Trends in Computational and Applied Mathematics

Trends in Computational and Applied Mathematics, **24**, N. 3 (2023), 411-426
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
Online version ISSN 2676-0029
www.scielo.br/tcam
doi: 10.5540/tcam.2023.024.03.00411

A Maximização da Assimetria na Seleção de Carteiras de Investimento e a Generalização do Modelo para Momentos Ímpares de Ordem Superior

P. R. MARTINS[1*], P. S. NUNES[2] e C. F. VASCONCELLOS[3]

Recebido em 14 de dezembro de 2021 / Aceito em 28 de outubro de 2022

RESUMO. Neste trabalho, apresentamos um modelo geral para selecionar carteiras de investimento a partir da maximização de um momento ímpar de ordem superior quando fixados os dois primeiros momentos, considerando um ativo livre de risco e permitindo vendas a descoberto. Deduzimos propriedades geométricas de suas soluções. Propomos ainda uma generalização ao modelo Média-variância de Markowitz, pela minimização de um momento par de ordem superior sujeita a um retorno fixo.

Palavras-chave: seleção de carteiras de investimento, momentos de ordem superior, maximização da assimetria.

1 INTRODUÇÃO

O interesse pela otimização de um portfólio onde são considerados momentos de ordem superior vem se renovando nos últimos anos. Vemos, a exemplo de trabalhos como Arditti [1], Kraus e Litzenberg [4] e Athayde e Flôres [2], que atualmente se discute muito a ideia de momentos de ordem superior serem altamente relevantes na seleção de carteiras de investimento, em um contexto onde os retornos de ativos não seguem um padrão de distribuição normal. Nesse sentido, considerar momentos de ordem superior permitiria obter-se uma melhor aproximação para a função utilidade. Contribuições, como as verificadas nos trabalhos de Athayde e Flôres [2, 3], lançam luz a uma série de questões que antes impediam o desenvolvimento matemático desta importante abordagem para seleção de carteiras de investimento. Ao utilizar uma nova notação na

*Autora correspondente: Patricia Reis Martins – E-mail: patricia.martins@pos.ime.uerj.br

[1]Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, R. São Francisco Xavier, 524, 20550-013, Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: patricia.martins@pos.ime.uerj.br https://orcid.org/0000-0001-8581-7164

[2]Departamento de Análise Matemática, IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, R. São Francisco Xavier, 524, 20550-013, Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: nunes@ime.uerj.br https://orcid.org/0000-0002-1852-7746

[3]Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, R. São Francisco Xavier, 524, 20.550-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil – E-mail: cfredvasc@ime.uerj.br https://orcid.org/0000-0002-1563-2014

representação de qualquer momento tensor relacionado a um vetor aleatório multivariado de retornos de ativos, deduziram importantes resultados qualitativos em um contexto de maximização da utilidade.

Desde [6], desenvolvemos um trabalho de pesquisa com modelos de seleção de carteira de investimento sob a ótica da maximização da função utilidade, explorando a dualidade verificada na natureza deste problema e a necessidade em se considerar momentos de ordem superior. Segundo Athayde e Flôres em [3], sua notação trata o problema em um cenário geral, o que significa tanto na ordem máxima p dos momentos de interesse do portfólio, quanto na representação sistemática da assimetria ou outros tensores de ordem superior.

Dado um vetor aleatório n-dimensional, o conjunto de seus momentos de ordem p pode ser representado por um tensor. De modo que um tensor de p-ésimos momentos, com n^p elementos, é transformado em uma matriz de ordem $n \times n^{p-1}$. No caso da assimetria, por exemplo, o tensor de terceiros momentos é transformado em uma matriz $n \times n^2$, separando o cubo em camadas $n \times n$ que serão dispostas lado a lado,

$$M_3 = \left| \begin{array}{ccccccc} \sigma_{111} & \cdots & \sigma_{11n} & \cdots & \sigma_{n11} & \cdots & \sigma_{n1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n1} & \cdots & \sigma_{1nn} & \cdots & \sigma_{nn1} & \cdots & \sigma_{nnn} \end{array} \right| .$$

Assim, a assimetria do retorno da carteira pode então ser representada por:

$$\alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha),$$

em que $\otimes$ denota o produto de Kronecker, M_3 representa a matriz que contém as co-assimetrias do vetor aleatório de n ativos e $\alpha \in \mathbb{R}^n$, seus pesos correspondentes. Além disso, a notação permite que todas as operações necessárias entre os momentos sejam realizadas através de cálculo matricial.

Embora o conjunto de todos co-momentos possa representar dificuldades de estimativa econométrica para a aplicação, é importante analisar a solução geral para o problema. O rigor para a ordenação preferencial de portfólios, dada por Scott e Horvath [8], pode levar a resultados mais interessantes no contexto estrito de otimização de portfólio. Em [3], encontramos a minimização generalizada para qualquer momento par de um dado portfólio com retorno e assimetria fixados, bem como a discussão de propriedades geométricas destes modelos. Athayde e Flôres ressaltam que a estrutura estudada em [3] traz consequências importantes além de esclarecer a geometria de conjuntos de portfólios eficientes no espaço dos momentos, mas que suas implicações ainda não foram totalmente exploradas.

Em nossas contribuições neste trabalho, exploramos a dualidade existente nestes problemas de otimização, obtendo as estruturas e resultados para o problema dual ao modelo de variância mínima proposto em [3] e a sua generalização para momentos pares proposto em [2], além de obter uma generalização para o modelo Média-Variância de Markowitz [5]. Isto é, analisamos os problemas de maximização da assimetria, fixados o retorno e um momento de ordem par da carteira, e de minimização de um momento de ordem par quando fixado apenas o retorno da carteira.

