Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **20**, N. 3 (2019), 477-496
© 2019 Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
www.scielo.br/tema
doi: 10.5540/tema.2019.020.03.0477

Condições de Otimalidade para Problemas Multiobjetivos Irregulares

A. S. MELO[1*], L. B. DOS SANTOS[2] e M. A. ROJAS-MEDAR[3]

Recebido em 7 de dezembro de 2018 / Aceito em 15 de maio de 2019

RESUMO. Neste artigo, consideramos problemas de Otimização multiobjetivo com restrições de igualdade dadas na forma $F(x) = 0$, sendo $F : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{U}$ um aberto não vazio. Consideramos o caso em que a restrição do problema é irregular, ou seja, quando a condição de qualificação de independência linear (LICQ) não é satisfeita na solução do problema de otimização. Obtemos condições necessárias e suficientes de otimalidade no sentido da eficiência fraca e da eficiência própria para problemas multiobjetivos irregulares. Para isto, foi utilizada a Teoria da p-regularidade.

Palavras-chave: condições de otimalidade, irregularidade, p-regularidade.

1 INTRODUÇÃO

Em muitas situações nos deparamos com problemas de tomadas de decisões que surgem em diversas áreas como Engenharia, Economia, Administração, Biomedicina, Teoria dos Jogos, dentre outros. Tais problemas podem possuir mais de um objetivo fixados como metas pelo decisor. Tais problemas são chamados multiobjetivos. Em geral não é possível minimizar todos os objetivos simultaneamente. Deste modo, existem várias noções de otimalidade para esses problemas, destacando-se as soluções eficientes (ou de Pareto), as propriamente eficientes (ou Geoffrion-eficientes) e as fracamente eficientes (Pareto fracas). Os primeiros resultados no campo da Otimizaçao multiobjetivo são devidos a V. Pareto [14] que em seu célebre trabalho *"Cours d'Economie Politique"* introduz o conceito de solução eficiente – o qual está relacionado à Teoria do Bem Estar Social [13].

Em Otimização multiobjetivo as condições necessárias e suficientes de otimalidade são um tópico importante e grande parte dos resultados conhecidos para problemas de Otimização escalares

*Autor correspondente: Adson Sampaio Melo – E-mail: adsonmelo@ufrb.edu.br – https://orcid.org/0000-0002-4283-3225
[1]Centro de Formação de Professores, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Av. Nestor de Mello Pita, 535, 45300-000, Amargosa, BA, Brasil – E-mail: adsonmelo@ufrb.edu.br
[2]Programa de Pós Graduação em Matemática, Centro Politécnico, Universidade Federal do Paraná, R. Cel. Francisco H. dos Santos, 100, 81531-980, Curitiba, PR, Brasil – E-mail: lucelina@ufpr.br
[3] Instituto de Alta Investigacion, Universidad de Tarapacá, Antofagasta, 1520, Arica, Chile. – E-mail: marko.medar@gmail.com

(ou mono-objetivos) se estendem ao caso multiobjetivo. É bastante conhecido o fato que as condições de Karush-Kuhn-Tucker são necessárias para a otimalidade sob hipóteses adicionais – as quais são conhecidas como Condições de Qualificação. A condição de qualificação mais geral é a Condição de Qualificação de Guignard (GCQ) [6]. Como é bem conhecido, GCQ em muitos casos é difícil de ser verificada e com o objetivo de se garantir esta condição, várias outras condições de qualificação foram propostas. Uma das mais conhecidas e utilizadas dentre as condições de qualificação é a Condição de Qualificação de Independência Linear (LICQ). Entretanto, muitos problemas de otimização com restrições de igualdade não satisfazem LICQ na solução. Neste trabalho, os problemas dessa natureza serão denominados irregulares, seguindo a terminologia utilizada por Brezhneva e Tretyakov em [5]. Observamos ainda que o tratamento das condições de otimalidade para problemas irregulares tem sido um tópico de pesquisa bastante atual $[1,2,3,4,7]$. A relevância de tais problemas e algumas importantes referências que contêm exemplos significativos e aplicações podem ser encontrados em $[1]$ e suas referências.

No artigo [4], Brezhneva e Tretyakov consideram problemas irregulares mono-objetivo com restrições de igualdade e para tais problemas obtém condições necessárias e suficientes para a otimalidade. Em [5] os autores obtêm condições necessárias e suficientes de otimalidade para uma certa classe de problemas mono-objetivo com restrições de desigualdade e irregulares – por eles denominadas absolutamente degenerados. Em ambos artigos, a abordagem utilizada se baseia na Teoria da p-regularidade.

Neste artigo, faremos uma abordagem baseada na Teoria da p-regularidade [5]. Consideraremos que $F : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sendo $\mathbb{U}$ um aberto não vazio, é a aplicação que define as restrições de igualdade do problema e a ideia principal desta abordagem é substituir o operador linear $F^{(1)}(x_0)$, que não é sobrejetor, por um operador linear sobrejetor $\Phi_p(x_0)$, relacionado à expansão de Taylor de ordem p de F em torno de x_0. Por fim, obtemos novas condições de otimalidade em termos da função Lagrangeana generalizada ou função Lagrangeana p-fator. Existem poucos trabalhos referentes às condições de otimalidade para o caso multiobjetivo irregular, o único artigo que conhecemos até o momento e que trata de problemas irregulares multiobjetivo é o artigo de Hernandez-Jemenez et al [8]. Este trabalho difere do nosso por tratar apenas o problema com restrições de desigualdade e, além disso, a noção de 2-regularidade utilizada pelos autores é diferente da que utilizamos neste trabalho.

A organização deste trabalho é a seguinte: Na Seção 2, fixamos a notação utilizada ao longo do texto e recordamos os conceitos de solução para problemas multiobjetivo. Também recordamos o Teorema de Ponto Fixo para multifunções e, a partir desse, demonstramos um lema necessário para obtenção de nossos resultados; na Seção 3 recordamos alguns resultados básicos da Teoria da p-regularidade e, por fim, na Seção 4 obtemos os resultados centrais deste trabalho.

