τόπος; *Est locus*] no qual, se o olho permanecer parado enquanto aquilo que é visto for movido [μεθισταμένου; *transposito*], aquilo que é visto aparece sempre igual [ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται; *equale semper quod videtur apparet*].

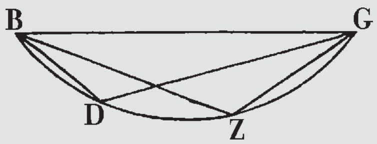


Seja BG a magnitude vista, seja A o olho, a partir do qual sejam os raios <visuais> incidentes AB e AG, e seja circunscrito, em torno de ABG, o círculo ABG. Afirmo que existe um lugar no qual, se o olho permanecer parado enquanto a magnitude vista for movida, aquilo que é visto aparece sempre igual.

Que seja, então, <a magnitude vista> movida, que seja <movida para> DG, e seja AD igual a AB. Assim, uma vez que BA é igual a AD e BG é igual a GD, então também o <ângulo> sob BAG é igual ao <ângulo> sob DAG, pois estão sobre arcos iguais <*El*., III, Prop. 26>; de modo que <esses ângulos> são iguais. Portanto, aquilo que é visto aparecerá igual <Def. 4>.

E o mesmo acontecerá se o olho permanecer no centro do círculo e aquilo que é visto mover-se sobre o arco <do círculo>.

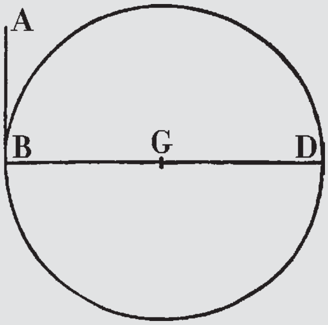
38. | λη΄. [43.] Existe um lugar no qual, se o olho for movido enquanto aquilo que é visto permanecer parado, aquilo que é visto aparece sempre igual.



Seja BG aquilo que é visto, seja Z o olho, a partir do qual incidam os raios <visuais> ZB e ZG, seja descrita, em torno do triângulo BZG, uma seção de círculo BZG, seja o olho movido de Z para D e que incidam os raios <visuais> [μεταπιπτέτωσαν αἱ ἀκτῖνες; *transcidant radii*] DB e DG. Portanto, o ângulo D é igual ao ângulo Z, pois estão na mesma seção <isto é, sobre o mesmo arco> <*El*., III, Prop. 27>. E aquilo que é visto sobre o mesmo ângulo aparece igual <Def. 4>. Portanto, se o olho for movido sobre o arco BDG, <então> BG aparecerá sempre igual.

39. | λθ΄. [44.] Se uma magnitude for perpendicular ao plano subjacente e o olho for posto sobre algum ponto desse plano e se aquilo que é visto for movido sobre o arco do círculo que tem como centro o olho, <então,> ao ser movido em uma posição paralela à <posição> original, aquilo que é visto será visto sempre igual.

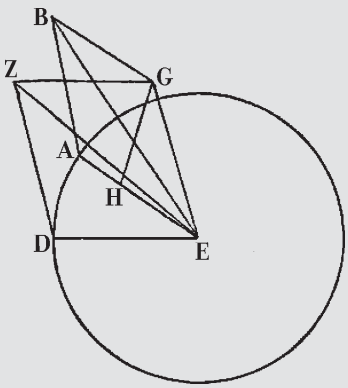
Seja AB a magnitude vista e que seja perpendicular ao plano, seja G o olho, seja GB unida e, com centro G e intervalo GB, seja descrito o círculo BD. Afirmo que, se a magnitude AB for movida sobre o arco do círculo, <então>, a partir do olho G, <a magnitude> AB será vista igual. Ora, AB é uma linha reta e faz ângulos retos com BG, e todas as linhas retas do centro <isto é, todos os raios do círculo> que caem sobre o arco do círculo a partir do centro G fazem ângulos iguais.[31] Portanto, a magnitude vista será vista igual [ἴσον ἄρα τὸ ὁρωμένων ὀφθήσεται μέγεθος; *aequalis ergo conspecta videbitur magnitudo*] <Def. 4>.



E se, a partir do centro G, for elevada uma linha reta em <ângulos> retos e o olho for posto sobre essa <linha reta> e se a magnitude vista for movida sobre o arco do círculo em <uma posição> paralela à linha reta sobre a qual está <posto> o olho, <então> aquilo que é visto será visto sempre igual.[32]

40. | μ΄. [45.] Se aquilo que é visto não for perpendicular ao plano subjacente e, sendo igual à <linha reta> do centro <isto é, igual ao raio do círculo>, for movido sobre o arco do círculo que tem como centro o olho, <então>, ao ser movido em uma posição paralela à <posição> original, será visto algumas vezes igual, algumas vezes desigual.

Seja o círculo AD, seja tomado sobre sua circunferência um ponto D, seja elevada a linha reta DZ e que seja igual à <linha reta> do centro <isto é, igual ao raio do círculo> e não esteja em <ângulos> retos com o círculo e seja E o olho. Afirmo que, se for movida sobre a periferia do círculo, DZ aparecerá às vezes igual, às vezes maior, outras vezes menor. Seja traçada pelo ponto E, que é o centro <do círculo>, GE paralela a DZ e seja EG igual a DZ. E seja traçada, a partir do ponto G, GH perpendicular ao plano subjacente e que seja unida com o plano no ponto H. E seja EH unida, que seja prolongada e unida com o arco <do círculo> no ponto A, e seja traçada, pelo ponto A, AB paralela a GE e seja AB igual a DZ. Afirmo que, de todas as linhas retas movidas sobre

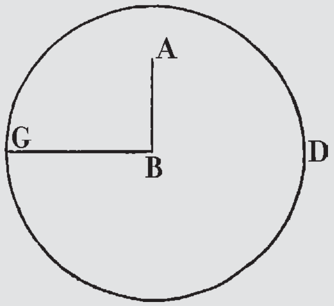


o arco do círculo, AB aparecerá <como> a menor. Sejam unidas as linhas retas ED GZ, GB, EB e ZE. Ora, uma vez que GE é paralela e igual a AB, então também EA é igual e paralela a GB <*El.*, 1, Prop. 33>. Portanto, AEGB é um paralelogramo <*El.*, 1, Def. 22>. Pela mesma <razão>, EDZG também é um paralelogramo. Resta mostrar que a mesma <magnitude, isto é, DZ> aparece menor e <aparece> maior. É manifesto que o ângulo sob GEA é menor do que o ângulo sob GED, pois foi demonstrado que, de todas as linhas retas traçadas pelo centro e que fazem um ângulo,[33] o <ângulo> sob GEA é o menor <Prop. 35, Lema>. Portanto, <o ângulo sob GEA> também é menor do que o <ângulo> sob GED. E o <ângulo> sob BEA é <igual à> metade do <ângulo> sob GEA, pois BE é um paralelogramo equilátero, e o <ângulo> sob BEA é <igual à> metade do <ângulo> sob GED, pois ZE é um paralelogramo equilátero <*El.*, 1, Prop. 34>. E, portanto, o <ângulo> sob BEA é menor do que o <ângulo> sob ZED. De modo que a magnitude AB será vista menor do que a magnitude DZ <Def. 4>.

E é manifesto, a partir do lema anteriormente demonstrado, que <a magnitude> será vista <como> a menor [ἐλάχιστον; *minimum*] a partir do ponto A, <como> a maior [μέγιστον; *maximum*] a partir de um <lugar> diametralmente oposto ao ponto A e <como> igual a partir de um <lugar> igualmente distante do ponto A por qualquer um dos lados.

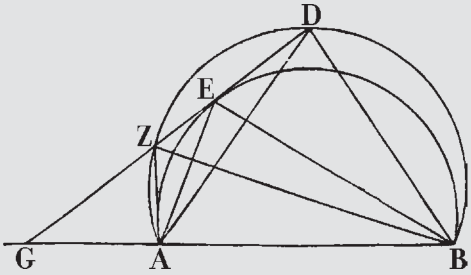
41. | μα´. [46.] Se aquilo que é visto for perpendicular ao plano subjacente e o olho for movido sobre a periferia de um círculo que tem como centro o ponto em que a magnitude une-se com o plano, <então> aquilo que é visto aparece sempre igual.

