

Métodos de Análise de Decisão Multicritério para Seleção de Padrões de Corte

B. S. C. CAMPELLO^{1*} e C. T. L. S. GHIDINI²

Recebido em 7 de dezembro de 2020 / Aceito em 10 de junho de 2021

RESUMO. Em indústrias de manufatura, um dos processos de produção consiste em cortar grandes objetos em peças menores. Em pesquisa operacional, o estudo desse processo é conhecido como o problema de corte de estoque (PCE) e, devido à sua dificuldade de resolução, métodos heurísticos vêm sendo desenvolvidos pelos pesquisadores da área. Neste trabalho, propomos utilizar técnicas de análise de decisão multicritério (MCDA) a fim de resolver o PCE de forma eficiente em termos de GAP e tempo computacional. Nossa estratégia consiste em selecionar previamente os melhores padrões de corte com técnicas MCDA e resolver o problema apenas com esses padrões selecionados. Os testes computacionais mostraram que a solução obtida com essa estratégia apresenta um GAP entre 0,25% e 4,25% quando comparada com a solução ótima, dando indícios da qualidade da abordagem proposta.

Palavras-chave: PCE, MCDA, heurística.

1 INTRODUÇÃO

Em indústrias de manufatura, tais como indústrias de papel, alumínio, móveis, têxtil, entre outras, são produzidos ou comprados grandes objetos que devem ser cortados, posteriormente, em peças menores (*itens*). A Figura 1 ilustra o corte de um objeto em uma indústria de papel. Observa-se que o objeto é desenrolado e é feito um corte longitudinal, de forma a obter os itens de tamanhos variados que dependem da demanda do cliente.

O modo como os itens são combinados no objeto para serem cortados é chamado de *padrão de corte*. Por exemplo, na Figura 2 tem-se um objeto com comprimento de 400 cm e três *tipos de itens*, o tipo de item é definido de acordo com seu comprimento. Nesse exemplo, o tipo 1 tem comprimento de 100 cm, o tipo 2 de 130 cm e o tipo 3 de 150 cm. Uma possível combinação para esse exemplo é cortar o objeto em quatro partes, cada parte com 100 cm. Desse modo, forma-se

*Autor correspondente: Betania Silva Carneiro Campello – E-mail: betacampello@gmail.com

¹Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e da Computação, Cidade Universitária Zeferino Vaz. Barão Geraldo, Campinas, SP, Brazil – E-mail: betania@decom.fee.unicamp.br <https://orcid.org/0000-0001-9609-8724>

²Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Ciências Aplicadas, R. Pedro Zaccaria, 1300, Limeira, SP, Brasil – E-mail: cghidini@unicamp.br <http://orcid.org/0000-0002-5018-8932>

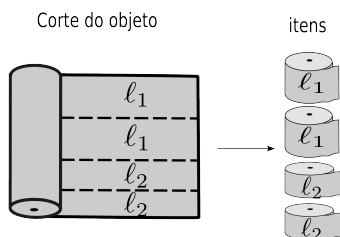


Figura 1: Exemplo do corte do objeto.

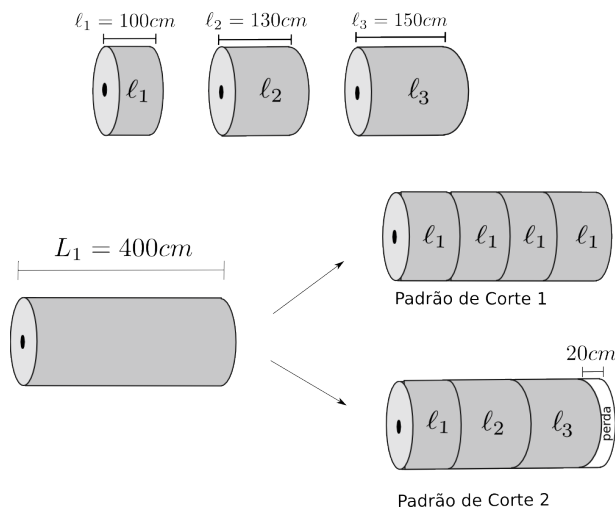


Figura 2: Exemplo de padrões de corte.

um padrão de corte composto de 4 itens do tipo 1. Outro padrão de corte possível é combinando um item do tipo 1, outro do tipo 2 e mais um do tipo 3, e nesse caso, ocorre uma perda de papel de 20 cm. Uma vez determinados todos os possíveis padrões de corte, o problema consiste em decidir quais deles devem ser utilizados e quantas vezes, visando atender à demanda de itens e satisfazer algum critério de otimização, como por exemplo, minimizar a perda de material. Esse problema foi um dos primeiros a serem estudados na área da pesquisa operacional e é conhecido como *problema de corte de estoque* (PCE).

Na literatura, encontram-se diferentes estudos com modelos matemáticos para o PCE [5], alguns visam minimizar a perda de material, outros o número de objetos cortados, etc. Esses modelos apresentam uma grande dificuldade de resolução, pois existe um grande número de padrões de corte a serem considerados e cada padrão de corte corresponde a uma variável de decisão no modelo. Além disso, a quantidade de objetos a serem cortados deve ser um número inteiro e os algoritmos para problemas de programação linear inteiro requerem um tempo computacional de execução muito alto quando há muitas variáveis envolvidas.