Apresentamos ainda, um modelo para maximizar um momento ímpar qualquer sujeito à restrição dos dois primeiros momentos, tendo em vista que os investidores gostam de momentos ímpares e não gostam de pares. E discutimos a propriedade homotética presente na estrutura que surge a partir desta otimização no espaço dos momentos. Ao longo de todo o texto, assumimos que os gradientes das restrições nos pontos ótimos são linearmente independentes, mas indicamos quando e o quê ocorre no caso da dependência linear entre eles.

O objetivo central deste trabalho é explorar a dualidade no modelo geral proposto em [3] para, invertendo o papel dos parâmetros no modelo, investigar as mesmas estruturas através da abordagem de maximização da assimetria. E verificar, como observado em [3], a existência de padrões também na maximização de um momento de ordem ímpar, em complementação ao modelo geral proposto para a minimização de um momento de ordem par.

Na Seção 2, apresentamos a otimização da variância considerando o primeiro e o terceiro momentos desejados do portfólio, uma propriedade homotética e a generalização destes resultados para momentos de ordem par quaisquer, obtidas em [2, 3]. Na Seção 3, propomos uma generalização para o modelo Média-Variância de Markowitz e utilizamos este resultado na Seção 4, obtendo a estrutura e alguns resultados para o problema dual ao modelo geral de ordem par a três momentos, visto na Seção 2. Na Seção 5, apresentamos o modelo de otimização da assimetria considerando os dois primeiros momentos e mostramos que a propriedade homotética também se verifica. A Seção 6 generaliza os resultados para momentos de ordem ímpar quaisquer. Em nossa conclusão, explicamos como nossos resultados complementam o estudo de modelos de seleção de carteira que consideram momentos de ordem superior, dando maior relevância a abordagem dos modelos duais.

2 O PROBLEMA DE VARIÂNCIA MÍNIMA E SUA GENERALIZAÇÃO PARA MOMENTOS PARES DE ORDEM SUPERIOR

O material desta seção se baseia em Athayde e Flôres [2,3], onde é encontrada uma análise profunda do problema de portfólio ótimo considerados os três primeiros momentos sob a perspectiva da minimização da variância quando fixados os dois primeiros momentos de ordem ímpar, e uma generalização para este modelo através da minimização de um momento par de ordem p qualquer sob o mesmo conjunto admissível. Na Seção 4, analisamos o problema dual associado a esta generalização.

2.1 Uma carteira ótima de variância mínima

Minimizar a variância, para um determinado retorno médio e assimetria, equivale a encontrar a solução para o problema:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_2 \alpha + \lambda_1(\sigma_{p^3} - \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)) + \lambda_2[E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t[1])r_f)], \qquad (2.1)$$

em que M_1,M_2 e M_3 são respectivamente as matrizes relacionadas aos tensores de primeiro, segundo e terceiro momentos verificados para os n ativos de risco, α é o vetor dos n pesos do portfólio – onde são permitidas vendas a descoberto –, r_f a taxa de retorno sem risco, [1] é um vetor $n \times 1$ de 1's e os lambdas são multiplicadores de Lagrange.

Denotando por $R = E[r_p] - r_f$ e $x = M_1 - [1]r_f$, temos que R será o retorno excedente da carteira representado pela equação $\alpha^t x = R$ onde a soma de todos os pesos, dos ativos com e sem risco, é igual a 1. Assim as condições de primeira ordem são:

$$\begin{cases} 2M_2\alpha = 3\lambda_1 M_3(\alpha \otimes \alpha) + \lambda_2 x \\ \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases} .$$

A solução para (2.1) é encontrada resolvendo o sistema de $n-$equações não lineares,

$$M_2\alpha = \frac{A_0\sigma_{p^3} - A_2 R}{A_0A_4 - (A_2)^2} M_3(\alpha \otimes \alpha) + \frac{A_4 R - A_2\sigma_{p^3}}{A_0A_4 - (A_2)^2} x, \tag{2.2}$$

em que os escalares:

$$\begin{aligned} A_0 &= x^t M_2^{-1} x, \\ A_2 &= x^t M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha), \\ A_4 &= (\alpha \otimes \alpha)^t M_3^t M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha); \end{aligned}$$

tem subscritos correspondentes ao seu grau de homogeneidade como funções reais do vetor α. Em particular, A_0 e A_4 são positivos, uma vez que a inversa da matriz de covariância é positiva definida.

Multiplicando a Equação (2.2) pelas próprias soluções α^t, obtêm-se a variância ótima:

$$\sigma_{p^2} = \frac{A_4R^2 - 2A_2R\sigma_{p^3} + A_0(\sigma_{p^3})^2}{A_0A_4 - (A_2)^2}.$$

A proposição a seguir foi obtida por Athayde e Flôres [2].

Proposição 2.1. *Para um dado k positivo, seja $\bar{\alpha}$ o portfólio de variância mínima quando $R = 1$ e $\sigma_{p^3} = k^3$, e $\bar{\sigma}_{p^2}$ a variância mínima correspondente, então, para todo portfólio ótimo relacionado ao par assimetria/retorno tal que $\sigma_{p^3} = k^3R^3$, uma solução para* (2.1) *será $\alpha = \bar{\alpha}R$, com variância mínima correspondente $\sigma_{p^2} = \bar{\sigma}_{p^2}R^2$.*

2.2 A generalização para momentos pares de ordem superior

Dado um vetor de pesos $\alpha \in \mathbb{R}^n$, na notação introduzida por Athayde e Flôres [3], o p-ésimo momento do portfólio com estes pesos é representado por

$$\alpha^t M_p(\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha \cdots \otimes \alpha) \equiv \alpha^t M_p \alpha^{\otimes(p-1)},$$

em que $\otimes$ denota o produto de Kronecker e M_p representa a matriz que contém os p-ésimos momentos do vetor aleatório de n ativos.