Seja AB a magnitude vista em <ângulos> retos com o plano subjacente e seja G o olho. E seja descrito, com centro B e intervalo BG, o círculo GD. Afirmo que, se G for movido sobre o arco do círculo, AB aparecerá sempre igual. Isso é evidente. Pois todos os raios <visuais> incidentes a partir do ponto G sobre AB incidem em ângulos iguais, uma vez que o ângulo em B é reto. Portanto, aquilo que é visto será visto igual <Def. 4>.



42. | μβ΄. [47.] Se aquilo que é visto permanecer parado enquanto o olho for movido em uma linha reta oblíqua à magnitude vista, <então> aquilo que é visto aparece algumas vezes igual, algumas vezes desigual.

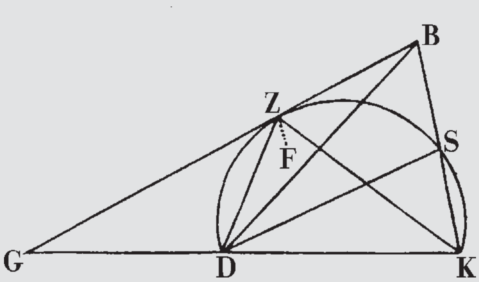
Seja AB aquilo que é visto, seja E o olho, seja uma linha reta oblíqua GD, seja BA prolongada em linha reta e unida com DG em G e seja o olho movido sobre a mesma <linha reta, isto é, sobre a linha reta oblíqua GD>. Afirmo que AB aparece algumas vezes igual, algumas vezes desigual. Seja tomada GE, a média proporcional entre BG e GA <*El.*, VI, Prop. 13>, seja E o olho e que seja movido sobre essa mesma linha reta para D. Afirmo que, a partir de E e a partir de D, aquilo que é visto aparece desigual.



Sejam unidas AE, EB, AD e BD, seja descrita, em torno do triângulo AEB, a seção <de círculo> AEB, seja posto o ângulo sob GA e AZ igual ao ângulo sob GD e DB e seja BZ unida. Portanto, os pontos B, A, Z e D estão no círculo. Portanto, uma vez que o ângulo sob AEB é maior do que o ângulo sob AZB e o ângulo sob AZB é igual ao ângulo sob AD e DB, pois estão na mesma seção <de círculo> <*El.*, III, Prop. 21>, então também o ângulo sob AEB é maior do que o ângulo sob ADB. Mas, a partir do ângulo sob ADB, <a magnitude> AB é vista quando o olho está sobre D e, a partir do ângulo sob AEB, a mesma <magnitude> AB é vista quando o olho está sobre E. Portanto, aquilo que é visto aparece desigual quando o olho é movido sobre a linha reta ED <Def. 4>. E é manifesto que, se aquilo que é visto aparece desigual quando o olho é movido sobre a linha reta EG e maior a partir da posição E, <então aparece> sempre maior a partir de uma posição mais próxima a essa mesma <posição E>, <posto o olho> sobre qualquer uma das linhas retas ED e EG, e <aparece> igual a partir de Z e a partir de D e a partir das posições similarmente tomadas a essas mesmas <posições>, uma vez que os ângulos estão <subentendidos> na mesma seção <*El.*, III, 21; Def. 4>.

Alternativamente.

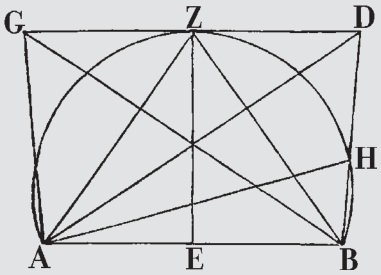
Seja KD aquilo que é visto e BG a linha reta que coincide com a <linha reta> prolongada de KD. E seja tomada GZ, a média proporcional entre GD e GK, sejam unidas <as linhas retas> ZK e ZD e seja descrita, em torno de KD, a seção <de círculo> que compreende o <ângulo> sob KZD. Ora, <tal seção> será tangente à linha reta BG, uma



vez que KG : GZ :: GZ : GD <*El.*, III, Prop. 36 e *El.*, VI, Prop. 17>. Seja posto o olho sobre o ponto B e sejam prolongadas DB e BK. E seja SB unida. Assim, o ângulo F é igual ao ângulo S, pois estão na mesma seção <de círculo> <*El.*, III, Prop. 21>.[34] E o ângulo S é maior do que o ângulo B; portanto, o ângulo F também é maior do que o ângulo B. Portanto, <a magnitude> KD aparece maior ao olho que está sobre Z do que ao olho que está sobre B <Def. 4>.

43. | μγʹ. Se a linha reta <sobre a qual o olho é movido> for paralela à magnitude vista, o mesmo acontecerá.[35]

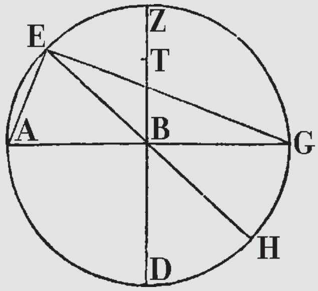
Seja AB a magnitude vista e que seja dividida em duas partes <iguais> no ponto E, seja traçada, a partir de E e em <ângulos> retos com AB, a linha reta EZ, sobre a qual seja posto o olho Z, sejam unidas <as linhas retas> ZA e ZB, seja descrita, em torno do triângulo AZB, a seção AZB, seja traçada ZD paralela a AB através de Z, seja o olho movido para D e incidam os raios <visuais> DA e DB. Afirmo que, a partir de D e de Z, <as partes iguais da magnitudes AB> aparecerão desiguais. Seja AH unida. Ora, uma vez que o ângulo sob AZB é igual ao ângulo sob AHB <*El.*, III, Prop. 21>, mas o ângulo sob AHB é maior do que o ângulo sob ADB, então o ângulo sob AZB também é maior do que o ângulo sob ADB. E, se o olho estiver sobre Z, a magnitude AB é vista a partir do <ângulo> sob AZB e, similarmente, se olho estiver sobre D, a magnitude AB é vista a partir do <ângulo> sob ADB. Portanto, aquilo que é visto a partir dos pontos D e Z aparece desigual <Def. 4>.



E se ZG for posta igual a DZ, então, a partir de G, <aquilo que é visto> aparece menor do que <aquilo que é visto> a partir de Z e, a partir de G e de D, aparece igual.

44. | μδʹ. [48.] Existem lugares nos quais, sendo o olho movido, magnitudes iguais e que ocupam em comum determinados lugares [κοινῶς ἀπολαβόντα τόπους τινὰς; *communiter ocuppantes locos quosdam*][36] aparecem algumas vezes iguais, algumas vezes desiguais.

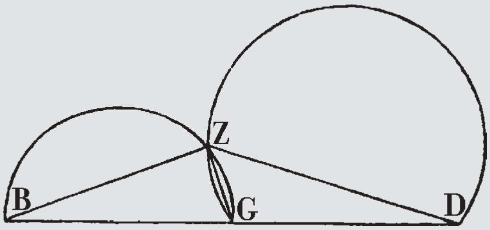
Sejam o olho T e as magnitudes <iguais e contíguas> AB e BG e seja traçada BZ em <ângulos> retos a partir de B e que seja prolongada até D. É manifesto que, a partir de qualquer parte de ZD em que o olho for posto, AB e BG aparecerão iguais. Seja o olho movido e que seja E. Afirmo que, a partir de E, <as magnitudes> aparecem desiguais. Incidam os raios <visuais>



EA, EB e EG, seja descrito o círculo AEDG em torno do triângulo AGE e seja BH prolongada de BH. Ora, uma vez que o arco AD é igual ao arco DG e o arco ADH é maior do que o arco HG, então AB aparecerá maior do que BG <Def. 4>.[37] E se <o olho> for movido sobre EH, <então as magnitudes> aparecerão similarmente desiguais, e se <o olho for> posto sobre as partes do círculo, com exceção da perpendicular, <então as magnitudes> aparecerão desiguais, e se <o olho for> posto fora do círculo e não em linha reta com DZ, <então as magnitudes> aparecerão desiguais.