2 PRELIMINARES

Neste artigo consideramos o seguinte problema multiobjetivo:

$$\begin{array}{l}\text{Minimizar } f(x) = (f_1(x), ..., f_\ell(x)) \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M},\end{array} \tag{2.1}$$

sendo $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0\}$, $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ e $F : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio, f e F suficientemente diferenciáveis. Admitiremos que o conjunto factível $\mathbb{M}$ é não vazio. Denotamos por

$$\mathbb{K} = \{1, ..., \ell\} \text{ e } \mathbb{J} = \{1, ..., m\}.$$

Em geral, não é possível minimizar todas as funções objetivo do problema (2.1) e, dessa forma, o conceito de otimalidade pode ser estabelecido de outras maneiras. A seguir, apresentamos os conceitos de solução para o problema (2.1) e que serão utilizados neste trabalho.

Definição 2.1.

(i) Dizemos que $x_0 \in \mathbb{M}$ é uma solução local fracamente eficiente do problema (2.1) *se existe uma vizinhança $\mathbb{V}$ de x_0 e não existe $x \in \mathbb{M} \cap \mathbb{V}$, $x \neq x_0$ tal que $f_k(x) < f_k(x_0)$ para cada $k \in \mathbb{K}$.*

(ii) Dizemos que $x_0 \in \mathbb{M}$ é uma solução local eficiente do problema (2.1) *se existe uma vizinhança $\mathbb{V}$ de x_0 e não existe $x \in \mathbb{M} \cap \mathbb{V}$, $x \neq x_0$ tal que $f_k(x) \leq f_k(x_0)$ para $k \in \mathbb{K}$, com a desigualdade estrita para pelo menos um k.*

(iii) Dizemos que $x_0 \in \mathbb{M}$ é solução local propriamente eficiente do problema (2.1) *quando ela é uma solução local eficiente e se existe $C > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{K}$*

$$\frac{f_k(x_0) - f_k(x)}{f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)} \leq C$$

para algum k_0 tal que $f_{k_0}(x_0) < f_{k_0}(x)$ quando $x \in \mathbb{M} \cap \mathbb{V}$ e $f_k(x) < f_k(x_0)$.

Por escalarização entendemos a conversão do problema multiobjetivo em um problema escalar de programação não linear cuja solução coincide com a solução do problema multiobjetivo. Uma das técnicas mais conhecidas de escalarização é o Método da Ponderação. Seja $\mathbb{W} = \{w \in \mathbb{R}^\ell; w_k \geq 0,\ k \in \mathbb{K}\}$. Para cada $w \in \mathbb{W}$, $w \neq 0$, consideramos o seguinte problema escalar

$$\begin{array}{l}\text{Minimizar } \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} w_k f_k(x) \\ \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M}.\end{array} \tag{2.2}$$

As relações existentes entre as soluções do problema multiobjetivo e as soluções do problema ponderado são dadas no seguinte lema:

Lema 2.1 ([10]). *Consideramos o problema definido como em* (2.2).

(i) Se existe $w \in \mathbb{W} \backslash \{0\}$ e x_0 é uma solução do problema (2.2)*, então x_0 é solução fracamente eficiente do problema* (2.1).

(ii) Se existe $w \in \mathbb{W}$ tal que $w_k > 0$, $k \in \mathbb{K}$ e x_0 é uma solução do problema (2.2)*, então x_0 é solução propriamente eficiente do problema* (2.1).

Utilizaremos aqui as seguintes notações:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ e } x \in \mathbb{R}^n_+ \Leftrightarrow x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n.$$

A k-ésima derivada de f no ponto x_0 é uma aplicação k-linear $f^{(k)}(x_0) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{\text{k cópias}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Além disto, podemos associar à aplicação $f^{(k)}(x_0)$ uma k-forma

$$f^{(k)}(x_0)[\cdot]^k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definida como

$$f^{(k)}(x_0)[x]^k = f^{(k)}(x_0)\left(\underbrace{x, ..., x}_{\text{k vezes}}\right).$$

O conjunto $Ker^k f^{(k)}(x_0) = \left\{h \in \mathbb{R}^n; f^{(k)}(x_0)\,[h]^k = 0\right\}$ é o k-Kernel de $f^{(k)}(x_0)$.

Evidentemente, para cada vetor $h \in \mathbb{R}^n$ fixado, podemos associar o operador linear

$$f^{(k)}(x_0)[h]^{k-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

definido, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como

$$f^{(k)}(x_0)[h]^{k-1}x = f^{(k)}(x_0)\left(\underbrace{h, ..., h}_{k-1}, x\right).$$

Similarmente para as funções $f_i^{(k)}(x_0)[h]^{k-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, temos funcionais lineares definidos, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como a seguir

$$f_i^{(k)}(x_0)[h]^{k-1}x = f_i^{(k)}(x_0)(h, ..., h, x).$$

A seguir enunciamos o conceito de direção tangente.

Definição 2.2. *Dizemos que um vetor h é uma direção tangente a $\mathbb{M}$ no ponto x_0, se existe $\alpha_0 > 0$ tal que para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ existe um vetor*

$$x(\alpha) = x_0 + \alpha h + r(\alpha) \in \mathbb{M},$$

sendo o vetor $r(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\|r(\alpha)\| = o(\alpha)$.

O clássico Teorema do Valor Médio será de muita valia em nossas análises. Enuciamos este importante resultado.

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Médio [9]). *Sejam* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *espaços de Banach e* $\mathbb{U} \subset \mathbb{X}$ *um aberto não vazio. Seja* $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *uma função diferenciável no segmento* $\{x_0 + th; t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{U}$. *Então*

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\| f^{(1)}(x_0+th) - T \right\| . \|h\|,$$

sendo $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *um operador linear contínuo.*

Agora apresentamos o conceito de multifunções e alguns resultados a ele relacionados. Para maiores detalhes consulte [9].

Definição 2.3. *Sejam* $\mathbb{A}$ *um conjunto não vazio e* $2^{\mathbb{B}}$ *a família de subconjuntos do conjunto* $\mathbb{B}$. *Uma função* $\Phi : \mathbb{A} \longrightarrow 2^{\mathbb{B}}$ *é denominada de multifunção.*

Sejam $(\mathbb{X}, d)$ um espaço métrico e $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \subseteq \mathbb{X}$. Consideramos o número

$$d(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \sup_{x\in\mathbb{X}_1} d(x, \mathbb{X}_2),$$

sendo $d(x, \mathbb{X}_2) = \inf_{y\in\mathbb{X}_2} d(x,y)$. O máximo entre os números $d(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ e $d(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)$ define a distância de Hausdorff ($\mathscr{H}$) entre os conjuntos $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$, isto é,

$$\mathscr{H}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \max\{d(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2), d(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)\}.$$

O próximo resultado enunciado é uma versão do Teorema do Ponto Fixo para multifuncões. Para isso, o conceito de contração para multifunções é dado a seguir.