Devido à dificuldade na resolução do PCE, diversos pesquisadores da área desenvolveram tanto métodos exatos, tais como *branch-and-bound* e variações, por exemplo, o método *branch-and-price* [4, 14], quanto métodos heurísticos [15], de forma a obter uma solução ótima ou factível com pequeno GAP em um tempo computacional viável. Foram propostas heurísticas do tipo construtivas [10, 15], que, de forma geral, consistem em construir um padrão de corte com a menor perda possível e, posteriormente, é calculado o número máximo de vezes que esse padrão pode ser usado, sem exceder a demanda dos itens. Também, encontram-se na literatura heurísticas do tipo residuais [2, 12], as quais começam resolvendo o problema pelo método simplex com geração de colunas [8], obtendo uma solução que pode ser fracionária. Posteriormente, cada autor propõe um método para obter a solução inteira.

Neste trabalho, propomos uma nova heurística para o PCE unidimensional, baseada em métodos de análise multicritério (MCDA - *Multi-criteria decision analysis*) [3]. A MCDA é um ramo da pesquisa operacional que auxilia a tomada de decisão. A partir de um conjunto de alternativas a serem escolhidas e um conjunto de critérios a serem avaliados, os métodos MCDA produzem um resultado de ordenamento ou seleção dessas alternativas. Sendo assim, pretendemos tratar os padrões de corte como sendo as alternativas, analisar quais características desses padrões de corte podem ser critérios que ajudam na otimização da solução e, então, aplicar métodos MCDA para selecionar bons padrões de corte para a resolução do PCE. Portanto, o objetivo do trabalho é propor um método que resolve o PCE com uma quantidade menor de padrões de corte, porém sendo eles selecionados a partir de uma análise de suas características, visando obter uma solução próxima da ótima de forma eficiente em termos de tempo computacional. O presente estudo foi feito para o PCE unidimensional, porém, ele pode ser aplicado para problemas de corte de estoque de maiores dimensões.

Os métodos MCDA vêm sendo muito utilizados para diferentes aplicações. Por exemplo, em [11] os autores utilizam um método MCDA para a seleção de materiais de ferramenta de corte. Também em [6] esses métodos são utilizados para selecionar projetos no contexto do desenvolvimento sustentável. O estudo feito em [13] apresenta uma revisão de aplicações de métodos MCDA em sistemas de armazenamento de energia. Não encontramos nenhum estudo até o momento que utilizem métodos MCDA aplicados para seleção de padrões de corte.

O restante do texto está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2, mostramos o modelo matemático do PCE considerado neste estudo. Na Seção 3, apresentamos uma visão geral de problemas e métodos MCDA. Na Seção 4, descrevemos a metodologia proposta para a resolução do PCE e na Seção 5 estão os testes computacionais e a análise dos resultados. Por fim, na Seção 6 apresentamos as conclusões e na sequência estão as referências bibliográficas.

2 MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL

No problema de corte de estoque unidimensional, temos objetos com comprimento L que devem ser cortados para obter itens de tipo i , sendo o tipo de item associado ao seu comprimento,

$l_i, i = 1, \dots, I$, e $l_i \leq L$. A demanda de cada item, denotada por d_i , é conhecida previamente. Portanto, o PCE consiste em decidir quais e quantas vezes utilizar cada padrão de corte, de modo a atender a demanda d_i , visando minimizar os custos da perda de material. A variável de decisão x_j representa o número de vezes que o padrão de corte j é utilizado.

O PCE, na forma matricial, pode ser representado como:

$$\text{Min} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{2.1}$$

s.a.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ e inteiro} \tag{2.3}$$

em que $\mathbf{A} \in \mathbb{I}^{I \times J}$ é a matriz formada por todos os possíveis padrões de corte, $\mathbf{d} \in \mathbb{I}^I$ é o vetor de demanda de itens, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^J$ é o vetor das variáveis de decisão x_j e o vetor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^J$ é formado por elementos c_j que indicam os custos associados ao padrão de corte j , que pode ser, por exemplo, a perda de material ou a preparação da máquina de corte, etc.

Cada coluna da matriz de padrões de corte contém um vetor \mathbf{a}_j I -dimensional (I representa a quantidade de tipos de itens de comprimento l_i), representado por:

$$\mathbf{a}_j = [\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{Ij}]^T,$$

em que cada elemento α_{ij} de \mathbf{a}_j é a quantidade de itens do tipo i no padrão de corte j .

É importante notar que o objeto tem um comprimento máximo L e, portanto, a combinação dos itens no padrão de corte não pode violar este comprimento. Desta forma, um padrão de corte será factível se:

$$l_1\alpha_{1j} + l_2\alpha_{2j} + \dots + l_I\alpha_{Ij} \leq L, \tag{2.4}$$

$$\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{Ij} \geq 0 \text{ e inteiros.} \tag{2.5}$$

3 VISÃO GERAL DE PROBLEMAS MCDA

Ao fazer uma escolha, é comum que o decisor analise o desempenho de determinados critérios dentre as alternativas disponíveis. Em muitos casos, esses critérios são conflitantes entre si. Por exemplo, na indústria de manufatura, é preciso decidir quais padrões de corte utilizar para atender as demandas dos itens. Um critério para esta escolha pode ser um padrão com menor perda de material. Outro critério a ser levado em conta é um padrão de corte que não gere excesso de itens produzidos. Neste caso, pode haver conflito entre esses critérios para a escolha, isto é, um padrão de corte pode apresentar menor perda de material, enquanto outro pode produzir a quantidade de itens que atenda a demanda mais próximo da igualdade.

Na prática, em empresas e indústrias, a tomada de decisão pode ser bastante complexa, motivando novas propostas e pesquisas acadêmicas. Técnicas de análise de decisão multicritério podem

auxiliar a decisão nesse cenário. A estrutura de um problema MCDA é formada determinando o objetivo da escolha, os agentes envolvidos no problema, o conjunto de q alternativas $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ e o conjunto de N critérios $\mathbf{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$. Uma vez determinados esses parâmetros, montamos a *matriz de decisão*:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & \dots & c_N \\ b_1 & e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1N} \\ b_2 & e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_q & e_{q1} & e_{q2} & \dots & e_{qN} \end{matrix}, \quad (3.1)$$

em que cada elemento e_{ij} da matriz indica o desempenho da alternativa i no critério j .