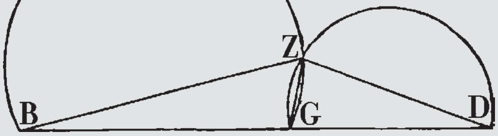
Alternativamente.

Seja BG igual a GD, seja descrito, em torno de BG, o semicírculo BZG e, em torno de GD, <seja descrito o arco> GZD maior do que um semicírculo; e é manifesto que cortará o mencionado semicírculo. É possível descrever sobre GD uma seção maior do que um semicírculo. Pois, se supusermos [ὑποθώμεθα; *supponamus*] um <determinado> ângulo agudo, <então> podemos descrever sobre GD uma seção de círculo que contém um ângulo igual ao ângulo agudo suposto, de acordo com o <teorema> 33 do terceiro <livro> dos planos [τοῦ λγ´ τοῦ τρίτου τῶν ἐπιπέδων; *33 epipedorum, tercio elementorum euclidis*], e <portanto> a <seção> constituída por esse mesmo <ângulo> será maior do que um semicírculo, de acordo com o <teorema> 31 do terceiro <livro> dos planos.[38] Sejam unidas BZ, ZG e ZD. Assim, o ângulo <inscrito> no semicírculo é maior do que o ângulo <inscrito> na seção maior <*El.*, III, Prop. 31>. E, a partir de um ângulo maior, aquilo que é visto aparece maior; portanto, BG aparece maior do que GD <Def. 4>. Mas era igual <por suposição>. Portanto, existe um lugar comum [ἔστιν ἄρα τόπος κοινός; *est ergo locus communis*] no qual, posto o olho, <magnitudes> iguais aparecem desiguais. Mas <as magnitudes iguais> aparecerão iguais se [...] †.[39]



45. |με´. [49.] Existe um lugar comum a partir do qual magnitudes desiguais aparecem iguais.

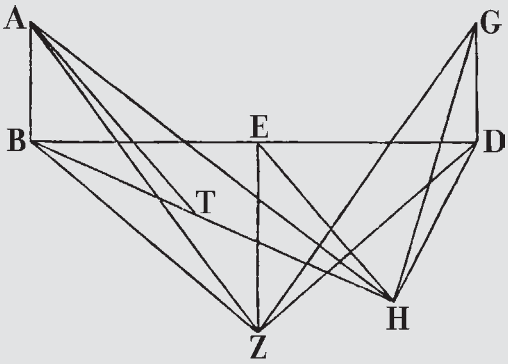
Seja <a magnitude> BG maior do que <a magnitude> GD e sejam descritas, em torno de BG, uma seção maior do que um semicírculo e, em torno de GD, uma <seção> semelhante àquela em torno de BG, ou seja, <uma seção> que admita um ângulo igual àquele <ângulo> em BZG <*El.*, III, Prop. 33>.



Assim, as seções cortar-se-ão mutuamente. Que sejam cortadas em Z e sejam unidas ZB, ZG e ZD. Assim, uma vez que os ângulos inscritos em seções semelhantes são iguais entre si, então os ângulos das seções BZG e GZD são iguais entre si <*El.*, III, Prop. 21>. Ora, a partir de ângulos iguais, aquilo que é visto aparece igual <Def. 4>. Portanto, se o olho for posto sobre o ponto Z, <a magnitude> BG aparecerá igual <à magnitude> GD. Mas é maior <por suposição>. Portanto, existe um lugar comum a partir do qual magnitudes desiguais aparecem iguais.

46. | μς΄. [50.] Existem lugares nos quais, sendo o olho movido, magnitudes iguais e em <ângulos> retos com o plano subjacente aparecem algumas vezes iguais, algumas vezes desiguais.

Sejam AB e GD magnitudes iguais e em <ângulos> retos com o plano subjacente. Afirmo que existe um lugar no qual, posto o olho, AB e GD aparecerão iguais. Seja unida BD a partir de B até D, que seja dividida em duas <partes iguais> no ponto E e, a partir de E, seja traçada EZ em <ângulos> retos com DB. Afirmo que, se o olho for posto sobre EZ, <as magnitudes> AB e GD aparecerão iguais. Seja posto o olho sobre EZ, que seja sobre Z, e incidam os raios <visuais> ZA, ZB, ZE, ZD e ZG. Portanto, a linha reta ZB é igual à linha reta ZD. Mas foi suposto que também AB é igual a GD; portanto, as duas <linhas retas>, AB e BZ, são iguais às duas <outras linhas retas>, GD e DZ. E contêm ângulos retos <com o plano subjacente>. Portanto, o <ângulo> sob BZA é igual ao <ângulo> sob DZG <*El.*, I, Prop. 4>. Portanto, AB e GD serão vistas iguais <Def. 4>.

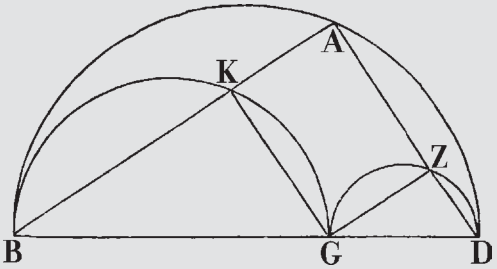


Afirmo que também serão vistas desiguais.

Seja o olho movido e que seja <posto sobre> H, seja traçada HE e incidam os raios HB, HA, HG e HD. Portanto, HB é maior do que HD. De HB, seja subtraída <a linha reta> BT igual a <a linha reta> HD e seja AT unida. Portanto, o ângulo sob BTA é igual ao ângulo sob GHD <*El.*, I, Prop. 4>. Mas o <ângulo> sob BTA é maior do que o <ângulo> sob BHA, o <ângulo> exterior maior do que o <ângulo> interior;[40] portanto, também o <ângulo> sob GHD é maior do que o <ângulo> sob BHA <*El.*, I, Prop. 16>. Portanto, GD aparecerá maior do que AB <Def. 4>.

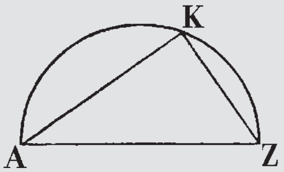
47. | μζ΄. [51.] Existem lugares nos quais, posto o olho, a composição [τὰ συντεθέντα; *compositae*] de <duas> magnitudes desiguais em uma mesma <magnitude> aparecerá igual a cada uma das <magnitudes componentes> desiguais.

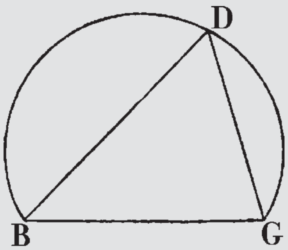
Seja BG maior do que GD e sejam descritos os semicírculos em torno de BG e de GD e em torno de toda <a composição das magnitudes desiguais> BD. Assim, o ângulo <inscrito> no semicírculo BAD é igual ao ângulo <inscrito> no semicírculo BKG, pois cada um deles é reto <*El.*, iii, Prop. 31; *El.*, i, Post. 4>. Portanto, BG aparece igual a BD <Def. 4>. Similarmente, BD também <aparece igual> a GD aos olhos [τῶν ὄμματων; *oculis*] situados sobre os semicírculos BAD e GZD. Portanto, existem lugares nos quais a composição de duas magnitudes desiguais compostas em uma mesma <magnitude> aparecerá igual a cada uma das magnitudes desiguais.



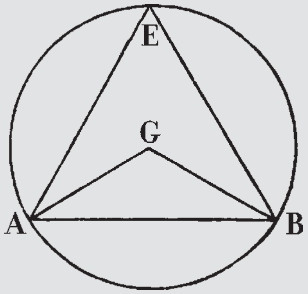
48. | μη΄. [52.] Encontrar os lugares a partir dos quais a mesma magnitude aparecerá <igual> na <razão de sua> metade ou na <razão de sua> quarta parte ou universalmente na razão [καθόλου ἐν τῷ λόγῳ; *universaliter in proportione*] em que o ângulo for dividido.