Para o caso geral de minimizar um momento par de ordem p quando fixados os dois primeiros momentos ímpares, o problema será:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_p \alpha^{\otimes(p-1)} + \lambda(\sigma_{p^3} - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}) + \gamma(R - \alpha^t x). \tag{2.3}$$

Logo as condições de primeira ordem serão:

$$\begin{cases} pM_p\alpha^{\otimes(p-1)} = 3\lambda M_3 \alpha^{\otimes 2} + \gamma x \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases}. \tag{2.4}$$

Notando que $M_p\alpha^{\otimes(p-1)} = M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)\alpha$, e que a matriz $M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)$ é simétrica e definida positiva, o seguinte sistema pode ser formado a partir da primeira equação de (2.4) para obter os valores dos multiplicadores:

$$\begin{cases} pR = 3\lambda x^t(M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)^{-1} M_3\alpha^{\otimes 2} + \gamma x^t(M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)^{-1}x \\ p\sigma_{p^3} = 3\lambda(M_3\alpha^{\otimes 2})^t(M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)^{-1}M_3\alpha^{\otimes 2} + \gamma(M_3\alpha^{\otimes 2})^t(M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)^{-1}x. \end{cases}$$

Definindo

$$\begin{aligned} B_{2-p} &= x^t[M_p(\alpha^{\otimes} I_n)^{-1}]x, \\ B_{4-p} &= x^t[M_p(\alpha^{\otimes} I_n)^{-1}]M_3(\alpha \otimes \alpha) \quad \text{e} \\ B_{6-p} &= (\alpha^{\otimes 2})^t M_3^t[M_p(\alpha^{\otimes} I_n)]^{-1}M_3\alpha^{\otimes 2}, \end{aligned}$$

com os subscritos correspondentes ao grau de homogeneidade com respeito ao vetor de pesos, a solução final vem do sistema:

$$(B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2)M_p\alpha^{\otimes(p-1)} = (B_{2-p}\sigma_{p^3} - B_{4-p}R)M_3\alpha^{\otimes 2} + (B_{6-p}R - B_{4-p}\sigma_{p^3})x.$$

O p-ésimo momento do portfólio ótimo será dado por:

$$\sigma_{p^p} = \frac{B_{6-p}R^2 - 2B_{4-p}R\sigma_{p^3} + B_{2-p}(\sigma_{p^3})^2}{B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2}.$$

A proposição a seguir foi obtida por Athayde e Flôres [3].

Proposição 2.2. *Para um dado k positivo, seja $\bar{\alpha}$ o portfólio que minimiza o momento par de ordem p quando $R = 1$ e $\sigma_{p^3} = k^3$, e $\bar{\sigma}_{p^p}$ o p-ésimo momento mínimo correspondente, então, para todo portfólio ótimo relacionado ao par assimetria/retorno tal que $\sigma_{p^3} = k^3R^3$, uma solução para* (2.3) *será $\alpha = \bar{\alpha}R$, com p-ésimo momento mínimo correspondente $\sigma_{p^p} = \bar{\sigma}_{p^p}R^p$.*

3 UM CASO PARTICULAR ASSOCIADO AO MODELO QUE MINIMIZA UM MOMENTO PAR DE ORDEM P

Desde [6], investigamos a dualidade nos problemas de otimização relacionados a modelos de seleção de carteiras eficientes. Quando incorpora-se um terceiro momento ao problema de seleção de carteiras, a dualidade passa a relacionar três problemas que, sob certas condições, são duais entre si. Deste modo, a eficiência da carteira está condicionada à existência de solução simultânea nos problemas, para cada uma das abordagens. Um estudo mais cuidadoso acerca da dualidade nos problemas a três momentos, aponta a solução obtida no modelo Média-Variância, de Markowitz [5], como sendo o ponto chave nesta questão.

Os modelos apresentados na Seção 2, que consideram momentos de ordem superior, em que são considerados três momentos, definem problemas de otimização com duas restrições, onde um dos momentos é otimizado enquanto que os outros dois são fixados e determinam as restrições do problema. Deste modo, os problemas duais podem ser obtidos trocando o objetivo de otimização por um dos momentos fixos no problema primal. Além disso, Em [2, 3] as soluções para estes problemas de otimização são condicionadas a $B_{2-p}B_{6-p}-(B_{4-p})^2>0$ que, quando $p=2$, corresponde a $A_0A_4-A_2^2>0$, sendo necessário uma análise dos casos em que a solução está associada à $B_{2-p}B_{6-p}-(B_{4-p})^2=0$ ou ainda $A_0A_4-A_2^2=0$.

Resultados preliminares, por ocasião de nosso estudo, indicam que quando a solução para o problema proposto em [3] resulta em $A_0A_4-A_2^2=0$, tal solução não pode ser obtida pelo método dos multiplicadores de Lagrange, pois implica que os gradientes das restrições são linearmente dependentes. E estes casos estão associados, em sua maioria, à solução de Markowitz obtida a partir do modelo Média-Variância.

Para investigar a dualidade no modelo geral que minimiza o momento par de ordem p proposto em [2] , apresentamos a seguir uma generalização para o modelo Média-Variância de Markowitz.