Definição 2.4. *Sejam* $(\mathbb{X}, d)$ *um espaço métrico e* $\Phi : \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{X}}$ *uma multifunção. Dizemos que* Φ *é uma contração se existe um número* $\theta \in (0,1)$ *tal que*

$$\mathscr{H}(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \theta d(x_1, x_2),$$

para todo x_1, $x_2 \in \mathbb{Y}$.

Teorema 2.2 (Princípio da Contração para Multifunções [9]). *Sejam* $(\mathbb{X}, d)$ *um espaço métrico e* $\Phi : \mathbb{B}_\varepsilon(x_0) \longrightarrow 2^{\mathbb{X}}$ *uma multifunção, sendo* $\Phi(x) \neq \emptyset$ *e fechado para todo* $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{X}; d(x,x_0) < \varepsilon\}$. *Suponhamos que exista um número* $\theta \in (0,1)$ *tal que*

(i) $\mathscr{H}(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \theta d(x_1, x_2)$, *para todo* $x_1, x_2 \in \mathbb{B}_\varepsilon(x_0)$;

(ii) $d(x_0, \Phi(x_0)) < (1-\theta)\varepsilon$.

Então para qualquer η satisfazendo a desigualdade

$$d(x_0,\Phi(x_0)) < \eta < (1-\theta)\varepsilon,$$

existe um $x \in \mathbb{B}_{\frac{\eta}{1-\theta}}(x_0)$ tal que

$$x \in \Phi(x). \tag{2.3}$$

Além disto, dentre os pontos x que satisfazem essas condições existe um tal que

$$d(x,x_0) \leq \frac{2}{1-\theta} d(x_0,\Phi(x_0)).$$

O próximo resultado fornece uma maneira de determinarmos a distância entre dois conjuntos, segundo a métrica de Hausdorff.

Lema 2.2 ([9]). *Sejam $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \subseteq \mathbb{X}$ variedades lineares translações de um subespaço vetorial. Então,*

$$\mathscr{H}(\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2) = \inf\{\|x_1 - x_2\|; x_i \in \mathbb{X}_i, i = 1,2\}.$$

Em algumas situações a variedade linear do Lema 2.2 é uma translação do kernel de um operador linear. Este fato pode ser verificado no próximo lema.

Lema 2.3 ([11]). *Sejam $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ um operador linear e $b \in Im(T)$. Então a variedade linear $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n; Tx = b\}$ é uma translação do subespaço vetorial $Ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^n; Tx = 0\}$, ou seja,*

$$\mathbb{L} = \widetilde{x} + Ker(T),$$

para algum $\widetilde{x} \in \mathbb{L}$.

Para um operador linear contínuo $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ consideramos a multifunção

$$\Phi : \mathbb{X} \longrightarrow 2^{\mathbb{X}},$$

definida como

$$\Phi(x) = x - \{T\}^{-1} g(x),$$

sendo g uma funcão de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$ tal que $Im(g) \subseteq Im(T)$ e $\{T\}^{-1} : \mathbb{Y} \longrightarrow 2^{\mathbb{X}}$ é definida como

$$\{T\}^{-1} y = \{x \in \mathbb{X}; T(x) = y\}. \tag{2.4}$$

Lema 2.4. *Suponhamos $\widehat{x} \in \mathbb{X}$ fixado tal que $g(\widehat{x}) \in Im(T)$. Então*

$$\Phi(\widehat{x}) = \{x \in \mathbb{X}; T(\widehat{x} - x) = g(\widehat{x})\} = \widetilde{x} + Ker(T),$$

sendo $\widetilde{x}$ *tal que* $T(\widehat{x}-\widetilde{x}) = g(\widehat{x})$.

Demonstração. Seja $x \in \Phi(\widehat{x})$. Logo, $x = \widehat{x} - y$, sendo $y \in \mathbb{X}$ tal que $T(y) = g(\widehat{x})$. Desta forma, $T(\widehat{x}-x) = g(\widehat{x})$, isto é, $x \in \{x \in \mathbb{X}; T(\widehat{x}-x) = g(\widehat{x})\}$. Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $T(\widehat{x}-x) = g(\widehat{x})$, então $x = \widehat{x} - (\widehat{x}-x) \in \Phi(\widehat{x})$. Portanto,

$$\Phi(\widehat{x}) = \{x \in \mathbb{X}; T(\widehat{x}-x) = g(\widehat{x})\}.$$

A segunda igualdade segue diretamente do Lema 2.3. □

Lema 2.5 ([9]). *Seja* $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *um operador linear contínuo e* $\{T\}^{-1}$ *é definida como em* (2.4). *Consideramos*

$$\left\| \{T\}^{-1} \right\| = \sup_{y \in \mathbb{Y}} \left\{ \|y\|^{-1} \inf\{\|x\|; x \in \mathbb{X}, T(x) = y\} \right\}.$$

Se $Im(T) = \mathbb{Y}$*, então* $\left\| \{T\}^{-1} \right\| < \infty$.

3 ELEMENTOS DA TEORIA DA P-REGULARIDADE

Seja $F : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sendo $\mathbb{U}$ um aberto não vazio. Como é bem conhecido da literatura, o Teorema de Lyusternik [9] é uma ferramenta útil para construção do cone das direções tangentes ao conjunto

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0\}$$

em x_0 quando o operador linear $F^{(1)}(x_0)$ é sobrejetor. Nesses casos, o cone das direções tangentes pode ser obtido via derivada de primeira ordem, mais especificamente, este cone coincide com o núcleo do operador linear $F^{(1)}(x_0)$. Nessas situações e quando x_0 é uma solução local fracamente eficiente do problema (2.1), o Teorema de Karush-Kuhn-Tucker [10] garante a existência de vetores $\theta \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} \backslash \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\ell} \theta_j f_j^{(1)}(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j^{(1)}(x_0) = 0,$$

já que LICQ é verificada em x_0. Por outro lado, quando a sobrejetividade do operador $F^{(1)}(x_0)$ é violada, ou equivalentemente, LICQ não é satisfeita em x_0, é garantida apenas a inclusão do cone das direções tangentes no núcleo do operador linear $F^{(1)}(x_0)$.

No que se segue, recordamos o conceito de aplicação irregular.