Seja AZ igual a BG e seja descrito um semicírculo em torno de AZ e que nesse mesmo <semicírculo> seja descrito o ângulo reto K; seja BG igual a AZ e seja descrita em torno de BG uma seção que admita [δέξεται; *recipiat*] metade do ângulo K <*El.*, i, Prop. 9; iii, Prop. 33>. Assim, o ângulo K é o dobro do ângulo D. Portanto, AZ aparece o dobro de BG aos olhos situados sobre os arcos AKZ e BDG <Def. 4>.





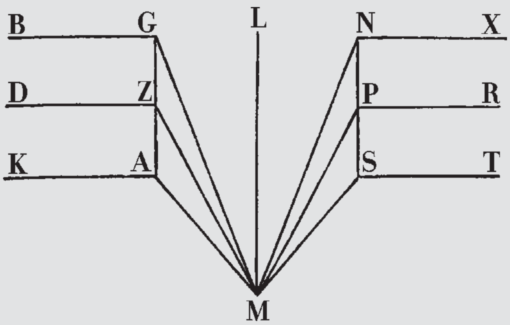
49. | μθ΄. Seja AB uma magnitude vista. Afirmo que AB possui lugares nos quais, posto o olho, a mesma <magnitude> aparece algumas vezes <reduzida a> a metade, algumas vezes inteira, algumas vezes <reduzida na razão de> a quarta parte e, universalmente, <aparece> na razão dada.



Seja descrito, em torno de AB, o círculo AEB, de modo que AB não seja o diâmetro, seja tomado o centro do círculo e que seja G <*El.*, III, Prop. 1>, sobre o qual seja posto o olho, e sejam unidas as linhas retas AG e GB. Portanto, AB é vista a partir do <ângulo> sob AGB. Seja posto o olho sobre a circunferência do círculo, que seja sobre E, e incidam os raios <visuais> EA e EB. Ora, uma vez que o ângulo sob AGB é o dobro do ângulo sob AEB <*El.*, III, Prop. 20>, então, a partir de G, <a magnitude> AB é vista o dobro <isto é, aparece duas vezes maior> do que <quando vista> a partir de E <Def. 4>. E, similarmente, a quarta parte <isto é, quatro vezes menor> será vista se o ângulo for um quarto do ângulo, e <universalmente será vista> na razão dada.

50. | ν΄. [53.] Das <magnitudes> movidas a igual rapidez que possuem suas extremidades do mesmo lado sobre uma linha reta que lhes é perpendicular e que se aproximam, de modo paralelo à dita linha reta, da linha reta traçada através do olho, a <magnitude> mais afastada do olho parecerá preceder [προηγεῖσθαι δόξει; *praecedere videtur*] a <magnitude> mais próxima <do olho>, mas, ao mudarem de lado [παραλλαξάντων; *mutantibus*],[41] a <magnitude> que precedia parecerá suceder [ἐπακολουθεῖν; *subsequi*] e a <magnitude> que sucedia parecerá preceder.

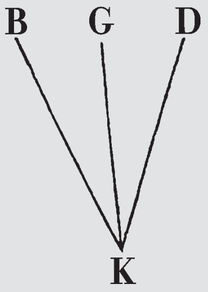
Sejam BG, DZ e KA <magnitudes> movidas com igual rapidez e que tenham suas extremidades, G, Z e A, do mesmo lado sobre a linha reta GA que lhes é perpendicular e, a partir do olho sobre M, seja traçada ML paralela a GA e sejam unidas MG, MZ e MA. Assim, BG é a <magnitude> que parece preceder e KA é a <magnitude> que parece suceder, pois, dos raios <visuais> incidentes a partir do olho, <o raio visual> MG parece inclinar-se [παρῆχθαι δοκεῖν; *derivari videri*] para <a extremidade> G mais do que os outros raios. Portanto, ao se aproximarem,



parece que BG é a <magnitude> que precede, como foi dito. Mas, ao mudarem de lado e BG, DZ e KA vindo a ser NX, PR e ST, que incidam os raios <visuais> MN, MP e MS. Assim, <a magnitude> NX parece inclinar-se para <a extremidade> N,[42] pois o raio <visual> MN inclina-se para N mais do que os outros raios; portanto, a <magnitude> ST inclina-se para <a extremidade> T, pois <o raio visual> MS também se inclina para T mais do que os outros raios. Portanto, BG, a <magnitude> que precedia, vindo a ser NX, parecerá suceder e AK, a <magnitude> que sucedia, vindo a ser ST, parecerá preceder.

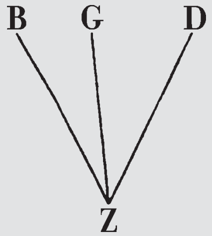
51. | να΄. [54.] Se quaisquer <magnitudes> forem movidas a desigual rapidez e o olho for movido simultaneamente na mesma direção, <então> aquelas <magnitudes> movidas na mesma rapidez que o olho parecem paradas, aquelas movidas mais lentamente <que o olho> parecem movidas na direção contrária e aquelas movidas mais rapidamente <que o olho> parecem movidas à frente [τὰ προηγούμενα; *praecedentia*].[43]

Sejam <as magnitudes> B, G e D movidas a desigual rapidez e que B seja a mais lentamente movida <das três magnitudes>, que G seja movida a igual rapidez que o olho K e que D seja movida mais rapidamente do que G. E que, a partir do olho K, incidam os raios <visuais> KB, KG e KD. Assim, movida a igual rapidez que o olho, <a magnitude> G parecerá parada, enquanto que B, que retarda, parecerá <que é movida> na direção contrária e <a magnitude> D, a que foi suposta <ser movida> mais rapidamente do que as outras <magnitudes>, parece que é movida para frente, pois está mais distante do que as outras.

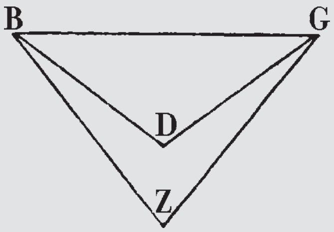


52. | νβ΄. [55.] Se alguma <magnitude> que não é movida aparece entre quaisquer <magnitudes> movidas, <então> a <magnitude> que não é movida parecerá mover-se para trás.

Sejam <as magnitudes> B e D movidas enquanto <a magnitude> G permanece parada e, a partir do olho, incidam os raios <visuais> ZB, ZG e ZD. Assim, ao ser movida, B estará mais próxima de G, enquanto que D, ao avançar, estará mais afastada <de G>; portanto, G parecerá mover-se na direção contrária.

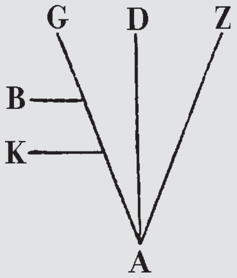


53. | νγ΄. [56.] Se o olho aproxima-se daquilo que é visto, aquilo que é visto parecerá aumentar.



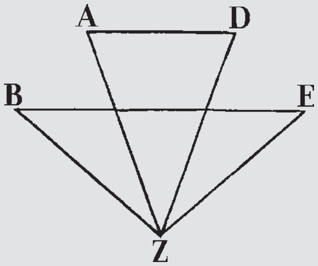
Veja-se [ὁράσθω; *videatur*] <a magnitude> BG a partir dos raios <visuais> ZB e ZG do olho situado sobre Z, seja o olho movido para mais próximo de BG, que seja sobre D, e seja o mesmo <isto é, a mesma magnitude BG> visto a partir dos raios <visuais> DB e DG. Ora, o ângulo D é maior do que o ângulo Z; e, a partir de um ângulo maior, aquilo que é visto aparece maior <Def. 4>. Portanto, BG parecerá maior quando o olho está sobre D do que quando está sobre Z.

54. | νδ΄. [57.] Das <magnitudes> movidas a igual rapidez, parece que as mais remotas movem-se mais lentamente.