3.1 O modelo Média-Variância

O conhecido modelo de Markowitz, Média-Variância, que considera os dois primeiros momentos na seleção de carteiras de investimento eficientes, recai em um problema de otimização restrita, em que minimiza-se a variância fixando o retorno ou, equivalentemente, maximiza-se o retorno fixando a variância. Podemos considerar, para aplicação deste modelo, carteiras compostas por n ativos de risco e um ativo livre de risco. De modo que, um portfólio ótimo é obtido pela minimização do Lagrangiano:

$$\min_{\alpha} L=\alpha^t M_2\alpha+\lambda[E(r_p)-(\alpha^t M_1+(1-\alpha^t[1])r_f)], \tag{3.1}$$

onde M_1, M_2 são as matrizes que contêm os retornos médios, covariâncias dos n ativos de risco, $E(r_p)$ é um retorno esperado fixado, r_f a taxa de retorno livre de risco e $\otimes$ denota o produto de Kronecker.

Denotando $R = E(r_p) - r_f$ e $x = M_1 - [1]r_f$, as condições de primeira ordem são:

$$\begin{cases} 2M_2\alpha = \lambda x \\ \alpha^t x = R \end{cases} . \tag{3.2}$$

De modo que, obtendo o valor do multiplicador λ e substituindo em (3.2) obtemos um único candidato a extremo, que será, devido à convexidade, a solução para o problema (3.1):

$$\alpha^* = \frac{R}{x^t M_2^{-1} x} M_2^{-1} x.$$

A partir de α^*, obtêm-se a variância mínima associada à carteira ótima.

$$\sigma^*_{p^2} = \frac{R^2}{x^t M_2^{-1} x}.$$

3.2 Uma generalização do modelo de Markowitz considerando momentos de ordem superior

Podemos nos perguntar quais seriam as implicações de um modelo que, para selecionar carteiras de investimento, minimiza um momento par qualquer de ordem p, tendo como restrição um retorno fixo. Neste caso o problema de otimização teria uma estrutura semelhante à observada no modelo de Markowitz, de modo que um portfólio ótimo é obtido pela minimização do Lagrangiano:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_p \alpha^{\otimes(p-1)} + \lambda_p [E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t[1])r_f)], \tag{3.3}$$

em que M_1 e M_p são, respectivamente, as matrizes que contêm os retornos médios, e os co-momentos de ordem p dos n ativos de risco. Assim as condições de primeira ordem são:

$$\begin{cases} pM_p\alpha^{\otimes(p-1)} = \lambda_p x \\ \alpha^t x = R \end{cases} . \tag{3.4}$$

Para obter o valor do multiplicador λ_p, multiplicamos a primeira equação de (3.4) por $x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}$:

$$px^t\alpha = \lambda_p x^t (M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1} x,$$

$$\lambda_p = \frac{pR}{x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1} x}.$$

Substituindo em (3.4) o valor λ_p encontrado, obtemos um candidato a extremo, que será, devido à convexidade, a solução para o problema (3.3):

$$\alpha^* = \frac{R}{x^t(M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1} x} (M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1} x. \tag{3.5}$$

Sendo α^* uma solução para o problema (3.3), multiplica-se ambos os lados de (3.5) por $\alpha^{*t} M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n)$, para obter o momento mínimo de ordem p associado à carteira ótima.

$$\sigma^*_{p^p} = \frac{R^2}{x^t(M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x}.$$

Definindo:

$$B_{2-p} = x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x,$$

temos um sistema de n equações não lineares em α:

$$\alpha^* = \frac{R}{B^*_{2-p}}(M_p(\alpha^{*\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x,$$

e a expressão que representa o p-ésimo momento mínimo:

$$\sigma^*_{p^p} = \frac{R^2}{B^*_{2-p}}.$$

Quando $p > 2$, ou seja, a partir do quarto momento, a expressão que caracteriza a carteira ótima, bem como a expressão que define o momento mínimo associado, vão depender de α.

4 MAXIMIZAÇÃO DA ASSIMETRIA FIXADOS UM MOMENTO DE ORDEM PAR E O RETORNO

O Princípio da Dualidade, na teoria da otimização matemática, permite que os problemas de otimização possam ser vistos a partir de duas perspectivas, de modo que o ponto de mínimo obtido no problema primal corresponderá ao ponto de máximo em seu dual.

Lema 4.1 (Lema da dualidade). *Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções continuamente diferenciáveis de classe C^2 sobre um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Se $x^* \in A$ é um máximo estrito (local) de $g(x)$; sujeito a $\bar{f} - f(x) = 0$ e $\bar{h} - h(x) = 0$; $\bar{f}$ e $\bar{h}$ escalares; com respectivos multiplicadores de Lagrange dados por γ_1 e γ_2, $\gamma_1 > 0$ e condições estritas de segunda ordem, então $x^* \in A$ é também um mínimo estrito (local) de $f(x)$ sujeito a $g(x^*) - g(x) = 0$, e $\bar{h} - h(x) = 0$, com os respectivos multiplicadores de Lagrange $\frac{1}{\gamma_1}$ e -$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$.* Tendo em vista a natureza dual dos problemas de otimização associados ao modelo de seleção de carteiras de investimento que considera os três primeiros momentos, tomamos o problema de minimizar o p-ésimo momento par, visto na Seção 2, como primal e construímos seus duais.