A partir da matriz de decisão, aplica-se algum método MCDA a fim de fazer a agregação, isto é, transformá-la em vetor para, então, obter um ordenamento das alternativas.

Uma técnica de agregação muito utilizada devido a sua simplicidade é a agregação linear. Seja o conjunto de pesos $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_N\} \in [0, 1]$, tal que $\sum_{n=1}^N w_n = 1$. A agregação linear é dada por:

$$r_i = \sum_{j=1}^N w_j e_{ij}, \quad i = 1, \dots, q, \quad (3.2)$$

sendo r_i o valor atribuído ao desempenho da alternativa a_i . Desse modo, uma certa alternativa a_k é preferível a outra alternativa a_ℓ se $r_k > r_\ell$. O conjunto de pesos \mathbf{w} indica a importância associada aos critérios, desse modo, um critério muito importante para o tomador de decisão deve assumir um valores mais próximos de um.

Apesar de serem bastante simples, os métodos lineares nem sempre são eficientes, pois em alguns casos eles não conseguem alcançar determinadas soluções. Portanto, métodos não lineares tais como *ordered weighted average* (OWA) [16] ou técnicas baseadas em integrais de Choquet [9] vêm sendo desenvolvidos.

Outra classificação importante dos métodos MCDA é que eles podem ser do tipo compensatório ou não-compensatório. Os do primeiro tipo são aqueles nos quais, um desempenho ruim em um critério, pode ser compensado com um desempenho bom em outro. Já no segundo tipo, as vantagens numéricas de um critério não são compensadas para os outros. Neste trabalho, utilizamos dois métodos de agregação linear, um do tipo compensatório, o TOPSIS [7], e outro do tipo não-compensatório, o PROMETHEE II [1], descritos brevemente a seguir.

3.1 TOPSIS (*Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution*)

Este método consiste basicamente em calcular a distância de cada alternativa para a distância da alternativa ideal. Os passos dele são:

1. Calcular a matriz de decisão normalizada, da forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^q (e_{ij})^2}}, j = 1, \dots, N;$$

2. Ponderar a matriz normalizada pelos pesos \mathbf{w} ;

3. Definir uma alternativa ideal positiva $\mathbf{B}^+ = (t_1^+, \dots, t_n^+)$ e uma ideal negativa $\mathbf{B}^- = (t_1^-, \dots, t_n^-)$, em que $t_i^+ j$ é o maior valor de cada critério j e $t_i^- j$ o menor;

4. Calcular as distâncias ψ_i^+ e ψ_i^- de cada alternativa para as ideais da seguinte forma:

$$\psi_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^N (t_j^+ - t_{ij})^2} \quad \text{e} \quad \psi_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^N (t_j^- - t_{ij})^2};$$

5. Calcular o valor de cada alternativa do seguinte modo: $v_i = \frac{\psi_i^-}{\psi_i^+ \psi_i^-} \quad i = 1, \dots, q;$

6. Ordenar o vetor \mathbf{v} .

3.2 PROMETHEE II (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations)

Neste método, as alternativas competem entre si dentro do mesmo critério e somente o saldo, ganho ou perda, é considerado na ponderação dos pesos. Aqui não é necessário normalizar a matriz de decisão, como é feito no TOPSIS, pois não há uma compensação entre critérios. De forma resumida o método consiste nos seguintes passos:

1. Calcular a diferença entre o desempenho das alternativas dentro de cada critério. Neste passo, é feita uma comparação par a par entre as alternativas:

$$a_n(\varepsilon, y) = g_n(\varepsilon) - g_n(y), \quad \forall \varepsilon, y \in \{b_1, \dots, b_q\} \quad \text{e} \quad \forall n = 1, \dots, N, \quad \text{em que} \\ \{g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_N(\cdot)\}, \text{ representa o conjunto de critérios;}$$

2. Aplicar a função de preferência: $P_n(\varepsilon, y) = P_n[a_k(\varepsilon, y)]$, sendo $0 \leq P_n(\varepsilon, y) \leq 1$; A função de preferência pode ser do tipo usual, forma U, forma V, níveis, linear e Gaussiana. A função que utilizamos neste estudo, do tipo usual, é definida como:

$$P(a) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 1 & d > 0 \end{cases};$$

3. Calcular o grau de sobreclassificação de ε sobre y , $\pi(\varepsilon, y)$, e de y sobre ε , $\pi(y, \varepsilon)$, para cada par de alternativas:

$$\begin{cases} \pi(\varepsilon, y) = \sum_{n=1}^N P_n(\varepsilon, y)w_n \\ \pi(y, \varepsilon) = \sum_{n=1}^N P_n(y, \varepsilon)w_n \end{cases},$$

lembrando que w_n são os pesos atribuídos a cada critério.