Movam-se [φερέσθω; *farantur*] B e K com igual rapidez e sejam traçados, a partir do olho A, os raios <visuais> AG, AD e AZ. Assim, <a magnitude> B tem raios <visuais>, traçados a partir do olho, maiores do que <a magnitude> K. Portanto, B percorrerá [διελεύσεται; *pertransibit*] uma distância maior e depois, ao mudar de lado,[44] <em relação a> o raio visual [τὴν ὄψιν; *visum*] AZ, <a magnitude B> parecerá mover-se mais lentamente.

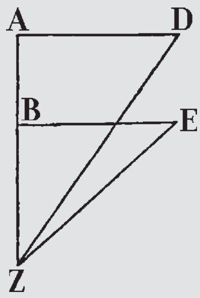
Alternativamente.



Movam-se dois pontos, A e B, sobre linhas retas paralelas e seja Z o olho, a partir do qual incidam os raios <visuais> ZA, ZB, ZE e ZD. Afirmo que A, o <ponto> mais remoto, parece movido mais lentamente do que B. Ora, uma vez que <os raios visuais> AZ e ZD compreendem um ângulo menor do que <os raios visuais> ZB e ZE, então <a magnitude> BE é vista maior do que <a magnitude> AD <Def. 4>. Portanto, se prolongarmos o raio <visual> ZE em linha reta, dos <pontos> que se movem a igual rapidez, <o ponto> B sobre o raio ZE † (...),[45] impedido chegará depois [κωλυθέν ὑστερεῖ; *prohibet posteriorari*]; portanto, das <magnitudes> que se movem a igual rapidez, as mais remotas parecem mover-se mais lentamente.

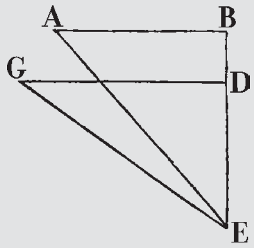
Alternativamente.

Movam-se uniformemente [ὁμαλῶς; *equaliter*] dois pontos, A e B, sobre as linhas retas paralelas AD e BE; portanto, em tempos iguais, percorrerão igualmente <isto é, distâncias iguais>. Sejam AD e BE <distâncias> iguais e, a partir do olho sobre Z, incidam os raios <visuais> ZA, ZD, ZB e ZE. Ora, uma vez que o ângulo sob AZD é menor do que o ângulo sob BZE, então o intervalo AD aparecerá menor do que o intervalo BE <Def. 4>. Assim, <o ponto> A parecerá movido mais lentamente <do que o ponto B>.



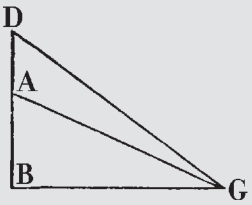
55. | νε´. [58.] Se o olho permanecer parado enquanto os raios visuais são deslocados [τῶν δὲ ὄψεων παραφερομένων; *visibus transportatis*], parecerá que as <magnitudes> mais remotamente vistas [τὰ πόρρω τῶν ὁρωμένων; *remotiora visorum*] são deixadas para trás [καταλείπεσθαι; *relinqui*].

Sejam A e G as magnitudes vistas que estão sobre as linhas retas AB e GD e seja E o olho, a partir do qual incidam os raios <visuais> EG, ED, EA e EB. Afirmo que parecerá que A é deixada para trás. Seja prolongado <o raio visual> ED até unir-se com AB, e que seja EB. Portanto, uma vez que o ângulo sob GEB é maior do que o ângulo sob AEB, o intervalo GD aparece maior do que o intervalo AB <Def. 4>. Assim, se o olho permanecer parado sobre E, os raios visuais, aqueles que passam pelas partes A e G, passarão mais rapidamente para o outro lado de A do que para o outro lado de G. Portanto, parecerá que AB é deixada para trás [ὑπολείπεσθαι; *relinqui*].



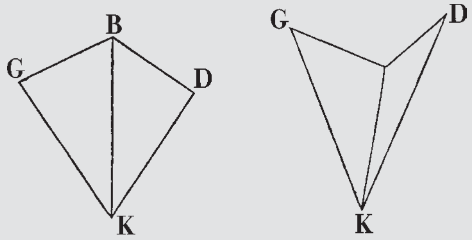
56. | νς´. [59.] As magnitudes aumentadas [τὰ αὐξανόμενα τῶν μεγεθῶν; *augmentatae magnitudines*] parecem aproximar-se do olho.

Seja AB a magnitude vista e seja G o olho, a partir do qual incidam os raios <visuais> GA e GB. E seja BA aumentada, que seja BD, e incida o raio GD. Ora, uma vez que o ângulo sob BGD é maior do que o ângulo sob BGA, então BD aparece maior do que BA <Def. 4>. Mas as <magnitudes> que são supostas [τὰ οἰόμενα; *visa*][46] maiores do que si mesmas parecem [δοκοῦσι; *videntur*] aumentar e as <magnitudes> mais próximas do olho aparecem [φαίνεται; *videntur*] maiores <Prop. 5>. Portanto, magnitudes aumentadas parecem aproximar-se do olho.



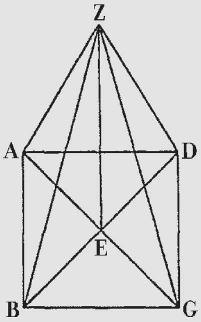
57. | νζ΄. [60.] Quaisquer <magnitudes situadas> no mesmo intervalo, sem que suas extremidades estejam em linha reta com sua parte média, fazem a figura toda algumas vezes côncava, algumas vezes convexa.[47]

Veja-se GBD a partir do olho situado sobre K e incidam os raios <visuais> KG, KB e KD. Portanto, a figura inteira parecerá côncava. Seja agora movido na parte média aquilo que é visto e seja situado mais próximo do olho. Assim, DBG parecerá convexa.



58. | νη΄. [61.] Se, a partir do <ponto de> contato dos diâmetros de um quadrado, for traçada uma linha reta em <ângulos> retos[48] e o olho posto sobre ela, <então> os lados do quadrado aparecerão iguais e os diâmetros aparecerão também iguais.[49]

Seja o quadrado ABGD, sejam traçadas suas diagonais DB e GA, seja elevada, a partir de E, a linha reta EZ em <ângulos> retos com o plano e sobre a qual seja posto o olho Z e incidam os raios <visuais> ZA, ZB, ZG e ZD. Ora, uma vez que DE é igual a EG, enquanto EZ é comum e os ângulos são retos, então a base ZG é igual à base DZ e os ângulos situados nas bases que subtendem lados iguais são iguais <*El*., I, Prop. 4>. Portanto, o <ângulo> sob EZG é igual ao <ângulo> sob EZD. Portanto, EG aparecerá igual a ED <Def. 4>. Similarmente, o <ângulo> sob AZE também é igual ao <ângulo> sob BZE. Portanto, AG aparecerá igual a BD <Def. 4>. Novamente, uma vez que GZ é igual a ZB, enquanto AB é igual a GD e também AZ é igual a ZD, então as três <linhas retas> são iguais às <outras> três e o ângulo é igual ao ângulo <*El*., I, Prop. 4>. Portanto, o lado aparecerá igual ao lado e, assim, os lados restantes aparecerão iguais <Def. 4>.



Todavia, se a <linha reta traçada> a partir do olho até o <ponto de> contato dos diâmetros não estiver em <ângulos> retos com o plano, nem for igual a cada uma das <linhas retas traçadas> a partir do <ponto de> contato <dos diâmetros> até os ângulos do quadrado nem fizer ângulos iguais com essas <linhas retas>, <então> os diâmetros aparecerão desiguais. Pois mostraremos similarmente que <isso> acontece como no <caso> dos círculos.[50]

[Fim da óptica de Euclides][51]

* * *

Traduzido do original em grego e em latim por Guilherme Rodrigues Neto

Notas

1 A tradução que segue foi feita a partir do texto grego da *Óptica* estabelecido na edição crítica de I. L. Heiberg, publicada em 1895, e a partir do texto latino estabelecido na edição crítica de W. R. Theisen, publicada em 1979. A edição de Heiberg fornece, ademais do aparato crítico usual, uma versão latina do texto grego, a qual não contém, todavia, qualquer menção a variantes. A edição de Theisen da versão latina do tratado de Euclides, conhecido na Idade Média pelo título *Liber de visu*, por sua vez, é mais cuidadosa e confiável do que a versão latina de Heiberg. Como apoio à tradução, recorreu-se à tradução francesa, de Paul Ver Eecke, publicada em 1959, e à tradução inglesa, de Harry E. Burton, de 1945. Sobre a atribuição da *Óptica* a Euclides, cf. Lindberg, 1976, p. 220, nota 75; Theisen, 1979, p. 46-7.