Definição 3.1 ([5]). *Dizemos que a aplicação* $F : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é regular em* x_0 *se*

$$ImF^{(1)}(x_0) = \mathbb{R}^m. \tag{3.1}$$

A aplicação F *é irregular se* (3.1) *não é satisfeita.*

Consideramos agora o caso em que a condição de regularidade (3.1) não é válida e para tratarmos esse caso faremos uso de um operador linear específico [5], cuja construção é descrita a seguir. Suponhamos que para um número natural p, seja possível uma decomposição em soma direta do espaço vetorial $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_p, \tag{3.2}$$

sendo $\mathbb{Y}_1 = ImF^{(1)}(x_0)$ e os demais subespaços são definidos da seguinte maneira:

Sejam $\mathbb{Z}_2$ o subespaço complementar para $\mathbb{Y}_1$ com respeito à $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Z}_2$$

e $P_{\mathbb{Z}_2} : \mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ a projeção definida como

$$P_{\mathbb{Z}_2}(y) = z_2,$$

sendo $y = y_1 + z_2$, $y_1 \in \mathbb{Y}_1$ e $z_2 \in \mathbb{Z}_2$. Definimos $\mathbb{Y}_2 = span\left(ImP_{\mathbb{Z}_2}F^{(2)}(x_0)\,[\cdot]^2\right)$ e indutivamente, temos

$$\mathbb{Y}_i = span\left(ImP_{\mathbb{Z}_i}F^{(i)}(x_0)\,[\cdot]^i\right), i = 2, ..., p-1, \tag{3.3}$$

sendo $\mathbb{Z}_i$, $i = 2, ..., p$, o subespaço complementar para $\mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_{i-1}$ com respeito a $\mathbb{R}^m$ e

$$P_{\mathbb{Z}_i} : \mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Y}_{i-1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_i \longrightarrow \mathbb{Z}_i$$

é a projeção definida como

$$P_{\mathbb{Z}_i}(y) = z_i, i = 2, ..., p,$$

sendo $y = y_1 + ... + y_{i-1} + z_i$, $y_i \in \mathbb{Y}_i$ e $z_i \in \mathbb{Z}_i$. Finalmente, definimos $\mathbb{Y}_p = \mathbb{Z}_p$ e p é escolhido como o número natural mínimo para o qual (3.2) é válido.

Consideramos as seguintes aplicações

$$\phi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p, \tag{3.4}$$

definidas como

$$\phi_i(y) = P_i F(y),$$

sendo $y = y_1 + ... + y_i + ... + y_p$, $y_i \in \mathbb{Y}_i$ e

$$P_i : \mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Y}_p \longrightarrow \mathbb{Y}_i$$

a projeção $P_i(y) = y_i$.

Definição 3.2 ([5]). *Seja $h \in \mathbb{R}^n$ fixado. O operador linear $\Phi_p(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definido como*

$$\Phi_p(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1},$$

é denominado operador p-fator.

Observamos que para cada $i = 1,...,p$ e $h \in \mathbb{R}^n$ fixados, o fator $\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}$ é um operador linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{Y}_i$. Além disso, temos

$$\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} = P_i F^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}.$$

Particularmente, para $i = 1$, temos $\phi_1^{(1)}(x_0) = F^{(1)}(x_0)$.

Definição 3.3 ([5]). *Seja $F : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sendo $\mathbb{U}$ um aberto e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Dizemos que a aplicação F é p-regular em x_0 com respeito a $h \in \mathbb{R}^n$ se*

$$Im\Phi_p(x_0) = \mathbb{R}^m.$$

Além disso, dizemos que a aplicação F é p-regular em x_0 se F é p-regular com respeito a qualquer $h \neq 0$ no conjunto

$$\mathbb{H}_F(x_0) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n; \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^i = 0, i = 1,...,p \right\}.$$

Observamos que a p-regularidade definida acima generaliza o conceito de regularidade da Definição 3.1.

4 CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

Nesta seção nosso objetivo é estabelecermos condições necessárias e suficientes de otimalidade para a classe de problemas irregulares definidos como em (2.1). Para esse fim, necessitaremos do seguinte resultado auxiliar:

Lema 4.1. *Sejam $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que exista $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \setminus \{0\}$ de modo que F é p-regular em $x_0 \in \mathbb{M}$ com respeito a h. Seja $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $F^{(1)}(x_0)w = 0$. Então, existem $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e uma aplicação $y : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\|y(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$ e*

$$F(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + y(\alpha)) = 0. \tag{4.1}$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon = \alpha^{3/2}$, $\alpha > 0$, $\|w\| = 1$ e $F^{(1)}(x_0)w = 0$. Podemos encontrar $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \setminus \{0\}$, com norma suficientemente pequena e $\|h\| < 1$ de modo que $\sum_{i=2}^{p} C \left\| \phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1} \right\| < 1$, sendo $C = \left\| \left\{ \Phi_p(x_0) \right\}^{-1} \right\| < \infty$ em consequência do Lema 2.5. Definimos a multifunção $\Lambda : \mathbb{B}_\varepsilon(0) \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ por

$$\Lambda(y) = y - \left\{ \Phi_p(x_0) \right\}^{-1} F(x_0 + \alpha^{3/2} w + \alpha h + y),$$

sendo $\Phi_p(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ o operador p-fator da Definição 3.2.

A seguir mostraremos que a multifunção Λ atende às hipóteses do Princípio da Contração para Multifunções (Teorema 2.2) e, portanto, admite um ponto fixo – logo se verifica a equação (4.1). De fato, seja $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$, logo da sobrejetividade do operador $\Phi_p(x_0)$, existe $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Phi_p(x_0)\widehat{x} = F(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + x),$$

isto é,

$$\widehat{x} \in \{\Phi_p(x_0)\}^{-1} F(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + x).$$

Logo, $x - \widehat{x} \in \Lambda(x)$ e, portanto, $\Lambda(x) \neq \emptyset$.

Agora verificaremos que $\Lambda(x)$ é fechado para todo $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$. Com efeito, consideramos uma sequência $(z_n) \subseteq \Lambda(x)$ tal que $z_n \to z$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, temos

$$z_n = x - q_n,$$

sendo

$$q_n \in \left\{\Phi_p(x_0)\right\}^{-1} F(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + x),$$

ou equivalentemente,

$$\Phi_p(x_0)(x - z_n) = F(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + x). \tag{4.2}$$

Fazendo $n \to \infty$ na igualdade (4.2), temos

$$\Phi_p(x_0)(x - z) = F(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + x),$$

isto é,

$$x - z \in \left\{\Phi_p(x_0)\right\}^{-1} F(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + x)$$

e assim, $z = x - (x - z) \in \Lambda(x)$. Logo, $\Lambda(x)$ é fechado.

Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{B}_\varepsilon(0)$. Aplicando o Lema 2.2 combinado com os Lemas 2.3 e 2.4, temos

$$\mathscr{H}(\Lambda(y_1), \Lambda(y_2)) = \inf\{\|z_1 - z_2\|; z_i \in \Lambda(y_i), i = 1, 2\},$$

sendo $z_i = y_i - x_i$ e x_i tal que $\Phi_p(x_0)x_i = F(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + y_i)$.

Agora fazendo $w_i = F(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + y_i)$, $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(\Lambda(y_1), \Lambda(y_2)) &= \inf\left\{\|z_1 - z_2\|; \Phi_p(x_0)(y_i - z_i) = w_i, i = 1, 2\right\} \\
&= \inf\left\{\|z_1 - z_2\|; \Phi_p(x_0)(z_1 - z_2) = \Phi_p(x_0)(y_1 - y_2) + w_2 - w_1\right\} \\
&\leq \left\|\left\{\Phi_p(x_0)\right\}^{-1}\right\| \left\|w_1 - w_2 - \Phi_p(x_0)(y_1 - y_2)\right\| \qquad (4.3) \\
&\leq C \sup_{t \in [0,1]} \left\|\widehat{\Phi}(t, \alpha, y_1, y_2, h)\right\| \|y_1 - y_2\|, \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

sendo

$$\widehat{\Phi}(t, \alpha, y_1, y_2, h) = F^{(1)}(x_0 + \alpha^{3/2}w + \alpha h + y_2 + t(y_2 - y_1)) - \Phi_p(x_0).$$

Além disso, as desigualdades (4.3) e (4.4) foram obtidas do Lema 2.5 e do Teorema 2.1, respectivamente.

Por expansão de Taylor de $F^{(1)}$, temos

$$F^{(1)}(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}w+y_2+t(y_2-y_1)) =$$

$$= F^{(1)}(x_0)+F^{(2)}(x_0)[\alpha h+\alpha^{3/2}w+y_2+t(y_2-y_1)]+o(\alpha).$$

Desta forma, para todo $t\in[0,1]$, obtemos

$$\left\|\widehat{\Phi}(t,\alpha,y_1,y_2,h)\right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\|F^{(2)}(x_0)[\alpha h+\alpha^{3/2}w+y_2+t(y_2-y_1)]-\sum_{i=2}^{p}\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}+o(\alpha)\right\| \\
&\leq \left\|F^{(2)}(x_0)[\alpha h+\alpha^{3/2}w+y_2+t(y_2-y_1)]\right\|+\sum_{i=2}^{p}\left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\|+o(\alpha) \\
&\leq \left\|F^{(2)}(x_0)\right\|\left\|[\alpha h+\alpha^{3/2}w+y_2+t(y_2-y_1)]\right\|+\sum_{i=2}^{p}\left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\|+o(\alpha) \\
&< (\alpha+3\alpha^{3/2})\left\|F^{(2)}(x_0)\right\|+\sum_{i=2}^{p}\left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\|+o(\alpha).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\|\widehat{\Phi}(t,\alpha,y_1,y_2,h)\right\| < (\alpha+3\alpha^{3/2})\left\|F^{(2)}(x_0)\right\|+\sum_{i=2}^{p}\left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\|+o(\alpha). \tag{4.5}$$

Por outro lado,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(\alpha)-(\alpha+3\alpha^{3/2})\left\|F^{(2)}(x_0)\right\|}{\alpha} = -\left\|F^{(2)}(x_0)\right\| < 0.$$

Logo, para $\alpha>0$ suficientemente pequeno, temos

$$o(\alpha) < (\alpha+3\alpha^{3/2})\left\|F^{(2)}(x_0)\right\|$$

e por (4.5), obtemos

$$\left\|\widehat{\Phi}(t,\alpha,y_1,y_2,h)\right\| < 2(\alpha+3\alpha^{3/2})\left\|F^{(2)}(x_0)\right\|+\sum_{i=2}^{p}\left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\|. \tag{4.6}$$

Em virtude das desigualdades (4.4) e (4.6), temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(\Lambda(y_1),\Lambda(y_2)) &\leq C\sup_{t\in[0,1]}\left\|\widehat{\Phi}(t,\alpha,y_1,y_2,h)\right\|\|y_1-y_2\| \\
&\leq \theta(\alpha)\|y_1-y_2\|,
\end{aligned}$$

sendo

$$\theta(\alpha) = C\left(2(\alpha+3\alpha^{3/2})\left\|F^{(2)}(x_0)\right\| + \sum_{i=2}^{p}\left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\|\right).$$

Como

$$\lim_{\alpha\to 0}\theta(\alpha) = \sum_{i=2}^{p} C\left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\| < 1,$$

logo podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que Φ é uma contração.

Denotamos por $d(0,\Lambda(0))$ a distância entre 0 e $\Lambda(0)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} d(0,\Lambda(0)) &= \inf\{\|x\|; x\in\Lambda(0)\} \\ &= \inf\left\{\|x\|; \Phi_p(x_0)x = F(x_0+\alpha h+\alpha^{3/2}w)\right\} \\ &\le \left\|\left\{\Phi_p(x_0)\right\}^{-1}\right\| \left\|F(x_0)+\alpha F^{(1)}(x_0)h+\alpha^{3/2}F^{(1)}(x_0)w+o(\alpha^{3/2})\right\| \\ &= o(\alpha^{3/2}), \end{aligned} \tag{4.7}$$

sendo que a igualdade (4.7) é decorrente dos fatos que $\left\|\left\{\Phi_p(x_0)\right\}^{-1}\right\| < \infty$, $x_0 \in \mathbb{M}$, $h \in \mathbb{H}_F(x_0)$ e $F^{(1)}(x_0)w = 0$. Por fim, temos

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d(0,\Lambda(0)) - (1-\theta(\alpha))\,\alpha^{3/2}}{\alpha^{3/2}} = -1 + \sum_{i=2}^{p} C\left\|\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right\| < 0.$$

Logo, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$d(0,\Lambda(0)) < (1-\theta(\alpha))\,\alpha^{3/2}.$$