Assim, $\pi(\varepsilon, y)$ indica em que grau ε é preferível a y e $\pi(y, \varepsilon)$ indica em que grau y é preferível a ε ;

4. Calcular o fluxo de sobreclassificação $\phi^+(\varepsilon)$ e $\phi^-(\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \phi^+(\varepsilon) = \frac{1}{q-1} \sum_{z \in \mathbf{B}} \pi(\varepsilon, z) \\ \phi^-(\varepsilon) = \frac{1}{q-1} \sum_{z \in \mathbf{B}} \pi(z, \varepsilon) \end{cases},$$

em que o $\phi^+(\varepsilon)$ indica o quanto de preferência ε possui sobre todas as alternativas $z \in \mathbf{B}$, quanto maior $\phi^+(\varepsilon)$, melhor a alternativa. Por outro lado, $\phi^-(\varepsilon)$ representa o quanto de preferência todas as alternativas $z \in \mathbf{B}$ possuem sobre a alternativa ε , quanto menor $\phi^-(\varepsilon)$, melhor a alternativa;

5. Calcular uma função de valor para cada alternativa da seguinte forma:

$\phi(\varepsilon) = \phi^+(\varepsilon) - \phi^-(\varepsilon)$ e ordenar o conjunto pelo seguinte critério:

$$\begin{cases} \phi^+(\varepsilon) > \phi^+(y), \text{ então } \varepsilon \text{ é preferível a } y \\ \phi^+(\varepsilon) = \phi^+(y), \text{ então } \varepsilon \text{ é indiferente a } y \end{cases}.$$

4 METODOLOGIA

Para resolver o modelo matemático (2.1)-(2.3) de forma exata, é preciso gerar todos os possíveis padrões de corte, montando a matriz de padrões \mathbf{A} . Associa-se uma variável de decisão x_j para cada padrão j da matriz \mathbf{A} , essas variáveis representam a frequência do padrão. Dependendo do problema, essa quantidade de padrões pode ser muito grande. Na prática das indústrias, há muitos tipos de itens, portanto, resolver o modelo matemático de forma exata pode implicar um tempo computacional muito alto. Neste trabalho, o modelo matemático (2.1)-(2.3) será resolvido considerando uma quantidade reduzida de padrões de corte, ou seja, somente um percentual do total de possíveis padrões será considerado. Assim, é possível reduzir o tempo computacional de resolução do PCE, uma vez que há uma redução significativa no número de variáveis do modelo.

O algoritmo para resolução do PCE usando MCDA consiste nos seguintes passos:

Passo 1:

Neste passo, geramos todas as possíveis combinações dos itens no objeto e, então, verificamos se cada combinação é factível de acordo com as Equações (2.4)-(2.5). Para tal fim, utilizamos a biblioteca otimizada *Itertools* da linguagem Python. Gerar os padrões de corte é um problema combinatório, em que, quanto maior a quantidade de tipos de itens, maior o tempo computacional. Neste trabalho os testes computacionais foram feitos para $I < 12$. Existem outros algoritmos na literatura que podem ser implementados a fim de gerar padrões de corte com valores maiores de I [13]. Para testarmos a abordagem proposta, consideramos $I < 12$ suficiente.

Passo 2:

Para montar um problema MCDA é necessário definir as alternativas, os critérios do problema e o vetor de pesos \mathbf{w} atribuído aos critérios. Uma vez estruturado o problema, montamos a matriz de decisão, como definida em (3.1), e aplicamos os métodos MCDA. Como neste problema não

sabemos se os critérios podem ser compensatórios ou não, decidimos utilizar os dois métodos, o TOPSIS e o PROMETHEE II, os quais foram implementados utilizando a linguagem Python 3.5.

Neste estudo, consideramos as alternativas como sendo todos os possíveis padrões de corte do exemplar.

Critérios adotados:

C1 - Perda: Este critério considera a perda de cada padrão de corte. Ele é um critério de mínimo, isto é, quanto menor a perda, melhor o padrão.

C2 - Heterogeneidade: Aqui, é ponderado se o padrão de corte obtém diferentes tipos de itens. Por exemplo, dado um problema com 3 tipos de itens, o padrão de corte: $[5, 0, 0]$ é bastante homogêneo, pois ele produz apenas um tipo de item, que é o tipo 1. Já o padrão de corte: $[2, 1, 1]$ é bastante heterogêneo, dado que produz três tipos de itens. Note que aqui não importa quantos itens o padrão de corte produz, mas sim quantos tipos de itens. Então, os valores desses critérios são calculados de acordo com a Tabela 1 para um problema com I tipos de itens.

Tabela 1: Cálculo dos valores do C2.

Padrão	$[\alpha_{11}, 0, 0, \dots, 0]$	$[\alpha_{12}, 0, 0, \dots, 0]$	$[\alpha_{13}, \alpha_{23}, 0, \dots, 0]$	\dots	$[\alpha_{1J}, \alpha_{2J}, \alpha_{3J}, \dots, \alpha_{IJ}]$
Valor	1	1	2	\dots	I

Consideramos que este é um critério de máximo, pois, como o PCE é um problema de análise combinatória, quanto mais heterogêneo o padrão, maior é a chance de se obter uma boa combinação.

C3 - Divisor: Neste critério é verificado se cada valor α_i do padrão de corte é divisor da respectiva demanda d_i , para todo $i = 1, \dots, I$. Por exemplo, se temos um padrão de corte $[5, 2, 4]$, ou seja, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 4$, e uma demanda $d_1 = 10$, $d_2 = 3$ e $d_3 = 5$, temos que α_1 é um divisor de d_1 (5 é divisor de 10), mas α_2 e α_3 não são divisores de d_2 e d_3 , respectivamente, pois 2 não é divisor de 3 e 4 não é divisor de 5. Os valores desse critério são calculados associando a quantidade de α_i , de cada padrão, que são divisores do correspondente d_i . Este é um critério de maximização, já que a frequência do padrão de corte deve ser inteira e o fato de α ser um divisor, facilita a combinação.

C4 - Maior demanda, maior quantidade no padrão: Seja i o tipo de item com maior demanda. Este critério calcula quantas vezes é necessário usar o padrão para atender a demanda do item i . Por exemplo, seja $\mathbf{d} = [10, 3, 5]$ e um padrão de corte $[5, 2, 4]$, o tipo de item com maior demanda é $i = 1$, sendo ela igual a 10 unidades. Então, é necessário usar o padrão de corte 2 vezes para atender essa demanda. Este é um critério de minimização.