Utilizo os sinais [ ] para registrar os termos originais empregados nas versões grega e latina do tratado de Euclides e também para indicar os acréscimos e interpolações da versão latina ao texto grego. Por sua vez, a fim de manter suas elipses e eliminar suas possíveis ambiguidades, emprego os sinais < > para marcar minhas próprias interpolações ao texto e também para anotar referências ao texto de *Os elementos* em passagens que envolvem a justificação de inferências geométricas, ademais de indicar o uso de definições e proposições anteriores já demonstradas na *Óptica*. Talvez a tradução incorra em certo excesso de discursividade, todavia creio que esse recurso permitiu conferir uma maior clareza e inteligibilidade ao texto, preservando sua literalidade. E ainda, uma vez que a numeração das proposições na versão grega do tratado, cuja edição crítica foi estabelecida por Heiberg (1895), não corresponde àquela que aparece nas versões latinas do tratado de Euclides, cuja edição crítica foi estabelecida por Wilfred R. Theisen (1979), emprego a seguinte convenção no início de cada proposição: o algarismo seguido pela barra vertical e por letras gregas indica a ordenação das proposições na versão grega – alguns manuscritos empregam números e outros empregam letras para ordenar a série de proposições –, enquanto o algarismo no interior de colchetes indica a ordenação da proposição na versão latina.

2 Embora o texto grego empregue o termo *hóroi*, o que segue esse título não consiste propriamente de "definições", mas de hipóteses ou suposições, as quais constituem as premissas fundamentais do sistema. Como diz Eecke, "hipóteses ou suposições que permitem aplicar o instrumental geométrico aos fenômenos da visão" (Eecke, 1959, p. xiv). Deve-se notar que a primeira definição introduz o verbo "supor" (*hypokeisthô*), o qual regerá todo o conjunto das "definições". Gérard Simon sugere que o sentido do termo "definições" é apenas o de "delimitar" as *suposições* fundamentais da teoria (cf. Simon, 1988, p. 63). Sobre a consideração canônica acerca das funções atribuídas às "definições" e "hipóteses", cf. Aristóteles, *An. Post.*, I, 1, 72a21-24. Sobre o estatuto da teoria óptica, cf. *An. Post.*, I, 14, 79a10-16; *Física*, II, 2, 194a7-11.

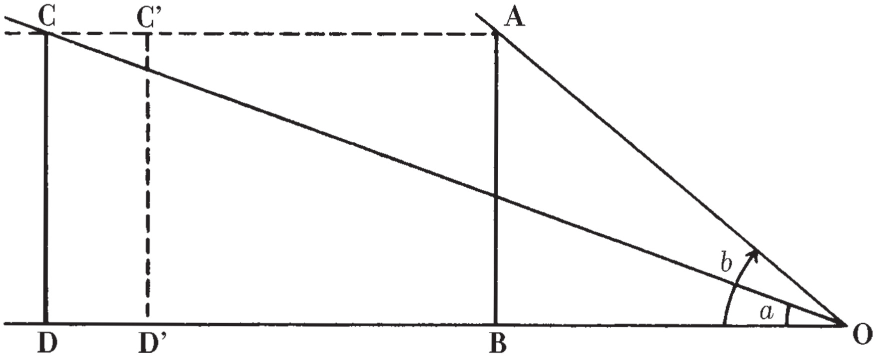
A condição de possibilidade da óptica geométrica antiga funda-se, pois, na assimilação do raio visual a uma linha reta geométrica, o que permitiu a elaboração de uma análise geométrica da radiação visual que se baseia em relações métricas angulares. O conjunto de suposições que antecede as demonstrações tem como objetivo fornecer os elementos de tal análise. Assim, o texto pede a seu leitor que conceda a verdade de algumas suposições fundamentais a fim de apreender demonstrativamente um conjunto de teoremas concernentes à visualidade. A ciência de Euclides pretende explicar por que aquilo que é visto aparece de certa maneira e não de outra, ou por que varia sua aparência de certa maneira e não de outra. Como veremos, todos esses efeitos seguem de relações angulares entre o olho que vê e aquilo que é visto.

3 As duas últimas suposições não aparecem na versão grega. Trata-se de interpolações latinas tardias (cf. Theisen, 1979, p. 62), talvez acrescentadas por alguém que julgou necessário explicitar algumas suposições que Euclides não elaborou. Na interpolada oitava suposição, tem-se o postulado de que a velocidade dos raios visuais é constante – uma consideração certamente extrageométrica – e, na nona, o postulado de que existe um ângulo mínimo de visão – uma consideração certamente geométrica. É interessante notar que a segunda suposição interpolada é plenamente consistente com a interpolação latina que aparece no início da demonstração da terceira proposição.

4 Os raios visuais euclidianos são discretos e divergentes, por isso não são capazes de capturar simultaneamente todas as partes visíveis de uma magnitude visível. Ou seja, a existência de intervalos invisíveis entre os raios visuais é uma consequência direta da natureza divergente e discreta desses raios. Assim, "existem intervalos" visíveis que, todavia, não são vistos conjuntamente com todos os outros intervalos visíveis da magnitude, uma vez que tais inter-