Dessa forma, de acordo com o Teorema 2.2, existem $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e uma aplicação $y(\alpha) : (0,\alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$y(\alpha) \in \Lambda(y(\alpha)),$$

isto é,

$$F(x_0+\alpha^{3/2}w+\alpha h+y(\alpha)) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|y(\alpha)\| &\le \frac{2}{1-\theta(\alpha)}d(0,\Lambda(0)) \\ &= o(\alpha^{3/2}). \end{aligned}$$

□

A função Lagrangeana usual admite a seguinte generalização:

Definição 4.1. *A função Lagrangeana p-fator*

$$\mathscr{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell_+ \times \mathbb{R}^{pn} \longrightarrow \mathbb{R}$$

do problema (2.1) *com respeito a* $h \in \mathbb{R}^n$ *associada ao operador p-fator da Definição* 3.2 *é*

$$\mathscr{L}(x,h,\theta,\lambda) = \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k(x) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(i-1)}(x)\,[h]^{i-1}\,\lambda_i,$$

sendo $\theta = \theta(h)$*,* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ *e* $\lambda_i = \lambda_i(h), i = 1, ..., p.$ A Lagrangeana p-fator reduz-se a Lagrangeana usual quando $p = 1$.

No próximo resultado mostraremos a insolubilidade de um certo sistema, fato fundamental para provarmos as condições necessárias de otimalidade, no sentido da eficência fraca, para o problema (2.1).

Teorema 4.1. *Sejam* x_0 *uma solução local fracamente eficiente do problema* (2.1)*,* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ *e* $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$*. Suponhamos que exista* $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ *tal que* F *é p- regular em* x_0 *com respeito à* h *e* $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$*,* $k \in \mathbb{K}$*. Então o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_k^{(1)}(x_0)d & < & 0, k \in \mathbb{K} \\ \phi_i^{(i)}(x_0)\,[h]^{i-1}\,d & = & 0, i = 1, ..., p \end{array}\right. \tag{4.8}$$

não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Suponhamos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema (4.8). Da hipótese de p-regularidade de F em x_0 com respeito a $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ e, em virtude do Lema 4.1, é possível encontrarmos $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e uma curva $x : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\|x(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$,

$$x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} d + y(\alpha) \text{ e } F(x(\alpha)) = 0.$$

Por expansão de Taylor de f_k, para cada $k \in \mathbb{K}$ fixado e das desigualdades $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$ e $f_k^{(1)}(x_0)d < 0$, $k \in \mathbb{K}$, podemos encontrar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f_k(x(\alpha)) = f_k(x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} d + y(\alpha)) < f_k(x_0).$$

Isto contradiz a eficiência fraca local do problema (2.1) e, portanto, o sistema (4.8) não tem solução. □

Enfim, provaremos condições necessárias de otimalidade para o problema (2.1).

Teorema 4.2. *Sejam* x_0 *uma solução local fracamente eficiente do problema* (2.1)*,* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ *e* $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$*. Suponhamos que exista* $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ *tal que* F *é p- regular em* x_0 *com respeito* *a h e $f_k^{(1)}(x_0)h \leq 0$, $k \in \mathbb{K}$. Então, existem $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}_+^{\ell} \backslash \{0\}$ e $\lambda_i = \lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p$, tais que*

$$\mathscr{L}_x^{(1)}(x_0, h, \theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \left(\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right)^* \lambda_i = 0,$$

sendo $\mathscr{L}_x^{(1)}$ a derivada de primeira ordem de Lagrangeana p-fator com respeito à variável x e $\left(\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right)^*$, $i = 1, ..., p$, denota o operador linear adjunto.

Demonstração. De acordo com o Teorema 4.1, o sistema (4.8) não tem solução $d \in \mathbb{R}^n$. Então, pelo Teorema de Alternativa de Motzkin [12], existem $\theta \in \mathbb{R}_+^{\ell} \backslash \{0\}$ e $\lambda_i \in \mathbb{Y}_i$ tais que

$$\mathscr{L}_x^{(1)}(x_0, h, \theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \left(\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right)^* \lambda_i = 0,$$

o que completa a prova. □

Exemplo 1. *Segue um exemplo para ilustrarmos o teorema anterior.*

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar } f(x) = \begin{bmatrix} x_4 - x_1 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} \\ &\textit{Sujeito a } x \in \mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R}^4; x_4 - x_1 - x_2^2 - x_3^2 = 0, -x_4 x_1 + x_2 x_3 = 0\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Neste caso $f_1(x) = x_4 - x_1$, $f_2(x) = x_2 + x_3$, $F_1(x) = x_4 - x_1 - x_2^2 - x_3^2$ e $F_2(x) = -x_4 x_1 + x_2 x_3$. É fácil verificarmos que $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução fracamemte eficiente do problema (4.9). Além disto, notamos que

$$F^{(1)}(x_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F^{(2)}(x_0)h = \begin{bmatrix} 0 & -2h_2 & -2h_3 & 0 \\ -h_4 & h_3 & h_2 & -h_1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que $ImF^{(1)}(x_0) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2$, isto é, F é irregular em x_0. Por outro lado, fazendo $\mathbb{Y}_1 = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\mathbb{Y}_2 = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, logo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Y}_2$. Desta forma, da projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{Y}_2$, temos

$$PF^{(2)}(x_0)h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_4 & h_3 & h_2 & -h_1 \end{bmatrix} \text{ e } PF^{(2)}(x_0)[h]^2 \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2h_1 h_4 + 2h_2 h_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, o operador 2-fator $\Phi_2(x_0) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definido como

$$\Phi_2(x_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -h_4 & h_3 & h_2 & -h_1 \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$\mathbb{H}_F(x_0) = \left\{ h \in \mathbb{R}^4; h_1 = h_4, h_1 h_4 = h_2 h_3 \right\}.$$

Observamos que para todo $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \backslash \{0\}$, temos $Im\Phi_2(x_0) = \mathbb{R}^2$, ou seja, F é 2-regular em x_0. Particularmente, para $h = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_F(x_0)$, obtemos

$$f_1^{(1)}(x_0)h = 0,\ f_2^{(1)}(x_0)h = -2 \text{ e } PF^{(2)}(x_0)h \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Y}_1$ e $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Y}_2$. Logo, a igualdade

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_1 f_1^{(1)}(x_0) + \theta_2 f_2^{(1)}(x_0) + \left(F^{(1)}(x_0)\right)^* \lambda + \left(PF^{(2)}(x_0)h\right)^* \beta \\ &= \theta_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se cumpre para $\theta_1 = -\lambda_1$, com $\lambda_1 < 0$, $\theta_2 = 0$ e $\beta_2 = 0$.