Pesos escolhidos:

Para calcular o vetor de pesos \mathbf{w} dos critérios, fizemos uma análise de sensibilidade do seguinte modo: geramos 100 exemplares para $I = 7$, posteriormente, resolvemos os 100 exemplares para diferentes valores dos pesos. Desse modo, obtivemos os valores da função objetivo (FO) resolvendo o modelo matemático (2.1)-(2.3) de forma exata e o valor das funções objetivo resolvendo esse modelo matemático pela nossa metodologia. Para a resolução do Modelo (2.1)-(2.3), usamos o *solver* CPLEX 12.7. Os valores dos parâmetros usados foram: comprimento dos objetos $L = 10000$; dimensão dos itens foram gerados de forma aleatória, sendo $l_i = 0,01L$ e $0,2L$; a demanda de itens foram geradas aleatoriamente no intervalo $d = [10, 50]$.

Tabela 2: Análise de sensibilidade dos pesos.

Critério com maior peso	Pesos	FO ótimo	FO P.	GAP P (%)	FO T	GAP T (%)
C1	[0.46, 0.06, 0.06, 0.42]	188.7	191.25	1.35	203.53	7.85
	[0.56, 0.06, 0.06, 0.32]	188.7	189.96	0.66	199.72	5.83
	[0.66, 0.06, 0.06, 0.22]	188.7	190.24	0.81	196.56	4.16
	[0.76, 0.06, 0.06, 0.12]	188.7	190.78	1.10	191.14	1.29
	[0.82, 0.06, 0.06, 0.06]	188.7	190.70	1,05	191.11	1,27
	[0.72, 0.16, 0.06, 0.06]	188.7	190.49	0,94	191.12	1,28
	[0.62, 0.26, 0.06, 0.06]	188.7	190.98	1,02	193.34	2,45

Apresentamos na Tabela 2 os melhores resultados obtidos relacionados à variação dos pesos (todos em que o *Gap* tem valor menor que 2,92%). Assim, a primeira coluna da tabela apresenta o critério que tem maior peso associado, e a segunda mostra o vetor de pesos. A terceira coluna indica o valor médio da função objetivo (FO) obtida resolvendo o modelo de forma exata. A quarta coluna apresenta o valor médio da FO obtida pelo nosso método utilizando o PROMETHEE II, e a quinta coluna mostra o *GAP* entre o valor da FO obtida de forma exata e o valor da FO obtida utilizando o método com o PROMETHEE II. Por fim, a sexta coluna apresenta o valor da FO obtida pelo nosso método usando o TOPSIS e a sétima coluna apresenta o *GAP* entre o valor da FO resolvendo o modelo de forma exata e pelo nosso método com o TOPSIS.

Pela Tabela 2, observamos que o melhor valor do *GAP* pelo método PROMETHEE II é para $\mathbf{w} = [0.56, 0.06, 0.06, 0.32]$ e pelo TOPSIS, quando $\mathbf{w} = [0.82, 0.06, 0.06, 0.06]$. Para $\mathbf{w} = [0.72, 0.16, 0.06, 0.06]$, ambos métodos apresentam bons resultados. Desse modo, utilizamos esse valor de \mathbf{w} para nossos testes.

Uma vez definidas as alternativas, os critérios e o vetor de pesos, aplicamos os métodos MCDA e obtemos um ordenamento decrescente dos padrões de corte, pois, por nossa hipótese, os primeiros padrões de corte do ordenamento obtido são os melhores. Agora, devemos definir que percentual desses primeiros padrões de corte são selecionados.

A fim de obtermos uma referência de qual percentual utilizar neste passo, resolvemos o modelo matemático (2.1)-(2.3) de forma exata (com todos os possíveis padrões de corte) e verificamos, em média, o percentual e a quantidade de padrões de corte que estão na solução ótima. Utilizamos valores de I igual a 3, 5, 7, 10, e 12, geramos 100 exemplares diferentes para cada valor de

I e apresentamos a média dos 100 exemplares na Tabela 3. Uma observação interessante desse resultado é que, quanto maior o valor de I , menor o percentual de padrões de corte utilizados. Isso significa que é possível obter bons resultados para o PCE com poucos padrões de corte, porém, é necessário que esses padrões sejam bem selecionados. Dado esse valor, fizemos alguns testes com o nosso método utilizando os seguintes percentuais para selecionar os padrões de corte: 5%, 10% e 20%. Para os valores de 5% e 10%, alguns exemplares apresentavam infactibilidade em sua resolução e resultados que não consideramos satisfatórios. Para o percentual de 20%, não houve infactibilidade e os resultados consideramos como muito bons. Desse modo, optamos por selecionar 20% de todos os possíveis padrões de corte para nossos testes computacionais apresentados na Seção 5.

Tabela 3: Percentual médio de padrões de corte utilizados quando o modelo matemático é resolvido de forma exata.

Quantidade de tipo de itens (I)	3	5	7	10	12
Percentual médio de padrões de corte	12%	5,95%	3,00%	1,47	0,82%

Passo 3:

Neste passo, resolvemos o modelo matemático (2.1)-(2.3) somente com os padrões de corte selecionados no passo anterior. Para tal fim, utilizamos o *solver* CPLEX 12.7 (<https://www.ibm.com/br-pt/products/ilog-cplex-optimization-studio>), que é um *software* desenvolvido pela IBM para resolver problemas de otimização.