valos caem nos espaços vazios que existem entre os raios visuais e, assim, não são interceptados pela visão – pois não satisfaz a condição requerida para a visão que foi enunciada na terceira suposição. Deve-se notar que existe aqui uma diferença fundamental em relação à concepção de Ptolomeu acerca da natureza física da radiação visual. Para Ptolomeu, o cone visual não consiste, como em Euclides, em um feixe composto de uma multiplicidade puntiforme de raios visuais discretos – os quais possuem a natureza de linhas retas geométricas, entidades que possuem somente comprimento e cuja largura é tomada simplesmente como um ponto –, mas em um corpo contínuo, um *pneuma* visual. Sobre a natureza discreta dos raios visuais euclidianos em contraposição com a concepção de Ptolomeu, cf. Eecke, 1959, p. xiv; Lindberg, 1976, p. 15-6; Simon, 1988, p. 65-6; Smith, 1996, p. 23-4.
5 Essa cláusula aparece somente em versões latinas do tratado (cf. Theisen, 1979, p. 64) e pretende explicitar a ideia de que existe um ângulo de visão mínimo, suposto na ideia de que a radiação visual divergente a partir do olho não é contínua, mas discreta. Esse princípio do ângulo mínimo de visão parece estar suposto na primeira suposição.
6 Ou seja, para toda magnitude visível, qualquer que seja seu tamanho, existe uma determinada distância em relação ao olho a partir da qual a magnitude deixa de ser visível. Isso ocorre quando seu tamanho, devido à distância em que a magnitude encontra-se do olho, torna-se menor do que a corda que subentende o "ângulo de visão mínimo". Assim como na primeira proposição, o que se tem aqui é uma consequência direta da natureza divergente e discreta da radiação visual. Em toda magnitude visível existem regiões de invisibilidade, as quais crescem em proporção direta com a distância até o limite em que o tamanho de tais regiões torna-se maior do que o tamanho da própria magnitude e, desse modo, a magnitude deixa de ser visível. Assim, por causa da grande distância em que o objeto visual encontra-se em relação ao olho, a base do triângulo isósceles que tem como vértice o olho é menor do que o tamanho desse objeto, por isso o objeto não é mais visto, pois os raios visuais passam a sua volta sem interceptá-lo. Trata-se, pois, de uma relação inversa entre distância e visibilidade. O teorema pretende explicar o fato empírico da existência de um *limite* de visibilidade relacionado à distância de visualização. Isso parece trazer uma dificuldade astronômica, sobretudo tendo em vista o caráter propedêutico que os antigos atribuíam à óptica em relação à astronomia: como é possível ver aquilo que está mais afastado de nós, como é possível ver os corpos celestes?
7 Por razões de brevidade e clareza, em vez da forma discursiva empregada por Euclides ("*a* está para *b* assim como *c* está para *d*"), utilizo a notação convencional ($a : b :: c : d$) para expressar a relação de proporcionalidade entre quatro magnitudes.
8 Ou seja, magnitudes paralelas – situadas no mesmo plano em que está o olho e longitudinalmente vistas – aparecem como *convergentes* ao eixo visual. Explicação da ilusão óptica do encontro das paralelas. Bastante raro na literatura matemática grega, a palavra ἀνισοπλατῆ, traduzida aqui pela expressão "desigualdade em latitude", sugere a ideia de convergência.
9 As versões medievais latinas do tratado separam essa parte da demonstração como uma proposição independente; a partir deste parágrafo, a numeração das proposições começa a divergir entre a versão grega e as versões latinas do tratado de Euclides. Algumas poucas versões latinas destacam essa segunda parte da sétima proposição com o título de "escólio" e não alteram a numeração original das proposições.
10 A primeira condição é a de que as magnitudes visíveis não sejam contíguas, ou adjacentes, ou seja, elas devem estar separadas por algum intervalo. Com efeito, se essa condição não fosse satisfeita, não se teriam duas magnitudes, mas apenas uma. A segunda condição põe o caso de modo diverso da proposição anterior, quando as magnitudes, por serem paralelas, estavam igualmente distantes do olho.
11 De acordo com a interpretação de Erwin Panofsky, apresentada em seu clássico ensaio de 1927, *A perspectiva como forma simbólica*, o "oitavo teorema" da *Óptica* de Euclides define a característica fundamental da "perspectiva antiga", caracterizada como "natural, angular ou curvilínea" e que está em "contradição" com a "perspectiva renascentista", caracterizada como "artificial, linear ou retilínea", cujas regras foram codificadas por Leon B. Alberti, em seu *De pictura* (*Da pintura*), de 1435-1436 (cf. Panofsky, 1993 [1927], p. 36-7). Enquanto a perspectiva antiga, ou *perspectiva naturalis*, funda-se na suposição de uma relação direta de proporcionalidade entre o ângulo visual e o tamanho da "magnitude vista" e, assim, por consequência, recusa a relação inversa de proporcionalidade entre o tamanho aparente e a distância, a perspectiva renascentista, ou *perspectiva artificialis*, por sua vez, assume como princípio precisamente essa relação entre distância e tamanho, exatamente o que é refutado nesta oitava proposição. Segundo Panofsky, pode-se entender a contradição ao considerar que a perspectiva antiga "procurou apenas a

formulação matemática das leis da visão natural, relacionando, assim, a grandeza aparente ao ângulo de visão", enquanto que, "contrariamente a ela, a segunda [a "perspectiva renascentista"] tentou estabelecer um método que se provasse útil na representação de imagens em superfícies bidimensionais" (Panofsky, 1993 [1927], p. 37). A influente tese de Panofsky tem recebido algumas críticas, entre essas, cf. Tobin, 1990.
A figura abaixo ilustra a discrepância entre as duas perspectivas.



Segundo a perspectiva angular dos antigos, para dois ângulos, dos quais um é o dobro do outro ($b = 2 \times a$), a magnitude AB aparece reduzida à metade quando posta em CD, estando o olho em O. Por sua vez, segundo a perspectiva linear renascentista, cuja suposição fundamental é a da razão inversa entre tamanho aparente e distância, a posição "correta" em que a magnitude AB aparece reduzida à metade, estando o olho em O, deve ser em C'D' (pois OD' = 2 × OB), e não em CD (cf. Panofsky, 1993 [1927], p. 38; Simon, 1988, p. 67; 2003, p. 23).

12 Trata-se de uma resposta a um dos argumentos que os céticos antigos elaboraram para fortalecer a suspensão do juízo em relação à verdade das aparências sensíveis. A objeção da torre quadrada – a qual, distantemente vista, parece redonda – pertence ao grupo de argumentos céticos que Sexto Empírico registra no "argumento das posições, distâncias e localizações", também conhecido como o "quinto tropo de Enesidemo" (cf. HP, I, 118-119). A ciência da visão de Euclides parece fornecer uma resposta a tal desafio. Sobre a questão da relação entre a óptica helenista e o ceticismo antigo, cf. Berryman, 1998.

13 Eecke pensa que esse corolário que explica a ilusão de concavidade seja uma interpolação espúria (cf. Eecke, 1959, p. 9, n. 2).

14 Fica subentendido: magnitudes que possuem longitude *em relação ao olho*.

15 Referência à primeira proposição do tratado da *Catóptrica*, atribuído tradicionalmente a Euclides, que estabelece que "os raios visuais são refletidos em ângulos iguais por espelhos planos, convexos e côncavos" (Heiberg, 1895, p. 88). Essa menção à *Catóptrica* levou alguns autores renascentistas a pensarem que se poderia indicar uma anterioridade desse tratado em relação à *Óptica*. Todavia, essa passagem parece consistir, provavelmente, de uma interpolação tardia (cf. Eecke, 1959, p. xix-xx). Heiberg questiona a atribuição do texto da *Catóptrica* a Euclides e o considera apócrifo (cf. Heiberg, 1895, p. xlix-l). Também sobre o problema da atribuição da *Catóptrica* a Euclides, cf. Heath, 1981, I, p. 441; Eecke, 1959, p. xxviii-xxix; Simon, 1994.

16 Há uma lacuna no manuscrito grego, o que deixa a "demonstração incompleta" (cf. Eecke, 1959, p. 16, n. 1).

17 "Envia [ἀποστέλλει; *emittit*] o aspecto (ou a imagem)[φαντασίαν; *phantasiam*]", expressão teoricamente inusitada, uma vez que poderia dar a entender que é o objeto visual que "emite" uma imagem, invertendo assim o sentido da radiação a partir do olho. É a única ocorrência desses dois termos no tratado. A fim de evitar anacronismos, decidi traduzir o termo *phantasia* por "aspecto". A tradução francesa traz "*impression*" (Eecke, 1959, p. 16), o mesmo que a tradução inglesa (cf. Burton, 1945, p. 361).

18 Ou seja, uma vez que, de acordo com a primeira proposição, aquilo que é visto não é visto simultaneamente em sua totalidade, isto é, uma vez que não se vê ao mesmo tempo todas as partes da coisa vista, então o arco não aparece inteiro, mas em partes. Essa segunda demonstração alternativa não parece ser suficiente para estabelecer que o arco é visto como uma reta (cf. Eecke, 1959, p. 17, n. 1).