4.1 O problema dual quando maximizamos a assimetria

Para maximizar a assimetria quando fixados o primeiro momento e um momento par de ordem p o lagrangiano do problema será:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} + \gamma_{1p}(\sigma_{p^p} - \alpha^t M_p \alpha^{\otimes(p-1)}) + \gamma_{2p}(R - \alpha^t x). \tag{4.1}$$

Logo as condições de primeira ordem serão:

$$\begin{cases} 3M_3\alpha^{\otimes 2} = p\gamma_{1p}M_p\alpha^{\otimes(p-1)} + \gamma_{2p}x \\ \alpha^t M_p\alpha^{\otimes(p-1)} = \sigma_{p^p} \\ \alpha^t x = R \end{cases} . \tag{4.2}$$

Como $M_p\alpha^{\otimes(p-1)} = M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)\alpha$, e a matriz $M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)$ é simétrica e definida positiva, o seguinte sistema pode ser formado multiplicando a primeira equação de (4.2) por α^t e $x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}$ para obter um sistema para os multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 3\alpha^t M_3\alpha^{\otimes 2} = p\gamma_{1p}\sigma_{p^p} + \gamma_{2p}R \\ 3x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}M_3\alpha^{\otimes 2} = p\gamma_{1p}R + \gamma_{2p}x^t(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x \end{cases} .$$

Definindo como no caso par

$$\begin{aligned} B_{2-p} &= x^t[M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)]^{-1}x, \\ B_{4-p} &= x^t[M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)]^{-1}M_3(\alpha^{\otimes 2}) \quad \text{e} \\ B_{6-p} &= (\alpha^{\otimes 2})^t M_3^t[M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n)]^{-1}M_3\alpha^{\otimes 2}, \end{aligned}$$

com os subscritos correspondentes ao grau de homogeneidade com respeito ao vetor de pesos, temos:

$$\begin{cases} p\gamma_{1p}\sigma_{p^p} + \gamma_{2p}R = 3\alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) \\ p\gamma_{1p}R + \gamma_{2p}B_{2-p} = 3B_{4-p} \end{cases} .$$

Deste modo, para resolver este sistema basta encontrar a inversa da matriz

$$B_S = \begin{bmatrix} \sigma_{p^p} & R \\ R & B_{2-p} \end{bmatrix},$$

quando seu determinante for não nulo.

Note que o determinante da matriz B_S se anula quando

$$\sigma_{p^p} = \frac{R^2}{B_{2-p}}.$$

E neste caso, os vetores x e $M_p\alpha^{\otimes(p-1)}$ são linearmente dependentes, dando origem a mesma solução encontrada na generalização do modelo de Markowitz apresentada na seção anterior, que denotaremos aqui como solução trivial. O que pode ser verificado na proposição a seguir.

Proposição 4.3. *Os vetores x e $M_p\alpha^{\otimes(p-1)}$ são linearmente independentes se e somente se* $\det B_S > 0$. *Além disso, se x e $M_p\alpha^{\otimes(p-1)}$ são linearmente dependentes, então $RM_p\alpha^{\otimes(p-1)} = \sigma_{p^p}x$.*

Proof. Considere a norma $\|\alpha\|_p^2 = \alpha^t(M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I)^{-1}\alpha$, induzida pelo produto interno $\langle\alpha,\beta\rangle_p = \alpha^t(M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I)^{-1}\beta$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\langle x, (M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I)\alpha\rangle_p| &\leqslant \|x\|_p \|M_p\alpha^{\otimes(p-1)}\|_p \\
|\langle x, M_p\alpha^{\otimes(p-1)}\rangle_p|^2 &\leqslant \|x\|_p^2 \|M_p\alpha^{\otimes(p-1)}\|_p^2 .
\end{aligned}
$$

Logo

$$\det B_S = \sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2 = \|x\|_p^2\|M_p\alpha^{\otimes(p-1)}\|_p^2 - (\langle x, M_p\alpha^{\otimes(p-1)}\rangle_p)^2 \geqslant 0 .$$

Sabemos que a igualdade se verifica se e somente se os vetores x e $M_p\alpha^{\otimes(p-1)}$ são linearmente dependentes. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{p^p}[\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2] &= \sigma_{p^p}^2 B_{2-p} - \sigma_{p^p}R^2 - \sigma_{p^p}R^2 + \sigma_{p^p}R^2 \\
&= \{\sigma_{p^p}x - RM_p\alpha^{\otimes(p-1)}\}^t(M_p\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I)^{-1}\{\sigma_{p^p}x - RM_p\alpha^{\otimes(p-1)}\} \\
&= \|\sigma_{p^p}x - RM_p\alpha^{\otimes(p-1)}\|_p^2.
\end{aligned}
$$

Sendo σ_{p^p} estritamente positivo, $\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2 = 0$ se somente se $\sigma_{p^p}x = RM_p\alpha^{\otimes(p-1)}$. □

A Proposição 4.3 nos mostra que o caso $\det B_S > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que a hipótese de independência linear dos gradientes das restrições é satisfeita. Logo, podemos através da inversa da matriz B_S, obter os multiplicadores γ_{1p} e γ_{2p}.

$$\gamma_{1p} = \frac{3}{2}\frac{B_{2-p}\alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) - B_{4-p}R}{\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2} \quad \text{e} \quad \gamma_{2p} = 3\frac{\sigma_{p^p}B_{4-p} - \alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2})R}{\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2} . \tag{4.3}$$