5 TESTES COMPUTACIONAIS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos os resultados dos testes computacionais e fazemos uma análise do desempenho do método proposto, verificando a qualidade da solução obtida por meio do GAP e do tempo computacional gasto. Para isso, comparamos os resultados do método proposto com a solução ótima obtida ao resolver o modelo matemático (2.1)-(2.3) com todos os possíveis padrões de corte.

Para simplificar a compreensão das figuras e tabelas, nesta seção utilizamos a seguinte notação para cada método:

ME: Método exato - faz referência a resolução do modelo matemático (2.1)-(2.3) de forma exata, obtendo-se a solução ótima do problema.

MP: Nos referimos aos resultados obtidos utilizando o método proposto com o PROMETHEE II.

MT: Faz referência ao método proposto com o TOPSIS.

Os resultados apresentados em seguida foram obtidos da seguinte forma: resolvemos 100 exemplares para cada valor de I , sendo $I = 4, 6, 8, 10$ e 12 , e calculamos o valor médio dos 100 exemplares.

Para dar uma ideia da dimensão dos exemplares, a Tabela 4 apresenta a quantidade média de restrições e variáveis dos exemplares resolvidos pelos três métodos (ME, MP e MT). Como a quantidade de restrições do modelo matemático (2.1)-(2.3) é diretamente proporcional ao valor de I , vemos que, independente do método usado, esse valor é sempre igual ao valor atribuído para I . Com relação as variáveis, é possível notar, primeiramente, que a quantidade de variáveis do ME é maior que as do MP e MT, pois, como foi dito anteriormente, temos tantas variáveis quanto padrões de corte e no MP e MT trabalhamos apenas com 20% dos padrões de corte do ME. Para visualizar melhor o aumento da quantidade de variáveis em função dos valores de I , elaboramos a Figura 3 com os mesmos dados das três últimas colunas da Tabela 4 em forma de gráfico. Nela, é possível ver claramente que o aumento da quantidade de variáveis é exponencial. Uma análise interessante desse resultado é que, a quantidade total de possíveis padrões de corte aumenta exponencialmente com o aumento linear de I , mas, com base no resultado que obtivemos pela Tabela 3, o percentual de padrões de corte utilizado pelo ME diminui com o aumento de I . Esta análise reforça a importância da ideia do nosso método, em que acreditamos que é possível obter bons resultados, utilizando poucos padrões de corte, desde que tenha sido feita uma boa seleção deles.

Tabela 4: Resultado dos testes computacionais.

Quantidade de tipo de itens (I)	Restrições			Variáveis		
	ME	MP	MT	ME	MP	MT
4	4	4	4	84,24	17,30	17,30
6	6	6	6	266,07	53,63	53,63
8	8	8	8	568,60	114,07	114,07
10	10	10	10	1239,09	248,21	248,21
12	12	12	12	2648,31	530,04	530,04

Para verificar se a solução obtida pelos métodos MP e MT estão próximas da ótima, isto é, próxima da solução obtida pelo ME, elaboramos a Figura 4, a qual apresenta os valores médios das funções objetivo resolvendo o problema pelo ME, MP e MT. Observamos que os valores das funções objetivo estão muito próximos, para todo I . A fim de visualizar melhor a diferença entre as funções objetivo, elaboramos um gráfico, na Figura 5, que apresenta a diferença em percentual (GAP) entre a FO do ME e do MP, assim como a diferença entre a FO do ME e do MT. Observamos, primeiramente, que o MP obteve melhor desempenho que o MT quanto à proximidade das funções objetivo com a do ME. Também, vemos que os maiores valores do GAP foram de aproximadamente 4,25% para o MT e 3,75% para o MP, e os menores valores foram de aproximadamente 1,25% para o MT e 0,25% para o MP. Além disso, é possível notar

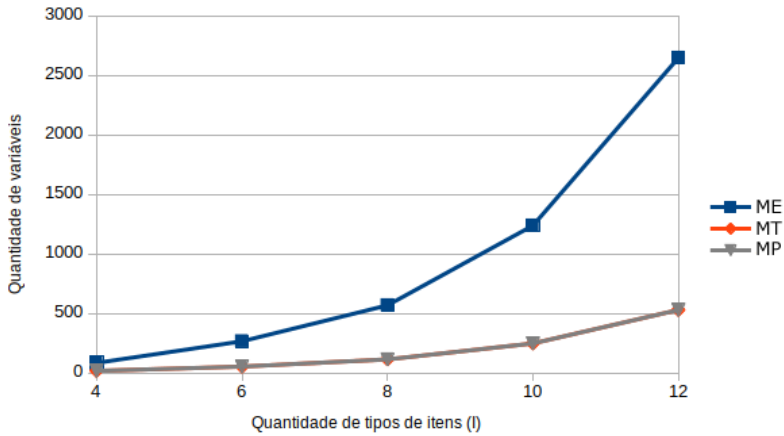


Figura 3: Quantidade de variáveis em função dos valores de I.

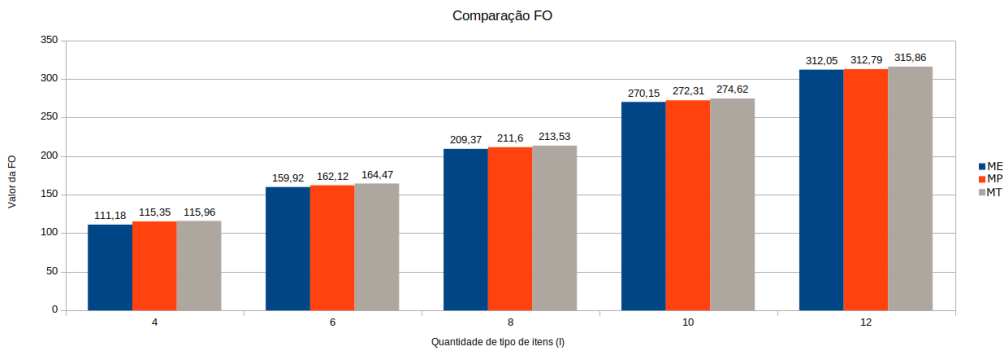


Figura 4: Comparação dos valores das funções objetivo.

que, quanto maior o valor de I , melhor o resultado do método, já que pelo gráfico se observa uma tendência decrescente do GAP .