19 Argumento indireto por redução ao impossível. A demonstração recorre à proposição 17 do terceiro livro de *Os elementos*. A referida proposição, todavia, enuncia um problema e não um teorema: "A partir de um ponto dado, traçar uma linha reta tangente ao círculo dado" (Euclides, 2009, p. 167; *El*., iii, Prop. 17). A propriedade de a tangente fazer ângulos retos com o diâmetro do círculo, afirmada na premissa da hipótese de redução desta passagem espúria do *Liber de visu*, parece estar mais diretamente relacionada ao corolário da proposição 16 do mesmo livro, o qual antecede a proposição referida na passagem e que afirma: "Disso é evidente que a traçada em ângulos retos com o diâmetro (...) é tangente ao círculo (...)" (Euclides, 2009, p. 167; *El*., iii, Prop. 16, Corol.).
20 Logo, os ângulos ZBA e ZEA são retos e, portanto, "caem", isto é, estão *inscritos* em um semicírculo. Em *El*., iii, Prop. 31, Euclides demonstra que, "em um círculo, o ângulo no semicírculo é reto" (Euclides, 2009, p. 177).
21 Isto é, não cortam o círculo, não lhe são secantes. Em *El*., iii, Prop. 16: "A <linha reta> traçada em ângulos retos com o diâmetro de um círculo (...) cairá no exterior do círculo (...)" (Euclides, 2009, p. 165).
22 Esses dois teoremas – [24] e [25] – não aparecem nos manuscritos gregos, pelo menos não aparecem no texto estabelecido por Heiberg nem no aparato crítico fornecido. Trata-se de interpolações tardias introduzidas em versões latinas do tratado. A tradução segue aqui o texto da versão latina estabelecido em Theisen, 1979, p. 76-7.
23 Segundo Eecke, a demonstração de que a seção, ou corte, de uma esfera produz um círculo não é "objeto de uma proposição específica de *Os elementos* de Euclides". No entanto, como observa Eecke, tal demonstração é "dada subsidiariamente no curso da demonstração" de *El*., xii, Prop. 17 (Eecke, 1959, p. 17, n. 1).
24 Algumas versões medievais latinas acrescentam: "pelo terceiro de Euclides, a saber, quando o limite de uma linha reta faz ângulo reto, ela será tangente" [*per tertium Euclidis, scilicet quando a termino ducta existens linea facit angulum rectum, ilia contingens erit*] (Heiberg, 1895, p. 37-9; Theisen, 1979, p. 77). Assim como na demonstração da interpolada proposição [24], a referência aqui é ao corolário da proposição 16 do terceiro livro de *Os elementos*: "Disso é evidente que a <linha reta> traçada em ângulos retos com o diâmetro (...) é tangente ao círculo (...)" (Euclides, 2009, p. 167; *El*., iii, Prop. 16, Corol.).
25 As proposições 25-27 são as únicas passagens da *Óptica* em que se faz referência aos "dois olhos". Não se trata de uma consideração acerca da visão binocular, ou sobre o problema da fusão de imagens (o que será posteriormente enfrentado por Ptolomeu), mas apenas leva em conta a distância linear entre os dois olhos. Como demonstra essa proposição 26, se essa distância for maior do que o diâmetro de uma esfera, então mais do que um hemisfério será visto. Essa é a única possibilidade de os raios visuais capturarem mais do que um hemisfério – aplica-se somente a esferas pequenas, cujos diâmetros sejam menores do que a distância entre os dois olhos.
26 Ou seja, os raios visuais seriam refratados, desviados em sua trajetória, "o que é impossível", pois contradiz o que é suposto na primeira "definição" do tratado, ou seja, a retilineidade dos raios visuais.
27 Euclides emprega a expressão "a do centro" para designar "o raio do círculo", isto é, a linha reta que vai do centro à circunferência do círculo.
28 Ou seja, nos triângulos retângulos BAG e BZA, tem-se: $BA^2 = BG^2 + GA^2 = BZ^2 + ZA^2$ <*El*., i, Prop. 47>. Ora, GA > ZA; portanto, BZ > BG. Quando o tratado examina, logo a seguir, a reta AT, fica claro o recurso ao teorema de Pitágoras.
29 Por hipótese, EZ > raio do círculo e XN = EZ; portanto, XN > 1/2 LM.
30 Ora, LN = HZ, NO = EZ e o ângulo LNO = o ângulo HZE; portanto, o triângulo LNO = o triângulo HZE <*El*., i, Prop. 4>. Portanto, o ângulo HEZ = o ângulo LON e o ângulo ONM = o ângulo EZF; portanto, o triângulo NOM = o triângulo ZEF <*El*., i, Prop. 4>; portanto, o ângulo NOM = o ângulo ZEF e o ângulo LOM = o ângulo HEF. Ocorre o mesmo paralelismo que no caso anterior do ângulo X.
31 Ou seja, fazem ângulos iguais com a reta AB que se desloca de modo circular e perpendicular sobre o plano do círculo. Assim, o ângulo AGB é constante em todo o deslocamento de AB sobre o círculo, de modo que a "magnitude será vista sempre igual" (isto é, do mesmo tamanho), ao longo de tal deslocamento.
32 Ou seja, se o olho não estiver no mesmo plano que o círculo, mas deslocar-se perpendicularmente pelo eixo central do círculo, o mesmo ocorrerá, ou seja, a magnitude vista não será vista ora maior ora menor, mas será vista sempre do mesmo tamanho.
33 Isto é, das linhas retas que fazem um ângulo com a reta GE. Quanto maior for esse ângulo, maior a magnitude aparecerá.

34 Ou seja, compreende o mesmo arco de circunferência.
35 Isto é, acontecerá o mesmo que a proposição precedente, ou seja, a magnitude aparecerá algumas vezes igual, algumas vezes desigual.
36 Isto é, magnitudes iguais e contíguas. Cf. Eecke, 1959, p. 41, n. 1. Na proposição 7, tratava-se de magnitudes iguais e não contíguas.
37 Ou seja, as magnitudes aparecem desiguais porque são vistas a partir de ângulos desiguais, e os ângulos são desiguais porque encerram arcos desiguais.
38 Trata-se da única referência explícita da versão grega a alguma proposição particular de *Os elementos*. Eecke sugere tratar-se de uma "interpolação" tardia (cf. Eecke, 1959, p. 42, n. 1).
39 Outra lacuna no manuscrito grego. Refere-se à primeira parte da demonstração, a qual examina o caso em que "magnitudes iguais e contíguas aparecem iguais" (cf. Eecke, 1959, p. 42, n. 2).
40 Considerando o triângulo ATH, no qual o ângulo ATB é exterior e o ângulo AHB é interior. O teorema que justifica essa inferência encontra-se em *El*., I, Prop. 16 e afirma que: "Tendo sido prolongado um dos lados de um triângulo, o ângulo exterior é maior do que cada um dos ângulos interiores e opostos" (Euclides, 2009, p. 110).
41 Ou seja, quando as magnitudes ultrapassarem o eixo visual, isto é, "a linha reta traçada através do olho".
42 Eecke considera que os manuscritos gregos cometem a "negligência" de grafar N em vez de X (cf. Eecke, 1959, p. 46, n. 1). Talvez o equívoco seja do próprio comentador.
43 Eecke afirma que "essa proposição introduz a noção de movimento relativo pela primeira vez em um documento da ciência grega" (1959, p. xxiii e p. 47, n. 1).
44 Ou seja, depois de ultrapassar o eixo de visão, isto é, a linha reta AD.
45 Existe uma lacuna em todos os manuscritos gregos e também na versão latina (cf. Heiberg, 1895, p. 114; Theisen, 1979, p. 101). Como diz Eecke, "a conclusão do raciocínio é incompleta e obscura" (1959, p. 48, n. 1). Essa corrupção no texto grego parece indicar que essa demonstração "alternativa" foi tardiamente interpolada ao texto grego original.
46 Eecke chama a atenção para o inusitado uso do termo οἰόμενα, em vez do usual φαίνεσθαι, o que sugeriria "uma alteração mais ou menos tardia do texto" (1959, p. 49, n. 1).
47 Eecke considera que esta proposição e a seguinte são suspeitas de serem acréscimos tardios. O comentador observa que a demonstração da proposição 57 consiste "simplesmente de uma afirmação" e que, ademais, existe uma virtual contradição com a proposição 22 (1959, p. 50, n. 1).
48 Isto é, traçada ou elevada em ângulos retos sobre o plano subjacente do quadrado.
49 Eecke suspeita da autenticidade desta proposição por considerar que isso já teria sido "implicitamente" demonstrado na proposição 34 para o caso do círculo visto a partir das mesmas condições (cf. Eecke, 1959, p. 50, n. 3).
50 O texto parece referir-se à proposição 35, que trata da aparência dos diâmetros do círculo quando o olho estiver posicionado de modo não perpendicular ao centro e sua distância em relação ao círculonão não for igual ao raio do círculo.
51 A frase consta em um dos manuscritos (Vaticanus graec. 1038, sec. XII), o que parece indicar, segundo Eecke, que "a obra de Euclides, terminando aqui, é completa" (1959, p. xxiv e p. 51, n. 1). Todavia, a frase certamente constitui uma interpolação tardia, pois aparece somente em um dos manuscritos gregos examinados por Heiberg (cf. Heiberg, 1895, p. 120).