Para finalizarmos esta seção, provaremos condições suficientes, no sentido da eficiência fraca e da eficiência própria, para os problemas irregulares definidos como em (2.1). Para isso, enunciamos o seguinte lema:

Lema 4.2 ([4]). *Seja $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{V})$, sendo $\mathbb{V}$ uma vizinhança de x_0 e suponhamos que F é p-regular em x_0. Então, para todo $x \in \mathbb{V}$, temos*

$$x = x_0 + \alpha h + y(\alpha),$$

sendo $\|y(\alpha)\| \leq C.\alpha^2$, $|\alpha| = \|x - x_0\| + o(\|x - x_0\|)$, $h \in \mathbb{H}_F(x_0)$, $\|h\| = 1$ e $C > 0$.

Teorema 4.3. *Sejam $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$ e $F \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathbb{U})$. Suponhamos que F é p- regular em x_0 e existam $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}_+^\ell \backslash \{0\}$ e $\lambda_i = \lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i, i = 1, ..., p$ tais que*

$$\mathscr{L}_x^{(1)}(x_0, h, \theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \left[\phi_i^{(i)}(x_0)[h]^{i-1}\right]^* \lambda_i = 0. \tag{4.10}$$

Se existem multiplicadores $\widehat{\lambda}_i = \dfrac{2}{i(i+1)}\lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i, i = 1,...,p$, *tais que*

$$\mathscr{L}_{xx}^{(2)}\left(x_0, h, \theta, \widehat{\lambda}\right)[h]^2 > 0,$$

para todo $h \in \mathbb{H}_F(x_0)$, *então* x_0 *é uma solução local fracamente eficiente do problema* (2.1). *(Aqui,* $\mathscr{L}_{xx}^{(2)}$ *denota a derivada de segunda ordem da Lagrangeana p-fator com respeito à variável x).*

Demonstração. Sejam $\theta \in \mathbb{R}_+^{\ell}\backslash\{0\}$ assumido na hipótese e $g(x) = \sum_{k=1}^{\ell}\theta_k f_k(x)$. Mostraremos que x_0 é um minimizador local do problema

$$\begin{array}{l}\text{Minimizar } g(x)\\ \text{Sujeito a } F(x)=0.\end{array} \tag{4.11}$$

De fato, sejam $\mathbb{V}$ uma vizinhança de x_0 e $x \in \mathbb{V}$ tal que $F(x) = 0$. Em virtude do Lema 4.2, podemos escrever a variável x da seguinte forma

$$x = x_0 + \alpha h + y(\alpha),$$

sendo $\|y(\alpha)\| \leq C.\alpha^2$, $|\alpha| = \|x - x_0\| + o(\|x - x_0\|)$, $h \in \mathbb{H}_F(x_0)$, $\|h\| = 1$ e $C > 0$.

Sejam $\lambda_i = \lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i, i = 1,...,p$ satisfazendo (4.10) e $\alpha \neq 0$. Desta forma, temos

$$\begin{array}{rcl}
g(x) - g(x_0) & = & g(x) - g(x_0) + \lambda_1\phi_1(x) + \dfrac{\lambda_2\phi_2(x)}{\alpha} + ... + \dfrac{\lambda_p\phi_p(x)}{\alpha^{p-1}}\\
& = & g^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)] + \dfrac{g^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2} + o(\alpha^2)\\
& + & \lambda_1 F(x_0 + \alpha h + y(\alpha)) + \dfrac{\lambda_2 P_2 F(x_0 + \alpha h + y(\alpha))}{\alpha} + \\
& + & ... + \dfrac{\lambda_p P_p F(x_0 + \alpha h + y(\alpha))}{\alpha^{p-1}}\\
& = & g^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)] + \dfrac{g^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2} + o(\alpha^2)\\
& + & \lambda_1\left(F^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)] + \dfrac{F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2}\right)\\
& + & \lambda_2 P_2\left(\dfrac{F^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]}{\alpha} + ... + \dfrac{F^{(3)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^3}{6\alpha}\right)\\
& \vdots & \\
& + & \lambda_p P_p\left(\dfrac{F^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]}{\alpha^{p-1}} + ... + \dfrac{F^{(p+1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^{p+1}}{(p+1)!\alpha^{p-1}}\right),
\end{array}$$

sendo P_i, $i = 1,...,p$ as projeções definidas como em (3.4). Além disto, como $P_i F^{(j)}(x_0) = 0$, para $i > j$, segue que

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= g^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)] + \frac{g^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2} + o(\alpha^2) \\ &+ \lambda_1 \left(F^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)] + \frac{F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2} \right) \\ &+ \lambda_2 P_2 \left(\frac{F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2\alpha} + \frac{F^{(3)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^3}{6\alpha} \right) \\ &\vdots \\ &+ \lambda_p P_p \left(\frac{F^{(p)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^p}{p!\alpha^{p-1}} + \frac{F^{(p+1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^{p+1}}{(p+1)!\alpha^{p-1}} \right). \end{aligned}$$

Agora, consideramos

$$\begin{aligned} A_1 &= g^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)] + \lambda_1 F^{(1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)] \\ &+ \lambda_2 P_2 \frac{F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2\alpha} + ... + \lambda_p P_p \frac{F^{(p)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^p}{p!\alpha^{p-1}} + o(\alpha^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{g^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2} + \lambda_1 \frac{F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2} \\ &+ \lambda_2 P_2 \frac{F^{(3)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^3}{6\alpha} + ... + \lambda_p P_p \frac{F^{(p+1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^{p+1}}{(p+1)!\alpha^{p-1}}. \end{aligned}$$

Pela definição de $\mathscr{L}_x^{(1)}(x_0, h, \theta, \lambda)$ e $y(\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(1)}(x_0) + \left(F^{(1)}(x_0)\right)^* \lambda_1 + \left(P_2 \frac{F^{(2)}(x_0)[h]}{2} \right)^* \lambda_2 \right) (\alpha h + y(\alpha)) \\ &+ ... + \left(P_p \frac{F^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}}{p!} \right)^* \lambda_p (\alpha h + y(\alpha)) + o(\alpha^2) \\ &= \mathscr{L}_x^{(1)}(x_0, h, \theta, \lambda)(\alpha h + y(\alpha)) + o(\alpha^2) = o(\alpha^2). \end{aligned}$$