Por fim, precisamos verificar o tempo computacional de execução do PCE. Apresentamos na Figura 6 o tempo computacional total de resolução médio do ME, MP e MT. Note que o tempo total do ME é formado pelo tempo que o CPLEX demora para resolver o modelo matemático. Já o tempo total do MP consiste no tempo de execução do algoritmo PROMETHEE II, para selecionar os padrões de corte, mais o tempo do CPLEX para resolver o modelo, idem para o MT.

De acordo com a Figura 6 (a), é possível observar que o ME é mais eficiente que o MP em termos de desempenho computacional. Isto se deve ao fato que o método PROMETHEE II faz uma comparação par a par de todas as alternativas. Por outro lado, pela Figura 6 (b), observa-se que o tempo total do ME é maior que o do MT, sendo que essa diferença aumenta, a medida que

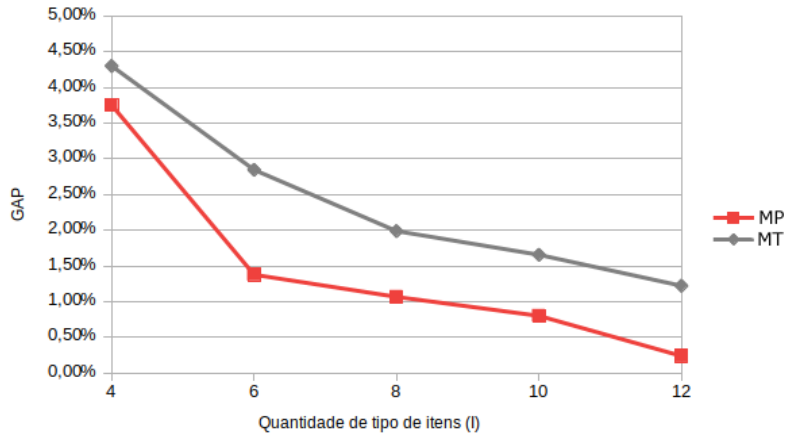
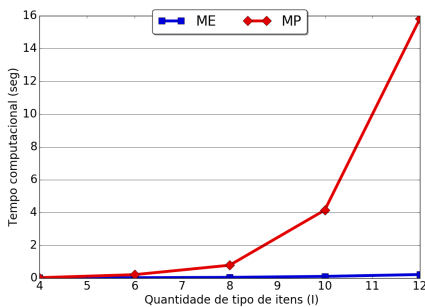
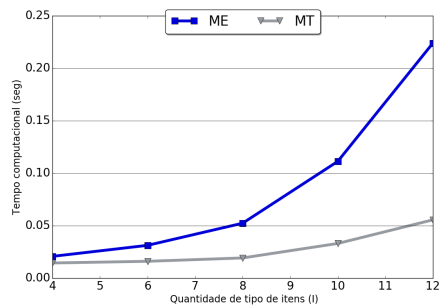


Figura 5: GAP das funções objetivo.



(a) Comparação ME x MP.



(b) Comparação ME x MT.

Figura 6: Tempo computacional total do ME, MP e MT.

a quantidade de tipo de itens aumenta. Por exemplo, para $I = 4$, o tempo do ME é 43,44% maior, enquanto para $I = 12$, é de 224%. Sendo assim, o MT mostra-se mais eficiente que o MP e ME em termos de tempo computacional total.

Para explorar melhor o tempo computacional dos métodos, elaboramos a Figura 7, que mostra apenas o tempo de resolução do modelo matemático (2.1)-(2.3) pelo *solver*, para os três métodos, isto é, o tempo para resolver o modelo com todos os padrões de corte (ME), o tempo para resolver o modelo apenas com os padrões de corte selecionados pelo PROMETHEE II e o tempo para resolver o modelo apenas com os padrões de corte selecionados pelo TOPSIS. Pela figura, notamos que o tempo computacional do *solver* para o MP e MT é bem menor que pelo ME. Quando $I = 4$, o ME apresenta um tempo computacional maior que o MP de aproximadamente 54% e, quando $I = 12$, essa diferença sobe para 273%.

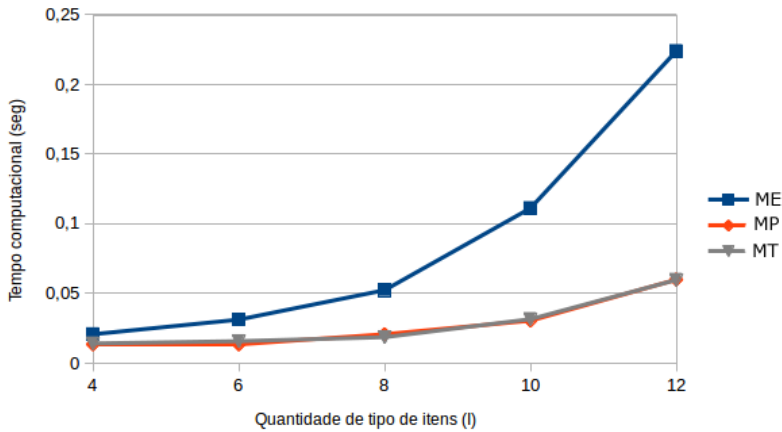


Figura 7: Tempo computacional do CPLEX para o ME, MP e MT.