Substituindo (4.3) na primeira equação de (4.2) obtém-se o seguinte sistema de n equações não lineares que é satisfeito pela solução do problema:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{B_{2-p}\alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) - B_{4-p}R}{\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2}\right)\alpha &= (M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}M_3(\alpha^{\otimes 2}) \\
&\quad - \left(\frac{\sigma_{p^p}B_{4-p} - \alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2})}{\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2}\right)(M_p(\alpha^{\otimes(p-2)} \otimes I_n))^{-1}x .
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Sendo α_s a solução para (4.1), multiplicando ambos os lados da equação (4.4) por $(\alpha_s^{\otimes 2})^t M_3^t$ e sendo $\sigma_{p^3}^*$, a assimetria ótima (máxima), chega-se à equação:

$$(B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2)\sigma_{p^p} - B_{6-p}R^2 + 2B_{4-p}\sigma_{p^3}^*R - B_{2-p}(\sigma_{p^3}^*)^2 = 0 ,$$

onde B_{2-p}, B_{4-p} e B_{6-p} são calculados em α_s, o conjunto de pesos do portfólio ótimo, cuja assimetria máxima figura na equação junto com os outros dois momentos, R e σ_{p^p}. A partir desta equação, uma expressão para a assimetria máxima associada ao portfólio ótimo é obtida:

$$\sigma_{p^3}^* = \frac{B_{4-p}R \pm \sqrt{(B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2)(\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2)}}{B_{2-p}} . \tag{4.5}$$

Tendo em vista o Lema 4.1, a dualidade entre os problemas está condicionada ao sinal do multiplicador associado à restrição definida a partir da função objetivo do problema primal. Neste caso, para haver dualidade, γ_{p1} terá que ser estritamente positivo, ou seja

$$B_{2-p}\alpha^t M_3(\alpha^{\otimes 2}) > B_{4-p}R.$$

Além disso, sabemos que o discriminante em (4.5) é sempre positivo. Deste modo, podemos concluir que a assimetria máxima associada à carteira ótima eficiente, ou seja que pertence à região de dualidade, é dada pela expressão:

$$\sigma^*_{p^3} = \frac{B_{4-p}R + \sqrt{(B_{2-p}B_{6-p} - (B_{4-p})^2)(\sigma_{p^p}B_{2-p} - R^2)}}{B_{2-p}}.$$

Todos os resultados obtidos nesta seção podem ser reproduzidos para o segundo problema dual associado ao modelo geral apresentado na Seção 2, de modo a obter uma carteira de retorno máximo quando fixados o momento par de ordem p e a assimetria da carteira.

Ao desenvolvermos o modelo geral que minimiza um momento de ordem par proposto em [3], sob a perpectiva da maximização da assimetria, explorando a natureza dual dos problemas de otimização envolvidos, ampliamos a visão do modelo, o que permitiu confirmar a estabilidade das estruturas bem como a preservação das características de homotetia. Agora, propomos um modelo geral semelhante, onde um momento de ordem ímpar será maximizado. Esta é uma perspectiva que generaliza o problema dual ao problema de minimizar a variância quando fixados os dois primeiros momentos e apresenta estruturas distintas da generalização anterior.

Na próxima seção apresentamos nossa versão para o modelo a três momentos, sob a perspectiva da maximização da assimetria, dual ao problema da Subseção 2.1, para em seguida generalizar o modelo para momentos ímpares de ordem superior, contemplando todas as possíveis variações e permitindo uma comparação entre as possíveis generalizações.

5 CARTEIRAS DE ASSIMETRIA MÁXIMA

Para obtermos os mesmos resultados para momentos de ordem ímpar, inicialmente maximiza-se a assimetria fixando os dois primeiros momentos, retorno e variância como em [7]:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) + \gamma_1(\sigma_{p^2} - \alpha^t M_2\alpha) + \gamma_2(R - \alpha^t x), \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} 3M_3(\alpha \otimes \alpha) = 2\gamma_1 M_2\alpha + \gamma_2 x \\ \alpha^t M_2\alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases}.$$

Determinamos os multiplicadores obtendo as equações:

$$\begin{cases} 2\gamma_1\sigma_{p^2} + \gamma_2 R = 3\alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) \\ 2\gamma_1 R + \gamma_2 A_0 = 3A_2 \end{cases},$$

em que

$$A_0 = x^t M_2^{-1} x,$$
$$A_2 = x^t M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha),$$

e encontramos o seguinte sistema de n equações não lineares em α que satisfaz a equação de Lagrange:

$$\left(\frac{A_0 \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) - A_2 R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \right) \alpha = M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha) - \left(\frac{\sigma_{p^2} A_2 - \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \right) M_2^{-1} x. \quad (5.2)$$

A partir da solução dada pela Equação (5.2), obtemos a assimetria ótima para a maximização do terceiro momento.

$$\sigma_{p^3} = \frac{A_2 R \pm \sqrt{(A_0 A_4 - (A_2)^2)(\sigma_{p^2} A_0 - R^2)}}{A_0}.$$

Esta assimetria associada a carteira eficiente irá indicar se os parâmetros fixados possibilitam a dualidade com o problema de minimizar a variância. O que irá depender do sinal do multiplicador de Lagrange associado a restrição que tem como origem a função objetivo, conforme o Lema 4.1.

Em [7], além da existência de solução para o problema (5.1), obtemos o seguinte resultado de propriedade de homotetia para o problema de maximização da assimetria, semelhante àquele verificado para o conjunto de variância mínima.

Proposição 5.4. *Para um dado k positivo e maior ou igual a* $\frac{1}{\sqrt{A_0}}$, *seja* $\bar{\alpha}$ *o portfólio de assimetria máxima (mínima) quando* $R = 1$ *e* $\sigma_{p^2} = k^2$, *e* $\bar{\sigma}_{p^3}$ *a assimetria máxima (mínima) correspondente, então, para todo portfólio ótimo relacionado ao par variância/retorno tal que* $\sigma_{p^2} = k^2 R^2$, *uma solução para* (5.1) *será* $\alpha = \bar{\alpha} R$, *com assimetria máxima correspondente* $\sigma_{p^3} = \bar{\sigma}_{p^3} R^3$.