Também, temos

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\sum_{k=1}^{\ell} \theta_k f_k^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2} + \lambda_1 \frac{F^{(2)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^2}{2} \\ &+ \lambda_2 P_2 \frac{F^{(3)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^3}{6\alpha} + ... + \lambda_p P_p \frac{F^{(p+1)}(x_0)[\alpha h + y(\alpha)]^{p+1}}{(p+1)!\alpha^{p-1}} \\ &= \mathscr{L}_{xx}^{(2)}\left(x_0, h, \theta, \widehat{\lambda}\right)[\alpha h]^2 + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

Finalmente, da hipótese $\mathscr{L}_{xx}^{(2)}\left(x_0,h,\theta,\widehat{\lambda}\right)[h]^2 > 0$, para todo $h \in \mathbb{H}_F(x_0)$ e para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$g(x)-g(x_0) \quad = \quad A_1+A_2 \geq \mathscr{L}_{xx}^{(2)}\left(x_0,h,\theta,\widehat{\lambda}\right)[\alpha h]^2+o(\alpha^2)>0$$

para todo $x \in \mathbb{V}$. Logo, x_0 é um minimizador local estrito do problema (4.11). Assim, em virtude do item (i) do Lema 2.1, x_0 é uma solução local fracamente eficiente do problema (2.1). □

Para ilustramos o teorema anterior, mostraremos que o x_0 do Exemplo 1 é de fato uma solução local fracamente eficiente do problema (4.9). Primeiramente, observamos que para todo $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$ a igualdade

$$\theta_1 f_1^{(1)}(x_0)+\theta_2 f_2^{(1)}(x_0)+\left(F^{(1)}(x_0)\right)^*\lambda+\left(PF^{(2)}(x_0)h\right)^*\beta=0,$$

é verificada para $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Y}_1$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Y}_2$, $\theta_1 = -\lambda_1 > 0$ e $\theta_2 = \beta_2 = 0$. Agora é fácil verificarmos que

$$\mathscr{L}_{xx}^{(2)}\left(x_0,h,\theta,\widehat{\lambda}\right)[h]=\lambda_1 F_1^{(2)}(x_0)[h]=-2\lambda_1\left(h_2^2+h_3^2\right)>0$$

para todo $h \in \mathbb{H}_F(x_0)\backslash\{0\}$. Pelo Teorema 4.3, x_0 é uma solução local fracamente eficiente do problema (4.9).

Corolário 4.3.1. *Além das hipóteses do Teorema* 4.3, *suponha que exista* $\theta = \theta(h) \in \mathbb{R}_+^\ell\backslash\{0\}$, *com* $\theta_k > 0$ *satisfazendo* (4.10). *Então* x_0 *é uma solução local propriamente eficiente do problema* (2.1).

Demonstração. A demonstração segue as mesmas linhas da demonstração anterior, todavia, da hipótese que $\theta_k > 0$, $k \in \mathbb{K}$ mais o item (ii) do Lema 2.1, concluímos que x_0 é uma solução local propriamente eficiente do problema (2.1). □

5 CONCLUSÕES

Até o momento, existe pouca literatura referente às condições de otimalidade para problemas multiobjetivos irregulares. Nosso artigo preenche esta lacuna e generaliza os resultados de [4] para problemas escalares ao caso multiobjetivo. Baseando-nos na Teoria da p-regularidade obtivemos condições necessárias e suficientes para problemas irregulares multiobjetivos com restrições de igualdade. Apresentamos os resultados em dimensão finita por clareza de exposição. Num trabalho futuro estenderemos as ideias a espaços de Banach e adicionaremos restrições de desigualdade ver [15].

ABSTRACT. In this article, we consider problems of Multiobjective optimization with equality constraints given in the form $F(x) = 0$, where $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. We will consider the case where the problem constraints are irregular, that is, when the condition of qualification of linear independence (LICQ) is not satisfied in the solution of the optimization problem. We obtain necessary and sufficient conditions of optimality in the sense of the weak efficiency and of the proper efficiency for irregular multiobjective problems.

Keywords: conditions of optimality, irregularity, p-regularity.

REFERÊNCIAS

[1] A. Arutyunov. “Optimality Conditions: Abnormal and Degenerate Problems”, volume 1 of *Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (200).

[2] A.V. Arutyunov, E.R. Avakov & A.F. Izmailov. Necessary optimality conditions for constrained optimization problems under relaxed constraint qualifications. *Mathematical Programming*, **114**(1) (2008), 37–68.

[3] E.R. Avakov, A.V. Arutyunov & A.F. Izmailov. Necessary conditions for an extremum in a mathematical programming problem. *Proceedings of the Steklov institute of mathematics*, **256**(1) (2007), 2–25.

[4] O.A. Brezhneva & A.A. Tretyakov. Optimality conditions for degenerate extremum problems with equality constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **42**(2) (2003), 729–745.

[5] O.A. Brezhneva & A.A. Tretyakov. The p-th order optimality conditions for degenerate inequality constrained optimization problems. *Pure Appl. Math*, **1**(2) (2010), 198–223.

[6] F.J. Gould & J.W. Tolle. A necessary and sufficient qualification for constrained optimization. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **20**(2) (1971), 164–172.

[7] B. Hernández-Jiménez, M. Rojas-Medar, R. Osuna-Gómez & A. Beato-Moreno. Generalized convexity in non-regular programming problems with inequality-type constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **352**(2) (2009), 604–613.

[8] B. Hernández-Jiménez, M.A. Rojas-Medar, R. Osuna-Gómez & A. Rufián-Lizana. Characterization of weakly efficient solutions for non-regular multiobjective programming problems with inequality-type constraints. *Journal of Convex Analysis*, **18** (2011), 749–768.

[9] A.D. Ioffe & V. Tihomirov. “Theory of extremal problems”, volume 6 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North - Holland, Amsterdam (1979).

[10] J. Jahn. “Vector optimization”. Springer, Berlim (2009).

[11] E.L. Lima. “Álgebra linear”. Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro (2014).

[12] O. Mangasarian. “Nonlinear programming”, volume 10 of *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia (1994).

[13] H. Moulin & F. Fogelman-Soulie. “La convexite dans les mathematiques de la decision”. Hermann, Paris (1979).

[14] V. Pareto. “Cours d’economie politique”, volume 1. Librairie Droz, Genebra (1964).

[15] L.B. Santos, A.S. Melo & M.A. Rojas-Medar. Optimality conditions for degenerate multiobjective problem with equality and inequality constraint. *Preprint*, (2019).