Em suma, o MP apresentou melhores valores para o GAP comparado com o MT, porém, em termos de tempo computacional total, o MP não atingiu o objetivo de melhorar o tempo de total de resolução do problema. Apesar disso, pela Figura 7, o MT e o MP obtiveram melhor tempo de execução que o ME. Portanto, se os critérios de seleção dos padrões de corte não dependem de características específicas de um problema (como por exemplo, considerar a demanda como critério de seleção dos padrões de corte), seria necessário executar o método PROMETHEE II apenas uma vez. Neste caso, o MP pode se tornar mais eficiente.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, propomos um novo método para resolver o PCE unidimensional com somente 20% dentre todos os possíveis padrões de corte. Para essa seleção algumas técnicas de MCDA foram utilizadas. A partir dos resultados obtidos podemos fazer algumas considerações importantes. Primeiramente, vemos que os resultados das funções objetivo obtidas pelo MP e MT, quando comparadas com a solução ótima, são promissoras, chegando a uma diferença de apenas 0,25% e 1,25%, respectivamente, quando $I = 12$. Além disso, o gráfico do GAP mostra uma tendência decrescente desse percentual à medida que aumentamos o valor de I , ou seja, esse resultado pode ser ainda melhor para maiores valores de I . Com relação ao tempo computacional total, ficou evidente a necessidade de otimizar o código do PROMETHEE II implementado para melhorar o desempenho do MP. Ao analisar somente o tempo computacional gasto para resolver pelo solver o modelo matemático (2.1)-(2.3) composto apenas pelos padrões de corte selecionados pelo método PROMETHEE II e TOPSIS, podemos dizer que o objetivo deste trabalho foi atingido dado que os exemplares foram resolvidos em torno de 0,02 segundos no pior caso. Comparando os métodos MCDA, concluímos que o PROMETHEE II obteve melhores resultados quanto ao GAP, porém piores resultados quanto ao tempo computacional. Por fim, um futuro trabalho seria

implementar algoritmos mais eficientes para gerar os padrões de corte unidimensional a fim de fazer testes com maiores valores de tipos de itens.

ABSTRACT. In manufacturing industries, one of the production processes consists of cutting large objects into smaller pieces. In operational research, this process's study is known as the cutting stock problem (CSP). Due to its difficulty in resolution, heuristics have been developed by researchers in the area. In this work, we propose to use multicriteria decision analysis (MCDA) techniques to solve the CSP in a reasonable computational time and aiming to obtain solutions very close to the optimum. Our strategy consists of selecting the best cutting patterns using MCDA techniques and solving the problem only with these chosen patterns. The computational tests showed that the solution obtained with this strategy presents a GAP between 0.25% and 4.25% compared to the optimal solution, giving indications that the proposal is promising.

Keywords: CSP, MCDA, heuristics.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Brans. L'ingenierie de la decision, l'laboration d'instruments d'aide a la decision. Colloque sur l'Aide a la Decision. *Faculte des Sciences de l'Administration, Universite Laval*, (1982).
- [2] B.C. Campello, A.O. de Castro Ayres, W.A. de Oliveira & C.T. S. Ghidini. Uma nova abordagem Heurística para determinar os padrões de corte no problema de corte de estoque. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, **5**(1) (2017).
- [3] C.A.B. Costa. "Readings in multiple criteria decision aid". Springer Science & Business Media (2012).
- [4] Z. Degraeve & M. Peeters. Optimal integer solutions to industrial cutting-stock problems: Part 2, benchmark results. *INFORMS Journal on Computing*, **15**(1) (2003), 58–81.
- [5] M. Delorme, M. Iori & S. Martello. Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. *European Journal of Operational Research*, **255**(1) (2016), 1–20.
- [6] A. Frini & S.B. Amor. MUPOM: A multi-criteria multi-period outranking method for decision-making in sustainable development context. *Environmental Impact Assessment Review*, **76** (2019), 10–25.
- [7] A. Frini & S. BenAmor. A TOPSIS multi-criteria multi-period approach for selecting projects in sustainable development context. In "Industrial Engineering and Operations Management (IEOM), 2015 International Conference on". IEEE (2015), p. 1–9.
- [8] P.C. Gilmore & R.E. Gomory. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, **9**(6) (1961), 849–859.
- [9] M. Grabisch & C. Labreuche. A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid. *4OR*, **6**(1) (2008), 1–44.
- [10] R. Hoto, N. Maculan, F. Marques & M. Arenales. Um problema de corte com padrões compartimentados. *Pesquisa Operacional*, **23**(1) (2003), 169–187.

- [11] A. Li, J. Zhao, Z. Gong & F. Lin. Optimal selection of cutting tool materials based on multi-criteria decision-making methods in machining Al-Si piston alloy. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **86**(1) (2016), 1055–1062.
- [12] K.C. Poldi & M.N. Arenales. Heurísticas para o problema de corte de estoque unidimensional inteiro. *Pesquisa Operacional*, **26**(3) (2006), 473–492.
- [13] S. Suliman. Pattern generating procedure for the cutting stock problem. *International Journal of Production Economics*, **74**(1-3) (2001), 293–301.
- [14] F. Vanderbeck & L.A. Wolsey. An exact algorithm for IP column generation. *Operations Research Letters*, **19**(4) (1996), 151–159.
- [15] G. Wäscher & T. Gau. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: A computational study. *Operations-Research-Spektrum*, **18**(3) (1996), 131–144.
- [16] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, **18**(1) (1988), 183–190.