A seguir generalizamos os resultados obtidos para qualquer momento de ordem ímpar dados o retorno esperado e a variância.

6 GENERALIZANDO O MODELO A TRÊS MOMENTOS PELA MAXIMIZAÇÃO DE UM MOMENTO ÍMPAR DE ORDEM SUPERIOR

Seguindo a máxima de que momentos de ordem superior fornecem um melhor cenário na análise de investimentos, após obter os problemas duais associados ao modelo geral de Athayde e Flôres [2], introduzimos um modelo geral para maximizar um momento ímpar de ordem $q \geq 3$, e em seguida um modelo geral que maximiza um momento de ordem ímpar qualquer.

6.1 Maximizando um momento ímpar de ordem $q \geq 3$

Dado um vetor de pesos $\alpha \in \mathbb{R}^n$, na notação introduzida por Athayde e Flôres [3], o q-ésimo momento do portfólio com estes pesos é representado por

$$\alpha^t M_q(\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha \cdots \otimes \alpha) \equiv \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)},$$

em que $\otimes$ denota o produto de Kronecker e M_q representa a matriz que contém os q-ésimos momentos do vetor aleatório de n ativos. Para este modelo geral consideramos $q \geq 3$.

Para o caso geral de maximizar um momento ímpar de ordem $q \geq 3$ quando fixados os dois primeiros momentos, o problema será:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)} + \lambda(\sigma_{p^2} - \alpha^t M_2 \alpha) + \gamma(R - \alpha^t x), \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} qM_q \alpha^{\otimes(q-1)} = 2\lambda M_2 \alpha + \gamma x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases}.$$

Como estamos lidando com momentos de ordem ímpar, a matriz M_2 não se altera. De modo que definindo

$$\begin{aligned} &A_0 = x^t M_2^{-1} x, \\ &A_{q-1} = x^t M_2^{-1} M_q \alpha^{\otimes(q-1)}, \\ &A_{2(q-1)} = (M_q \alpha^{\otimes(q-1)})^t M_2^{-1} M_q \alpha^{\otimes(q-1)} \end{aligned}$$

obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} 2\lambda \sigma_{p^2} + \gamma R = q\alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)} \\ 2\lambda R + \gamma A_0 = qA_{q-1} \end{cases}.$$

Assim, resolvendo (6.1) quando $\sigma_{p^2} A_0 - R^2 > 0$, determinamos um sistema de n equações não lineares em α, que satisfaz a equação de Lagrange, e define a configuração ótima da carteira com o momento ímpar de ordem q máximo:

$$\left(\frac{A_0 \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)} - A_{q-1} R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \right) \alpha = M_2^{-1} M_q \alpha^{\otimes(q-1)} - \left(\frac{\sigma_{p^2} A_{q-1} - \alpha^t M_q \alpha^{\otimes(q-1)} R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2} \right) M_2^{-1} x, \tag{6.2}$$

em que os coeficientes A_{q-1} e $A_{2(q-1)}$ estão associados a α, a carteira ótima. Do sistema (6.2), uma expressão para o q-ésimo momento associado ao portfólio eficiente é obtida:

$$\begin{aligned} \sigma_{p^q} &= \frac{2A_{q-1} R \pm \sqrt{4(A_{q-1})^2 R^2 - 4A_0(\sigma_{p^2}(A_0 A_{2(q-1)} - (A_{q-1})^2) + A_{2(q-1)} R^2)}}{2A_0} \\ &= \frac{A_{q-1} R \pm \sqrt{(A_0 A_{2(q-1)} - (A_{q-1})^2)(\sigma_{p^2} A_0 - R^2)}}{A_0}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Tendo em vista a condição para dualidade no Lema 4.1, podemos considerar apenas a raiz positiva de (6.3):

$$\sigma_{p^q} = \frac{A_{q-1} R + \sqrt{(A_0 A_{2(q-1)} - (A_{q-1})^2)(\sigma_{p^2} A_0 - R^2)}}{A_0}.$$

Neste trabalho, obtivemos também o seguinte resultado de propriedade de homotetia, semelhante ao obtido em [3].

Proposição 6.5. *Para um dado k positivo, seja $\bar{\alpha}$ o portfólio que maximiza o momento ímpar de ordem q quando $R = 1$ e $\sigma_{p^2} = k^2$, e $\bar{\sigma}_{p^q}$ o q-ésimo momento máximo correspondente, então, para todo portfólio ótimo relacionado ao par variância/retorno tal que $\sigma_{p^2} = k^2R^2$, uma solução para* (6.1) *será $\alpha = \bar{\alpha}R$, com q-ésimo momento máximo correspondente $\sigma_{p^q} = \bar{\sigma}_{p^q}R^q$.*

Note que, no modelo geral de ordem ímpar apresentado, como o primeiro momento é fixado para definir uma das restrições no problema, o momento ímpar a ser maximizado estava restrito a ordem $q \geq 3$.

Uma possibilidade alternativa a esta, seria fixar o segundo e quarto momentos para então maximizar um momento de ordem ímpar qualquer. A seguir, propomos um modelo geral alternativo, no qual maximizamos um momento ímpar qualquer de ordem i.

6.2 Maximizando um momento de ordem ímpar qualquer

Quando maximizamos um momento ímpar de ordem i, fixadas a variância e a curtose, o lagrangiano do problema será:

$$\max_{\alpha} L = \alpha^t M_i(\alpha^{\otimes(i-1)}) + \mu_1(\sigma_{p^2} - \alpha^t M_2\alpha) + \mu_2(\sigma_{p^4} - \alpha^t M_4(\alpha^{\otimes 3}))\,. \tag{6.4}$$

Neste caso as condições de primeira ordem

$$\begin{cases} iM_i(\alpha^{\otimes(i-1)}) = 2\mu_1 M_2\alpha + 4\mu_2 M_4(\alpha^{\otimes 3}) \\ \alpha^t M_2\alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_4(\alpha^{\otimes 3}) = \sigma_{p^4} \end{cases},$$

nos levam ao sistema:

$$\begin{cases} 2\mu_1\sigma_{p_2} + 4\mu_2\sigma_{p^4} = i\alpha^t M_i(\alpha^{\otimes(i-1)}) \\ 2\mu_1\sigma_{p_4} + 4\mu_2 A_6 = iB_{2(i-1)} \end{cases}, \tag{6.5}$$

em que

$$\begin{aligned} B_{2(i-1)} &= (\alpha^{\otimes(i-1)})^t M_i^t M_2^{-1} M_i(\alpha^{\otimes(i-1)}), \\ B_{i+2} &= (\alpha^{\otimes(i-1)})^t M_i^t M_2^{-1} M_4(\alpha^{\otimes 3}), \\ A_6 &= (\alpha^{\otimes 3})^t M_4^t M_2^{-1} M_4(\alpha^{\otimes 3}). \end{aligned}$$

Resolvemos o sistema quando $A_6\sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2 > 0$, o que ocorre quando os gradientes das restrições são linearmente independentes.

De fato,

$$\begin{aligned} &\sigma_{p^2}(A_6\sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2) = \\ &= (\sigma_{p^2}M_4(\alpha^{\otimes 3}) - \sigma_{p^4}M_2\alpha)^t M_2^{-1}(\sigma_{p^2}M_4(\alpha^{\otimes 3}) - \sigma_{p^4}M_2\alpha) \geq 0\,, \end{aligned}$$

como σ_{p^2} é estritamente positivo e a inversa da matriz de covariância é definida positiva, então $\sigma_{p^2} M_4(\alpha^{\otimes 3}) - \sigma_{p^4} M_2 \alpha$ se anula se e somente se os gradientes das restrições forem linearmente dependentes.

Assim, obtemos um sistema de n equações não lineares que define a configuração da carteira ótima com o momento ímpar de ordem i máximo:

$$\frac{A_6 \sigma^*_{p^i} - B_{i+2}\sigma_{p^4}}{A_6 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2} M_2 \alpha = M_i \alpha^{\otimes(i-1)} - \frac{B_{i+2}\sigma_{p^2} - \sigma_{p^4}\sigma^*_{p^i}}{A_6 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2} M_4(\alpha^{\otimes 3}),$$

onde $\sigma^*_{p^i}$ é o momento de ordem ímpar máximo associado a carteira eficiente, para o qual também obtemos uma expressão:

$$\sigma^*_{p^i} = \frac{B_{i+2}\sigma_{p^4} \pm \sqrt{(B_{2(i-1)} A_6 - B^2_{i+2})(A_6 \sigma_{p^2} - (\sigma_{p^4})^2)}}{A_6}.$$

7 CONCLUSÕES

A generalização para momentos ímpares de um dado portfólio, complementa o método geral proposto em [3] para tratar a escolha do portfólio em um contexto de momentos de ordem superior, vista como uma vantagem inquestionável. A introdução da generalização do modelo clássico de Markowitz permite a análise completa tanto dos problemas de minimização de momentos pares de ordem superior, quanto da maximização de momentos ímpares de ordem superior e seus respectivos duais. O teste final dos ganhos obtidos com momentos de ordem superior ainda depende de extensas aplicações práticas dos novos resultados. Estes, por sua vez, exigem ferramentas de software adequadas para resolver os sistemas não lineares e os problemas de otimização envolvidos. Um melhor conhecimento das superfícies relacionadas a elas pode melhorar muito o entendimento do modelo.

Agradecimentos

Agradecemos à Faperj pelo apoio financeiro, processos E26/210.341/2018 e E26/010.001143/2019.

ABSTRACT. This paper presents a general model to portfolio selection based on maximizing a higher-order odd moment when the first two moments are fixed, considering a risk-free asset, and allowing short sales. We deduce geometric properties from their solutions and also propose a generalization to the Markowitz Mean-Variance model by minimizing a higher-order even moment subject to a fixed return.

Keywords: portfolio selection, higher-order moments, maximizing skewness.

REFERÊNCIAS

[1] F.D. Arditti & H. Levy. Portfolio efficiency analysis in three moments: The multiperiod case. *The Journal of Finance*, **30**(3) (1975), 797–809.

[2] G.M. Athayde & R.G. Flôres Jr. Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three-moments portfolio choice. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **28** (2004), 1335–1352.

[3] G.M. Athayde & R.G. Flôres Jr. "On certain geometric aspects of portfolio optimisation with higher moments". John Wiley and Sons Ltd, England (2006), chapter 2.

[4] A. Kraus & R.H. Litzenberger. Skewness preference and the valuation of risk assets. *The Journal of Finance*, **31**(4) (1976), 1085–1100.

[5] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, **7** (1952), 77–91.

[6] P.R. Martins. "Aplicação de teorema de ponto fixo a um modelo de seleção de carteiras de investimento". Master's thesis, IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ (2015).

[7] P.R. Martins, P.N. Silva & C.F. Vasconcellos. Analysis of an investment portfolio selection model. To appear.

[8] R.C. Scott & P.A. Horvath. On the direction of preference for moments of higher Order than the Variance. *The Journal of Finance*, **35** (1980), 915–919.